

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

*Электронный учебно-методический комплекс
для студентов физико-математического факультета
специальностей «Прикладная математика»,
«Экономическая кибернетика»*

*Часть 1.
Высказывания и предикаты.
Комбинаторный анализ.
Булевы функции.*



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



1

Заккрыть

Автор:

Будько Александр Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и технологий программирования, доцент.

Рецензенты:

Кафедра информатики и прикладной математики Брестского государственного технического университета

Грицук Дмитрий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



2

Заккрыть

Знакомство с ЭУМК

Электронный учебно-методический комплекс (далее – ЭУМК) содержит курс лекций (теоретическая часть) и упражнений (практическая часть), контрольные тесты по разделам «Высказывания и предикаты», «Комбинаторный анализ», «Булевы функции» дисциплины «Дискретная математика и математическая логика». Наличие большого количества примеров и разобранных решений задач поможет в самостоятельном изучении курса дискретной математики.

ЭУМК не предъявляет никаких специальных требований к системе. В правой части экрана находится навигационная панель. Опишем предназначение кнопок на навигационной панели:

- кнопка «Начало» предназначена для быстрого перехода на титульную страницу ЭУМК;
- кнопка «Содержание» предназначена для быстрого перехода к разделу «Содержание» ЭУМК;
- кнопка «Приложение» предназначена для быстрого перехода к разделу «Приложение», в котором приводятся основные определения, формулы, теоремы и список вопросов к экзамену;
- кнопка «Назад» предназначена для возврата на ту страницу ЭУМК, с которой был совершен переход на любую другую страницу с помощью гиперссылки или кнопки навигационной панели;
- кнопка «Заккрыть» позволяет закончить работу с ЭУМК.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



3

Заккрыть

Кроме указанных выше кнопок навигационная панель содержит кнопки, позволяющие «листать» страницы ЭУМК, а также кнопки быстрого перехода на первую и последнюю страницы (в полноэкранном режиме страницы ЭУМК можно «листать» нажимая клавиши «пробел», «влево», «вправо» на клавиатуре, или с помощью колесика мыши). На навигационной панели указывается номер страницы, которая открыта в момент просмотра ЭУМК. Нажав на отображаемый номер страницы курсором мыши, можно вызвать окно, позволяющее совершить переход на любую страницу ЭУМК.

Контрольные тесты, включенные в данный ЭУМК, предназначены исключительно для самоконтроля студентов и носят вспомогательный характер.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



4

Закрыть

Введение	10
Программный материал	14
Содержание учебного материала	14
Примерный тематический план	17
1 Алгебра высказываний	21
1.1 Теоретическая часть	21
1.1.1 Высказывания. Операции над высказываниями. . .	21
1.1.2 Формулы.	29
1.1.3 Равносильные формулы.	34
1.1.4 Тавтологии.	39
1.1.5 Логические следствия	44
1.2 Практическая часть	54
1.2.1 Высказывания. Операции над высказываниями . . .	54
1.2.2 Формулы.	69
1.2.3 Равносильные формулы	72
1.2.4 Тавтологии	77
1.2.5 Логическое следствие.	81
1.2.6 Логические задачи.	88
1.2.7 Теоремы	90



Начало

Оглавление

Приложение

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Закреть

1.3	Контрольные тесты	95
2	Логика предикатов	96
2.1	Теоретическая часть	96
2.1.1	Предикаты	96
2.1.2	Кванторы	103
2.1.3	Формулы	106
2.1.4	Равносильность	110
2.1.5	Нормальные формы	113
2.1.6	Проблема разрешения.	116
2.1.7	Применение языка логики предикатов для записи математических предложений.	117
2.2	Практическая часть	120
2.2.1	Предикаты.	120
2.2.2	Кванторы.	122
2.2.3	Формулы логики предикатов.	126
2.2.4	Равносильность.	128
2.2.5	Выполнимость формул.	131
2.2.6	Нормальные формулы	137
2.2.7	Запись предложений с помощью операций логики предикатов.	140
2.3	Контрольные тесты	143



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



6

Закрыть

3 Комбинаторный анализ	144
3.1 Теоретическая часть	144
3.1.1 Правила суммы, произведения	144
3.1.2 Выборки. Размещения	148
3.1.3 Сочетания	156
3.1.4 Разбиения	160
3.1.5 Формула бинома Ньютона	162
3.1.6 Полиномиальная формула	166
3.1.7 Формула включений и исключений	168
3.1.8 Задача о беспорядках	172
3.1.9 Рекуррентные соотношения. Задача о кроликах	175
3.1.10 Решение рекуррентных соотношений	178
3.1.11 Производящие функции	183
3.1.12 Разбиения чисел	187
3.2 Практическая часть	191
3.2.1 Правила суммы, произведения	191
3.2.2 Выборки. Размещения. Сочетания	194
3.2.3 Разбиения	208
3.2.4 Формула бинома Ньютона. Полиномиальная формула	212
3.2.5 Формула включений и исключений. Задача о беспорядках	218
3.2.6 Рекуррентные соотношения. Решение рекуррентных соотношений	226



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



7

Закреть

3.2.7	Производящие функции	230
3.3	Контрольные тесты	234
4	Булевы функции	235
4.1	Теоретическая часть	235
4.1.1	Понятие булевой функции	235
4.1.2	Формулы	240
4.1.3	Равносильность	242
4.1.4	Нормальные формулы	244
4.1.5	Полнота и замкнутость	249
4.1.6	Важнейшие замкнутые классы	252
4.1.7	Свойства полноты и замкнутости	255
4.1.8	Представление о результатах Поста	258
4.2	Практическая часть	259
4.2.1	Функции. Равносильность	259
4.2.2	Специальные виды формул.	262
4.2.3	Полнота, замкнутость.	265
4.2.4	Замкнутые классы.	267
4.3	Контрольные тесты	270
5	Приложение	271
5.1	Терминологический словарь	271
5.1.1	Алгебра высказываний	271



Начало

Оглавление

Приложение

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

8

Закреть

5.1.2	Логика предикатов	274
5.1.3	Комбинаторный анализ	278
5.1.4	Булевы функции	282
5.2	Основные формулы комбинаторики	286
5.3	Список важнейших равносильностей	290
5.3.1	Список важнейших равносильностей логики высказы- ваний	290
5.3.2	Список важнейших равносильностей логики предикатов	291

Литература		292
-------------------	--	------------



Начало

Оглавление

Приложение

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Закрыть



Введение

Учебно-методический комплекс (УМК) разработан в соответствии с требованиями образовательных стандартов ОСВО 1-31-03-06-2013, ОСВО 1-31 03 03-2013 на основе типовой учебной программы по учебной дисциплине «Дискретная математика и математическая логика» (20.06.2015, Рег. № ТД - G.516/тип.)

Цель УМК: обучение методам решения задач, характерных для дискретной математики, и соответствующему логико-комбинаторному стилю мышления, формирование у студентов представлений о важнейших классах дискретных структур, таких как графы, булевы функции, коды, алгоритмические модели.

Задачи УМК:

- ознакомление студентов с такими фундаментальными понятиями как логическая формула, предикат, множество, полнота, замкнутость, алгоритм;
- изучение подходов к описанию множеств и операций над ними, а также записи математических утверждений с помощью формул логики предикатов;

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

10

[Закреть](#)

- применение методов математической логики и теории множеств для решения задач перечислительной комбинаторики и теории графов;
- обучения методам сравнения и классификации массовых проблем и алгоритмов их сложности.

В результате изучения дисциплины студент должен

знать:

- основные операции теории множеств;
- основные логические операции и равносильности;
- классические комбинаторные объекты;
- элементарные булевы функции;
- основные понятия и факты теории графов;
- классические модели вычислений (машины Тьюринга и частично-рекурсивные функции);
- начальные сведения о классах сложности P и NP ;
- основные примеры кодов;

уметь:

- переводить предложения на формальный язык логики высказываний;
- применять логику предикатов для описания математических понятий;
- решать базовые комбинаторные задачи;
- строить специальные представления булевых функций;
- исследовать на полноту системы булевых функций;
- анализировать и строить конкретные грамматики;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



11

Заккрыть

- исследовать на изоморфизм простейшие графы, определять связность, двудольность и планарность графов;
- программировать на языке машин Тьюринга;
- определять принадлежность функций классам: примитивно-рекурсивных, частично-рекурсивных, общерекурсивных;

владеть:

- методами комбинаторного анализа и теории графов;
- методами исследований булевых функций;
- навыками программирования на языке машин Тьюринга.

В лекционном курсе рассматриваются вопросы, которые широко применяются практически во всех областях науки, техники и в экономике.

Программный материал отражает содержание, соответствующее типовой учебной программе по дисциплине «Дискретная математика и тематическая логика» и включает в себя соответственно само содержание учебного материала и примерный тематический план.

В первом разделе рассматривается алгебра высказываний и логика предикатов. Второй раздел посвящен изучению комбинаторного анализа. В третьем разделе рассматриваются булевы функции.

Отметим также, что в конце каждого раздела приведены тесты. Тесты позволяют студентам самостоятельно проверить усвоение теоретического материала.

Приложение включает в себя терминологический словарь и список важнейших равносильностей.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



12

Закреть

Учебная нагрузка по дисциплине «Дискретная математика и математическая логика» составляет:

	Общее количество часов по дисциплине	Всего аудиторных часов	в том числе		
			лекций	практических	лабораторных
2 семестр	104	68	34	-	34
3 семестр	158	68	34	-	34
Итого	262	136	68	-	68

Итоговая форма отчетности – зачет (2 семестр) и экзамен (3 семестр).



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



13

Закрыть

Программный материал

Содержание учебного материала

Раздел 1. Алгебра высказываний

Высказывания. Операции над высказываниям: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция, отрицание. Формулы логики высказываний. Таблицы истинности. Равносильность формул. Основные равносильности. Теоремы о равносильных формулах. Преобразование формул. Виды формул. Тавтологии. Противоречия. Выполнимые формулы. Логические следствия. Нахождение следствий из данных посылок. Применения языка логики высказываний (прямая и обратная теоремы, необходимые и достаточные условия, анализ рассуждений).

Раздел 2. Логика предикатов

Недостаточность логики высказываний для анализа рассуждений. Предикаты. Выполнимые, тождественно истинные, тождественно ложные предикаты. Логические операции над предикатами и их свойства. Кванторные операции над предикатами. Формулы. Интерпретация и классификация формул логики предикатов. Общезначимые формулы.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

14

[Закреть](#)

Равносильные формулы логики предикатов. Приведённая и нормальная формы для формул логики предикатов и их построения. Проблема разрешения для общезначимости и выполнимости формул логики предикатов (основные понятия). Применение логики предикатов для описания математических понятий.

Раздел 3. Комбинаторный анализ

Множества, способы задания множеств. Подмножества и их свойства. Операции над множествами. Декартовы произведения множеств. Основные теоретико-множественные тождества. Покрытия и разбиения множеств. Понятие отображения. Композиция отображений. Принцип Дирихле. Операции над бинарными отношениями. Типы бинарных отношений.

Основные правила комбинаторики (правило суммы, правило произведения). Выборки. Типы выборок. Размещения и сочетания с повторениями и без повторений. Свойства размещений и сочетаний. Бином Ньютона.

Полиномиальный коэффициент. Полиномиальная теорема. Разбиения множеств и чисел.

Формула включений и исключений. Применения формулы включений и исключений (задача о беспорядках, формула Эйлера). Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка с постоянными коэффициентами. Производящие функции. Операции над произво-

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

15

[Закрыть](#)

дящими функциями. Основные последовательности и связанные с ними производящие функции. Решение рекуррентных соотношений методом производящих функций.

Раздел 4. Булевы функции

Понятие булевой функции. Табличное задание булевых функций. Число булевых функций от n переменных. Элементарные булевы функции. Существенные и фиктивные переменные булевых функций. Двойственность. Принцип двойственности.

Представление булевых функций посредством формул. Равносильные формулы. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Совершенные нормальные формы. Представления в виде СДНФ и СКНФ. Алгоритмы построения СДНФ и СКНФ. Полином Жегалкина.

Замыкание. Замкнутые классы булевых функций. Понятие полной системы. Примеры полных систем булевых функций. Основные замкнутые классы и их свойства. Теорема Поста (критерий функциональной полноты). Понятие базиса. Теорема о максимальном числе функций в базисе. Предполные классы булевых функций. Функции k -значной логики (основные понятия).

Минимизация булевых функций в классе ДНФ. Типы ДНФ, связанных с задачей минимизации булевых функций (сокращенная, тупиковая и минимальная). Методы Квайна и Блейка минимизации булевых функций в классе ДНФ.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



16

Заккрыть

Примерный тематический план

№	Наименование раздела, темы	Всего часов	Лекции	Лабораторные
	Раздел 1. Алгебра высказываний	12	6	6
1.	Высказывания. Операции над высказываниям	4	2	2
2	Формулы логики высказываний. Таблицы истинности. Равносильность формул	4	2	2
3	Виды формул. Логические следствия.	4	2	2
	Раздел 2. Логика предикатов	12	6	6
4	Предикаты. Логические операции над предикатами и их свойства. Кванторные операции над предикатами.	4	2	2
5	Формулы. Классификация формул логики предикатов. Равносильные формулы логики предикатов	4	2	2



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



17

Закреть

6	Приведённая и нормальная формы для формул логики предикатов и их построения. Применение логики предикатов для описания математических понятий.	4	2	2
	Раздел 3. Комбинаторный анализ	24	12	12
7	Множества, способы задания множеств. Операции над множествами.. Покрытия и разбиения множеств. Принцип Дирихле.	4	2	2
8	Основные правила комбинаторики (правило суммы. правило произведения). Выборки. Типы выборок.	4	2	2
9	Размещения и сочетания с повторениями и без повторений. Бином Ньютона.	4	2	2



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



18

Закреть

10	Полиномиальный коэффициент. Полиномиальная теорема. Разбиения множеств и чисел.	4	2	2
11	Формула включений и исключений. Применения формулы включений и исключений (задача о беспорядках, формула Эйлера).	4	2	2
12	Линейные однородные рекуррентные соотношения. Производящие функции. Операции над производящими функциями. Решение рекуррентных соотношений методом производящих функций.	4	2	2
	Раздел 4. Булевы функции			
13	Понятие булевой функции. Табличное задание булевых функций. Элементарные булевы функции.	20	10	10
14	Двойственность. Принцип двойственности.	4	2	2



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



19

Заккрыть

15	Представление булевых функций посредством формул. Равносильные .	4	2	2
16	Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Представления в виде СДНФ и СКНФ. Алгоритмы построения СДНФ и СКНФ.	4	2	2
17	Замыкание. Замкнутые классы булевых функций. Понятие полной системы.	4	2	2
18	Минимизация булевых функций в классе ДНФ. Типы ДНФ, связанных с задачей минимизации булевых функций (сокращенная, тупиковая и минимальная).	4	2	2



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



20

Закреть

Глава 1

Алгебра высказываний

1.1 Теоретическая часть

1.1.1 Высказывания. Операции над высказываниями.

Понятие высказывания является начальным, неопределяемым понятием. Можно пояснить, что под высказыванием понимают повествовательное предложение, о котором можно вполне определенно сказать, что оно либо истинно, либо ложно. Это предложение может быть записано как на обычном «словесном» языке, так и на любом «специальном» языке (математическом, химическом и т.д.).

Примеры высказываний:

1. Каждый студент-бюджетник физико-математического факультета получает стипендию;
2. $2+3=5$;
3. $H + O_2 = HO_2$.

Первое из этих высказываний является ложным, второе – истинным, третье – ложным. Как следует из пояснения высказываниями не являются вопросительные, восклицательные, побудительные предложения, а также – определения. Но не всякое повествовательное предложение

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

21

[Заккрыть](#)

является высказыванием. Так нельзя отнести к высказываниям предложения такого вида: «Розы – самые красивые цветы», « $n + 3 \geq 7$ ». Действительно, одним людям больше нравятся розы, другим тюльпаны, а третьим – подснежники. Поэтому не может быть единого мнения о том, какие цветы являются самыми красивыми, то есть нет и не может быть единого мнения об истинности первого предложения. Истинность второго предложения также нельзя определить, так как неизвестно о каком n идет речь.

Всякое высказывание является либо истинным, либо ложным и не является одновременно тем и другим. Но не для всякого высказывания можно сразу определить его истинность. Более того, имеются высказывания, истинность которых еще не определена. Но все эти предложения считаются высказываниями, поскольку о каждом из них известно, что оно либо истинно, либо ложно и не является одновременно тем и другим. В качестве примера приведем такое предложение: «Автор этих строк проживёт не менее ста лет». Истинность этого высказывания еще не определена и будем надеяться определится не скоро.

Отметим, что логика высказываний не занимается выяснением того, почему то или иное высказывание является истинным (или ложным), а не наоборот. Это не входит в предмет логики высказываний. Не исследуется также и вопрос о смысловой содержательности высказываний. Высказывание рассматривается лишь как величина, принимающая одно из двух значений: истина или ложь. Эти значения обозначим соответ-

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

22

[Закреть](#)

ственно через 1 и 0. Сами высказывания будем обозначать большими прописными буквами латинского алфавита.

В обычной речи при помощи связок «и», «или», «если ..., то ...» и др. из данных высказываний образуют новые. Например, если даны два высказывания « π меньше 4»; « π больше 3», то из них при помощи связки «и» можно образовать новое высказывание « π больше 3 и π меньше 4».

Мы уже упомянули, что в логике высказываний каждое высказывание рассматривается лишь как величина, принимающая одно из двух значений: 0, 1. Поэтому для таких величин вполне естественно можно определить операции, соответствующее связкам «и», «или», «если ..., то ...», «... тогда и только тогда, когда ...», «не». Эти операции позволяют из данных высказываний получить новые.

Пусть даны два произвольных высказывания A , B , истинность которых неизвестна.

Определение 1.1. *Конъюнкцией* называют операцию, которая двум высказываниям A , B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $A \wedge B$. Высказывание $A \wedge B$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A, B истинны.

Запись « $A \wedge B$ » читают « A и B ». Соответственно A и B называют первым и вторым членом **конъюнкции** $A \wedge B$. Конъюнкцию $A \wedge B$ записывают иногда еще и в виде $A \cdot B$, AB , $A \& B$.

Пример 1.1. Если A есть высказывание « $3 < 7$ », а B – высказы-



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



23

Закреть

вание « 13 – четное число», то **конъюнкция** $A \wedge B$ этих высказываний « $3 < 7$ и 13 – четное число» является ложным высказывание, так как один из членов **конъюнкции** принимает значение «ложь».

Замечание 1.1. В арифметике операция и ее результат имеют разные названия («сложение» и «сумма», «вычитание» и «разность» и т.д.). В логике высказываний операция и ее результат имеют одинаковые названия. Поэтому результат операций **конъюнкции** – высказывание $A \wedge B$ называют **конъюнкцией**.

Определение 1.2. **Дизъюнкцией** называют операцию, которая двум высказываниям A, B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $A \vee B$. Высказывание $A \vee B$ ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A, B ложны.

Запись « $A \vee B$ » читают « A или B ». Соответственно A и B называют первым и вторым членом **дизъюнкции** $A \vee B$. Союз «или» в **дизъюнкции** имеет неразделительный смысл, так как **дизъюнкция** истинна, если истинен хотя бы один ее член. Разделительному союзу или соответствует операция, обозначаемая символом $\oplus$ и называемая сложением по модулю 2. Высказывание $A \oplus B$ истинно только тогда, когда истинно лишь одно высказывание A или B .

Пример 1.2. Высказывание A есть « 6 делится на 2 без остатка», высказывание B – «Париж – столица Англии». Тогда **дизъюнкция** « 6

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

24

[Закреть](#)

делится на 2 или Париж – столица Англии» является истинным высказыванием, так как первый член **дизъюнкции** принимает значения «истина».

Определение 1.3. *Импликацией* называют операцию, которая двум высказываниям A, B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $A \rightarrow B$. Высказывание $A \rightarrow B$ ложно лишь тогда, когда A – истинно, а B – ложно.

Запись « $A \rightarrow B$ » читают « A влечет B », «если A , то B », «из A следует B », « B только тогда, когда A », « B при условии, что A », « A имплицирует B ». A называют **посылкой** или условием **импликации** $A \rightarrow B$, а B – **заключением**. Отметим, что для **импликации** $A \rightarrow B$ встречаются также и другие обозначения $A \Rightarrow B, A \supset B$.

Из определения 2.3 вытекают следующие свойства:

1. **Импликация** с ложной **посылкой** всегда истинна.
2. **Импликация** с истинным **заключением** всегда истинна.

Эти свойства формулируют иногда и по-другому: "из ложного следует все что угодно" "истина следует из чего угодно".

Пример 1.3. Из высказываний «Скворцы живут на Северном полюсе» и « $3 > 2$ », которые обозначим соответственно через A и B , при



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



25

Закреть

помощи **импликации** образуем новое высказывание «Если скворцы живут на Северном полюсе, то $3 > 2$ ». Полученное высказывание $A \rightarrow B$ в силу свойства 1 будет истинно. **Посылка** A **импликации** $A \rightarrow B$ ложна.

Нас не должно смущать, что в рассмотренном примере оказались соединенными столь разные «вещи», как скворцы и отношение « $>$ ». Мы уже упоминали, что логика высказываний не рассматривает вопрос о смысловой содержательности высказываний, она рассматривает высказывания лишь как величины, принимающие значения 0, 1. Поэтому с этой точки зрения (а мы ее будем придерживаться на протяжении всего нашего курса) приведенный пример вполне корректен.

Определение 1.4. *Эквиваленцией* называют операцию, которая двум высказываниям A, B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $A \leftrightarrow B$. Высказывание $A \leftrightarrow B$ истинно лишь тогда, когда оба высказывания A, B истинны или оба ложны.

Запись $A \leftrightarrow B$ читают « A тогда и только тогда, когда B », « A эквивалентно B », « A в том и только в том случае, если B », « A необходимо и достаточно для B ». Эквиваленцию $A \leftrightarrow B$ записывают еще и в виде $A \Leftrightarrow B$, $A \sim B$, $A \equiv B$.

Пример 1.4. Пусть даны два высказывания: «Сумма внутренних углов треугольника равна 180° » и « $\pi < 4$ ». Обозначим эти высказывания соответственно через A и B и образуем **эквиваленцию** $A \leftrightarrow B$:

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

26

[Закреть](#)

«Сумма внутренних углов равна 180° тогда и только тогда, когда $\pi < 4$ ». Поскольку высказывания являются истинными, то и их **эквиваленция** также будет истинным высказыванием.

Заметим, что названия рассмотренных операций происходят от латинских слов:

conjunctio — соединение, союз, связь;

disjunctio — разделение, различие;

implicatio — тесно связаны, сплетение;

Эти операции можно определить и при помощи так называемых **таблиц истинности** (табл.1).

Таблица 1

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Определим последнюю рассматриваемую операцию - отрицание.

Определение 1.5. *Отрицанием* называют операцию, которая вы-



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



27

Закреть

сказыванию A ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $\bar{A}$. Высказывание $\bar{A}$ истинно лишь тогда, когда A ложно. Запись $\bar{A}$ читают «не A » или «неверно, что A ». Отрицание $\bar{A}$ записывают еще и в виде $\neg A$.

Пример 1.5. Если A есть высказывание «В параллелограмме противоположные стороны параллельны», то высказывание «Неверно, что в параллелограмме противоположные стороны параллельны» является отрицанием $\bar{A}$ и принимает значение ложь, поскольку A -истинно.

Замечание 1.2. Операции конъюнкцию и дизъюнкцию можно определить и для $n \geq 2$ высказываний. Высказывание $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ истинно лишь тогда, когда истинны все высказывания $A_1, A_2, \dots, A_n$, а высказывание $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ ложно лишь тогда, когда ложны все высказывания $A_1, A_2, \dots, A_n$.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

28

[Закрыть](#)

1.1.2 Формулы.

Мы уже видели, что применяя к высказываниям операции мы получаем новые, более сложные высказывания. В свою очередь к этим новым высказываниям вновь можно применять операции, в результате чего получаем еще более сложные высказывания и так далее. Все эти высказывания будут записаны в виде **формул**, которые являются основным объектом исследований.

Дадим строгое определение формулы.

Определение 1.6. 1. Всякая буква, обозначающая высказывание (конкретное или произвольное), является **формулой**.

2. Символы 0 и 1 являются **формулами**.

3. Если P – **формула**, то $\bar{P}$ – **формула**.

4. Если P и Q – **формулы**, то $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \leftrightarrow Q)$ – **формулы**.

5. **Формулами** являются только те выражения, которые можно получить при помощи п. 1-4.

Определение 1.7. **Формулы**, получаемые по пунктам 1, 2 называются элементарными, все остальные – неэлементарными или составными.

Пример 1.6. Приведем примеры **формул**: A , B , C , 1 , 0 , $(A \wedge B)$, $((A \wedge$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



29

Закрыть

$B) \rightarrow C), (A \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)))$. Здесь первые пять **формул** являются элементарными, оставшиеся три – неэлементарными.

Выражения $A \rightarrow B, (A \vee B) \rightarrow C, (A \leftrightarrow B$ не являются **формулами**, так как первые два из них не заключены в скобки, а у третьего отсутствует правая скобка.

Замечание 1.3. **Формулы**, получаемые по определению 2.6, содержат достаточно большое число скобок. Некоторые из них можно опустить, придерживаясь следующего правила. Операции по силе своего действия в порядке убывания, располагаются следующим образом —, $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Учитывая это, скобки опускают, таким образом, чтобы после их восстановления слева направо получить исходную **формулу**. Поясним сказанное на примерах. При этом вначале рассмотрим пример с восстановлением скобок, а затем с их опусканием.

Пример 1.7. . Восстановить скобки: $A \rightarrow B \rightarrow C \wedge A \wedge \overline{B \vee C}$.

Наименьшую область действия имеет операция **отрицания**. Но согласно п. 3 определения 2.6 та часть **формулы**, над которой имеется знак отрицания, во внешние скобки не заключаются. Поэтому скобок, соответствующих операции **отрицания** нет, и, следовательно, восстанавливать их не надо. Переходим к следующей операции - **конъюнкции**, и восстанавливаем скобки слева направо:

$$A \rightarrow B \rightarrow (C \wedge A) \wedge \overline{B \vee C},$$

$$A \rightarrow B \rightarrow ((C \wedge A) \wedge \overline{B \vee C})$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



30

Закреть

За **конъюнкцией** следует **дизъюнкция** и в рассматриваемой формуле имеется только один символ этой операции. Восстанавливаем скобки, соответствующие этой операции: $A \rightarrow B \rightarrow ((C \wedge A) \wedge (\overline{B \vee C}))$.

Имеются два символа операции **импликация**. Скобки, соответствующие этой операции, выставляются слева на право:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \wedge A) \wedge \overline{B \vee C}),$$
$$((A \rightarrow B) \rightarrow ((C \wedge A) \wedge \overline{B \vee C})).$$

Символов операции **эквиваленция** нет. Восстановление закончено.

Пример 1.8. Опустить возможно большее число скобок:

$$(((A \rightarrow B) \wedge B) \vee C)$$

Опустив две пары скобок получим **формулу**

$$(A \rightarrow B) \wedge B \vee C.$$

Оставшуюся пару скобок опустить нельзя, иначе после восстановления всех скобок получим **формулу**, отличную от исходной: $(A \rightarrow (B \wedge B) \vee C)$.

Рассмотрим еще такой вопрос, как определение истинностного значения **формулы**. Пусть к примеру имеется **формула** $(\overline{A \rightarrow B} \vee C) \wedge B$. Если А, В и С придать соответствующие значения 1, 0 и 1, то нетрудно убедиться, что вся **формула** примет значение 0. Таким образом при указанном наборе истинностных значений для А, В и С **формула** принимает значение 0. Найдем теперь истинностные значения **формулы** для всевозможных наборов значений А, В и С. При решении таких задач строят



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



31

Заккрыть

истинностные таблицы. При этом могут оказаться полезными следующие рекомендации:

1. Если **формула** состоит из n различных букв $A_1, A_2, \dots, A_n$. то число столбцов в таблице равно $n + m$, число строк равно - 2^n , где m - число всех операций в формуле.
2. В таблице вначале следует n столбцов, соответствующих буквам $A_1, A_2, \dots, A_n$. Половину первого столбца A_1 заполняют нулями, а вторую половину единицами. Во втором столбце A_2 первую четверть заполняют нулями, вторую - единицами, третью - нулями, четвертую - единицами. В третьем столбце поочередно нулями и единицами заполняются восьмые части, в четвертом шестнадцатые и т.д.
3. m столбцов, соответствующих операциям, заполняем в том порядке, в котором операции выполняются в формуле. Последний столбец и будет указывать значение формулы для всевозможных наборов значений букв, входящих в **формулу**.

Пример 1.9. Построим теперь истинностную таблицу для рассмотренной **формулы** $(\overline{A} \rightarrow \overline{B \vee C}) \wedge B$. Здесь $n = 3$, а $m = 4$. Поэтому в таблице будет $m + n = 7$ столбцов и $2^n = 8$ строк. Столбцы для A , B и C заполняются указанным в пункте 2 способом. Из всех операций формулы первой выполняется **импликация**. Поэтому первым бу-

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

32

[Закрыть](#)

дет столбец $A \rightarrow B$. Заполняем его согласно определения операции **импликации**. Второй выполняется операция **отрицание** и поэтому второй столбец $\overline{A \rightarrow B}$ заполняется путем отрицания значения первого. В третьем столбце $\overline{A \rightarrow B} \vee C$ записываются значения **дизъюнкции** соответствующих значений второго столбца и столбца C . Четвертый столбец $(\overline{A \rightarrow B} \vee C) \wedge B$ заполняется аналогично. Его значения и являются значениями рассматриваемой формулы (табл.2).

Таблица 2

A	B	C	$A \rightarrow B$	$\overline{A \rightarrow B}$	$\overline{A \rightarrow B} \vee C$	$(\overline{A \rightarrow B} \vee C) \wedge B$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



33

Закреть

1.1.3 Равносильные формулы.

Определение 1.8. Пусть даны две формулы P и Q , и пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ - совокупность всех различных букв, входящих хотя бы в одну из этих формул. Тогда формулы P и Q называется **равносильными**, если при любом наборе значений $X_1, X_2, \dots, X_n$ эти формулы принимают одинаковые истинностные значения.

Примеры **равносильных** формул: $\overline{\overline{X}}$ и X , $(X \wedge X)$ и X , $(X \vee Y)$ и $(Y \vee X)$, $(X \rightarrow Y)$ и $(\overline{X} \vee Y)$.

Как доказать **равносильность** формул? Как следует из определения необходимо сравнить истинностные значения формул на каждом наборе $X_1, X_2, \dots, X_n$ - совокупности всех различных букв, входящих в формулы. Такое сравнение удобно проводить по истинностной таблице формул. Докажем таким образом равносильность формул $P = \overline{A} \vee B$ и $Q = A \rightarrow B$ (табл. 3).



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



34

Закрыть

Таблица 3

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$	$A \rightarrow B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Сравнив столбцы значений формул $\bar{A} \vee B$, $A \rightarrow B$ мы видим, что на каждом наборе значений A , B формулы принимают одинаковые истинностные значения, то есть являются равносильными. Вместе с тем равносильность некоторых формул следует непосредственно из определений соответствующих операций. Это можно сказать, например, о формулах $(X \wedge Y)$ и $(Y \wedge X)$, $(X \vee Y)$ и $(Y \vee X)$

Замечание 1.4. Тот факт, что формулы P и Q *равносильны*, фиксируют в виде $P \equiv Q$. Знак $\equiv$ это знак *равносильности*, а саму запись $P \equiv Q$ читают « P *равносильна* Q ». Символ $\equiv$ не является символом операции и поэтому выражение $P \equiv Q$ не является формулой. Знак $\equiv$ выражает отношение.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



35

Закреть

Замечание 1.5. Легко видеть, что отношение *равносильности* обладает свойствами:

- *рефлексивности*, то есть $P \equiv P$, для любой формулы P ,
- *симметричности*, то есть, если $P \equiv Q$, то $Q \equiv P$, для любых формул P, Q ,
- *транзитивности*, то есть, если $P \equiv Q$ и $Q \equiv S$, то $P \equiv S$, для любых формул P, Q, S .

Следовательно, отношение равносильности является отношением эквивалентности. Оно разбивает множество всех формул на непересекающиеся классы эквивалентности. В каждом таком классе любые две формулы *равносильны* и никакие формулы из различных классов не являются равносильными.

Приведём *список важнейших равносильностей*:

1. $\overline{\overline{A}} \equiv A$
2. $A \wedge A \equiv A$
3. $A \vee A \equiv A$
4. $A \wedge B \equiv B \wedge A$
5. $A \vee B \equiv B \vee A$
6. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
7. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
8. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



36

Закрыть

$$9. A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$10. \overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$$

$$11. \overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$$

$$12. A \wedge \bar{A} \equiv 0$$

$$13. A \vee \bar{A} \equiv 1$$

$$14. A \wedge 1 \equiv A$$

$$15. A \vee 0 \equiv A$$

$$16. A \wedge 0 \equiv 0$$

$$17. A \vee 1 \equiv 1$$

$$18. A \wedge (A \vee B) \equiv A$$

$$19. A \vee (A \wedge B) \equiv A$$

$$20. A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$$

$$21. A \rightarrow B \equiv \bar{B} \rightarrow \bar{A}$$

$$22. A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Одну из этих **равносильностей** – **равносильность** 20 мы уже доказали. Остальные **равносильности** могут быть доказаны таким же способом – построением истинностных таблиц. Ещё один способ доказательства некоторых равносильностей будет указан в пункте 2.1.5. Прокомментируем некоторые равносильности и укажем вытекающие из них свойства.

Замечание 1.6. Из определения 2.8 следует, что если в формуле P некоторую ее часть заменить на **равносильную** ей **формулу**, получим формулу, равносильную P .



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



37

Заккрыть

Такое преобразование называется равносильным. С помощью равносильных преобразований формулы можно приводить к более простому виду или к некоторой специальной форме. При этом номера применяемых **равносильностей** будем записывать сверху над соответствующими символами $\equiv$.

Пример 1.10. Упростить формулу $\overline{A \rightarrow B} \vee (B \rightarrow A)$:

$$\begin{aligned} \overline{A \rightarrow B} \vee (B \rightarrow A) &\stackrel{20}{\equiv} \overline{\bar{A} \vee B} \vee (\bar{B} \vee A) \stackrel{11}{\equiv} (\bar{\bar{A}} \wedge \bar{B}) \vee (\bar{B} \vee A) \stackrel{1}{\equiv} \\ &\stackrel{1}{\equiv} (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{B} \vee A) \stackrel{5}{\equiv} (A \wedge \bar{B}) \vee (A \vee \bar{B}) \stackrel{7}{\equiv} ((A \wedge \bar{B}) \vee A) \vee \bar{B} \stackrel{5}{\equiv} \\ &\stackrel{3}{\equiv} (A \vee (A \wedge \bar{B})) \vee \bar{B} \stackrel{19}{\equiv} A \vee \bar{B}. \end{aligned}$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



38

Заккрыть

1.1.4 Тавтологии.

Определение 1.9. Формула называется *тавтологией*, если она принимает значение 1 при любом наборе значений входящих в нее букв.

Тавтологии называют иногда еще **тождественно-истинными формулами** или **законами логики**. Приведем примеры тавтологий: $A \vee \bar{A}$, $A \rightarrow A$, $A \rightarrow B \leftrightarrow \bar{A} \vee B$.

Как доказать, что формула является **тавтологией**? Для этого достаточно построить таблицу истинности для данной **формулы**. Если в последнем столбце таблицы будут одни только единицы, то **формула** по определению будет **тавтологией**. Хороший способ построения **тавтологий** дает следующая теорема.

Теорема 1.1. Формулы P и Q *равносильны* тогда и только тогда, когда формула $P \leftrightarrow Q$ является *тавтологией*.

Истинность теоремы вытекает из определений **эквиваленции**, **равносильности** и определения **тавтологии**.

Замечание 1.7. На основании теоремы 2.1 список *равносильностей* (пункт 2.1.) можно преобразовать в список *тавтологий*, заменив знак $\equiv$ на символ $\leftrightarrow$.

Докажем еще две теоремы о тавтологиях.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



39

Закреть

Теорема 1.2. Если формулы A и $A \rightarrow B$ являются тавтологиями, то и формула B также является тавтологией.

Доказательство. Пусть формулы A и $A \rightarrow B$ являются тавтологиями. Предположим, что формула B тавтологией не является. Это означает, что имеется набор значений букв, входящих в формулу B , на котором формула B принимает значение 0. Тогда на этом же наборе формула $A \rightarrow B$ примет значение 0, поскольку A как тавтология всегда принимает значение 1, а B приняла значение 0. Пришли к противоречию, так как по условию формула $A \rightarrow B$ является тавтологией, а мы получили, что она приняла значение 0. Следовательно, наше предположение неверно и формула B является тавтологией. Теорема доказана.

Теорема 1.3. Пусть в формулу P входят буквы $A_1, A_2, \dots, A_n$ и пусть формула Q получена из P заменой букв $A_1, A_2, \dots, A_n$ соответственно формулами $B_1, B_2, \dots, B_n$. Тогда если формула P является тавтологией, то и формула Q также будет являться тавтологией.

Доказательство. Пусть формула P является тавтологией. Буквам, из которых составлены формулы $B_1, B_2, \dots, B_n$ придадим произвольные, но фиксированные истинностные значения. На этом наборе формулы $B_1, B_2, \dots, B_n$ примут некоторые истинностные значения $a_1, a_2, \dots, a_n$. Придадим эти значения соответственно буквам $A_1, A_2, \dots, A_n$ формулы P и формулам $B_1, B_2, \dots, B_n$ формулы Q . Очевидно, формулы P и Q

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

40

[Закреть](#)

примут одинаковые истинностные значения и это значение будет 1, поскольку P **тавтология**. Таким образом, на произвольном наборе истинностных значений букв, входящих в **формулу** Q , **формула** Q приняла значение 1. Это и означает, что **формула** Q является **тавтологией**. Теорема доказана.

Замечание 1.8. Теорема 2.3 показывает, что подстановка в **тавтологию** формул вместо букв дает тавтологию. Поэтому **тавтологий** можно образовать сколько угодно и, следовательно, их множество бесконечно.

Мы уже сказали, что 22 **тавтологии** можно получить из списка равносильностей. Укажем еще ряд **тавтологий**. Их особенность в том, что в каждой из них последней выполняется **импликация** и поэтому эти тавтологии называют тавтологическими импликациями. Они дают обоснование некоторым способам математических доказательств. Об этом речь пойдет позже, а пока ограничимся приведением их списка:

$$1. A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$$

– закон заключения;

$$2. A \wedge B \rightarrow A$$

$$A \wedge B \rightarrow B$$

– законы удаления **конъюнкции**;

$$3. A \rightarrow A \vee B$$

$$B \rightarrow A \vee B$$

– законы введения **дизъюнкции**;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



41

Закрыть

$$4. (A \vee B) \wedge \overline{B} \rightarrow A$$

$$5. A \rightarrow \overline{\overline{A}}$$

$$6. \overline{\overline{A}} \rightarrow A$$

$$7. (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$$

$$8. (A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \\ (A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$9. (A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A})$$

$$10. (\overline{A} \rightarrow B) \wedge (\overline{A} \rightarrow \overline{B}) \rightarrow A$$

$$11. (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$12. (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$$

$$13. (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$$

$$14. (A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \leftrightarrow C)$$

– закон удаления **дизъюнкции**;

– закон введения **двойного отрицания**;

– закон удаления **двойного отрицания**;

– закон введения **эквиваленции**;

– законы удаления **эквиваленции**;

– закон контрапозиции;

– закон доказательства от **противного**;

– закон **силлогизма**;

– закон **сложения посылок**;

– закон **умножения заключений**;

– закон транзитивности **эквиваленции**.

Заметим, что имеются **формулы**, которые являют собой полную «противоположность» тавтологиям.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



42

Закреть

Определение 1.10. *Формула называется **противоречием**, если при любом наборе значений входящих в нее букв она принимает значение 0.*

Противоречия называют еще и **тождественно-ложными формулами**. Приведем примеры таких **формул**: $A \wedge \bar{A}$, $A \leftrightarrow \bar{A}$, $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\bar{B} \wedge A)$.

Замечание 1.9. *Формула A является **тавтологией** тогда и только тогда, когда $\bar{A}$ является **противоречием**.*

Определим еще один класс формул.

Определение 1.11. *Формула называется **выполнимой**, если имеется хотя бы один набор значений букв, входящих в формулу, на котором формула принимает значение 1.*

Из соответствующих определений следует, что всякая **тождественно - истинная формула** является **выполнимой** и никакая **тождественно - ложная формула выполнимой** не является.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



43

Закрыть

1.1.5 Логические следствия

Определение 1.12. Формула B называется *логическим следствием* формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 1$), если формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ является *тавтологией*.

Если формула B является *логическим следствием* формул $A_1, A_2, \dots, A_n$, то пишут $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$, а саму запись $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$ читают «Из $A_1, A_2, \dots, A_n$ логически следует B ».

Пример 1.11. Можно проверить, что формула $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$ является *тавтологией*. Поэтому формула B является *логическим следствием* формул $A, A \rightarrow B$, то есть $A, A \rightarrow B \models B$.

Замечание 1.10. Из определения следует, что *тавтология* является *логическим следствием* любого множества *формул*. Если же формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ является противоречием, то из формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ логически следует любая формула.

Логическое следование является отношением, определенном на множестве всех формул. Легко проверить, что оно, как и отношение *равносильности*, обладает свойствами *рефлексивности* и *транзитивности*. Но, в отличие от равносильности, отношение логического следования не обладает свойством *симметричности*. Поэтому оно не является отношением эквивалентности.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



44

Закреть

Понятие логического следования позволяет проверять правильность рассуждений. Всякое рассуждение состоит из множества высказываний, одно из которых называют **заключением**, а остальные – **посылками**.

Пример 1.12. Приведем примеры рассуждений.

1. Если многоугольник $ABCDE$ – правильный, то его можно вписать в окружность. Многоугольник $ABCDE$ не является правильным. Следовательно, многоугольник $ABCDE$ нельзя вписать в окружность.

2. Если 2 – четное число, то 4 – четное число. 4 – четное число. Следовательно, 2 – четное число.

3. Если 8 – простое число, то 10 – простое число. 8 – простое число. Следовательно, 10 – простое число.

4. Если в $\triangle ABC$ угол A – прямой, то $a^2 = b^2 + c^2$. В $\triangle ABC$ угол A – прямой. Следовательно, $a^2 = b^2 + c^2$.

Рассуждение считается правильным, если из **конъюнкции** его **посылок** логически следует **заключение**. Исходя из этого, для проверки правильности рассуждения достаточно выполнить следующие действия:

1. Формализовать все **посылки** и **заключение**, то есть представить в виде **формул**;

2. Проверить, является ли формула, соответствующая заключению, **логическим следствием** формул, соответствующих посылкам. Если – да, то рассуждение правильное, иначе – неправильное.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



45

Закреть

Проверим правильность рассуждения 1. Для этого обозначим высказывания:

A – Многоугольник $ABCDE$ – правильный.

B – Многоугольник $ABCDE$ можно вписать в окружность.

Тогда **формулы**, соответствующие двум **посылкам** рассуждения и его **заклучению**, примут вид $A \rightarrow B$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Установим, является ли формулы $\bar{B}$ **логическим следствием** формул $A \rightarrow B$ и $\bar{A}$. С этой целью проверим, является ли формула $(A \rightarrow B) \wedge \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ **тавтологией**: $(A \rightarrow B) \wedge \bar{A} \rightarrow \bar{B} \equiv (\bar{A} \vee B) \wedge \bar{A} \rightarrow \bar{B} \equiv \bar{A} \rightarrow \bar{B}$. Формула $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$ **тавтологией** не является и поэтому рассуждение 1 правильным не является. Таким же образом можно установить, что рассуждения 3 и 4 – правильные, а рассуждение 2 правильным не является.

Свойство 1. Если рассуждение правильное, то из этого еще не следует истинность заключения.

Так, например, рассуждение 3 – правильное, но его заключение – ложно.

Свойство 2. Если **заклучение** истинно, то из этого еще не следует правильность рассуждения.

К примеру, в рассуждении 2 истинно и заключение и все **посылки**, но само рассуждение правильным не является.

Свойство 3. Если в правильном рассуждении все посылки истинны, то и заключение истинно.

Действительно, из определения **импликации** и **конъюнкции** следует,



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



46

Заккрыть

что рассуждение является правильным в двух случаях:

- когда хотя бы одна из **посылок** является ложной;
- когда все посылки истинны и **закключение** истинно.

Поэтому, если в правильном рассуждении посылки истинны (второй случай), то и заключение должно быть истинным.

Таким образом, отличие между правильными и неправильными рассуждениями заключается в следующем. В правильном рассуждении истинность всех посылок гарантирует истинность заключения. В неправильном рассуждении при истинных посылках заключением может быть как истинным, так и ложным.

Пусть даны **формулы** $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 1$). Поставим задачу: найти все различные формулы, которые логически следуют из формул $A_1, A_2, \dots, A_n$. Под различными будем понимать неравносильные формулы. Равносильные формулы будем считать однокровными. Потребуем, чтобы формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ не являлась противоречием, иначе из формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ логически следовала бы любая формула.

Поставленную задачу можно сформулировать и по-другому: найти все различные формулы X такие, чтобы формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow X$ являлась **тавтологией**. Исходя из нашего допущения о различных формулах будем считать, что формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ имеет вид **СКНФ** и потребуем, чтобы каждая построенная формула X была представлена в виде СКНФ. Уточненную таким образом задачу можно решить, основываясь на следующей теореме.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

47

[Закреть](#)

Теорема 1.4. Если формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ представлена в виде СКНФ и состоит из k конъюнктивных членов, то всевозможными логическими следствиями формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ являются только лишь следующие формулы:

- каждый из k конъюнктивных членов;
- каждые два, три, четыре, и т.д. k различных конъюнктивных члена, соединенные символами $\wedge$.

Доказательство. Пусть формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ представлена в виде СКНФ и состоит из k конъюнктивных членов, обозначим их через $C_1, C_2, \dots, C_k$. Покажем, что каждая конъюнкция $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_m}$, составленная из m ($1 \leq m \leq k$) конъюнктивных членов $C_1, C_2, \dots, C_k$, является логическим следствием формул $A_1, A_2, \dots, A_n$. Для этого достаточно показать, что формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_m}$ является тавтологией. По условию формула $C_1, C_2, \dots, C_k$ равносильна формуле $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$. Покажем, что формула $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \rightarrow C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_m}$ является тавтологией. Для этого возьмем произвольный, но фиксированный набор значений букв, из которых составлены формулы $C_1, C_2, \dots, C_k$ и подставим эти значения во все формулы C_i ($i \geq 1$). Формулы $C_1, C_2, \dots, C_k$ на этом наборе примут некоторые истинностные значения, которые обозначим соответственно через $v_1, v_2, \dots, v_k$.

Возможны следующие случаи:



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



48

Закреть

а) Для каждого C_{i_j} ($1 \leq j \leq m$) значение $v_{i_j} = 1$. В этом случае **формула** $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_m}$ примет значение 1, в силу чего это же значение 1 примет и формула $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m \rightarrow C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_m}$;

б) Имеется член C_{i_j} ($1 \leq j \leq m$), для которого $v_{i_j} = 0$. Тогда **формула** $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_m}$ примет значение 0. Член C_{i_j} взят из множества $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, поэтому он будет и в **конъюнкции** $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k$. Эта конъюнкция в силу условия б) примет значение 0. Тогда **импликация** $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \rightarrow C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_m}$ примет значение 1.

Таким образом, на произвольном, но фиксированном наборе формула $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \rightarrow C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_m}$ приняла значение 1. А это означает, что формула является **тавтологией**.

Осталось показать, что никаких других **логических следствий**, кроме как вида $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_m}$, нет. Для этого возьмем **СКНФ** $C'_{i_1} \wedge C'_{i_2} \wedge \dots \wedge C'_{i_p}$, в которой хотя бы один член C'_{i_j} ($1 \leq j \leq p$) отличен от $C_1, C_2, \dots, C_k$. Пусть таким членом будет, например, C'_{i_p} . В C'_{i_p} вместо букв подставим значение 0, а вместо отрицаний букв - значение 1. Очевидно, на этом наборе C'_{i_p} , а следовательно и $C'_{i_1} \wedge C'_{i_2} \wedge \dots \wedge C'_{i_p}$ примет значение 0. Среди $C_1, C_2, \dots, C_k$ члена C'_{i_p} нет. Поэтому при тех значениях, которые подставлены в C'_{i_p} , каждый из членов $C_1, C_2, \dots, C_k$ примет значение 1, так как в каждом из этих членов хотя бы одна буква, вместо которой будет подставлена 1 или отрицание буквы, вместо которой будет подставлен 0. Тогда **формула** $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k$ примет значение 1, а



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



49

Заккрыть

поскольку формула $C'_{i_1} \wedge C'_{i_2} \wedge \dots \wedge C'_{i_p}$ приняла значение 0, то **импликация** $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \rightarrow C'_{i_2} \wedge \dots \wedge C'_{i_p}$ примет значение 0. Следовательно, импликация **тавтологией** не является и поэтому формула $C'_{i_2} \wedge \dots \wedge C'_{i_p}$ **логическим следствием** не является.

Таким образом, никаких следствий, кроме как вида $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$, нет. Теорема доказана.

Доказанная теорема дает способ построения всех различных **логических следствий** из **формул** $A_1, A_2, \dots, A_n$.

1. Формулу $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ приводят к **СКНФ**.
2. Выписывают все конъюнктивные члены, а также каждые два, три, четыре и т. д. различных конъюнктивных члена, соединенные символами $\wedge$.

Пример 1.13. Найти все **логические следствия** из формул A и $A \leftrightarrow B$.

1. Формулу $A \wedge (A \leftrightarrow B)$ приводим к СКНФ:
 $A \wedge (A \leftrightarrow B) \equiv A \wedge (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) \equiv (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}).$
2. Выписываем все логические следствия:
 $A \vee B, \bar{A} \vee B, A \vee \bar{B}, (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B), (A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}),$
 $(\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}), (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}).$

Сформулируем задачу, обратную к только что рассмотренной: найти все совокупности **формул**, из которых логически следует формула $P(X_1, \dots, X_n)$. Прежде чем приступить к решению этой задачи, найдем

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

50

[Заккрыть](#)

решение другой задачи, более узкой: указать все формулы $Q(X_1, \dots, X_n)$, из которых логически следует формула $P(X_1, \dots, X_n)$. Это значит, требуется найти все формулы $Q(X_1, \dots, X_n)$ такие, чтобы формула $Q(X_1, \dots, X_n) \rightarrow P(X_1, \dots, X_n)$ являлась **тавтологией**.

Укажем способ решения этой задачи.

1. Формулу $P(X_1, \dots, X_n)$ представляем в виде **СКНФ**. Число конъюнктивных членов $X_1^{v_1} \vee X_2^{v_2} \vee \dots \vee X_n^{v_n}$ в этой СКНФ обозначим через m .

2. Требуемыми формулами $Q(X_1, \dots, X_n)$ будут следующие:

- $2^n - m$ формул вида $P(X_1, \dots, X_n) \wedge (X_1^{v_1} \vee X_2^{v_2} \vee \dots \vee X_n^{v_n})$, где $X_1^{v_1} \vee X_2^{v_2} \vee \dots \vee X_n^{v_n}$ - конъюнктивный член, не входящий в $P(X_1, \dots, X_n)$;

- **Формула** $P(X_1, \dots, X_n)$ и каждые два, три, четыре и т. д. $2^n - m$ конъюнктивных члена, не входящие в $P(X_1, \dots, X_n)$ и соединенные символами $\wedge$.

То, что из формул, получаемых по указанному алгоритму, действительно логически следует формула $P(X_1, \dots, X_n)$, показывается аналогично доказательству теоремы 1. Покажем, что никаких других формул $Q(X_1, \dots, X_n)$, из которых бы логически следовала формула $P(X_1, \dots, X_n)$, нет. В самом деле, если формула $P(X_1, \dots, X_n)$ состоит из m конъюнктивных членов, то теорема 1 утверждает, что формула $Q(X_1, \dots, X_n)$ должна состоять не менее чем из m конъюнктивных членов. А указанный способ решения как раз и дает всевозможные формулы $Q(X_1, \dots, X_n)$, состоящие не менее чем из m конъюнктивных членов.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



51

Закреть

Пример 1.14. Найти все *формулы* вида $Q(X_1, X_2)$, из которых логически следует формула $P(X_1, X_2) = X_1 \rightarrow (X_1 \leftrightarrow X_2)$.

Представим $P(X_1, X_2)$ в виде *СКНФ*: $X_1 \rightarrow (X_1 \leftrightarrow X_2) \equiv \overline{X_1} \vee (\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2}) \equiv \overline{X_1} \vee X_2$. Тогда конъюнктивных членов, не входящих в эту СКНФ будет три: $X_1 \vee X_2$, $X_1 \vee \overline{X_2}$, $\overline{X_1} \vee \overline{X_2}$. Поэтому различными формулами $Q(X_1, X_2)$ такими, что из каждой из них логически следует формула $P(X_1, X_2)$ будут следующие:

- $\overline{X_1} \vee X_2 \wedge (X_1 \vee X_2)$, $(\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2})$, $(\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (\overline{X_1} \vee \overline{X_2})$;
- $(\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2})$, $(\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_2) \wedge (\overline{X_1} \vee \overline{X_2})$, $(\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2}) \wedge (\overline{X_1} \vee \overline{X_2})$;
- $(\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2}) \wedge (\overline{X_1} \vee \overline{X_2})$.

Полученные *формулы* можно упростить. Выполнив равносильные преобразования, получим следующие формулы:

$$X_2, X_1 \leftrightarrow X_2, \overline{X_1}, X_1 \wedge X_2, \overline{X_1} \wedge X_2, \overline{X_1} \wedge \overline{X_2}, 0.$$

Вернемся теперь к первоначально поставленной обратной задаче и сравним два множества, образованные относительно одной и той же формулы $P(X_1, \dots, X_n)$. Элементами первого из них являются всевозможные *формулы* $Q(X_1, \dots, X_n)$ из только что решенной задачи, пред-



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



52

Закреть

ставленные в виде **СКНФ**. Каждая совокупность формул, из которых логически следует формула $P(X_1, \dots, X_n)$, образует формулу второго множества. Эта формула получается соединением символами $\wedge$ всех формул совокупности и затем - представлением полученной формулы в виде СКНФ. Легко показать, что эти два множества совпадают. Поэтому каждая **формула** $Q(X_1, \dots, X_n)$ из только что решенной задачи определяет следующую совокупность формул, из которых логически следует формула $P(X_1, \dots, X_n)$. Если $Q(X_1, \dots, X_n)$ состоит из m_i конъюнктивных членов, то такими совокупностями будут:

- m_i конъюнктивных членов формулы $Q(X_1, \dots, X_n)$;
- Всевозможные совокупности по $(m_i - 1), (m_i - 2), \dots, 1$ формул, в каждую из которых входят все m_i конъюнктивных членов.

В качестве примера приведем построение совокупностей по одной только формуле $(\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2})$ из предыдущего примера. Это - четвертая формула. Она определяет следующие совокупности:

$\overline{X_1} \vee X_2, X_1 \vee X_2, X_1 \vee \overline{X_2}; (\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_2), X_1 \vee \overline{X_2}; (\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2}), X_1 \vee X_2; \overline{X_1} \vee X_2, (X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2}); (\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2})$.

Легко убедиться в том, что каждая **формула** из первых трех (предыдущий пример) определяет по одной совокупности формул, каждая формула из вторых трех - по 5 совокупностей, а последняя - 15.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



53

Закреть

1.2 Практическая часть

1.2.1 Высказывания. Операции над высказываниями

Под высказыванием понимают повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. Операции над высказываниями ($\neg$ – отрицание, $\wedge$ – конъюнкция, $\vee$ – дизъюнкция, $\rightarrow$ – импликация и $\leftrightarrow$ – эквиваленция) определяются следующим образом:

A	$\bar{A}$	A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0

Образец 1. Выполним 1) из 1.10. Для этого в рассматриваемом высказывании выделим элементарные высказывания и введем для них следующие обозначения:

A - идет дождь;

B - кто-то выключил душ.

Тогда рассматриваемое высказывание символически запишется следующим образом: $A \vee \bar{B}$

Образец 2. Выполним 3) из 1.13. Импликация $A \rightarrow B$ принимает значение 0 в единственном случае: когда $A=1$, $B=0$. Поэтому для рассматриваемого примера получаем $\overline{A \vee (A \leftrightarrow B)} = 1$, $C=0$.

По определению операции отрицания получаем, что $A \vee (A \leftrightarrow B)=0$.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

54

[Закреть](#)

Дизъюнкция принимает значение 0, только лишь тогда, когда оба дизъюнктивных члена принимают значение 0; $A=0, A \leftrightarrow B=0$.

Наконец, из определения эквиваленции следует, что если $A=0$ и $A \leftrightarrow B=0$, то $B=1$.

Таким образом, $A=0, B=1, C=0$.

1.1. Какие из следующих предложений являются высказываниями?

1. $2+2=5$
2. Да здравствуют студенты математического факультета!
3. Который час?
4. Красная роза.
5. $x+3=7$.
6. 1 июня 2127 года в 13 часов в Бресте будет идти дождь.
7. Треугольник называется равносторонним, если все его стороны равны.
8. Розы – самые красивые цветы.
9. Для любых чисел a и b выполняется равенство $a + b = b + a$.
10. Имеется такое число x , что $x^2 - 2x + 3 = 0$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



55

Заккрыть

1.2. Определите истинность высказываний в примере 1.1.

1.3. Сформулируйте отрицания следующих высказываний

1. Число 28 делится без остатка на число 7.

2. $3 < 2$.

3. $\triangle ABC$ – прямоугольный.

4. Стена – белая.

5. $2 + 3 = 5$.

6. Все простые числа – нечетны.

7. Четырехугольник ABCD является ромбом.

1.4. Если $A \leftrightarrow B = 1$ ($A \leftrightarrow B = 0$), то что можно сказать об истинности значений высказываний:

1. $A \leftrightarrow \bar{B}$

2. $\bar{A} \leftrightarrow B$

3. $\bar{A} \rightarrow B$

4. $B \rightarrow A$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



56

Закрыть

1.5. Существуют ли три таких высказывания A, B, C , чтобы одновременно было $A \wedge B = 1$, $A \wedge C = 0$, $(A \wedge B) \wedge \bar{C} = 0$.

1.6. Можно ли определить значение высказывания A , если известно, что:

1. $A \wedge B = 1$
2. $A \wedge B = 0$
3. $A \wedge B = 0, B = 1$
4. $A \wedge B = 0, B = 0$.

1.7. Определите значение истинности высказывания $A \rightarrow (B \wedge C)$, зная, что:

1. $A = 0$
2. $A = 1, B = 0$
3. $B = 1, C = 1$.

1.8. Какие данные являются лишними для нахождения значения импликации $(A \vee B) \rightarrow C$:

1. $A = 1, B = 1, C = 0$;
2. $A = 1, B = 0, C = 1$;
3. $A = 0, B = 0, C = 0$;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



57

Заккрыть

4. $A=0, B=0, C=1$.

1.9. Можно ли определить значения истинности высказывания $(A \rightarrow B) \vee C$, зная только то, что:

1. $A = 0$

2. $C = 0$

3. $A = 0, B = 0$

4. $A = 1, C = 0$

5. $A = 0, B = 1$

6. $B = 0$

1.10. Записать символически следующие высказывания:

1. Идет дождь или кто-то не выключил душ.

2. Студент не может заниматься, если он устал или голоден.

3. Если Олег счастлив, то Ольга несчастлива, и если Олег несчастлив, то Ольга счастлива.

4. Петр встанет, и он или Иван уйдет.

5. Петр встанет и уйдет или Иван уйдет.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



58

Закреть

6. Или Петр пойдет на дискотеку и Иван не пойдет на её, или Петр не пойдет на дискотеку и Иван отлично проведет время.
7. Если вечером будет туман, то Иван останется дома или должен будет взять такси.
8. Необходимое и достаточное условие счастья для ленивого студента состоит в том, чтобы поменьше учиться и получать хорошую стипендию.
9. Если «Спартак» или «Динамо» проиграют и «Торпедо» выиграет, то «Арарат» потеряет первое место и «Заря» покинет высшую лигу.
- 1.11. Пусть А будет «сегодня ясно», В - «сегодня идет дождь», С - «сегодня идет снег», D - «Вчера было пасмурно». Переведите на обычный язык следующие высказывания:

1. $A \rightarrow \overline{B \wedge C}$;
2. $D \leftrightarrow A$;
3. $D \wedge (A \vee B)$;
4. $(D \rightarrow B) \vee C$;
5. $A \leftrightarrow ((B \wedge \overline{C} \vee D)$;
6. $(A \leftrightarrow B) \wedge \overline{C} \vee D$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



59

Заккрыть

1.12. Запишите следующие высказывания в символической форме:

1. A достаточно для B ;
2. B необходимо для A ;
3. B тогда, когда A ;
4. B только тогда, когда A ;
5. без B нет A ;
6. A лишь тогда, когда B ;
7. A тогда и только тогда, когда B ;
8. A тогда, когда B ;
9. A необходимо и достаточно для B ;
10. если A , то B ;
11. A необходимое следствие из B ;
12. A при условии, что B ;
13. A влечет B ;
14. в случае A имеет место B ;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



60

Закреть

15. не только А, но и В;

16. как А, так и В;

17. А вместе с В;

18. если А, то В и обратно.

1.13. Найдите значение А,В,С, если

1. $\overline{A \wedge B} = 0;$

2. $\overline{A \rightarrow \overline{B}} = 1;$

3. $\overline{A \vee (A \leftrightarrow B)} \rightarrow C = 0;$

4. $A \vee (A \wedge B) = 0;$

5. $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \vee C) = 1;$

6.

$$\begin{cases} A \rightarrow C = 0; \\ A \vee B = 1; \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} \overline{A \wedge B} \leftrightarrow C = 1; \\ C \vee \overline{A} = 0; \end{cases}$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



61

Закреть

8.

$$\begin{cases} (A \wedge B) \vee C \rightarrow A = 1; \\ A \vee \overline{C} = 0; \end{cases}$$

9.

$$\begin{cases} A \leftrightarrow B = 0; \\ A \vee C = 0; \end{cases}$$

10.

$$\begin{cases} (A \wedge B) \vee C \leftrightarrow A = 1; \\ C \vee \overline{B} = 0; \end{cases}$$

11.

$$\begin{cases} A \rightarrow \overline{B} = 0; \\ A \wedge B \leftrightarrow C = 1; \end{cases}$$

1.14. Определите истинностные значения формул при указанных условиях:

1. $A \wedge B \rightarrow C \leftrightarrow A \wedge C$ - при условии, что $A \wedge C = 1$;

2. $(A \leftrightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow D \rightarrow \overline{D}$ - при условии, что $D = 1$;

3. $(A \vee B) \rightarrow (A \wedge C)$ - при условии, что $A = 1$, $C = 0$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



62

Заккрыть

1.15. Пусть через A обозначено высказывание «Это число – целое», через B – высказывание «Это число положительное», через C – высказывание «Это число простое», через D – «Это число делится на 3». Прочитайте следующие высказывания:

1. $(A \vee B) \rightarrow \overline{C}$;
2. $(A \wedge B) \rightarrow D$;
3. $(A \vee \overline{A}) \rightarrow (B \wedge C)$;
4. $(B \wedge \overline{B}) \leftrightarrow (A \vee D)$;
5. $D \leftrightarrow (\overline{C} \wedge A)$;
6. $(A \wedge C) \rightarrow D$;
7. $(A \wedge D) \rightarrow \overline{C}$;
8. $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$;
9. $\overline{A} \vee \overline{D}$;
10. $(A \wedge B \wedge C) \vee D$;
11. $(A \wedge C) \vee (B \wedge D)$.

1.16. Запишите символически следующие предложения:



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



63

Закрыть

1. Если число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6.
2. Произведение трех чисел равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них равно нулю.
3. Если производная функции в точке равна нулю и вторая производная этой функции в той же точке отрицательна, то данная точка есть точка локального максимума функции.
4. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна и линии их пересечения.
5. Если прямая l перпендикулярна двум прямым a и b , лежащим в плоскости π (высказывание A), и прямые a и b не параллельны $a \nparallel b$ (высказывание B), то прямая l перпендикулярна всякой прямой c , лежащей в плоскости π (высказывание C).
6. Если прямая l перпендикулярна двум прямым a и b , лежащим в плоскости π (высказывание A), и неперпендикулярна некоторой прямой c , лежащей в этой плоскости (высказывание $\overline{C}$), то прямые a и b параллельны ($a \parallel b$ – высказывание $\overline{B}$).
7. Если две прямые a и b , лежащие в плоскости π , непараллельны $a \nparallel b$ (высказывание B) и прямая l неперпендикулярна некоторой прямой c , лежащей в плоскости π (высказывание $\overline{C}$), то l неперпендикулярна одной из прямых a или b (высказывание $\overline{A}$).

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

64

[Закреть](#)

1.17. Из трех данных высказываний A , B , C постройте такое составное высказывание, которое:

1. истинно тогда и только тогда, когда все данные высказывания истинны;
2. ложно тогда и только тогда, когда все данные высказывания ложны;
3. истинно тогда и только тогда, когда все данные высказывания ложны;
4. ложно тогда и только тогда, когда все данные высказывания истинны;
5. истинно тогда и только тогда, когда истинны высказывания A и B ;
6. истинно тогда и только тогда, когда ложны высказывания A и B ;
7. ложно тогда и только тогда, когда истинны высказывания A и B ;
8. ложно тогда и только тогда, когда ложны высказывания A и B ;
9. истинно тогда и только тогда, когда все данные высказывания либо истинны, либо ложны;
10. ложно тогда и только тогда, когда все данные высказывания либо истинны, либо ложны;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



65

Закреть

11. ложно тогда и только тогда, когда ложно лишь высказывание C .

1.18. Определите значение последней формулы, исходя из значений всех предыдущих формул:

1. $A \rightarrow B = 1, A \leftrightarrow B = 0, B \rightarrow A = ;$
2. $A \rightarrow B = 1, (\bar{A} \wedge B) \rightarrow (\bar{A} \vee B) = ;$
3. $A \leftrightarrow B = 0, \bar{B} \rightarrow A = ;$
4. $A \wedge B = 0, A \rightarrow B = 1, B \rightarrow \bar{A} = ;$
5. $A \leftrightarrow B = 0, A \rightarrow B = 1, (\bar{A} \rightarrow B) \leftrightarrow A = ;$
6. $A \vee B = 1, A \rightarrow B = 1, \bar{B} \rightarrow A = ;$
7. $A \wedge B = 0, A \leftrightarrow B = 0, A \rightarrow B = 1, A = ;$
8. $A \wedge B = 0, A \leftrightarrow B = 0, A \rightarrow B = 1, B = ;$
9. $A \wedge B = 0, A \vee B = 1, A \rightarrow B = 1, B \rightarrow A = ;$
10. $A \rightarrow (B \leftrightarrow A) = 0, A \rightarrow B = ;$
11. $(A \vee B) \rightarrow A = 1, A \rightarrow B = 1, \bar{A} \leftrightarrow \bar{B} = ;$
12. $A \leftrightarrow B = 1, (A \rightarrow B) \wedge (\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}) = .$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



66

Закреть

1.19. Для каждой из помещенных ниже формул определите, достаточно ли приведенных сведений, чтобы установить её логическое значение (если достаточно, то укажите это значение; если недостаточно, то покажите на примерах, что возможны и одно и другое истинностные значения);

1. $A \wedge (B \rightarrow C), B \rightarrow C = 0;$

2. $A \vee (B \rightarrow C), B = 0;$

3. $\overline{(A \vee B)} \leftrightarrow (\overline{B} \wedge \overline{A}), A = 1;$

4. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{A} \rightarrow \overline{B}), B = 1;$

5. $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee C), A = 0;$

6. $\overline{(B \rightarrow A)} \leftrightarrow \overline{(A \vee C)}, A = 0;$

7. $(A \leftrightarrow B) \vee (A \wedge C), A = 0.$

1.20. Существуют ли три таких высказывания A, B, C , чтобы одновременно выполнялись для них следующие условия:

1. $A \wedge B = 1, A \wedge C = 0, A \wedge B \wedge \overline{C} = 0;$

2. $B \rightarrow A = 1, A \vee C = 0, A \leftrightarrow (B \wedge \overline{C}) = 0;$

3. $A \vee B = 0, \overline{B} \wedge C = 1, (A \vee \overline{C}) \leftrightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{C}) = 1;$

4. $A \wedge \overline{B} = 1, B \vee C = 1, \overline{(B \rightarrow A)} \vee C = 0;$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



67

Заккрыть

5. $\overline{A} \wedge B = 0, A \vee C = 0, (A \vee B) \wedge \overline{C} = 1;$
6. $A \vee B = 0, B \vee C = 1, (C \rightarrow A) \vee (C \rightarrow B) = 1;$
7. $A \rightarrow B = 0, A \rightarrow C = 1, (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B) = 1;$
8. $A \vee C = 1, A \vee B = 0, C \rightarrow (A \vee B) = 1;$
9. $B \vee C = 0, \overline{C} \rightarrow A = 0, A \rightarrow B = 0;$
10. $A \wedge C = 1, C \leftrightarrow \overline{B} = 0, A \rightarrow B = 1;$
11. $A \vee \overline{B} = 0, B \rightarrow (A \vee C) = 0, \overline{C} \rightarrow \overline{B} = 1.$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



68

Закрыть

1.2.2 Формулы.

Образец 1. Выполним 3) из 2.2. Поскольку операции по силе своего действия в порядке убывания располагаются $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, и для отрицания скобки не восстанавливаются, то в первую очередь восстанавливаем скобки для **конъюнкции**. Восстанавливаем их слева направо:

$A \rightarrow (B \wedge C) \wedge A \leftrightarrow B$, $A \rightarrow ((B \wedge C) \wedge A) \leftrightarrow B$. За $\wedge$ следует $\vee$, но её в рассматриваемой формуле нет. Восстанавливаем скобки для импликации: $(A \rightarrow ((B \wedge C) \wedge A)) \leftrightarrow B$. Наконец, в последнюю очередь восстанавливаем скобки для **эквиваленции**: $((A \rightarrow ((B \wedge C) \wedge A)) \leftrightarrow B)$.

2.1. Какие из следующих выражений являются формулами?

1. $A \wedge B$;
2. $A \wedge (\vee B)$;
3. $(A \rightarrow B \vee C)$;
4. $((A \vee B) \rightarrow C)$;
5. $(A \wedge B)$;
6. $(A \rightarrow (B \vee C))$;

2.2. Восстановите скобки:

1. $A \rightarrow B \rightarrow B$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



69

Заккрыть

$$2. A \vee B \wedge C;$$

$$3. A \rightarrow B \wedge C \wedge A \leftrightarrow B;$$

$$4. A \leftrightarrow B \rightarrow C \vee A \wedge B;$$

$$5. A \vee B \rightarrow B \vee C \wedge B;$$

$$6. \overline{A \rightarrow B} \wedge C \vee B;$$

$$7. A \vee B \rightarrow B \vee C \wedge B;$$

$$8. A \wedge \overline{\overline{B \vee C}} \rightarrow A \leftrightarrow B;$$

$$9. A \vee \overline{\overline{B \leftrightarrow C}} \rightarrow B \vee B \wedge C;$$

2.3. Опустите возможно большее число скобок:

$$1. ((A \rightarrow B) \rightarrow B);$$

$$2. ((A \wedge B) \vee ((A \rightarrow B) \wedge A));$$

$$3. ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C));$$

$$4. (((A \vee B) \leftrightarrow (B \rightarrow C)) \vee (B \wedge C));$$

$$5. (((\overline{A \vee B}) \wedge C) \rightarrow A);$$

$$6. (((B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \vee B)) \wedge (A \vee B));$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



70

Закреть

7. $(A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow A)))$;

8. $((\bar{A} \leftrightarrow B) \wedge (B \vee \bar{C})) \leftrightarrow A$.

2.4. В примере 2.3 выпишите все подформулы, то есть те части формул, которые сами являются формулами.

2.5. Составьте таблицы истинности для формул из примера 2.2.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



71

Закрыть

1.2.3 Равносильные формулы

Список основных равносильностей.

$$1. \overline{\overline{A}} \equiv A$$

$$2. A \wedge A \equiv A$$

$$3. A \vee A \equiv A$$

$$4. A \wedge B \equiv B \wedge A$$

$$5. A \vee B \equiv B \vee A$$

$$6. A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$$

$$7. A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$

$$8. A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$9. A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$10. \overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$$

$$11. \overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$$

$$12. A \wedge \overline{A} \equiv 0$$

$$13. A \vee \overline{A} \equiv 1$$

$$14. A \wedge 1 \equiv A$$

$$15. A \vee 0 \equiv A$$

$$16. A \wedge 0 \equiv 0$$

$$17. A \vee 1 \equiv 1$$

$$18. A \wedge (A \vee B) \equiv A$$

$$19. A \vee (A \wedge B) \equiv A$$

$$20. A \rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$$

$$21. A \rightarrow B \equiv \overline{B} \rightarrow \overline{A}$$

$$22. A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Образец 1. Упростить 1) из 3.4.:

$$\begin{aligned} (\overline{\overline{A \vee B}} \rightarrow A \vee B) \wedge B &\stackrel{20}{\equiv} (\overline{\overline{A \vee B} \vee A \vee B}) \wedge B \stackrel{1}{\equiv} (\overline{A \vee B \vee A \vee B}) \wedge B \stackrel{5}{\equiv} \\ (\overline{A \vee A \vee B \vee B}) \wedge B &\stackrel{3}{\equiv} (1 \vee B \vee B) \wedge B \stackrel{3}{\equiv} (1 \vee B) \wedge B \stackrel{17}{\equiv} 1 \wedge B \stackrel{14}{\equiv} B. \end{aligned}$$

3.1. Упростите:

$$1. A \wedge (A \vee B) \wedge B;$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



72

Заккрыть

2. $A \vee \overline{A} \wedge B$;

3. $\overline{A} \vee A \wedge B$;

4. $A \wedge B(\overline{A} \vee B)$;

5. $A \vee A \vee A \wedge A \wedge B \wedge C$;

6. $A \wedge B \vee \overline{A} \vee A$;

7. $(\overline{A} \vee B \leftrightarrow C) \wedge B \vee A$;

8. $(A \rightarrow B \leftrightarrow C) \wedge B \vee \overline{B}$;

9. $A \vee A \wedge B \wedge B \wedge (D \leftrightarrow C)$;

10. $A \leftrightarrow A \leftrightarrow A$;

11. $A \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow A$;

12. $A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$;

13. $A \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))$;

3.2. Следующие формулы приведите к более простому виду:

1. $(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \overline{C})$;

2. $\overline{\overline{A} \vee B} \rightarrow (A \vee B \rightarrow A)$;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



73

Закреть

$$3. \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}} \vee (A \rightarrow B) \wedge A;$$

$$4. (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \wedge (A \vee B);$$

$$5. (A \wedge C) \vee (A \wedge \overline{C}) \vee (B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C);$$

$$6. (A \leftrightarrow \overline{B}) \rightarrow C \rightarrow (A \leftrightarrow \overline{C});$$

$$7. (A \rightarrow (B \leftrightarrow C)) \leftrightarrow (A \rightarrow B \leftrightarrow C).$$

3.3. Проверьте, являются ли следующие формулы противоречиями:

$$1. (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \wedge ((A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B));$$

$$2. (A \wedge \overline{B} \rightarrow \overline{A} \vee A \wedge B) \wedge (\overline{A} \vee A \wedge B \rightarrow A \wedge \overline{B});$$

$$3. (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow \overline{A \rightarrow C};$$

$$4. (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \overline{B}) \wedge A;$$

$$5. (A \wedge \overline{B} \vee A \wedge \overline{C}) \leftrightarrow (A \rightarrow B \wedge A \rightarrow C).$$

3.4. Упростите:

$$1. \overline{(\overline{A} \vee \overline{B} \rightarrow A \vee B)} \wedge B$$

$$2. \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}} \vee (A \rightarrow B) \wedge A$$

$$3. (A \leftrightarrow B) \wedge (A \vee B)$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



74

Закрыть

$$4. (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow A)$$

$$5. \overline{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \overline{A})}$$

$$6. \overline{(A \wedge B) \wedge (A \rightarrow \overline{B})}$$

$$7. \overline{(A \leftrightarrow B) \wedge (A \vee B)}$$

$$8. (A \rightarrow \overline{B}) \vee \overline{(A \vee B)}$$

$$9. (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{A} \leftrightarrow \overline{B})$$

$$10. (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$$

3.5. Проверьте равносильны ли следующие формулы:

$$1. A \rightarrow (B \leftrightarrow C) \text{ и } (A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow C)$$

$$2. A \vee (B \leftrightarrow C) \text{ и } (A \vee B) \leftrightarrow (A \vee C)$$

$$3. A \wedge (B \leftrightarrow C) \text{ и } (A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge C)$$

$$4. A \rightarrow (B \vee C) \text{ и } (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$$

$$5. A \rightarrow (B \wedge C) \text{ и } (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$$

$$6. (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \text{ и } A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

$$7. (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{C}) \text{ и } (A \wedge B) \vee \overline{C} \wedge \overline{(\overline{C} \wedge A)}$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



75

Заккрыть

8. $A \rightarrow (A \wedge B \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow B) \wedge C)$ и $B \rightarrow (A \rightarrow C)$

9. $\overline{A} \wedge \overline{C} \vee A \wedge B \vee A \wedge \overline{C}$ и $A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \vee \overline{A} \wedge C$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



76

Закрыть

1.2.4 Тавтологии

Образцом решения примеров для этого пункта является доказательство теоремы 1.2.

4.1. Докажите что если $A \wedge B$ есть тавтология, то тавтологиями являются A и B .

4.2. Докажите что если A - тавтология, то тавтологиями являются $A \vee B$ и $B \rightarrow A$, где B - произвольная формула.

4.3. Для следующих формул составьте таблицы истинности. Определите, для которых из них истинностные значения всей формулы, можно определить без промежуточных выкладок:

1. $(A \rightarrow A) \vee B$;
2. $C \rightarrow (A \leftrightarrow A)$;
3. $A \rightarrow \bar{A}$;
4. $(A \rightarrow A) \rightarrow A$;
5. $A \rightarrow (A \leftrightarrow A)$;
6. $A \wedge B \vee \bar{C} \rightarrow (A \rightarrow A)$;
7. $C \wedge D \vee A \wedge B \rightarrow B \vee \bar{B}$;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



77

Закрыть

$$8. (A \vee B \vee \bar{A}) \wedge (C \vee A \vee \bar{C});$$

$$9. (B \leftrightarrow B) \wedge (C \rightarrow C) \wedge (A \vee \bar{A});$$

$$10. (A \wedge B) \wedge (A \wedge A) \vee \overline{A \wedge B}$$

4.4. Запись $\models A$ означает, что формула A является тавтологией. Докажите следующие утверждения:

$$1. \text{ Если } \models A \text{ и } \models A \rightarrow B, \text{ то } \models B;$$

$$2. \text{ Если } \models A \vee B \text{ и } \models A \vee C, \text{ то } \models B \vee C;$$

$$3. \text{ Если } \models A \vee B, \models A \rightarrow C \text{ и } \models C \rightarrow D, \text{ то } \models C \vee D;$$

$$4. \text{ Если } \models \bar{A} \vee B \text{ и } \models \bar{B} \vee \bar{C}, \text{ то } \models A \rightarrow \bar{C};$$

$$5. \text{ Если } \models A \text{ и } \models A \leftrightarrow B, \text{ то } \models B.$$

4.5. Составив соответствующие таблицы истинности, докажите, что все следующие формулы являются тавтологиями:

$$1. P \rightarrow (Q \rightarrow P);$$

$$2. (P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R));$$

$$3. P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q));$$

$$4. P \rightarrow (P \vee Q);$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



78

Заккрыть

5. $(P \wedge Q) \rightarrow P$;
6. $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$;
7. $((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \overline{Q})) \rightarrow \overline{P}$;
8. $(P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R))$ ("разбор случаев");
9. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \overline{Q}) \rightarrow \overline{P})$;
10. $\overline{\overline{P}} \rightarrow P$;
11. $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$;
12. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow P) \rightarrow (P \leftrightarrow Q))$;
13. $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$;
14. $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$;
15. $(P \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (R \vee Q))$;
16. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$;
17. $(F_1 \rightarrow (F_2 \rightarrow G)) \leftrightarrow ((F_1 \wedge F_2) \rightarrow G)$;
18. $(F_1 \rightarrow (F_2 \rightarrow \dots \rightarrow (F_m \rightarrow G) \dots)) \leftrightarrow ((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_m) \rightarrow G)$;
19. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$;

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

79

[Закреть](#)

20. $(\overline{P} \rightarrow P) \rightarrow P;$

21. $((P \wedge Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow R));$

22. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R)).$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



80

Закреть

1.2.5 Логическое следствие.

Образец. Решим 11) из 6.12. Для этого составим таблицу истинности исходных формул:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \rightarrow R$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1
				(*)		(**)

Сопоставляя столбцы (*) и (**), видим, что во всякой строке, в которой в столбце (**) стоит 1, в столбце (*) также стоит 1, но не наоборот (например третья строка). Это означает, что первая данная формула является логическим следствием второй, но вторая в свою очередь, не

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

81

[Закрыть](#)

является логическим следствием первой.

6.1. Запись $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$ означает, что формула B является логическим следствием посылок $A_1, A_2, \dots, A_n$. Проверить истинность следующих утверждений:

1. $A \rightarrow B, \bar{B} \models A \leftrightarrow B$;
2. $A \leftrightarrow B \models \bar{A} \vee B$;
3. $A \wedge B, \bar{A} \vee B \models \bar{B}$;
4. $A \rightarrow B, \bar{C} \rightarrow \bar{B}, A \wedge B \models \bar{C} \rightarrow \bar{A}$;
5. $A \rightarrow B, \bar{B} \models \bar{A}$;
6. $A \rightarrow B, B \rightarrow C \models A \rightarrow C$;
7. $A \rightarrow B, B \models A$;
8. $A \rightarrow B, \bar{A} \models \bar{B}$.

6.2. Придумать конкретные утверждения вида 1) - 8) из пункта 6.1.

6.3. Если рассуждения правильные, но по крайней мере одна из посылок ложная, то что можно утверждать об истинности заключения?

6.4. Если рассуждения правильное, но заключение ложно, то что можно утверждать об истинности посылок?



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



82

Заккрыть

6.5. Следует ли из этих посылок, что данное число оканчивается цифрой 5:

1. Если цело число оканчивается нулем или цифрой 5, то оно делится на 5;
2. Данное число делится на 5;
3. Данное число не оканчивается нулем.

6.6. Можно ли на основании посылок «Если предмет интересен, то он полезен» и «Предмет интересен» заключить, что «Предмет бесполезен»?

6.7. Доказать:

1. $A, A \rightarrow B \models B$;
2. $A, B \models A \wedge B$;
3. $A, B \models A \vee B$;
4. $A \models A \vee B$;
5. $A \rightarrow B, \bar{B} \models \bar{A}$;
6. $A \rightarrow B, B \rightarrow C \models A \rightarrow C$;
7. $A \rightarrow B \models \bar{B} \rightarrow \bar{A}$;
8. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \models B \rightarrow (A \rightarrow C)$;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



83

Заккрыть

9. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \models A \wedge B \rightarrow C$;

10. $A \wedge B \rightarrow C \models A \rightarrow (B \rightarrow C)$;

11. $A \wedge B \models B$;

12. $A_1, A_2, \dots, A_n \models A_i$ для каждого $i (1 \leq i \leq n)$.

6.8. Проверьте правильность следующих рассуждений:

1. Если Иванов сдаёт экзамен по матлогике, то Петров сдаёт зачёт по философии. Иванов сдаёт экзамен по матлогике или экзамен по алгебре. Если Иванов сдаёт экзамен по алгебре, то Сидоров сдаёт экзамен по геометрии. Следовательно, Петров сдаёт зачет по философии.
2. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Следовательно, Смит был убийцей.
3. Если курс ценных бумаг растёт или процентная ставка снижается, то либо падает курс акций, либо налоги не повышаются. Курс акций понижается тогда и только тогда, когда растёт курс ценных бумаг и налоги растут. Если процентная ставка снижается, то либо курс



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



84

Закреть

акций не понижается, либо повышаются налоги, либо курс акций понижается и снижается процентная ставка.

4. Для того чтобы сдать экзамен необходимо достать учебник или конспект. Я достану учебник в том случае, если мой приятель не уедет домой. Он уедет только в том случае, если я достану конспект. Значит я сдам экзамен.
5. Если Пётр поедет в Свердловск, то Иван уедет в Киев. Пётр поедет в Свердловск или в Челябинск. Если Пётр поедет в Челябинск, то Анна останется в Москве. Но Анна не останется в Москве. Следовательно, Иван поедет в Киев.

6.9. Найдите все следствия из посылок:

1. $A \rightarrow B$ и A ;
2. $A \leftrightarrow B$ и $\bar{A}$;
3. $A \vee B$ и A и B ;
4. $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow C$.

6.10. Найдите все следствия из посылок:

1. Если сумма цифр целого числа делится на 3, то число делится на 3 или 9;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



85

Заккрыть

2. Если число делится на 9, то оно делится на 3.

6.11. Найдите все посылки, следствием которых служат формулы:

1. $A \rightarrow B$;

2. $A \vee \overline{B}$;

3. $\overline{A \vee B}$;

4. $A \vee B \rightarrow A \wedge B$.

6.12 Для следующих формул выясните, будет ли какая-либо из них логическим следствием другой:

1. $(P \rightarrow Q) \rightarrow R, P \vee Q \vee R$;

2. $P \rightarrow (Q \rightarrow R), (P \rightarrow Q) \rightarrow R$;

3. $R \rightarrow (Q \vee \overline{P}), P \rightarrow (Q \wedge R)$;

4. $P \rightarrow (Q \wedge R), (P \wedge Q) \rightarrow R$;

5. $(P \vee R) \leftrightarrow Q, (P \vee Q) \leftrightarrow R$;

6. $P \vee (Q \rightarrow R) \vee Q, (P \vee Q) \leftrightarrow R$;

7. $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (Q \leftrightarrow R), P \rightarrow (Q \rightarrow R)$;

8. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow R) \vee Q$;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



86

Заккрыть

9. $(P \wedge Q) \rightarrow R, (P \rightarrow Q) \vee R;$

10. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R), (P \rightarrow Q) \rightarrow R;$

11. $(P \wedge Q) \rightarrow R, (P \vee Q) \rightarrow R;$

12. $(P \wedge Q) \rightarrow R, P \vee (Q \rightarrow R).$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



87

Закрыть

1.2.6 Логические задачи.

7.1. Требуется спроектировать электрическую цепь для спальни с одной электрической лампочкой, где желательно иметь два включателя. Один у двери и второй – над постелью; при этом поворот каждого выключателя независимо от состояния второго выключателя должен размыкать цепь, если до этого она была замкнута и замыкать, если ранее она была разомкнута.

7.2. Жили четыре друга. Звали их Альберт, Карл, Дитрих и Фридрих. Фамилии друзей те же, что и имена, только так, что ни у кого из них имя и фамилия не были одинаковыми, кроме того, фамилия Дитриха не Альберт. Определите фамилию и имя каждого мальчика, если дано, что имя мальчика, у которого фамилия Фридрих, есть фамилия того мальчика, имя которого фамилия Карла.

7.3. Три ученика различных школ города Бреста приехали на отдых в один летний лагерь.

На вопрос вожатого, в каких школах Бреста они учатся, каждый дал ответ:

Петя: «Я учусь в школе № 4, а Леня – в школе №8»;

Леня: «Я учусь в школе № 4, а Петя – в школе №3»;

Коля: «Я учусь в школе № 4, а Петя – в школе №8».

Вожатый, удивленный противоречиями в ответах ребят, попросил их объяснить, где правда, а где ложь. Тогда ребята признались, что в от-

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

88

[Заккрыть](#)

ветах каждого из них одно утверждение верно, а другое ложно. В какой школе учится каждый из мальчиков?

7.4. По подозрению в совершенном преступлении задержали Брауна, Джона и Смита. Один из них был уважаемым в городе стариком, другой был малоизвестным чиновником, третий – известным мошенником. В процессе следствия старик говорил правду, мошенник лгал, а третий задержанный в одном случае говорил правду, а в другом – ложь. Вот, что они утверждали:

Браун: «Я совершил это, Джон не виноват».

Джон : «Браун не виноват, преступление совершил Смит».

Смит: «Я не виноват, виноват Браун».

Требуется определить имена старика, мошенника и чиновника, и кто из них виноват, если известно, что преступник один.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

89

[Заккрыть](#)

1.2.7 Теоремы

Образцы решения примеров даны в [10].

8.1. Сформулируйте утверждения, обратные следующим теоремам:

1. Если последовательность рациональных чисел сходится, то она фундаментальна;
2. Если последовательность сходится, то она ограничена;
3. Если треугольник равнобедренный, то углы при его основании равны;
4. Если четырехугольник – ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны;
5. Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.

8.2. Сформулируйте предложения, противоположные теоремам из примера 8.1. Какие из этих предложений сами являются теоремами?

8.3. Для каждой теоремы из примера 8.1 сформулируйте теорему обратную противоположной.

8.4. Для каждой из следующих теорем найдите все теоремы, то есть верные утверждения, обратные и противоположные ей (если они есть), и теорему, противоположную обратной:



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



90

Закреть

1. если $a = 0$ и $b = 0$, то $a^2 + b^2 = 0$ (a, b - действительные числа);
 2. если a делится на b и b делится на c , то a делится на c (a, b, c - целые числа);
 3. если $a - b$ делится на c и a не делится на c , то b делится на c (a, b, c - целые числа);
 4. если у четырехугольника две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм;
 5. если три прямые лежат в одной плоскости и две из них перпендикулярны третьей, то эти две прямые параллельны;
 6. если прямая a лежит в одной из двух пересекающихся плоскостей и параллельна другой из них, то она параллельна и линии их пересечения;
 7. если целое число делится на 12, то оно делится на 3 и на 4;
 8. если параллелограмм является квадратом, то его диагонали равны, взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам.
- 8.5. Сформулируйте следующие высказывания, используя связку «если...то...»:

1. A достаточно для B ;

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

91

[Закрыть](#)

2. А необходимо для В;
3. В достаточно для А;
4. В необходимо для А.

8.6. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если... ,то... »:

1. для делимости произведения на некоторое число достаточно, чтобы по меньшей мере один из сомножителей делился на это число;
2. необходимым свойство прямоугольника является равенство его диагоналей;
3. для делимости многочлена $f(x)$ на линейный двучлен — достаточно, чтобы a было корнем этого многочлена;
4. на 5 делятся те целые числа, которые оканчиваются цифрой 0 или цифрой 5;
5. две прямые на плоскости тогда параллельны, когда они перпендикулярны одной и той же прямой.

8.7. В следующих высказываниях вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо, но не достаточно», «достаточно, но не необходимо», «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное высказывание:



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



92

Закреть

1. a – четное число ... для того, чтобы $3a$ было четным числом (a – целое число);
2. a делилось на c ... для того, чтобы $a \cdot b$ делилось на $(a, b, c$ – целые числа);
3. a и b делятся на c ... для того, чтобы $a + b$ делилось на $(a, b, c$ – целые числа);
4. $x > 1$... для того, чтобы $x^2 - 1 > 0$;
5. $a \parallel b$ и $b \parallel c$... для того, чтобы $a \parallel c$ (a, b, c – прямые);
6. для того чтобы четырехугольник был прямоугольником ..., чтобы его диагонали были равны;
7. для того чтобы четырехугольник был параллелограммом ..., чтобы его стороны были равны;

8.8. Даны утверждения: A – треугольник равнобедренный; B – два внутренних угла треугольника равны между собой; C – три внутренних угла треугольника равны между собой; D – два внешних угла треугольника равны между собой; – две высоты треугольника равны между собой; – три высоты треугольника равны между собой; L – один из углов треугольника равен 45° .



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



93

Заккрыть

1. Какие из перечисленных утверждений и из каких логически следуют ?
2. Какие из утверждений $B - L$ служат для утверждения достаточным условием; необходимым; необходимым и достаточным условиями одновременно?



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



94

Закрыть

1.3 Контрольные тесты

Пройти тестирование по теме "Алгебра высказываний"



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



95

Заккрыть

Глава 2

Логика предикатов

2.1 Теоретическая часть

2.1.1 Предикаты

1. Недостаточность средств логики высказываний. В первой главе мы рассмотрели логику высказываний. Это самый простой и вместе с тем очень важный раздел математической логики. Мы видели, что в рамках логики высказываний можно описывать и анализировать правильность очень многих рассуждений. Многих, но далеко не всех. Приведем примеры таких рассуждений:

1. 3 меньше 5 и 5 меньше 7. Следовательно, 3 меньше 7.
2. Всякое натуральное число есть целое число, 3 есть натуральное число. Следовательно, 3 есть целое число.
3. Плоскость α параллельна плоскости β . Плоскость β параллельна плоскости γ . Следовательно, плоскость α параллельна плоскости γ .
4. Все люди бессмертны. Сократ – человек. Следовательно, Сократ бессмертен.

Введя соответствующие обозначения, каждое рассуждений 1 – 4 можно записать в виде $A \wedge B \rightarrow C$. Поскольку формула $A \wedge B \rightarrow C$ тавтологией не является, то с точки зрения логики высказываний нельзя ничего сказать о правильности рассуждений 1 – 4. Причиной тому является

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

96

[Закрыть](#)

то, что элементарные высказывания в логике высказываний рассматриваются как целые, нерасчленяемые величины, без внутренней структуры. Правильность же рассуждений 1 – 4 (а следовательно и истинность заключения) зависит не только от истинности составляющих посылок, но и от их внутренней структуры. В логике же высказываний внутреннюю структуру высказываний не исследует, поэтому в логике высказываний невозможно установить правильность подобного рода рассуждений.

Приведем еще один пример такого рассуждения. По меньшей мере один студент сдал все экзамены. Следовательно, каждый экзамен сдал по крайней мере один студент. Поскольку соответствующая формула $A \rightarrow B$ тавтологией не является, то нельзя нечего сказать о правильности этого рассуждения.

Рассуждения такого вида описываются и более глубоко исследуются в логике предикатов. Логика предикатов содержит в себе всю логику высказываний и, кроме того, исследует еще внутреннюю структуру высказываний, которые в логике высказываний рассматриваются как элементарные неделимые на части величины.

2. Предикаты. Как было сказано ранее, под высказыванием мы понимаем повествовательное предложение, о котором можно утверждать одно из двух: оно истинно или ложно. Предикатом же будем называть повествовательное предложение, с одной или несколькими переменными, которое превращается в высказывание при подстановке вместо переменных их значений. Как и в случае высказывания, это повествователь-

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

97

[Закрыть](#)

ное предложение может быть записано не только на обычном словесном языке, но и на любом символьном языке (математическом, техническом и т.д.)

Примеры предикатов:

1. Число x меньше 3.
2. Студент x окончил среднюю школу с золотой медалью.
3. $x + y = 7$.

Каждое из предложений 1 – 3 является предикатом, поскольку подставив вместо переменных их значения, будем получать истинные, либо ложные высказывания. Так, например, при $x = 2$ первое предложение превращается в истинное высказывание, а при $x = 5$ – в ложное.

Предикат каждому набору значений переменных ставит в соответствие истинное, либо ложное высказывание. Это значит предикат является функцией. В свою очередь в логике высказываний истинностное высказывание отождествляется с истинностным значением 1, а ложное высказывание – со значением 0. Поэтому можно дать следующее определение.

Определение 2.1. *Предикатом называется функция, множеством значений которой являются истинностные значения 0 и 1.*

Если функция является n -местной ($n \geq 1$), то и предикат называется n -местным. Функции в математике обычно обозначают буквами (чаще всего f, g, h) и в скобках указывают список аргументов. Например



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



98

Заккрыть

$f(x)$, $g(x, y)$, $f_1(x_1, x_2)$, $f_3(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $h(x, y, z)$. Подобную символику введем и для предикатов: предикаты будем обозначать большими буквами латинского алфавита $P, Q, R, S, \dots$ и в скобках указывать список аргументов: $P(x)$, $Q(x, y)$, $R_1(x_1, x_2)$, $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Q_3(x, y, z)$ и т.д. При этом буквы x, y, z, u, v (с индексами и без них) будут служить для обозначения переменных, а символы $a, b, c, d, \dots$ – для обозначения фиксированных значений этих переменных. Если имеется обозначение предиката и при этом нет никаких пометок, дополнительных обозначений, специальных оговорок, то это есть обозначение произвольного предиката и мы это будем называть предикатной переменной.

А такое обозначение, как например, $P(x) = (x < 3)$ является уже обозначением фиксированного одноместного предиката. Напомним еще, что большие буквы латинского алфавита A, B, C служат для обозначения произвольных высказываний. Их мы будем называть логическими переменными. Фиксированные же высказывания будем каким-то образом отмечать или специально оговаривать.

По поводу обозначений предикатов сделаем еще следующее замечание. Мы будем широко использовать общепринятые обозначения операций, отношений, функций. Например, вместо « x перпендикулярно y », « x параллельно y », « x больше y » и т.д. будем писать $x \perp y$, $x \parallel y$, $x > y$ и т.д.

При задании предиката всегда нужно указывать множество M (или множества), на котором определены значения, входящих в предикат пе-



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



99

Закрыть

ременных. Пусть дан, к примеру предикат $P(x, y) = (x \text{ перпендикулярно } y)$. Для этого предиката множеством M может служить множество всех прямых, множество всех плоскостей, а может – и множество, состоящее из всех прямых и плоскостей, причем первая переменная принимает значения из множества прямых а вторая – из множества плоскостей. Иногда предикат, у которого все переменные принимают значения из одного и того же множества, называют **однородным**. В нашем примере один и тот же предикат $P(x, y) = (x \text{ перпендикулярно } y)$, в случае задания его на одном из первых двух множествах является однородным. Если же он задан на множестве прямых и плоскостей, то однородным он уже не является.

Если аргументы предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает значение из множества M , то будем говорить, что предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дан на множестве M .

Предикаты можно задавать словесными формулировками, формулами и таблицами значений. Так словесной формулировкой заданы предикаты 1 и 2, а формулой предикат – 3. С помощью таблицы 1 можно задать предикат $P(x) = (x < 5)$ определенный на множестве $M = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

100

[Закрыть](#)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x)$	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

3. Виды предикатов. Пусть дан предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, аргументы которого принимают значения из множества M . Возьмем произвольный, но фиксированный набор $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ значений из множества M и подставим вместо соответственно $x_1, x_2, \dots, x_n$ в предикат P . Если предикат P при этом примет значение «истина», то есть $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$, то говорят, что набор $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ удовлетворяет предикату $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Если же $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, то говорят, что набор $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ не удовлетворяет предикату P .

Пример 2.1. Рассмотрим предикаты, аргументы которых принимают значения из множества R .

1. $P(x, y) = (x^2 - y^2 > 0)$. Этому предикату набор $(5, -3)$ удовлетворяет, так как $P(5, -3) = (5^2 - (-3)^2 > 0) = 1$, а набор $(1, 2)$ не удовлетворяет, поскольку $P(1, 2) = (1^2 - 2^2 > 0) = 0$.
2. $Q(x) = (x^4 < 0)$. Легко убедиться в том, что предикату $Q(x)$ не удовлетворяет ни один набор, так как для любого $a \in R$ будет $Q(a) = (a^4 < 0) = 0$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



101

Заккрыть

3. $S(x, y) = (x - y + 1 + y = x + 1)$. Очевидно, любой набор (a_1, a_2) удовлетворяет предикату $S(x, y)$.

4. $T(x) = (\frac{1}{x} > 0)$. Этому предикату удовлетворяет любое положительное число и не удовлетворяет никакое отрицательное.

В примере 4 значение предиката $T(x)$ при $x = 0$ не определено. Такие предикаты мы рассматривать не будем. Мы будем исследовать лишь те предикаты, которые определены при всех значениях, входящих в них переменных. Другими словами, функция из определения 3.1 должна быть всюду определенной. Функция же $T(x)$ в примере 4 на множестве R таковой не является.

Определение 2.2. Пусть $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – предикат определенный на множестве M . Тогда предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется

- *выполнимым*, если имеется хотя бы один набор $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ значений из M , удовлетворяющий предикату P ;
- *тождественно-истинным*, если всякий набор $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ значений из M , удовлетворяет предикату P ;
- *тождественно-ложным*, если ни один набор $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ значений из M , не удовлетворяет предикату P ;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



102

Закреть

В последних примерах предикаты $P(x, y)$, $S(x, y)$, $T(x)$ являются выполнимыми, причем предикат $S(x, y)$ является еще и тождественно-истинным. Предикат $Q(x)$ является тождественно-ложным.

Из определения 3.2 следует, что всякий тождественно-истинный предикат является еще и выполнимым (но не наоборот) и никакой тождественно-ложный предикат выполнимым не является.

2.1.2 Кванторы

Определение 2.3. Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на некотором множестве M . Тогда под выражением $\forall x P(x)$ понимают высказывание, которое истинно тогда, когда $P(x)$ истинно для любого $x \in M$ и ложно в противном случае. Запись " $\forall x P(x)$ " читают "для любого $x P(x)$ истинно". Символ $\forall$ называется квантором всеобщности.

Определение 2.4. Пусть даны предикаты $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенные на одном и том же множестве M . Тогда:

- предикаты $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются равносильными, если на любом наборе $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ значений из M они принимают одинаковые истинностные значения;
- предикат $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется следствием предиката



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



103

Закреть

$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если всякий набор $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ значений из M , удовлетворяющий предикату $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяет и предикату $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пример 2.2. Рассмотрим следующие предикаты, определенные на множестве N : $P(x) = (x - \text{четное})$, $Q(x) = (x \text{ делится на } 2)$, $S(x) = (x \text{ делится на } 4)$. Тогда:

- $P(x)$ является следствием $Q(x)$ и наоборот. Кроме того $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны;
- $Q(x)$ является следствием $S(x)$, но не наоборот. Кроме того $Q(x)$ и $S(x)$ не равносильны.

Теорема 2.1. Пусть даны предикаты $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенные на одном и том же множестве M . Тогда предикаты $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равносильны в том и только в том случае, когда каждый из них является следствием другого.

Доказательство теоремы следует из соответствующих определений.

Определение 2.5. Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на некотором множестве M . Тогда под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, которое истинно тогда, когда существует хотя бы одно



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



104

Заккрыть

$x \in M$ для которого $P(x)$ истинно и ложно в противном случае. Запись $\exists x P(x)$ читают "существует x , для которого $P(x)$ истинно". Знак $\exists$ называется квантором существования.

Кванторы $\exists$ и $\forall$ называются двойственными друг другу.

Преписывание квантора слева к предикату называется навешиванием квантора на предикат. Кванторы можно навешивать и на n -местные предикаты. Так навесив квантор $\forall x_i (1 \leq i \leq n)$ на предикат $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мы получаем $(n-1)$ -местный предикат $\forall x_i Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, зависящий от переменных $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Значение предиката $\forall x_i Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на наборе $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ равно 1 тогда и только тогда, когда для любого $x_i \in M$ значение предиката $Q(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ равно 1.

Пример 2.3. Пусть M – множество натуральных чисел.

1) Пусть $P(x) = (x > 3)$. Тогда $\forall x P(x) = \forall x (x > 3)$ является ложным высказыванием, а $\exists x P(x) = \exists x (x > 3)$ – истинное высказывание.

2) Пусть $Q(x, y) = (x + y = 5)$ – двуместный предикат.

а) Тогда $\forall x Q(x, y) = \forall x (x + y = 5)$ является одноместным предикатом от переменной y . Найдем некоторые его значения:

$$\forall x Q(x, 2) = \forall x (x + 2 = 5) = 0, \quad \forall x Q(x, 10) = \forall x (x + 10 = 5) = 0.$$

б) $\exists y Q(x, y) = \exists y (x + y = 5)$ – является одноместным предикатом от переменной x . Найдем некоторые его значения $\exists y Q(2, y) = (2 + y = 5) = 1$, $\exists y Q(10, y) = (10 + y = 5) = 0$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



105

Заккрыть

2.1.3 Формулы

Определение 2.6. 1. Каждая формула логики высказываний является формулой (логики предикатов).

2. Символ всякого предиката является формулой.

3. Если A и B формулы, x – переменная, то выражения $\bar{A}$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \iff B)$, $\forall x(A)$, $\exists x(A)$ также являются формулами.

4. Формулами являются только те выражения, которые можно получить по пунктам 1 – 3.

Замечание 2.1. Формулы, получаемые по п. 1,2 называются простыми, получаемые с применением п. 3 – сложными. Как и в логике высказываний здесь будут такие же правила об опускании скобок, т.е. операции по силе своего действия располагаются следующим образом $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \iff$. Кроме того считается, что кванторы $\forall, \exists$ связывают сильнее всех остальных операций.

Пример 2.4. Приведем примеры формул: $Q(x)$, $R(x, y, z)$,
 $\forall x A(x, y, z)$, $A \vee \exists x P(x)$,
 $\forall x P(x, y) \Rightarrow \exists y Q(y, z)$, $\forall x (A(x) \wedge B(y))$

Определение 2.7. В формулах $\forall x(A)$ и $\exists x(A)$ формула A называется областью действия кванторов $\forall x$ и $\exists x$ соответственно.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



106

Заккрыть

Пример 2.5. В следующих примерах область действия квантора $\forall x$ подчеркнута линией: $\forall \underline{x} P(\underline{x})$, $A(x) \Rightarrow \forall \underline{x} B(\underline{x}, y)$, $\exists y (\forall \underline{x} B(\underline{x}, y, z))$, $\forall \underline{x} (A(\underline{x}) \Rightarrow B(\underline{x}, y))$.

Определение 2.8. Вхождение переменной в данную формулу называется *связанным*, если оно следует за знаком квантора или находится в области действия какого-либо квантора по этой переменной. Вхождения переменной не являющиеся связанными, называются *свободными*.

Пример 2.6. В следующих формулах связанные вхождения переменной x отмечены одной линией:

- а) $\forall \underline{x} P(\underline{x}, y)$
- б) $\forall \underline{x} P(\underline{x}, y) \rightarrow \exists y Q(x, y)$
- в) $\forall \underline{x} (P(\underline{x}, y) \rightarrow \exists y Q(\underline{x}, y))$

Пусть дана некоторая формула A и множество M , на котором определены все входящие в эту формулу предикаты. Тогда истинное значение формулы A зависит от значений переменных трех видов:

1. логические переменные (обозначающие произвольные высказывания);
2. свободные переменные;

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

107

[Закрыть](#)

3. предикатные переменные (обозначающие произвольные предикаты).

Пример 2.7. Рассмотрим следующую формулу, определенную на множестве натуральных чисел: $\forall x P(x, y) \rightarrow A$. Пусть $P(x, y) = (x > y)$, $y = 3$, $A : 3 < 7$. Тогда

$$\forall x (x > 3) \rightarrow (3 < 7) = 0 \rightarrow 0 = 1$$

Подставляя конкретные значения этих переменных в формулу A мы получим истинностное значение формулы A .

Определение 2.9. Если имеется хотя бы один набор значений переменных, на котором значение *формулы* A равно 1, то формула называется *выполнимой на множестве* M .

Определение 2.10. Формула называется *выполнимой*, если имеется множество, на котором она *выполнима*.

Замечание 2.2. Отметим, что в логике предикатов имеются *формулы, выполнимые* на бесконечных множествах, но не *выполнимые* ни на одном конечном множестве.

Определение 2.11. Если значение *формулы* на любом наборе значений из множества M равно 1, то она называется *тождественно-истинной на множестве* M .

Определение 2.12. Если формула *тождественно-истинна* на любом множестве, то она называется *общезначимой*.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



108

Заккрыть

Общезначимыми являются все тавтологии логики высказываний, а также многие другие формулы. Например: $\forall x(P(x) \vee \overline{P(x)})$; $\forall xP(x) \Rightarrow \exists xP(x)$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



109

Закрыть

2.1.4 Равносильность

Определение 2.13. Пусть даны две *формулы* A и B , определенные на одном и том же множестве M . *Формулы* A и B называются *равносильными на множестве* M , если на любом наборе значений переменных из M они принимают одинаковые значения. В этом случае пишут $A \equiv_M B$,

Определение 2.14. Две формулы A и B называются *равносильными*, если они равносильны на любом множестве. В этом случае пишут $A \equiv B$.

Все формулы, которые равносильны в логике высказываний равносильны и в логике предикатов. Список основных равносильностей логики высказываний дан в пункте 2.1.4.

Рассмотрим еще несколько равносильностей

$$23. \overline{\forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv \exists x_i \overline{P(x_1, x_2, \dots, x_n)};$$

$$24. \overline{\exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv \forall x_i \overline{P(x_1, x_2, \dots, x_n)};$$

$$25. \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge \forall x_i Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \dots, x_n));$$

$$26. \exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \exists x_i Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \dots, x_n));$$

$$27. \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q);$$

$$28. \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q);$$

$$29. \exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q);$$

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

110

[Заккрыть](#)

30. $\exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q)$;
 31. $\forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow Q \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow Q)$;
 32. $\exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow Q \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow Q)$;
 33. $\forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow Q \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow Q)$;
 34. $\exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow Q \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow Q)$;
 35. $Q \rightarrow \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \forall x_i (Q \rightarrow P(x_1, x_2, \dots, x_n))$;
 36. $Q \rightarrow \exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \exists x_i (Q \rightarrow P(x_1, x_2, \dots, x_n))$;
 37. $Q \leftrightarrow \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \forall x_i (Q \leftrightarrow P(x_1, x_2, \dots, x_n))$;
 38. $Q \leftrightarrow \exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \exists x_i (Q \leftrightarrow P(x_1, x_2, \dots, x_n))$
 (где Q не содержит x_i : пункты 27–38);
 39. $\forall x_i \forall x_j P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \forall x_j \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
 40. $\exists x_i \exists x_j P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \exists x_j \exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
 41. $\forall y P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv P(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
 42. $\exists y P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv P(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
 43. $\forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \forall y P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n)$;
 44. $\exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \exists y P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n)$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



111

Закреть

Пример 2.8. Упростить:

$$\begin{aligned} \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) &\stackrel{22}{\equiv} \overline{\exists x(\overline{P(x)}) \vee Q(x)} \vee (\overline{\forall x P(x)} \vee \exists x Q(x)) \\ \exists x Q(x) &\stackrel{24}{\equiv} \forall x(\overline{P(x)} \vee Q(x)) \vee \overline{\forall x P(x)} \vee \exists x Q(x) \stackrel{11}{\equiv} \\ \forall x(P(x) \wedge \overline{Q(x)}) \vee \overline{\forall x P(x)} \vee \exists x Q(x) &\stackrel{25}{\equiv} \\ (\forall x P(x) \wedge \forall x \overline{Q(x)}) \vee \overline{\forall x P(x)} \vee \exists x Q(x) &\stackrel{9}{\equiv} \\ (\forall x P(x) \vee \overline{\forall x P(x)}) \wedge (\forall x \overline{Q(x)} \vee \overline{\forall x P(x)}) \vee \exists x Q(x) &\stackrel{13}{\equiv} \\ 1 \wedge (\forall x \overline{Q(x)} \vee \overline{\forall x P(x)}) \vee \exists x Q(x) &\stackrel{14}{\equiv} \forall x \overline{Q(x)} \vee \overline{\forall x P(x)} \vee \exists x Q(x) \stackrel{24}{\equiv} \\ \overline{\exists x Q(x)} \vee \overline{\forall x P(x)} \vee \exists x Q(x) &\stackrel{13}{\equiv} 1 \vee \overline{\forall x P(x)} \stackrel{17}{\equiv} 1 \end{aligned}$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



112

Закреть

2.1.5 Нормальные формы

Определение 2.15. *Формула*, в которой из операций логики высказываний содержатся лишь $\wedge$, $\vee$, $\neg$, а знаки отрицания относятся только к простым высказываниям и предикатам, называется *предваренной формулой*.

Замечание 2.3. Пользуясь равносильностями $A \Rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$, $A \Leftrightarrow B \equiv (\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee A)$ и 23,24 можно любую формулу преобразовать в равносильную ей предваренную. Например: $\forall x P(x, y) \rightarrow A \equiv \overline{\forall x P(x, y)} \vee A \equiv \exists x \overline{P(x, y)} \vee A$.

Определение 2.16. *Предваренная формула* называется *нормальной*, если в ней либо совсем нет кванторов, либо кванторы вынесены за скобки.

Пример 2.9.

Нормальные формулы: $\forall x \exists y \forall z \overline{A(x, y, z)}, \exists x \forall y (A(x) \wedge B(y)z)), \forall x ((A(x) \wedge B(y)) \vee C(z)), A(x) \vee \overline{B(y)}$

Формулы, не являющиеся нормальными: $\forall x (A(x) \wedge \exists y B(y)), \forall x A(x) \Rightarrow B(y)$.

Теорема 2.2. Любую формулу логики предикатов можно преобразовать в равносильную ей нормальную формулу.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

113

[Закрыть](#)

Доказательство. Возьмем произвольную формулу и будем считать, что она уже приведена к предваренному виду. Доказательство проведем методом математической индукции по числу операций в формуле.

1. Если формула содержит лишь один знак операций, то она очевидно уже является нормальной формулой.

2. Пусть теорема справедлива для формул, содержащих не более k знаков операций. Докажем, что теорема выполняется и для формул, содержащих $k + 1$ знаков.

Пусть имеется формула R , содержащая $k + 1$ знаков операций. Для формулы R возможны только следующие случаи.

а) $R = \forall xP$. Формула $R = \forall xP$ содержит $k + 1$ знак операций. Следовательно, формула P содержит k знаков и по предположению является нормальной. Тогда, очевидно, и формула $\forall xP$ также является нормальной, поскольку приписывая слева к нормальной формуле квантор всеобщности мы вновь получаем нормальную формулу. Например, если $P = \forall \nu \exists y Q(x, y, z, \nu)$, то $\forall xP = \forall x \forall \nu \exists y Q(x, y, z, \nu)$.

б) $R = \exists xP$. Рассматривается аналогично а).

в) $R = \overline{P}$. P содержит k знаков операций и по предположению имеет равносильную ей нормальную формулу. Применяя равносильности 23, 24 можем преобразовать $\overline{P}$ к нормальному виду.

Например. Если $P = \forall x \exists y \forall z Q(x, y, z, \nu)$, то

$$\overline{\forall x \exists y \forall z Q(x, y, z, \nu)} \equiv \exists x \overline{\exists y \forall z Q(x, y, z, \nu)} \equiv$$
$$\exists x \forall y \overline{\forall z Q(x, y, z, \nu)} = \exists x \forall y \exists z \overline{Q(x, y, z, \nu)}.$$


Начало

Оглавление

Приложение

Назад



114

Закреть

г) $R = P \vee Q$, где P и Q уже приведены к нормальному виду. Переименуем в формулах P и Q связанные переменные так, чтобы в формулах P и Q они были разными. Пусть после переименования P и Q есть соответственно, например, $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\exists y_1 \forall y_2 Q(y_1, y_2, \dots, y_m)$. Тогда применяя 29-30 получим $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \exists y_1 \forall y_2 Q(y_1, y_2, \dots, y_m) \equiv \forall x_1 (\exists x_2 \forall x_3 P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \exists y_1 \forall y_2 Q(y_1, y_2, \dots, y_m)) \equiv \forall x_1 \exists x_2 (\forall x_3 P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \exists y_1 \forall y_2 Q(y_1, y_2, \dots, y_m)) \equiv \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \exists y_1 \forall y_2 Q(y_1, y_2, \dots, y_m)) \equiv$ аналогично $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q(y_1, y_2, \dots, y_m))$

д) $R = P \wedge Q$ аналогично.

Теорема доказана.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



115

Закрыть

2.1.6 Проблема разрешения.

Проблема разрешения для логики предикатов ставится также, как и для логики высказываний: необходимо указать эффективный способ (алгоритм) для выяснения того является данная формула выполнимой или нет.

Если мы умеем решать вопрос о выполнимости, то будем уметь решать вопрос и об общезначимости любой формулы. Действительно, если формула $\bar{A}$ - общезначима, то формула A невыполнима. Если же формула не является общезначимой, то это значит имеется некоторое множество M , на котором A на некоторых наборах принимает значение 1, т.е. A является выполнимой.

Если же $\bar{A}$ - выполнима, то A не является общезначимой и если $\bar{A}$ - невыполнима, то A – общезначима.

При решении проблемы разрешения перебор всех вариантов значений переменных не подходит, так как таких вариантов может быть бесконечное множество. Поэтому нужен другой метод, отличный от перебора. Поиски такого способа велись долго, пока в 1936 г. американский математик А. Черч не доказал, что такого способа (алгоритма) нет.

Однако для некоторых частных случаев формул такой метод имеется.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

116

[Закреть](#)

2.1.7 Применение языка логики предикатов для записи математических предложений.

Для записи математических предложений, теорем, аксиом, определений удобен язык логики предикатов. При этом не существует каких-то правил для записи математических предложений. В каждом конкретном случае этот вопрос решается отдельно. Некоторые предикаты будем записывать в символической форме. Например: « x равно y » в виде « $x = y$ », « x меньше y » в виде « $x < y$ », « x минус y по абсолютной величине меньше z » - в виде « $|x - y| < z$ ».

Пример 2.10.

1. Закон коммутативности: $\forall z \forall y \forall x ((x + y = z) \Rightarrow (y + x = z))$
2. Запишем такое предложение «любые два действительных числа либо равны, либо одно из них меньше другого». Через R обозначим множество действительных чисел. $\forall x \forall y ((x \in R) \wedge (y \in R) \Rightarrow (x = y) \vee (x > y) \vee (x < y))$
3. Определение множества M , ограниченного сверху. $\exists y \forall x ((x \in M) \Rightarrow (x \leq y))$.
4. Определение верхней грани α множества M : $\forall x(x \in M \Rightarrow (x \leq \alpha) \wedge \forall \epsilon \exists y((\epsilon > 0) \Rightarrow (y \in M \wedge (\alpha - \epsilon < y))))$

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

117

[Закрыть](#)

5. Система аксиом групп. Пусть M - множество всех элементов группы

Аксиома 2.1. $\forall x \forall y \exists z (((x \in M \wedge (y \in M) \wedge (z \in M) \Rightarrow ((x \cdot y = z) \wedge \forall u (x \cdot y = u) \Rightarrow z = u)))$

Аксиома 2.2. $\forall x \forall y \exists z \forall u \forall v \forall w ((x \in M) \wedge (y \in M) \wedge (z \in M) \wedge (u \in M) \wedge (v \in M) \wedge (w \in M) \Rightarrow ((x \cdot y = u) \wedge (y \cdot z = v) \wedge (z \cdot u = w) \Rightarrow (x \cdot v = w)))$

Аксиома 2.3. $\forall z \forall y \exists x ((x \in M) \wedge (y \in M) \wedge (z \in M) \Rightarrow ((x \cdot z = y) \wedge \forall u ((x \cdot u = y) \Rightarrow (z = u)))$

Теорема 2.3. Если x делится на y , а y делится на z , то x делится на z
 $\forall x \forall y \forall z ((x : y) \wedge (y : z) \Rightarrow (x : z))$

Теорема 2.4. Существует бесконечно много простых чисел. Через $Q(x)$ обозначен предикат, x - простое число. $\forall y \exists x (Q(x) \wedge (x > y))$

Применяя равносильности 1–46 можно для данных математических утверждений построить им равносильные или противоположные утверждения.

Пример 2.11. Дать определение множества не ограниченного сверху. Возьмем отрицания от определения множества ограниченного сверху:



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



118

Заккрыть

$$\begin{aligned} \overline{\exists y \forall x ((x \in M) \Rightarrow (x \leq y))} &\equiv \forall y \overline{\forall x ((x \in M) \Rightarrow (x \leq y))} \equiv \\ \forall y \exists x \overline{(x \in M) \Rightarrow (x \leq y)} &\equiv \forall y \exists x \overline{((x \in M) \vee (x \leq y))} \equiv \\ \equiv \forall y \exists x \overline{((x \in M) \wedge (x \leq y))} &\equiv \forall y \exists x ((x \in M) \wedge (x > y)). \end{aligned}$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



119

Закреть

2.2 Практическая часть

2.2.1 Предикаты.

1.1 Какие из приведенных предложений являются предикатами? В случае положительного ответа определите тип предиката:

1. $2+2=4$;
2. $x + y = 4$, где $x \in N, y \in N$;
3. Лена и Дима;
4. $x + y$;
5. x – член профсоюза, где $x \in$ множество студентов вашей группы;
6. x – столица Беларуси, где $x \in \{\text{Минск, Брест}\}$;
7. река x впадает в море y , где $x \in \{\text{Волга, Урал, Днепр, Неман}\}$,
 $y \in \{\text{Кайспийское, Черное}\}$.

1.2 На множестве натуральных чисел привести примеры различных n -местных предикатов.

1.3 На множестве целых чисел привести примеры предикатов.

1. $P(x, y)$ – выполнимый;
2. $S(x, y, z)$ – тождественно-ложный;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



120

Закрыць

3. $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – тождественно-истинный;
4. $P(x)$ и $Q(y)$ такие, что $P(x) \wedge Q(y)$ – выполнимый, но не тождественно-истинный;
5. $S(x, y), T(x, y)$ – каждый из них не тождественно-истинный, а $S(x, y) \vee T(x, y)$ – тождественно-истинный;
6. $S(x_1)$ и $Q(x_1, x_2, x_3)$ такие, что $S(x_1) \rightarrow Q(x_1, x_2, x_3)$ – тождественно-ложный;
7. $S(x_1, x_2), T(x_1, x_2)$ – каждый из которых не тождественно-ложный, а $S(x_1, x_2) \leftrightarrow T(x_1, x_2)$ – тождественно-ложный;
8. $Q(x, y)$ такой, что $Q(3, y)$ – тождественно-истинный.

1.4 На множестве целых чисел привести примеры предикатов $P(x)$ и $Q(y)$ таких, что $P(x)$ является следствием $Q(y)$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



121

Закрыть

2.2.2 Кванторы.

2.1 Установите истинность следующих высказываний:

1. $\forall x(|x| = x)$, где $x \in N$;
2. $\exists x(|x| = x)$, где $x \in Z$;
3. $\exists x(|x| = -x)$, где $x \in Z$;
4. $\exists x \forall y(x + y = 0)$, где $x, y \in Z$;
5. $\forall x \exists y(x + y = 0)$, где $x, y \in Z$;
6. $\forall x \forall y(x + y = 0)$, где $x, y \in Z$;
7. $\exists x \exists y(x + y = 0)$, где $x, y \in Z$;
8. $\exists x \forall y(x + y = 0)$, где $x, y \in Z$;

2.2 Пусть $M(x, y)$ – предикат « x – является мамой y ». Прочитайте следующие высказывания и определите их истинность (x принадлежит множеству женщин, y – множеству всех людей):

1. $\forall x \exists y M(x, y)$;
2. $\forall y \exists x M(x, y)$;
3. $\exists x \forall y M(x, y)$;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



122

Заккрыть

4. $\exists y \forall x M(x, y);$

5. $\forall x \forall y M(x, y);$

6. $\forall y \forall x M(x, y);$

7. $\exists x \exists y M(x, y);$

8. $\exists y \exists x M(x, y);$

2.3 Определите тип и местность следующих предикатов на множестве целых чисел:

1. $\forall x (x - y \geq 2);$

2. $\forall x (x \cdot y = 0);$

3. $\exists y (\sqrt{|x|} + y = 0);$

4. $\forall x_1 (x_1^2 + |x_2 \cdot x_3| \geq 0);$

5. $\exists y (x + y \geq 2);$

6. $\exists y (x + y > y + x);$

7. $\forall x \forall y \forall z (x \cdot y = z);$

8. $\exists x \exists y \exists z (x \cdot y = z).$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



123

Заккрыть

2.4. На множестве целых чисел построить предикаты:

1. $R(x, y, z)$ – такой, что $\forall y R(x, y, z)$ – тождественно-истинный;
2. $Q(x, y, z)$ – выполнимый, $\forall y Q(x, y, z)$ – тождественно-ложный;
3. $R(x, y, z)$ – такой, что $\exists x R(x, y, z)$ – тождественно-ложный;
4. $S(x, y, z)$ – выполнимый, $\exists y S(x, y, z)$ – тождественно-истинный.

2.5. Прочитайте следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел:

1. $\forall x \exists y (x + y = 7)$;
2. $\exists y \forall x (x + y = 7)$;
3. $\exists x \forall y (x + y = 7)$;
4. $\forall x \forall y (x + y = 7)$;
5. $[\forall x \forall y (x + y = 3)] \rightarrow (3 = 4)$;
6. $\forall x [(x^2 > x) \leftrightarrow ((x > 1) \vee (x < 0))]$;
7. $\forall a \{[(\exists x)(ax = 6)] \leftrightarrow (a \neq 0)\}$;
8. $\forall b \exists a (\forall x) \{x^2 + ax + b > 0\}$;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



124

Заккрыть

$$9. \forall x[((x > 1) \vee (x < 2)) \leftrightarrow (x = x)];$$

$$10. \exists b \forall a (\exists x)(x^2 + ax + b = 0);$$

$$11. \exists a \forall b (\exists x)(x^2 + ax + b = 0).$$

2.6. Определите, является ли один из следующих предикатов, заданный на множестве действительных чисел, следствием другого:

$$1. |x| < 3, x^2 - 3x + 2 = 0;$$

$$2. x^4 = 16, x^2 = -2;$$

$$3. x - 1 > 0, (x - 2)(x + 5) = 0;$$

$$4. \sin x = 3, x^2 + 5 = 0;$$

$$5. x^2 + 5x - 6 > 0, x + 1 = 1 + x;$$

$$6. x^2 \leq 0, x = \sin \pi;$$

$$7. -5 < x, x < 5;$$

$$8. \lg x \leq 1, 1 \leq x \leq 10;$$

$$9. x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 \leq 1;$$

$$10. x^2 < y, y \geq 0;$$

$$11. x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0, |x - 2| = 1.$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



125

Закреть

2.2.3 Формулы логики предикатов.

Образец 1. Восстановить скобки в формуле

$$\forall x \exists y S(x, y) \rightarrow B \vee \exists y \forall x T(x, y).$$

Решение. Кванторы воздействуют сильнее, чем операции логики высказываний. Поэтому скобки в первую очередь ставятся для кванторов. Скобки ставятся в соответствии с определением формулы. Согласно п.2 этого определения $S(x, y)$ является формулой. Поэтому на основе п.3 $\exists y(S(x, y))$ – формула. Тогда опять на этом же основании выражение $\forall x(\exists y(S(x, y)))$ тоже является формулой. Аналогично получаем $\exists y(\forall x(T(x, y)))$.

Для кванторов расставили скобки: $\forall x(\exists y(S(x, y))) \rightarrow B \vee \exists y(\forall x(T(x, y)))$. Осталось расставить скобки для операций логики высказываний: $\forall x(\exists y(S(x, y))) \rightarrow (B \vee \exists y(\forall x(T(x, y))))$,
 $(\forall x(\exists y(S(x, y)))) \rightarrow (B \vee \exists y(\forall x(T(x, y))))$.

3.1. Восстановить скобки:

1. $\forall x S(x, y) \rightarrow B \rightarrow \exists x \forall y T(x, y);$
2. $\exists x R(x) \longleftrightarrow \forall x \forall y Q(x, y) \longleftrightarrow C;$
3. $A \rightarrow B \longleftrightarrow \forall x R(x) \wedge \forall x \forall y S(x, y);$
4. $\forall x \exists y R(x, y) \vee B \wedge \forall x S(x) \rightarrow C;$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



126

Заккрыть

$$5. \overline{\forall x R(x, y) \rightarrow B} \vee \forall x \forall y R(x, y);$$

$$6. B \vee \overline{\forall x R(x) \vee C} \vee B \rightarrow \forall x S(x, y);$$

$$7. \overline{\forall x R(x, y) \vee \overline{B} \rightarrow \overline{C}} \rightarrow A \wedge \forall x S(x);$$

$$8. A \vee B \wedge \overline{\forall x S(x) \rightarrow \overline{B \vee C}}.$$

3.2. Опустить как можно больше скобок:

$$1. (\forall x(\exists y(R(x, y)) \rightarrow Q(x)) \wedge C);$$

$$2. \forall x(\exists y(R(x, y) \rightarrow Q(x)));$$

$$3. \forall x(\exists y(R(x, y) \rightarrow B) \vee Q(x));$$

$$4. \forall x(\exists y(R(x, y) \rightarrow (B \vee Q(x))));$$

$$5. (\forall x(\exists y(R(x, y))) \rightarrow (B \vee Q(x)));$$

$$6. (\forall x(\exists y(R(x, y))) \wedge (B \rightarrow Q(x)));$$

$$7. (\forall x(\exists y(R(x, y))) \vee (B \wedge Q(x)));$$

$$8. ((A \rightarrow B) \vee (C \rightarrow \forall x(\exists y(Q(x, y)))));$$

$$9. \forall x(\exists y(R(x, y) \longleftrightarrow (B \vee Q(x))));$$

$$10. (A \rightarrow \forall x(\exists y((R(x, y) \rightarrow B) \rightarrow C)));$$

$$11. ((B \longleftrightarrow (C \wedge B)) \vee \forall x(R(x) \rightarrow Q(x))).$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



127

Закреть

2.2.4 Равносильность.

Все равносильности, которые имели место в логике высказываний, выполняются и для логики предикатов. Кроме них в логике предикатов есть и свои специфические равносильности:

$$23. \overline{\forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv \exists x_i \overline{P(x_1, x_2, \dots, x_n)};$$

$$24. \overline{\exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv \forall x_i \overline{P(x_1, x_2, \dots, x_n)};$$

$$25. \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge \forall x_i Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \dots, x_n));$$

$$26. \exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \exists x_i Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \dots, x_n));$$

$$27. \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q);$$

$$28. \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q);$$

$$29. \exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q);$$

$$30. \exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q);$$

(где Q не содержит x_i , пункты 29, 30, 31, 32)

$$31. \forall x_i \forall x_j P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \forall x_j \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$32. \exists x_i \exists x_j P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \exists x_j \exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$33. \forall y P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv P(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$34. \exists y P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv P(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$35. \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \forall y P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n);$$

$$36. \exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \exists y P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

4.1. Определите, имеет ли место следующие равносильности для лю-



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



128

Заккрыть

бых предикатов $P(x, y), Q(x), S(x)$. Если нет, то приведите примеры предикатов, подтверждающих это:

1. $\forall x \exists y P(x, y) \equiv \exists x \forall y P(x, y)$;
2. $\forall x (Q(x) \vee S(x)) \equiv \forall x (Q(x) \vee \forall x S(x))$;
3. $\exists x (Q(x) \wedge S(x)) \equiv \exists x (Q(x) \wedge \exists x S(x))$;
4. $\forall x \forall y (Q(x) \vee S(xy)) \equiv \forall x (Q(x) \vee \forall y S(y))$;
5. $\forall x Q(x) \rightarrow \exists x S(x) \equiv \exists x (Q(x) \rightarrow S(x))$;
6. $\exists x Q(x) \vee \forall x S(x) \equiv \exists x (Q(x) \rightarrow S(x))$;
7. $\forall x (Q(x) \rightarrow S(x)) \equiv \forall x Q(x) \rightarrow \forall x S(x)$.

4.2. Имеет ли место следующая равносильность
 $\forall x (S(x) \rightarrow Q(x)) \equiv M \equiv \forall x S(x) \rightarrow \forall x Q(x)$, где

1. $M = \{a\}$,
2. $M = \{a, b\}$.

4.3. Студенты группы МИ-21 хвастаются тем, что они умнее, чем студенты группы МИ-22. На вопрос: "Что значит, что вы умнее?" студенты группы МИ-21 дали следующие ответы:



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



129

Заккрыть

1. Любой из нас умнее любого из них.
2. Самый умный из нас умнее любого из них.
3. Для любого студента нашей группы найдется студент из их группы такой, что наш студент умнее их студента.
4. Каждый студент их группы менее умен хотя бы одного студента нашей группы.
5. В нашей группе имеется студент, который умнее любого студента их группы.

Какие из этих высказываний равнозначные?

4.4. Рассмотрим два определения легкой контрольной работы:

1. Контрольная работа называется легкой, если каждое задание выполнил хотя бы один студент.
2. Контрольная работа называется легкой, если хотя бы один студент выполнил все задания.

Может ли контрольная работа быть легкой в смысле первого определения и трудной (не легкой) в смысле второго?

Может ли контрольная работа быть легкой в смысле второго определения и трудной в смысле первого?



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



130

Закрыть

2.2.5 Выполнимость формул.

Образец. Доказать общезначимость формулы
 $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x).$

Решение. Наиболее распространенными методами доказательств общезначимости формул являются:

1. Метод «от противного»;
2. Метод равносильных преобразований;

1. Предположим, что рассматриваемая формула не является общезначимой. Тогда найдутся конкретные предикаты, обозначим их $P^\bullet(x)$ и $Q^\bullet(x)$, такие, что формула $\exists x (P^\bullet(x) \vee Q^\bullet(x)) \rightarrow \exists x P^\bullet(x) \vee \exists x Q^\bullet(x)$ примет значение «0». Это означает, что

$$\begin{cases} \exists x (P^\bullet(x) \vee Q^\bullet(x)) \equiv 1; \\ \exists x P^\bullet(x) \vee \exists x Q^\bullet(x) \equiv 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \exists x (P^\bullet(x) \vee Q^\bullet(x)) \equiv 1; \\ \exists x P^\bullet(x) \equiv 0; \\ \exists x Q^\bullet(x) \equiv 0; \end{cases}$$

По определению $\exists x P^\bullet(x) = 1$ тогда и только тогда, когда предикат $P^\bullet(x)$ выполнимый. Поскольку $\exists x P^\bullet(x) \equiv 0$, то предикат $P^\bullet(x)$ выполнимым не является. Это означает, что он является тождественно-ложным. Аналогично $Q^\bullet(x)$ – тоже является тождественно-ложным. Тогда $P^\bullet(x) \vee Q^\bullet(x)$ – тождественно-ложный предикат, что противоречит первому равенству. Значит, наше допущение было неправильным и поэтому рассматриваемая формула является общезначимой.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

131

[Закрыть](#)

$$\begin{aligned}
& 2. \exists x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \stackrel{22}{\equiv} \\
& \stackrel{22}{\equiv} \overline{\exists x(P(x) \vee Q(x))} \vee \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \stackrel{26}{\equiv} \\
& \stackrel{26}{\equiv} \forall x (\overline{P(x) \vee Q(x)}) \vee \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \stackrel{11}{\equiv} \\
& \stackrel{11}{\equiv} \forall x (\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}) \vee \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \stackrel{27}{\equiv} \\
& \stackrel{27}{\equiv} \forall x \overline{P(x)} \wedge \forall x \overline{Q(x)} \vee \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \stackrel{26}{\equiv} \\
& \stackrel{26}{\equiv} \overline{\exists x P(x)} \wedge \overline{\exists x Q(x)} \vee \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \stackrel{9}{\equiv} \\
& \stackrel{9}{\equiv} (\overline{\exists x P(x)} \vee \exists x P(x)) \wedge (\overline{\exists x Q(x)} \vee \exists x P(x)) \vee \exists x Q(x) \stackrel{13}{\equiv} \\
& \stackrel{13}{\equiv} 1 \wedge (\overline{\exists x Q(x)} \vee \exists x P(x)) \vee \exists x Q(x) \stackrel{14}{\equiv} \\
& \stackrel{14}{\equiv} \overline{\exists x Q(x)} \vee \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \stackrel{13}{\equiv} \\
& \stackrel{13}{\equiv} 1 \vee \exists x P(x) \stackrel{17}{\equiv} 1
\end{aligned}$$

5.1. В формулах из примера 3.1 область действия квантора общности обозначить одной линией, область действия квантора существования – двумя.

5.2. В следующих формулах связные вхождения переменной x обозначить одной линией, связные вхождения y – двумя.

1. $\forall x P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y);$
2. $\forall x (P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y));$
3. $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow Q(x, y);$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



132

Заккрыть

$$4. \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(x, y));$$

$$5. \forall x (\exists y P(x, y)) \rightarrow Q(x, y);$$

$$6. \forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(x);$$

$$7. \exists x (\forall y P(x, y) \rightarrow Q(x, y));$$

$$8. \exists x (P(x, y) \rightarrow \forall y Q(x, y)).$$

5.3. В следующих формулах логические переменные отметить одной линией, предикатные – двумя, свободные – волнистой.

$$1. A \rightarrow \forall x P(x);$$

$$2. \forall x P(x, y) \rightarrow A;$$

$$3. \forall x P(x, y) \rightarrow A \rightarrow \exists y Q(x, y);$$

$$4. B \rightarrow \forall x P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y);$$

$$5. \forall x P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y) \rightarrow B;$$

$$6. \forall x p(y) \rightarrow \exists y Q(x);$$

$$7. \forall x (P(x, y) \rightarrow Q(x, y)) \vee \exists y S(y);$$

$$8. A \vee \forall x P(x, y) \longleftrightarrow \exists y Q(y);$$

$$9. \forall x \exists y Q(x, y) \rightarrow P(x, y);$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



133

Заккрыть

$$10. \forall x P(x, y) \rightarrow (A \rightarrow \forall y Q(x, y));$$

$$11. \overline{\forall x \exists y Q(x, y)} \vee B \rightarrow P(x);$$

$$12. \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x Q(x, y);$$

$$13. \overline{\forall x R(x) \vee \exists x S(x, y)};$$

$$14. \forall x \overline{S(x, y)} \vee \exists x T(x, y);$$

$$15. \forall x R(x, y) \vee B \longleftrightarrow T(x);$$

$$16. \forall x S(x) \longleftrightarrow T(x, y) \wedge B.$$

5.4. Являются ли выполнимыми следующие формулы:

$$1. \forall x P(x) \rightarrow P(y);$$

$$2. \forall x P(x);$$

$$3. \exists x \forall y (Q(x, y) \wedge \overline{Q(x, y)});$$

$$4. \exists x \exists y (P(x) \wedge \overline{P(y)});$$

$$5. \forall x \forall y (P(x, y) \wedge \overline{P(x, y)});$$

$$6. P(x) \rightarrow \forall y P(y);$$

$$7. \forall x \forall y \forall z (Q(x, y) \vee \overline{Q(y, z)});$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



134

Закреть

$$8. \overline{P(x)} \rightarrow \forall y P(y);$$

$$9. \exists x P(x) \wedge \overline{Q(y)};$$

$$10. \forall x \forall y P(x, y) \rightarrow Q(x, y);$$

$$11. \exists x \exists y (P(x, y) \rightarrow \overline{P(x, y)});$$

$$12. \exists x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall y \exists x R(x, y).$$

5.5. Доказать общезначимость формул:

$$1. \exists x(P(y) \rightarrow P(x));$$

$$2. \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x);$$

$$3. \overline{\exists x P(x)} \rightarrow \overline{\forall x P(x)};$$

$$4. \forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \overline{\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)};$$

$$5. \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x));$$

$$6. \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \rightarrow \overline{\overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}};$$

$$7. \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x));$$

$$8. \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x);$$

$$9. \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x));$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



135

Заккрыть

$$10. \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x));$$

$$11. \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x));$$

$$12. Q(y) \rightarrow \exists xQ(x).$$

5.6. Являются ли общезначимыми формулы:

$$1. \exists xP(x) \rightarrow \forall xP(x);$$

$$2. \forall xP(x) \rightarrow P(y);$$

$$3. P(y) \rightarrow \forall xP(x);$$

$$4. \exists xQ(x) \rightarrow Q(y);$$

$$5. \forall x\exists yQ(x, y) \rightarrow \exists y\forall xQ(x, y);$$

$$6. \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x));$$

$$7. \forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x);$$

$$8. \forall x\forall yS(x, y, z) \leftrightarrow \forall y\forall xS(x, y, z);$$

$$9. \exists x\exists yS(x, y, z) \leftrightarrow \exists y\exists xS(x, y, z).$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



136

Закреть

2.2.6 Нормальные формулы

Образец. Формулу $\forall x P(x, y) \rightarrow \forall y Q(y)$ преобразовать в равносильную ей нормальную.

Решение. Сначала преобразуем формулу в равносильную ей приведенную:

$$\forall x P(x, y) \rightarrow \forall y Q(y) \equiv \overline{\forall x P(x, y)} \vee \forall y Q(y) \equiv \exists x \overline{P(x, y)} \vee \forall y Q(y).$$

Теперь преобразуем приведенную формулу в нормальную: квантор $\forall y$ нельзя вынести за скобки, поскольку во второй части формулы имеется переменная y . В таких случаях переименовывают связанные переменные. В нашем случае y в левой части формулы является свободной переменной, а в правой – связанной. Поэтому, применяя равносильность 37, переименовываем переменную y в правой части формулы, например, на m , и после этого выносим квантор $\forall m$ за скобки на основе равносильности 30:

$$\exists x \overline{P(x, y)} \vee \forall y Q(y) \stackrel{37}{\equiv} \exists x \overline{P(x, y)} \vee \forall m Q(m) \stackrel{30}{\equiv} \forall m (\exists x \overline{P(x, y)} \vee Q(m)) \stackrel{32}{\equiv} \forall m \exists x (\overline{P(x, y)} \vee Q(m)).$$

6.1. Следующие формулы преобразовать в равносильные им приведенные:

1. $\overline{\forall x S(x)} \vee Q(x, y);$
2. $\forall x R(x) \vee \exists x Q(x, y);$
3. $\exists x \forall y Q(x, y) \wedge S(x, y);$

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

137

[Заккрыть](#)

4. $\forall y \exists x Q(x, y) \wedge \exists y S(x, y);$
5. $\forall x (S(x) \vee \exists y Q(x, y)) \wedge \forall y T(x, y);$
6. $\exists y (R(y) \wedge \forall x Q(x, y)) \vee \forall x S(x, y);$
7. $\exists x R(x, y) \rightarrow \forall x \forall y Q(x, y);$
8. $\forall x R(x, y) \leftrightarrow \exists y Q(x, y);$
9. $\forall x R(x) \leftrightarrow \forall y S(x, y);$
10. $A \vee \forall x R(x) \rightarrow \forall y S(x, y);$
11. $\forall x R(x) \vee A \rightarrow \forall y S(x, y);$
12. $\forall x R(x) \rightarrow A \vee \forall y S(x, y);$
13. $\forall x R(x) \rightarrow \forall y S(x, y) \vee A;$
14. $A \vee \forall x S(x, y) \wedge \exists y T(x, y) \rightarrow B;$
15. $\forall x S(x, y) \vee A \wedge \exists y T(x, y) \rightarrow B;$
16. $\forall x S(x, y) \rightarrow A \rightarrow \exists y T(x, y);$
17. $\forall x S(x, y) \rightarrow \exists y T(x, y) \rightarrow A;$
18. $A \rightarrow \forall x S(x, y) \rightarrow \exists y T(x, y).$

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

138

[Закреть](#)

6.2. Формулы из примера 6.1 преобразовать в равносильные им нормальные.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



139

Закрыть

2.2.7 Запись предложений с помощью операций логики предикатов.

7.1. Пусть x и y переменные, заданные на множестве всех людей. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} M(x) &= \langle x \text{—мужчина} \rangle; & \Gamma(x) &= \langle x \text{ живет в Гродно} \rangle; \\ Ж(x) &= \langle x \text{—женщина} \rangle; & \Pi(x, y) &= \langle x \text{ находится в браке с } y \rangle; \\ C(x, y) &= \langle y \text{ старше чем } x \rangle; & Д(x, y) &= \langle x \text{ есть ребенок (сын или} \\ B(x) &= \langle x \text{ живет в Бресте; дочь } y \rangle; \end{aligned}$$

Запишите в символическом виде следующие предложения:

1. у каждого человека есть отец и мать;
2. у каждого, у кого есть отец, есть и мать;
3. каждый человек моложе своих родителей;
4. есть человек, жена сына которого старше его самого;
5. если в Бресте живет женщина, у которой есть брат в Гродно, то в Гродно есть мужчина, у которого есть сестра в Бресте;
6. все дети человека x находятся в браке;
7. есть человек, все дети которого находятся в браке.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



140

Закреть

7.2. Следующие предложения перевести на язык формул:

1. Не все птицы умеют летать.
2. Все рыбы, кроме акул, хорошо относятся к детям.
3. Либо каждый любит кого –нибудь и ни один не любит всех, либо кто – то любит всех, и кто – то не любит никого.
4. Ты можешь обманывать кого – то все время, ты можешь обманывать всех некоторое время, но ты не можешь обманывать всех все время.

7.3. Пусть $P(x)$ = « x - простое число», $T(x)$ = « x - чётное число», $Q(x)$ = « x - нечётное число», $S(x, y)$ = « x делится на y ». Перевести на русский язык:

1. $P(2) \wedge T(2)$;
2. $\forall x(S(2, x) \rightarrow T(x))$;
3. $\forall x(T(x) \wedge S(x, 6))$;
4. $\forall x(\overline{T(x)} \rightarrow \overline{S(2, x)})$;
5. $\forall x(T(x) \wedge \forall y(S(x, y) \rightarrow P(y)))$;
6. $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(T(y) \wedge S(x, y)))$;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



141

Заккрыть

7. $\forall x(Q(x) \rightarrow \forall y(P(y) \rightarrow \overline{S(x, y)}))$.

7.4. Записать следующие предложения:

1. Имеется хотя бы один предмет, обладающий свойством $P(x)$ (выражение «имеет хотя бы один предмет» понимается в том смысле, что «имеется предмет»);
2. Не существует предмета, обладающего свойством $P(x)$ (или «неправда, что существует предмет, обладающий свойством $P(x)$ »);
3. Не существует больше одного предмета, обладающего свойством $P(x)$ (или «существует не больше одного предмета, обладающего свойством $P(x)$ »);
4. Существует ровно один предмет, обладающий свойством $P(x)$ (или «существует предмет, обладающий свойством $P(x)$ и не существует больше одного предмета, обладающего свойством $P(x)$ »);
5. Существует не больше двух предметов, обладающих свойством $P(x)$ (или «для любых трёх предметов x, y, z , если каждый из них обладает свойством $P(x)$, то $x = y$ или $y = z$ »);
6. Существует ровно 2 предмета, обладающих свойством $P(x)$ (или «существует хотя бы два предмета, обладающих свойством $P(x)$, и не существует больше двух предметов, обладающих этим свойством»).



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



142

Закреть

2.3 Контрольные тесты

Пройти тестирование по теме "Логика предикатов"



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



143

Закрыть

Глава 3

Комбинаторный анализ

3.1 Теоретическая часть

3.1.1 Правила суммы, произведения

Основная задача комбинаторики — **пересчёт** и **перечисление** элементов в конечных множествах.

Определение 3.1. *Пересчёт* — определение числа элементов данного конечного множества, обладающих тем или иным свойством или группой свойств.

Определение 3.2. *Перечисление* — это выделение всех элементов данного конечного множества, обладающих тем или иным свойством или группой свойств.

Определение 3.3. Пусть X — конечное множество, состоящее из n элементов. Тогда:

- 1) говорят, что мощность множества X равна n и пишут $|X| = n$;
- 2) говорят, что элемент $x \in X$ может быть выбран n способами;
- 3) множество X называют n -множеством.

Лемма 3.1. (*Правило суммы*). Пусть $X_1, X_2, \dots, X_k$ — попарно непересекающиеся множества, то есть $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Тогда:

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

144

[Заккрыть](#)

$$|\bigcup_{i=1}^k X_i| = \sum_{i=1}^k |X_i| \quad (3.1)$$

Замечание 3.1. Для $k = 2$ *правило суммы* формулируется следующим образом. Если объект x может быть выбран m способами, объект y — n другими способами, то выбор «либо x , либо y » может быть выполнен $m + n$ способами.

Пример 3.1. В салоне бытовой техники при покупке телевизора предлагается подарок: либо одна из трёх видов соковыжималок, либо одна из двух видов кофемолок. Сколькими способами можно выбрать подарок?

Решение. По *правилу суммы* искомое число способов равно $3 + 2 = 5$.

Замечание 3.2. Упорядоченные последовательности элементов будем заключать в скобки вида $\langle \rangle$, неупорядоченные — в скобки вида $\{ \}$.

Лемма 3.2. (*Правило умножения*). Если объект x может быть выбран m способами и после каждого из таких способов объект y может быть выбран способами n , то выбор упорядоченной пары $\langle x, y \rangle$ может быть выполнен $m \cdot n$ способами.

Доказательство. Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ — множество элементов, из которых выбирается объект x , и пусть для каждого $1 \leq i \leq m$ X_i — множе-



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



145

Закреть

ство пар $\langle x, y \rangle$, у которых первым элементом является a_i . Тогда множества $X_1, X_2, \dots, X_m$ попарно не пересекаются и для каждого $1 \leq i \leq m$ выполняется $|X_i| = n$. Очевидно, множеством X , из которого выбирается упорядоченная пара $\langle x, y \rangle$ является множество $X = \bigcup_{i=1}^m X_i$. Тогда по [правилу суммы](#) получаем, что $|X| = |\bigcup_{i=1}^m X_i| = \sum_{i=1}^m |X_i| = m \cdot n$. Доказано.

Пример 3.2. Студенту необходимо пообедать. У него имеются деньги только на первое и второе блюда. Первое блюдо можно выбрать из трёх вариантов: борщ, щи, рассольник, второе — из четырёх: блинчики, биточки, плов, колбаски. Сколькими способами студент может выбрать обед?

Решение. Первое блюдо x можно выбрать $m = 3$ способами, второе y — $n = 4$. Тогда по [правилу произведения](#) искомое число способов равно $m \cdot n = 3 \cdot 4 = 12$.

Замечание 3.3. Мы сформулировали и доказали [правило произведения](#) для последовательности из двух объектов. В общем случае [правило произведения](#) формулируется следующим образом. Если объект x_1 может быть n_1 выбран способами, после чего объект x_2 может быть выбран n_2 способами и для каждого $i (2 \leq i \leq k-1)$ после выбора объектов $x_1, x_2, \dots, x_i$ объект x_{i+1} может быть выбран n_{i+1} способами, то выбор упорядоченной последовательности $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$ может быть

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

146

[Закреть](#)

выполнен $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами. Обобщённое *правило произведения* доказывается методом математической индукции.

Пример 3.3. У студента имеется 5 маек, 3 джинсов, 2 пары носков и 1 пара кроссовок. Он признаёт любое сочетание этих элементов. Сколькими способами он может одеться?

Решение. Майку x_1 студент может выбрать $n_1 = 5$ способами, джинсы x_2 — $n_2 = 3$ способами, носки x_3 — $n_3 = 2$ способами и кроссовки x_4 — $n_4 = 1$ способом. Тогда по обобщённому правилу произведения искомое число способов равно $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



147

Заккрыть

3.1.2 Выборки. Размещения

Определение 3.4. Набор элементов $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ из множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ называется *выборкой* объекта r из n элементов или (n, r) -выборкой.

Определение 3.5. Выборка называется *упорядоченной* (неупорядоченной), если порядок следования элементов в ней определён (не определён).

Пример 3.4. Пусть $X = \{a, b, c, d\}$. Тогда:

- 1) $\langle a, c, d \rangle$ — *упорядоченная* $(4, 3)$ -выборка;
- 2) $\{b, a\}$ — *неупорядоченная* $(4, 2)$ -выборка;
- 3) $\langle c, d, a \rangle$ — *упорядоченная* $(4, 3)$ -выборка;
- 4) $\{a, b\}$ — *неупорядоченная* $(4, 2)$ -выборка;
- 5) $\langle a, a, c \rangle$ — *упорядоченная* $(4, 3)$ -выборка;
- 6) $\{b, c, b\}$ — *неупорядоченная* $(4, 3)$ -выборка.

Замечание 3.4. Две *упорядоченные* (неупорядоченные) выборки, у которых одни и те же элементы, но разный порядок следования, считаются различными (одинаковыми). Так, в предыдущем примере *выборки* 2) и 4) — одинаковые, а *выборки* 1) и 3) — различные.

Замечание 3.5. В *выборках* могут допускаться или не допускаться повторения элементов. Так, в примере 1.4 в *выборках* 1) — 4) повторений не было, а в выборках 5), 6) — были.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



148

Закреть

Определение 3.6. Упорядоченная (n, r) -*выборка*, в которой элементы могут повторяться называется (n, r) -*размещением с повторениями*.

Определение 3.7. Упорядоченная (n, r) -*выборка*, в которой элементы попарно различны, называется (n, r) -*размещением без повторений* или просто (n, r) -размещением.

Определение 3.8. Перестановкой n -множества X называется (n, n) -размещение без повторений.

Определение 3.9. Неупорядоченная (n, r) -выборка, в которой элементы могут повторяться, называется (n, r) -*сочетанием с повторениями*.

Определение 3.10. Неупорядоченная (n, r) -выборка, в которой элементы попарно различны, называется (n, r) -сочетанием без повторений или просто (n, r) -сочетанием.

Пример 3.5. Пусть $X = \{a, b, c\}$. Тогда:

- 1) всевозможными $(3, 2)$ -размещениями с повторениями являются $\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, c \rangle$;
- 2) всевозможными $(3, 2)$ -размещениями без повторений являются $\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle$;
- 3) всевозможными *перестановками* множества X являются $\langle a, b, c \rangle$,



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



149

Закреть

$\langle a, c, b \rangle, \langle b, a, c \rangle, \langle b, c, a \rangle, \langle c, a, b \rangle, \langle c, b, a \rangle;$

4) всевозможными $(3, 2)$ -сочетаниями с повторениями являются $\{a, a\},$

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, b\}, \{b, c\}, \{c, c\};$

5) всевозможными $(3, 2)$ -сочетаниями без повторений являются $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}.$

Введём следующие обозначения:

$\bar{A}_n^r$ — число всех (n, r) -размещений с повторениями;

A_n^r — число всех (n, r) -размещений без повторений;

P_n — число всех перестановок;

$\bar{C}_n^r$ — число всех (n, r) -сочетаний с повторениями;

C_n^r — число всех (n, r) -сочетаний без повторений.

Лемма 3.3.

$$\bar{A}_n^r = n^r. \quad (3.2)$$

Доказательство. Каждое (n, r) -размещение с повторениями является упорядоченной последовательностью длины r . Поскольку повторение элементов допускается, то каждый член этой последовательности может быть выбран n способами, откуда по обобщённому правилу произведения и получаем, что $\bar{A}_n^r = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_r = n^r$. Лемма доказана.

Пример 3.6. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр $0, 1, \dots, 9$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



150

Закреть

Решение. Поскольку $n = 10, r = 4$ и повторение цифр допускается, то по формуле (3.2) получаем, что количество четырёхзначных чисел равно $10^4 = 10000$.

Пример 3.7. *Государственный регистрационный номер легкового автомобиля в Беларуси состоит из четырёхзначного числа, двух букв и номера области. Сколько различных автомобильных номеров может выдать ГАИ в Брестской области.*

Решение. В предыдущем примере мы установили, что четырехзначных чисел имеется 10000. В госномере используются 9999 чисел (число 0000 не используется). В качестве букв используются следующие А, В, С, Е, Н, І, К, М, О, Р, Т. Поскольку повторение букв допускается, то двухбуквенных комбинаций будет $11^2 = 121$. Наконец, Брестская область имеет номер 1. Следовательно, по обобщенному правилу произведения получаем, что в Брестской области ГАИ может выдать $9999 \cdot 121 \cdot 1 = 1209879$ госномеров.

Замечание 3.6. Обозначим $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, где $0! = 1$.

Лемма 3.4.

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (3.3)$$

Доказательство. Каждое (n, r) -размещение представляет собой упорядоченную последовательность длины r . Поскольку повторение элементов не допускается, то первый член может быть выбран n способами,

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

151

[Заккрыть](#)

второй — $(n-1)$ способами, третий — $(n-2)$ способами и т.д. Последний r -ый член в этой последовательности может быть выбран $(n-(r-1))$ способами. Тогда по обобщенному правилу произведения получаем, что

$$A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(r-1)) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(r-1)) \cdot (n-r) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Лемма доказана.

Пример 3.8. В аудитории, где проходит экзамен, имеется 10 столов. Экзамен сдаёт 6 студентов. Сколькими способами можно рассадить студентов, при условии, что один стол выделен экзаменатору, а за каждым из остальных столов может сидеть не более одного студента.

Решение. Поскольку один стол выделен экзаменатору, то для студентов остаётся 9 столов. Каждая рассадка студентов за столами является, по сути, упорядоченной последовательностью без повторений. Поэтому по формуле (3.3) получаем, что искомое число способов равно

$$A_9^6 = \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 60480.$$

Лемма 3.5.

$$P_n = n! \tag{3.4}$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



152

Заккрыть

Доказательство. Действительно, **перестановки** представляют собой (n, n) -размещения без повторений. Поэтому из (3.3) получаем

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!.$$

Замечание 3.7. Из (3.4) легко получить следующую формулу

$$P_n = n \cdot P_{n-1} \quad (3.5)$$

Пример 3.9. На экзамен первыми заходят 6 студентов. Сколько имеется вариантов очередности захода этих студентов?

Решение. Здесь мы имеем дело с **перестановками множества**, состоящего из 6 студентов. Поэтому по формуле (3.4) получаем, что имеется $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ вариантов очередности захода 6 студентов на экзамен.

Определение 3.11. **Перестановкой** с повторениями n -множества называется всякая упорядоченная последовательность, в которой первый элемент n -множества встречается k_1 раз, второй — k_2 раз, и т.д., n -ый элемент исходного множества — k_n раз.

Замечание 3.8. Число перестановок с повторениями из определения 3.11 обозначим через $P_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}$.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

153

[Закреть](#)

Лемма 3.6.

$$P_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} \quad (3.6)$$

Доказательство. В каждой из рассматриваемых перестановок имеется $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ элементов. Если бы все эти элементы были попарно различны, то всего имелось бы $P_{k_1+k_2+\dots+k_n} = (k_1 + k_2 + \dots + k_n)!$ перестановок. Исходя из того, что из одного набора, в котором имеется ровно k_i ($1 \leq i \leq n$) элементов и все они одинаковые, "получается" k_i упорядоченных наборов (перестановок), в каждом из которых все элементы попарно различны приходим к выводу, что $P_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} = \frac{P_{k_1+k_2+\dots+k_n}}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$. Доказано.

Замечание 3.9. Формула (3.4) является частным случаем формулы (3.6) если положить, что $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$.

Пример 3.10. Сколько различных слов можно получить из слова «КОЛОБОК», переставляя в нём буквы? Словом при этом считается любая последовательность букв.

Решение. В слове «КОЛОБОК» буква К повторяется два раза, то есть $k_1 = 2$, буква О — три раза, то есть $k_2 = 3$, буквы Л и Б — по

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

154

[Закреть](#)

одному разу, то есть $k_3 = k_4 = 1$. Поэтому из букв слова «КОЛОБОК» можно составить

$$P_{(2,3,1,1)} = \frac{(2+3+1+1)!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1} = 420$$

различных слов.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



155

Закрыть

3.1.3 Сочетания

Лемма 3.7.

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \quad (3.7)$$

Доказательство. Из одной (n, r) -выборки без повторений можно получить одно (n, r) -сочетание или $r!$ (n, r) -размещений. Это значит на одно (n, r) -сочетание без повторений "приходится" $r!$ (n, r) -размещений без повторений. Поэтому

$$A_n^r = r! \cdot C_n^r \text{ или } C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}. \text{ Доказано.}$$

Пример 3.11. *Определить число двухэлементных подмножеств во множестве, состоящем из четырёх элементов.*

Решение. Поскольку множества являются неупорядоченными наборами элементов без повторений то, применяя формулу (3.7) получим

$$C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6.$$

Пример 3.12. *В скольких случаях в игре в «Спортлото» (5 из 36) будут правильно выбраны:*

- а) ровно 3 номера;
- б) ровно 4 номера;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



156

Заккрыть

- в) ровно 5 номеров;
 г) не менее 3 номеров.

Решение. Здесь мы имеем дело с неупорядоченными выборами без повторений, то есть с сочетаниями без повторений. Поэтому будем применять формулу (3.7).

а) 3 номера из 5 «правильных» можно выбрать C_5^3 способами, а оставшиеся 2 «неправильных» — C_{31}^2 . Далее по правилу произведения получаем $C_5^3 \cdot C_{31}^2 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} \cdot \frac{31!}{(31-2)! \cdot 2!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{31!}{29! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2!} \cdot \frac{30 \cdot 31}{2!} = 10 \cdot 465 = 4650$;

$$\text{б) } C_5^4 \cdot C_{31}^1 = \frac{5!}{(5-4)! \cdot 4!} \cdot \frac{31!}{(31-1)! \cdot 1!} = 5 \cdot 31 = 155;$$

$$\text{в) } C_5^5 \cdot C_{31}^0 = \frac{5!}{(5-5)! \cdot 5!} \cdot \frac{31!}{(31-0)! \cdot 0!} = 1;$$

$$\text{г) } 4650 + 155 + 1 = 4806.$$

Отметим некоторые свойства величины C_n^r .

Свойство 3.1.

$$C_n^0 = 1 \quad (3.8)$$

Свойство 3.2.

$$C_n^n = 1 \quad (3.9)$$

Замечание 3.10. Свойства 1 и 2 следуют из формулы (3.7) соответственно при $r = 0$ и $r = n$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



157

Закреть

Свойство 3.3.

$$C_n^r = C_n^{n-r}. \quad (3.10)$$

Доказательство. Применяя формулу (3.7) получаем:

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n - (n - r))! \cdot (n - r)!} = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!} = C_n^r. \text{ Доказано.}$$

Свойство 3.4.

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1} \quad (3.11)$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-r) \cdot r!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-(r-1))! \cdot (r-1)!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)! \cdot r!} + \frac{(n-1)!}{(n-r)! \cdot (r-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-r-1)! \cdot (r-1)! \cdot r} + \\ &+ \frac{(n-1)!}{(n-r-1)! \cdot (n-r) \cdot (r-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot (n-r) + (n-1)! \cdot r}{(n-r-1)! \cdot (n-r) \cdot (r-1)! \cdot r} = \\ &= \frac{(n-1)! \cdot (n-r+r)!}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = C_n^r. \text{ Доказано.} \end{aligned}$$

Замечание 3.11. Формула (3.11) называется формулой Паскаля.

Лемма 3.8.

$$\bar{C}_n^r = C_{n+r-1}^r \quad (3.12)$$

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

158

[Закреть](#)

Пример 3.13. На ужин на десерт предлагаются фрукты трёх видов: яблоки, груши и апельсины. При этом можно взять ровно два фрукта. Сколько вариантов выбора десерта имеется?

Решение. Поскольку порядок выбора роли не играет, то речь идёт о сочетаниях. Кроме того, по условию примера не запрещается брать два фрукта одного вида. Поэтому повторения допускаются и мы можем применить формулу (3.12):

$$\bar{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = 6$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



159

Закрыть

3.1.4 Разбиения

Пусть дано множество X , состоящее из n элементов. Рассмотрим разбиение множества X на k множеств $X_1, X_2, \dots, X_k$, состоящих соответственно из $n_1, n_2, \dots, n_k$ элементов таких, что:

1) объединение множеств $X_1, X_2, \dots, X_k$, даёт множество X , то есть $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$;

2) пересечение любых двух множеств $X_1, X_2, \dots, X_k$ является пустым множеством, то есть $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$;

3) некоторые из множеств $X_1, X_2, \dots, X_k$ могут быть пустыми, то есть для некоторых i ($1 \leq i \leq k$) может выполняться $X_i = \emptyset$.

Тогда число таких разбиений, при условии, что набор $X_1, X_2, \dots, X_k$ является упорядоченной последовательностью, обозначим через $C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

Лемма 3.9.

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} \quad (3.13)$$

Доказательство. Из способа разбиения множества X на подмножества $X_1, X_2, \dots, X_k$ следует, что каждое из этих подмножеств является **сочетанием без повторений**. Поэтому первое множество X_1 может быть выбрано $C_n^{n_1}$ способами, второе X_2 — $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами и т. д., последнее множество X_k может быть выбрано $C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k}$ способами. Тогда по

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

160

[Закреть](#)

правилу произведения получаем

$$\begin{aligned}
 C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} &= C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \dots \cdot C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{(n-n_1)! \cdot n_1!} \times \\
 &\times \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)! \cdot n_2!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1})!}{(n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}-n_k)! \cdot n_k!} = \\
 &= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot (n-(n_1+n_2+\dots+n_k))! \cdot n_k!} = \\
 &= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot (n-n)! \cdot n_k!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}. \text{ Доказано.}
 \end{aligned}$$

Пример 3.14. В блоке студенческого общежития имеются две трехместные комнаты и две двухместные. Сколькими способами можно расселить 10 десять человек в одном блоке?

Решение. По условию множество X , состоящее из 10 студентов, необходимо разбить на четыре подмножества X_1, X_2, X_3, X_4 такие, что $n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 2, n_4 = 2$. Поскольку все условия, необходимые для применения леммы 1.9 выполняются, то по формуле (3.13) получаем:

$$C_{10}^{3,3,2,2} = \frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 25200.$$

Это значит, имеется 25200 способов расселения 10 студентов в четырёх комнатах одного блока.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



161

Заккрыть

3.1.5 Формула бинома Ньютона

Лемма 3.10.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^k \cdot y^{n-k} \quad (3.14)$$

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что формула (3.14) при $n = 1$ выполняется. Пусть $n \geq 2$. Левая часть формулы (3.14) представляет собой произведение из n сомножителей: $(x + y) \cdot (x + y) \cdot \dots \cdot (x + y)$. При их перемножении мы получим 2^n слагаемых, среди которых будут и одинаковые члены. Подсчитаем количество одинаковых членов $x^k \cdot y^{n-k}$. Такие члены мы будем получать, если в k скобках $(x + y)$ будем брать x , а в оставшихся $(n - k)$ скобках — y . Поскольку такие **выборки** — **неупорядоченные**, то число одинаковых членов $x^k \cdot y^{n-k}$ будет равно C_n^k . Доказано.

Отметим несколько следствий из леммы 3.10.

Следствие 3.1.

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \quad (3.15)$$

Действительно, при $x = y = 1$ из (3.14) получаем

$$(1 + 1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k.$$

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

162

[Заккрыть](#)

Следствие 3.2.

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k = 0 \quad (3.16)$$

Итак, (3.16) получаем из формулы (3.14) при $x = -1, y = 1$.

Следствие 3.3.

$$\sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1} \quad (3.17)$$

Следствие 3.4.

$$C_{n+r}^k = \sum_{i=0}^k C_n^i \cdot C_r^{k-i} \quad (3.18)$$

Замечание 3.12. Формула (3.14) называется формулой бинома Ньютона, а числа C_n^k — биномиальными коэффициентами. Биномиальные коэффициенты образуют т.н. треугольник Паскаля (рис. 3.1).

Вычислив соответствующие значения, мы получим треугольник (рис. 3.2):

Замечание 3.13. Треугольник Паскаля обладает некоторыми свойствами, которые следуют из соответствующих свойств биномиальных коэффициентов (п. 1.3).

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

163

[Закреть](#)

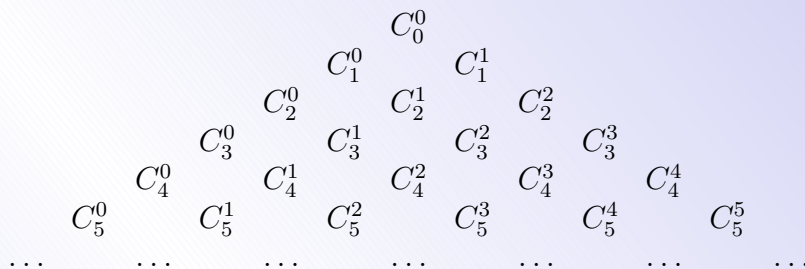


Рис. 3.1.

1. По боковым сторонам треугольника расположены единицы (свойства **1** и **2**).
2. Треугольник симметричен относительно высоты (свойство **3**).
3. Сложив два рядом расположенных элемента в одной строке мы получим элемент, расположенный под ними (свойство **4**).

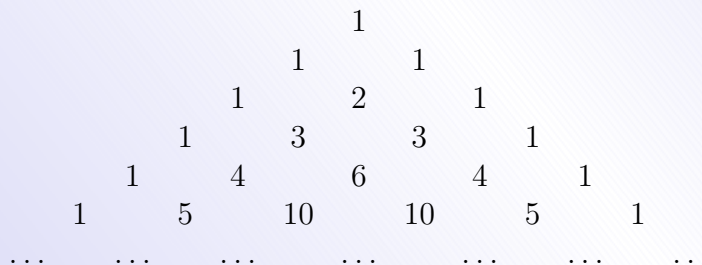


Рис. 3.2.

Замечание 3.14. В треугольнике Паскаля в $(n+1)$ -ой $(n \geq 1)$ стро-



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



164

Закреть

ке записаны коэффициенты, получающиеся при раскрытии скобок в выражении $(x + y)^n$. Например, в шестой строке записаны числа 1, 5, 10, 10, 5, 1. Поэтому $(x + y)^5 = y^5 + 5y^4x + 10y^3x^2 + 10y^2x^3 + 5yx^4 + x^5$.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

165

[Закрыть](#)

3.1.6 Полиномиальная формула

В предыдущем пункте мы рассмотрели формулу **бинома Ньютона**. Здесь мы рассмотрим полиномиальную формулу, которая является обобщением формулы бинома Ньютона.

Лемма 3.11.

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots \cdot x_k^{n_k} \quad (3.19)$$

где суммирование ведётся по всем наборам $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ таким, что:

- 1) $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$;
- 2) $n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, \dots, n_k \geq 0$.

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что формула (3.19) при $n = 1$ выполняется. Пусть $n \geq 2$. При перемножении n скобок $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)$ мы получим k^n слагаемых, среди которых будут и одинаковые. Подсчитаем количество одинаковых членов $x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots \cdot x_k^{n_k}$. Такие члены мы будем получать, если в одних n_1 скобках мы будем брать x_1 , в других n_2 скобках — будем брать x_2 и т. д. в оставшихся n_k скобках — будем брать x_k . Поскольку число таких комбинаций равно $C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$, то и число одинаковых членов $x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots \cdot x_k^{n_k}$ будет равно $C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Доказано.

Определение 3.12. Числа $C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ называются полиномиальными коэффициентами.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

166

[Заккрыть](#)

Пример 3.15. Найти коэффициент при $x^2y^3z^5$ в разложении степени $(x + y + z)^{10}$.

Решение. Применяя формулу (3.13) мы получаем, что искомый коэффициент равен

$$C_{10}^{2,3,5} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 2520.$$

Пример 3.16. Найти коэффициент при x^2y^3 в разложении степени $(x + y + 5)^8$.

Решение. Найдём вначале коэффициент при $x^2y^3z^3$ в разложении степени $(x + y + z)^8$:

$$C_8^{2,3,3} = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = 560.$$

Это значит в разложении $(x + y + z)^8$ имеется член $560x^2y^3z^3$. Положив $z = 5$ мы получим, что в разложении $(x + y + 5)^8$ имеется член $70000x^2y^3$. Следовательно, коэффициент при x^2y^3 в разложении степени $(x + y + 5)^8$ равен 70000.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



167

Закреть

3.1.7 Формула включений и исключений

Формула включений и исключений — это формула для нахождения числа элементов в объединении нескольких конечных множеств.

Лемма 3.12.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (3.20)$$

Доказательство. Пусть $|A| = m$, $|B| = n$ и $|A \cap B| = k$. Тогда по диаграмме Эйлера-Венна (рисунке 3.3) получаем:

$$|A \cup B| = (m - k) + k + (n - k) = m + n - k = |A| + |B| - |A \cap B|. \text{ Доказано.}$$

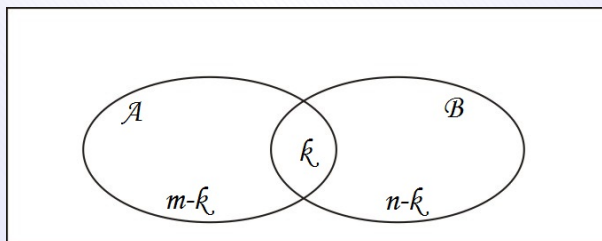


Рис. 3.3.

Замечание 3.15. Мы получили формулу для нахождения количества элементов в объединении двух множеств. Аналогично можно получить и формулу для нахождения количества элементов в объединении трёх множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| \quad (3.21)$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



168

Закреть

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

169

[Закрыть](#)

Пример 3.17. Из 100 студентов английский язык знают 45 человек, немецкий — 35, французский — 20, английский и немецкий — 8, английский и французский — 3, немецкий и французский — 4, все три языка — 3 человека. Сколько человек не знает ни одного из указанных языков?

Решение. Пусть: U — множество всех студентов;

A — множество всех студентов, знающих английский язык;

B — множество всех студентов, знающих немецкий язык;

C — множество всех студентов, знающих французский язык.

Тогда $|U| = 100$, $|A| = 45$, $|B| = 35$, $|C| = 20$, $|A \cap B| = 8$, $|A \cap C| = 3$, $|B \cap C| = 4$, $|A \cap B \cap C| = 3$.

Искомое множество — это $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$. Тогда по формуле (3.21) получаем:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + \\ &+ |A \cap B \cap C| = (45 + 35 + 20) - (8 + 3 + 4) + 3 = 100 - 15 + 3 = 88. \end{aligned}$$

Поскольку $\overline{A \cup B \cup C} = U \setminus (A \cup B \cup C)$, то $|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |U| - |A \cup B \cup C| = 100 - 88 = 12$. Таким образом, ни один из трёх указанных языков не знает 12 человек.

Укажем формулу для нахождения количества элементов в объединении n множеств.

Лемма 3.13.

$$\begin{aligned}
 |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \\
 &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \dots + \\
 &+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + \\
 &+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Доказательство леммы проведём по принципу математической индукции относительно n . Случай $n = 2$ рассмотрен в лемме 3.12. Предположим, что формула (3.22) выполняется для $n = m$ множеств $A_1, A_2, \dots, A_m$. Докажем, что формула выполняется и для $n = m + 1$ множеств $A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1}$. Для этого рассмотрим $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \cup A_{m+1}$ и представим его в виде объединения двух множеств $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \cup A_{m+1}$. Тогда по формуле (3.20) получаем: $|(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \cup A_{m+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| + |A_{m+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \cap A_{m+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| + |A_{m+1}| - |B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m|$, где $B_i = A_i \cap A_{m+1}$, $1 \leq i \leq m$.

По индуктивному предположению получаем:

$$\text{а) } |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = \sum_{i=1}^m |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|;$$

$$\text{б) } |B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m| = \sum_{i=1}^m |B_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} |B_{i_1} \cap B_{i_2}| + \dots$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



170

Закреть

$$\begin{aligned}
& + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m} |B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap B_{i_3}| + \\
& + \dots + (-1)^{m-1} \cdot |B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m| = \sum_{i=1}^m |A_i \cap A_{m+1}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} |A_{i_1} \cap \\
& A_{i_2} \cap A_{m+1}| + \\
& + \dots + (-1)^{m-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m+1}|.
\end{aligned}$$

Подставим а) и б) в ранее полученное выражение: $|(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \cup A_{m+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| + |A_{m+1}| - |B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m| = \sum_{i=1}^m |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots + (-1)^{m-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| + |A_{m+1}| - (\sum_{i=1}^m |A_i \cap A_{m+1}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{m+1}| + \dots + (-1)^{m-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m+1}|) = \sum_{i=1}^{m+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \dots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m+1}|$. Для $n = m + 1$ лемма выполняется. Доказано.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



171

Закреть

3.1.8 Задача о беспорядках

Рассмотрим ещё одну форму записи **формулы включений и исключений**. Пусть дано множество X , состоящее из N элементов и пусть даны m свойств $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, некоторыми из которых могут обладать одни и не обладать другие элементы множества X . Через $N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$ обозначим количество элементов множества X , обладающих свойствами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$. Наконец, количество элементов множества X , не обладающих ни одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, обозначим через $N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_m)$. Тогда формула включений и исключений в такой интерпретации примет вид

$$\begin{aligned} N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_m) = & N - \sum_{i=1}^m N(\alpha_i) + \sum N_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m}(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) + \\ & + \dots + (-1)^k \cdot \sum N_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m}(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}) + \\ & + \dots + (-1)^m \cdot N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Пример 3.18. Пусть $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ и пусть:

$$\alpha_1(x) = (x\text{-чётное});$$

$$\alpha_2(x) = (x > 6);$$

$$\alpha_3(x) = (2 < x < 8).$$

Тогда нетрудно убедиться в том, что

$$N(\alpha_1) = 5$$

$$N(\alpha_2) = 4$$

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

172

[Закреть](#)

$$N(\alpha_3) = 5$$

$$N(\alpha_1, \alpha_2) = 2$$

$$N(\alpha_1, \alpha_3) = 2$$

$$N(\alpha_2, \alpha_3) = 1$$

$$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

$$N = 10$$

Применим формулу (1.23):

$$\begin{aligned} N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3) &= N - (N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + N(\alpha_3)) + (N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + \\ &+ N(\alpha_2, \alpha_3)) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 10 - (5 + 4 + 5) + (2 + 2 + 1) - 0 = 1. \end{aligned}$$

Это значит имеется ровно один элемент множества X , который не обладает ни одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Этим элементом является 1.

Пример 3.19. (Задача о беспорядках). Имеется n предметов $a_1, a_2, \dots, a_n$ и n ячеек $b_1, b_2, \dots, b_n$. Предметы необходимо разложить по ячейкам так, чтобы никакой предмет $a_i (1 \leq i \leq n)$ не попал в ячейку b_i . Сколькими способами можно разложить предметы по ячейкам при указанном ограничении?

Решение. Пусть множеством X является множество всех вариантов разложения предметов по ячейкам. Очевидно, таких вариантов будет $N = n!$. Для каждого $1 \leq i \leq n$ определим свойство $\alpha_i = (\text{предмет } a_i$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



173

Заккрыть

находится в ячейке b_i). Через $N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$ обозначим число всех расположений, при которых предмет a_{i_k} ($1 \leq k \leq n$) находится в ячейке b_{i_k} . Это число равно $(n - k)!$.

Кроме того, определим $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$. Тогда $S_k =$

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}) = C_n^k \cdot (n - k)! = \frac{n!}{(n - k)! \cdot k!} \cdot (n - k)! =$$

$\frac{n!}{k!}$ и применяя формулу (3.23) получим, что искомое число способов равно

$$\begin{aligned} N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_m) &= N + \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot S_k = n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!} = \\ &= n! \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot \frac{1}{k!}\right) = n! \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



174

Закреть

3.1.9 Рекуррентные соотношения. Задача о кроликах

Сущность метода рекуррентных соотношений заключается в том, что решение некоторой комбинаторной задачи сводится к решению этой же задачи с меньшими значениями переменных. При этом связь между исходной задачей и задачи с меньшими значениями переменных задаётся с помощью так называемых рекуррентных соотношений.

Определение 3.13. *Рекуррентным* называется соотношение, в котором для вычисления некоторого члена числовой последовательности используются значения предыдущих членов этой же последовательности.

Пример 3.20. Мы уже знакомы с двумя рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} \text{а) } P_n &= n \cdot P_{n-1}; \\ \text{б) } C_n^r &= C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}. \end{aligned}$$

В 1202 итальянский математик и купец Фибоначчи (Леонардо Пизанский) предложил так называемую «задачу о кроликах». Её суть в следующем. На ферме имеется одна пара кроликов. Сколько пар кроликов будет на ферме через n месяцев при условии, что:

- 1) через 1 месяц пара становится плодоносящей;
- 2) в 1 месяц у одной пары появляется одна пара приплода;
- 3) кролики никогда не умирают.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

175

[Закреть](#)

Пусть первая пара кроликов появилась на ферме, например в январе. Тогда схему размножения кроликов можно изобразить следующим образом (рисунок 3.4).

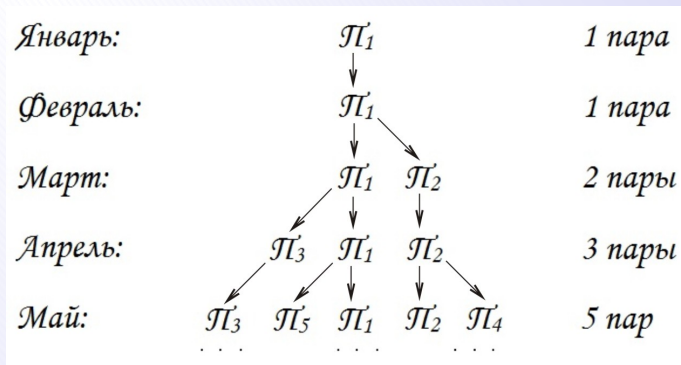


Рис. 3.4.

Искомое число пар кроликов обозначим через f_n . Каждый месяц на ферме будут «молодые» и «старые» пары кроликов. Число «молодых» пар кроликов через n месяцев обозначим через M_n , число «старых» пар — через C_n . Тогда $f_i = M_i + C_i$ для каждого $i \geq 1$.

Очевидно, число «молодых» пар кроликов в $(i + 1)$ -ом месяце M_{i+1} равно числу «старых» пар кроликов C_i в предыдущем месяце: $M_{i+1} = C_i$. Кроме того, все «молодые» кролики через месяц станут «старыми». Поэтому $C_{i+1} = C_i + M_i = f_i$ для каждого $i \geq 1$.

Тогда, учитывая указанные выше соотношения, получаем: $f_{n+2} = M_{n+2} + C_{n+2} = C_{n+1} + C_{n+2} = (C_n + M_n) + (C_{n+1} + M_{n+1}) = f_n + f_{n+1}$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



176

Закреть

Таким образом, $f_{n+2} = t_{n+1} + t_n$.

Поскольку $f_1 = 1, f_2 = 1$, то применяя полученное **рекуррентное соотношение** $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ получаем следующую последовательность чисел, называемую числами Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,

Замечание 3.16. Если в качестве f_1 и f_2 взять $f_1 = 1, f_2 = 3$, то, применяя **рекуррентное соотношение** $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, получим последовательность чисел Люкаса: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29,



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



177

Закрыть

3.1.10 Решение рекуррентных соотношений

Определение 3.14. Говорят, что *рекуррентное соотношение* для последовательности $f_1, f_2, f_3, \dots$ имеет порядок k , если оно позволяет выразить элемент f_{n+k} через k предыдущих элементов $f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k-1}$.

Пример 3.21. Известные нам три рекуррентных соотношения имеют следующие порядки:

- а) $P_n = n \cdot P_{n-1}$ — порядок 1;
- б) $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$ — порядок 1;
- в) $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ — порядок 2.

Пример 3.22. Рекуррентное соотношение $f_{n+3} = 7 \cdot f_{n+2} + 3 \cdot f_{n+1} + f_n$ имеет порядок 3.

Пусть дано некоторое *рекуррентное соотношение*, например, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. Тогда для вычисления n -го члена необходимо вычислить все предыдущие члены. Конечно же, хотелось бы иметь такую формулу, которая позволяла бы находить f_n , зная только n . В таких случаях говорят о решении рекуррентного соотношения.

Определение 3.15. *Решением рекуррентного соотношения* называется формула, выражающая n -ый член последовательности $f_1, f_2, f_3, \dots$ через n . При этом последовательность $f_1, f_2, f_3, \dots$ так же называется решением данного рекуррентного соотношения.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

178

[Закрыть](#)

Пример 3.23. Формула $P_n = n!$ является решением рекуррентного соотношения $P_n = n \cdot P_{n-1}$.

Определение 3.16. Решение рекуррентного соотношения k -го порядка называется общим, если оно зависит от k констант $c_1, c_2, \dots, c_k$, и путём подбора этих констант можно получить любое решение данного рекуррентного соотношения.

Пример 3.24. Общим решением рекуррентного соотношения $P_n = n \cdot P_{n-1}$ является формула $P_n = c \cdot n!$, где c — произвольная постоянная.

Замечание 3.17. Общих методов для решения любых рекуррентных соотношений нет. Однако для отдельных классов рекуррентных соотношений такие методы имеются. Рассмотрим один из таких методов.

Определение 3.17. Рекуррентное соотношение вида

$$f_{n+k} = \alpha_1 \cdot f_{n+k_1} + \alpha_2 \cdot f_{n+k_2} + \dots + \alpha_k \cdot f_n \quad (3.24)$$

называется линейным рекуррентным соотношением порядка k с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим решение линейного рекуррентного соотношения $f_{n+2} = \alpha_1 \cdot f_{n+1} + \alpha_2 \cdot f_n$ второго порядка с постоянными коэффициентами.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

179

[Закреть](#)

Определение 3.18. Уравнение $x^2 - \alpha_1 \cdot x - \alpha_2 = 0$ называется *характеристическим уравнением* линейного рекуррентного соотношения $f_{n+2} = \alpha_1 \cdot f_{n+1} + \alpha_2 \cdot f_n$.

Теорема 3.1. Пусть уравнение $x^2 - \alpha_1 \cdot x - \alpha_2 = 0$ является характеристическим уравнением рекуррентного соотношения $f_{n+2} = \alpha_1 \cdot f_{n+1} + \alpha_2 \cdot f_n$. Тогда:

1. Если уравнение $x^2 - \alpha_1 \cdot x - \alpha_2 = 0$ имеет два различных корня r_1, r_2 , то общее решение рекуррентного соотношения имеет вид $f_n = c_1 \cdot r_1^{n-1} + c_2 \cdot r_2^{n-1}$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

2. Если уравнение $x^2 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 = 0$ имеет два совпадающих корня $r_1 = r_2 = r$, то общее решение рекуррентного соотношения имеет вид $f_n = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot r^{n-1}$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Пример 3.25. Найдём решение рекуррентного соотношения $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Это рекуррентное соотношение определяет числа Фибоначчи, и оно является линейным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$. *Характеристическое уравнение* имеет вид $x^2 - x - 1 = 0$. Его корнями будут $r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ и

$r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Тогда по теореме 1.1 общее решение будет иметь вид
$$f_n = c_1 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + c_2 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}.$$

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

180

[Закрыть](#)

Найдём теперь частное решение при начальных условиях $f_1 = 1, f_2 = 1$.
1. Подставив значения $f_1 = 1$ и $f_2 = 1$ в формулу общего решения, будем иметь:

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2, \\ 1 = c_1 \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Найдём c_1 и c_2 :

$$\begin{cases} c_1 = 1 - c_2, \\ 1 = (1 - c_2) \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{откуда } c_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad c_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}.$$

Тогда частное решение при указанных начальных условиях $f_1 = 1, f_2 = 1$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} f_n &= c_1 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + c_2 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \\ &+ \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

181

[Закреть](#)

Таким образом,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (3.25)$$

Замечание 3.18. Формула (3.25) называется формулой Бине. Эта формула позволяет находить числа f_n , зная только n .



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



182

Закрыть

3.1.11 Производящие функции

Определение 3.19. Если дана числовая последовательность $a_0, \dots, a_n, \dots$, то функция

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$$

называется *производящей функцией* для последовательности $a_0, \dots, a_n, \dots$.

Пример 3.26. Если $|x| < 1$, то по формуле суммы членов бесконечной геометрической прогрессии получаем, что $1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$. Следовательно функция $f(x) = \frac{1}{1-x}$ является производящей для последовательности $1, 1, 1, \dots$.

Пример 3.27. Возведём обе части равенства $1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ из прошлого примера в квадрат: $(1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + \dots)(1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + \dots) = \frac{1}{(1-x)^2}$. В результате получим $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$. Следовательно функция $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ является *производящей* для последовательности $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$.

Пример 3.28. Из формулы бинома Ньютона при $y = 1$ получаем:

$$(x+1)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot x + \dots + C_n^n \cdot x^n.$$

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

183

[Закреть](#)

Следовательно, функция $f(x) = (x + 1)^n$ является производящей для последовательности $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$.

Определение 3.20. Если дана числовая последовательность $a_0, \dots, a_n, \dots$, то функция

$$F(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + a_n \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}$$

называется экспоненциальной производящей функцией для последовательности указанной выше.

Замечание 3.19. Производящие функции позволяют определить такие свойства последовательности $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, которые другими способами определить невозможно или сложно.

Замечание 3.20. Легче всего построить *производящую функцию*, если последовательность $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ задана рекуррентным соотношением.

Пример 3.29. Построить производящую функцию для рекуррентного соотношения $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, где $f_0 = 0, f_1 = 1$.

Решение. Для решения поставленной задачи выполним следующие действия:

1) Умножим обе части соотношения $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ на x^n , где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. В результате получим систему уравнений.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

184

[Заккрыть](#)

2) Сложим левые части системы уравнений, а также — правые:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot x^n$$

3) Искомая производящая функция будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot x^n = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots$$

4) Кроме того,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} \cdot x^n &= f_1 + f_2 x + f_3 x^2 + \dots = \frac{1}{x} (f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \dots) = \\ &= \frac{1}{x} (f(x) - f_0) = \frac{f(x)}{x} \text{ так как } f_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} \cdot x^n &= f_2 + f_3 x + f_4 x^2 + \dots = \frac{1}{x^2} (f_2 x^2 + f_3 x^3 + f_4 x^4 + \dots) = \\ &= \frac{1}{x^2} (f(x) - f_0 - f_1 x) = \frac{1}{x^2} (f(x) - x) = \frac{f(x) - x}{x^2} \text{ так как } f_1 = 1 \end{aligned}$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



185

Заккрыть

5) Подставим полученные значения в 2):

$$\frac{f(x) - x}{x^2} = \frac{f(x)}{x} + f(x)$$

Тогда $f(x) - x = f(x) \cdot x + f(x) \cdot x^2$, или $f(x) \cdot (1 - x - x^2) = x$, откуда $f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$.

Таким образом, $f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$ — производящая функция для последовательности чисел Фибоначчи.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



186

Закрыть

3.1.12 Разбиения чисел

Рассмотрим задачу разбиения натурального числа n на k слагаемых $b_1, b_2, \dots, b_k$, каждое из которых больше нуля. При этом, два разбиения с одними и теми же слагаемыми, но разным порядком следования, будем считать одинаковыми. Тогда без ограничения общности можно считать, что $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_k > 0$. Число таких разбиений числа n на k слагаемых обозначим через $P(n, k)$, а число всех разбиений числа n — через $P(n)$. Очевидно,

$$P(n) = \sum_{k=1}^n P(n, k) \quad (1.26)$$

Пример 3.30. $P(6) = 11$ и все разбиения числа 6 представлены на рисунке 3.5.

Замечание 3.21. Имеется очень наглядный способ представления разбиения числа в виде так называемой диаграммы Феррерса. Её суть в том, что диаграмма, соответствующая разбиению $b_1 + b_2 + \dots + b_k$, состоит из k рядов точек, причём в i -ом ($1 \leq i \leq k$) ряду имеется b_i точек.

Пример 3.31. Диаграмма Феррерса, соответствующая разбиению числа 16 на 4 слагаемых $6+4+4+2$ представлена на рисунке 3.6 а).

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

187

[Закрыть](#)

$$\begin{array}{l}
 6 \\
 5 + 1 \\
 4 + 2 \\
 4 + 1 + 1 \\
 3 + 3 \\
 3 + 2 + 1 \\
 3 + 1 + 1 + 1 \\
 2 + 2 + 2 \\
 2 + 2 + 1 + 1 \\
 2 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
 \end{array}$$

Рис. 3.5.

Определение 3.21. Двойственной диаграммой Феррерса называется диаграмма, получаемая из диаграммы Феррерса, транспонированием строк и столбцов.

Пример 3.32. На рисунке 3.6 б) изображена диаграмма, двойственная к диаграмме, изображённой на рисунке 3.6 а). Эта диаграмма соответствует разбиению $4+4+3+3+1+1$.

Замечание 3.22. Транспозиция диаграммы Феррерса определяет взаимно-однозначное соответствие между разбиением числа n на k



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



188

Заккрыть

а)



б)

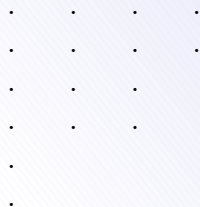


Рис. 3.6.

слагаемых и разбиение с наибольшим слагаемым, равным k . Поэтому имеет место следующая лемма.

Лемма 3.14. Число разбиений числа n на k слагаемых равно числу разбиений числа n на слагаемые, наибольшим из которых является k .

Лемма 3.15. Число разбиений числа n на попарно различные слагаемые равно числу разбиений числа n на нечётные слагаемые.

Доказательство. Установим взаимно-однозначное соответствие между рассматриваемыми разбиениями. Для этого рассмотрим разбиение числа n на нечётные слагаемые $b_1, b_2, \dots, b_k$, где слагаемое b_i ($1 \leq i \leq k$)



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



189

Закреть

повторяется r_i раз. Запишем каждое $r_i (1 \leq i \leq k)$ в двоичном разложении: $r_i = 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \dots + 2^{\alpha_s} (\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_s > 0)$. Заменяем теперь каждые r_i слагаемых b_i на слагаемые вида $b_i \cdot 2^{\alpha_1} + b_i \cdot 2^{\alpha_2} + \dots + b_i \cdot 2^{\alpha_k}$. После этого упорядочим все полученные слагаемые по невозрастанию. В результате получим разбиение числа n на попарно различные слагаемые. Это следует из того, что каждое натуральное число можно единственным образом представить в виде суммы произведений нечётных чисел на степени двойки.

Обратное преобразование рассматривается аналогично. Доказано.

Пример 3.33. Рассмотрим описанное разложение на примере разложения числа $39 = 9 + 7 + 7 + 5 + 5 + 3 + 1 + 1 + 1$. Имеем $9 + 7 + 7 + 5 + 5 + 3 + 1 + 1 + 1 = 9 \cdot 2^0 + 7 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^0 + 1 \cdot (2^1 + 2^0) = 9 + 14 + 10 + 3 + 2 + 1 = 14 + 10 + 9 + 3 + 2 + 1$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



190

Закрыть

3.2 Практическая часть

3.2.1 Правила суммы, произведения

Образец 1. *Иногородний студент может поселиться либо в одном из четырёх общежитий университета, либо по одному из 20 адресов, сдаваемых в наём комнат. Сколько вариантов для поселения имеется у студента?*

Решение. Здесь мы можем применить **правило суммы**, согласно которому искомое число вариантов будет равно $4+20=24$.

Образец 2. *Для последнего звонка на факультете необходимо выбрать смешанную пару ведущих. На эту роль имеется 7 претенденток из числа девушек и 5 — из числа юношей. Сколькими способами можно выбрать пару ведущих?*

Решение. Ведущую можно выбрать $m = 7$ способами и после этого ведущего можно выбрать $n = 5$ способами. Поэтому по правилу произведения смешанную пару ведущих можно выбрать $m \cdot n = 7 \cdot 5 = 35$ способами.

1. В кондитерской к концу рабочего дня осталось несколько пирожных по одной цене: пять ванильных, два шоколадных и три фруктовых. У студента имеются деньги только на одно пирожное. Сколькими способами студент может выбрать одно пирожное?

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

191

[Закрыть](#)

2. В спортклубе необходимо выбрать смешанную команду по теннису, которая будет представлять университет на соревнованиях. Имеется 15 спортсменов и 7 спортсменок, из которых можно составить пару. Сколькими способами можно выбрать смешанную команду?

3. Сколько трёхзначных чисел начинаются с 5 или 7?

4. Сколько двузначных чисел заканчивается на 2 или 4?

5. Сколько имеется чётных двузначных чисел?

6. Сколько имеется нечётных трёхзначных чисел?

7. В городе Бресте от автовокзала до остановки «Технический университет» можно доехать тремя видами маршрутного такси, и затем — двумя видами в Задворцы. Сколько вариантов проезда маршрутным такси имеется от автовокзала до Задворцев?

8. Фруктовый салат готовится из йогурта, фруктов и украшается зеленью. При этом йогуртов имеется три вида, фруктов — 4 и зелени — 2. Сколькими способами можно приготовить салат при условии, что йогурты, фрукты и зелень разрешается использовать только по одному наименованию?

9. Имеется 3 различных конверта и 5 различных марок. Сколькими способами можно отправить письмо в конверте с маркой?

10. Из Бреста в Минск можно доехать тремя видами транспорта (поезд, автобус, таксичка), а из Минска в Москву — двумя (самолёт, поезд). Сколькими способами можно осуществить путешествие по маршруту Брест-Минск-Москва?



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



192

Заккрыть

11. Сколькими способами пятеро юношей могут выбрать себе партнёршу для танца из десяти девушек?

12. У женщины в шкафу висит шесть платьев, пять юбок и три блузки. Сколько разных нарядов она может составить из своей одежды?

13. Пароль, открывающий доступ к компьютеру, состоит из шести символов. Первые два из них — строчные буквы латинского алфавита (всего 26 букв), а оставшиеся четыре могут быть как цифрами, так и строчными буквами. Сколько можно придумать различных паролей?

14. Сколько существует возможностей для присуждения первого, второго и третьего места десяти участникам университетской Спартакиады?

15. Комитет из 20 членов избирает председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

16. У англичан принято давать детям несколько имён. Скольким способами можно назвать ребёнка, если ему дают не более трёх имён, а общее количество имён равно 300? Два способа, различающиеся лишь порядком имён считаются различными.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



193

Закрыть

3.2.2 Выборки. Размещения. Сочетания

Образец 1. *Сколько имеется булевых векторов длины m ?*

Решение. Булевым вектором является упорядоченная последовательность, составленная из нулей и единиц. Поскольку повторение элементов допускается, то мы здесь имеем дело с размещениями с повторениями. Поэтому применяя соответствующую формулу получаем, что число булевых векторов длины m равно $\bar{A}_2^m = 2^m$.

Образец 2. *Отец имеет десять различных денежных банкнот. Сколькими способами эти банкноты отец может отдать дочери и сыну?*

Решение. Каждой банкноте поставим в соответствие единицу, если отец отдал эту банкноту дочери и ноль, если — сыну. Тогда всякому способу распределения банкнот будет соответствовать булевый вектор длины $m = 10$. Поэтому из решения предыдущей задачи получаем, что искомое число способов равно $\bar{A}_2^{10} = 2^{10} = 1024$.

Образец 3. *Студент в летнюю сессию получил четыре различные положительные отметки и одну неудовлетворительную. Сколькими способами студент мог сдать сессию?*

Решение. Положительными являются отметки — 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, неудовлетворительными — 1, 2, 3. Поскольку положительные отметки,



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



194

Закрыть

полученные студентом — различные, то мы имеем дело с размещениями без повторений. Поэтому 4 экзамена студент мог сдать $A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 840$ способами. Неудовлетворительную отметку студент мог получить $A_3^1 = \frac{3!}{(3-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 3$ способами. Следовательно, по правилу произведения получаем, что искомое число способов равно $A_7^4 \cdot A_3^1 = 840 \cdot 3 = 2520$.

Образец 4. На перерыве между лекциями группа из 20 студентов подходит к буфету. Сколько имеется способов выстраивания студентов в очередь?

Решение. Различные варианты выстраивания очереди — это перестановки. Поэтому искомое число способов равно $P_{20} = 20!$.

Образец 5. Сколькими способами 8 человек можно распределить по двум комнатам при условии, что в каждой комнате должно быть не менее 3 человек.

Решение. Имеются следующие варианты распределения 8 человек по комнатам.

1. В первой комнате находится 3 человека, во второй — 5.
2. В первой комнате находится 4 человека, во второй — 4.
3. В первой комнате находится 5 человек, во второй — 3.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

195

[Заккрыть](#)

Порядок перечисления людей, находящихся в одной комнате, роли не играет. Поэтому мы имеем здесь дело с сочетаниями, причём без повторений. Тогда в первом варианте в первую комнату трёх человек можно распределить $C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ способами. После того как в первую комнату распределили трёх человек, выбор оставшихся пяти человек во вторую комнату определяется однозначно. Следовательно, имеется 56 способов распределения людей по комнатам в первом варианте.

Аналогично получаем, что во втором варианте имеется $C_8^4 = \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$ способов распределения, и в третьем $C_8^5 = \frac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} = 56$ способов.

Всего же будет $56+70+56=182$ способов размещения 8 человек по двум комнатам.

Образец 6. *Игральную кость бросают пять раз. Сколько различных вариантов выпадения очков можно получить?*

Решение. Игральная кость имеет 6 граней, на которых находятся очки от 1 до 6. Кость бросают 5 раз. Каждый вариант выпадения очков можно рассматривать как неупорядоченную (6, 5)-**выборку** с повторениями, то есть как сочетание с повторениями. Поэтому искомое число

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

196

[Заккрыть](#)

вариантов выпадения очков равно $\bar{A}_6^5 = C_{6+5-1}^5 = C_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$.

Образец 7. Сколько чисел, больших 430 000 000, можно составить из цифр 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 0, 0.

Решение. Из условия задачи следует, что каждое число, большее чем 430 000 000, является девятиразрядным. При этом на первом месте обязательно должна стоять четвёрка, а на втором — тройка. На оставшихся семи местах должны находиться две двойки, три единицы и два нуля. Это значит, речь идёт о **перестановках** с повторениями. Поэтому по формуле (1.6) искомое число перестановок равно $P_{(2,3,2)} = \frac{(2+3+2)!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2! \cdot 2!} = 210$.

1. Дано множество $X = \{a, b, c\}$. Составьте всевозможные:

- а) неупорядоченные (3, 2)-выборки с повторениями;
- б) неупорядоченные (3, 2)-выборки без повторений;
- в) упорядоченные (3, 2)-выборки с повторениями;
- г) упорядоченные (3, 2)-выборки без повторений.

2. Дано множество $X = \{a, b, c, d\}$. Составьте всевозможные:

- а) неупорядоченные (4, 2)-выборки с повторениями;
- б) неупорядоченные (4, 2)-выборки без повторений;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



197

Закреть

в) упорядоченные $(4, 2)$ -выборки с повторениями;

г) упорядоченные $(4, 2)$ -выборки без повторений.

3. Дано множество $X = \{a, b, c\}$. Составьте всевозможные перестановки этого множества.

4. Сколькими способами можно выбрать 7 из 10 различных открыток?

5. Сессия состоит из 5 экзаменов и знания студентов оцениваются по десятибальной шкале. Сколькими способами можно сдать сессию при условии, что:

а) все отметки положительные;

б) все отметки положительные и различные;

в) одна отметка — 10, а все остальные — положительные;

г) одна отметка — 4, а все остальные положительные и различные;

д) две отметки 5 и 7, а все остальные — положительные;

е) три отметки 4, 5, 6, а все остальные — положительные и различные.

6. Сколько трёх-, четырёх- и пятизначных чисел можно составить из пар 2, 4, 5, 6, 8 при условии, что:

а) повторение цифр не допускается;

б) повторение цифр разрешено.

7. Сколько имеется различных последовательностей из нулей и единиц, в каждой из которых:

а) две единицы и три нуля;

б) три единицы и два нуля;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



198

Закреть

в) три единицы и четыре нуля;

г) n единиц и m нулей.

8. Исходом спортивного соревнования считается определение участников, занявших первое, второе и третье места. Сколько имеется исходов у спортивного соревнования, в котором было n участников?

9. В начале игры в домино каждому игроку выдаётся 7 костей из имеющихся 28. Сколько имеется различных комбинаций костей, которые может получить в начале игры:

а) первый игрок;

б) второй игрок;

в) третий игрок;

г) четвёртый игрок.

10. Имеется 7 различных монет. Скольким способами эти монеты можно разложить по двум карманам?

11. Сессия состоит из 5 экзаменов и знания студентов оцениваются по десятибальной шкале. Сколько вариантов имеется для полученных студентом отметок при условии, что:

а) две отметки положительные, а три — неудовлетворительные;

б) три отметки положительные, а две — неудовлетворительные, причём — различные;

в) три отметки положительные и различные, а две — неудовлетворительные;

г) три отметки положительные и различные, а две — неудовлетвори-



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



199

Закреть

тельные и также различные.

12. Сколькими способами 20 человек можно выстроить в одну шеренгу?

13. Скольким способами 20 человек можно выстроить в одну шеренгу при условии, чтобы Иванов и Петров не стояли рядом?

14. В Национальной Английской Лотерее дважды в неделю случайным образом выбирается шесть разных номеров из первых 49 натуральных чисел. Человек, правильно угадавший 6 номеров, получает денежный приз, достигающий миллиона фунтов стерлингов. Сколько имеется:

- а) вариантов выбора пятёрки "правильных" номеров;
- б) вариантов выбора четвёрки "правильных" номеров;
- в) вариантов выбора тройки "правильных" номеров.

15. Десять человек, включая Марию и Сергея, являются кандидатами в комитет, состоящий из пяти человек. Сколько вариантов составления комитета имеется при условии, что:

- а) состав комитета произвольный;
- б) в состав комитета обязательно входит и Мария и Сергей;
- в) в состав комитета не входит ни Мария, ни Сергей;
- г) в состав комитета входит либо Мария, либо Сергей, но только не вдвоём?

16. Сколькими способами можно купить 7 пирожных, если в магазине имеются 4 сорта пирожных?

17. Группа из 15 студентов участвует в субботнике по уборке трёх



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



200

Закреть

аудиторий. В первую аудиторию необходимо направить 8 человек, во вторую — 4, в третью — 3. Сколькими способами можно распределить студентов по аудиториям?

18. В лифт 9-этажного дома вошло 5 человек. Сколько имеется вариантов того, что:

- а) все люди выйдут на разных этажах;
- б) все люди выйдут на одном этаже.

19. За круглый стол усаживается 15 человек. Сколько вариантов рассадки имеется при условии, что Иванов и Петров должны сидеть рядом?

20. Сколько четырёхзначных чисел, не превосходящих 7000, можно составить используя только:

- а) чётные цифры;
- б) нечётные цифры.

21. Перевёртыш — это многозначное число, которое не изменится, если все его цифры записать в обратном порядке. Сколько имеется:

- а) пятизначных перевёртышей;
- б) шестизначных перевёртышей;
- в) семизначных перевёртышей.

22. Пусть X — множество четырёхзначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 5. При этом 0 на первом месте стоять не может. Сколько:

- а) чисел во множестве X ;
- б) чисел во множестве X при условии, что цифры не повторяются;
- в) чётных чисел во множестве X ;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



201

Заккрыть

- г) чётных чисел из пункта б);
- д) чисел во множестве X не превосходит числа 4000;
- е) чисел во множестве X , больших чем 2000.

23. Футбольные команды «Нёман» (Гродно) и «Динамо» (Брест) насчитывают соответственно по 18 и 17 игроков. В каждой команде на игру выходит по 11 футболистов. Сколько вариантов комплектования команд имеется для проведения встречи «Нёман» (Гродно) — «Динамо» (Брест)?

24. В один из комитетов парламента нужно отобрать трёх членов, причём выбирать надо из пяти консерваторов, трёх лейбористов и четырёх либерал-демократов. Сколько:

- а) разных комитетов можно составить?
- б) разных комитетов можно составить, если в него должен входить по крайней мере один либерал-демократ?
- в) разных комитетов можно составить, если лейбористы и консерваторы не могут быть его членами одновременно?
- г) разных комитетов можно составить, если в него должен войти по крайней мере один консерватор и хотя бы один лейборист?

25. В небольшой фирме 8 человек работают на производстве, 5 — в отделе сбыта и 3 — в бухгалтерии. Для обсуждения производства новой продукции было решено пригласить на совещание шестерых работающих. Сколькими способами это можно сделать, если:

- а) необходимо пригласить по два представителя от каждого отдела;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



202

Закреть

б) необходимо пригласить по крайней мере двоих представителей производства;

в) необходимы представители каждого из трёх отделов.

26. В библиотеке имеется 15 наименований книг по математическому анализу, 10 — по алгебре и 6 — по геометрии. Студент решил взять пять книг. Сколькими способами он может выбрать 5 книг при условии, что:

а) по каждому предмету должна быть хотя бы одна книга;

б) по математическому анализу должны быть 2 книги;

в) по математическому анализу должно быть не менее двух книг;

г) по алгебре должно быть не менее двух книг и по геометрии — не менее одной;

д) по алгебре должно быть не менее двух книг, по математическому анализу — не менее одной.

27. На экзамене по дискретной математике 12 вопросов по разделу "Комбинаторика" и 14 — по разделу "Теория графов". Студент успевает выучить только 10 вопросов. Сколькими способами он это может сделать при условии, что:

а) по комбинаторике он решил выучить 5 вопросов, по теории графов — тоже 5;

б) по комбинаторике он решил выучить 4 вопроса, по теории графов — 6;

в) все вопросы он решил выучить по комбинаторике;

г) все вопросы он решил выучить по теории графов;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



203

Закреть

д) по комбинаторике он решил выучить не менее 8 вопросов;

е) по теории графов он решил выучить не менее 7 вопросов.

28. Сколько различных слов можно составить из слова «Абракадабра» при условии, что:

а) никаких ограничений нет;

б) слова начинаются с буквы «К»;

в) слова начинаются с буквы «А»;

г) слова начинаются с буквы «Р».

29. Сколько различных слов можно составить из слова «Математика» при условии, что:

а) никаких ограничений нет;

б) слова начинаются с буквы «М»;

в) слова начинаются с буквы «А»;

г) слова начинаются с буквы «Е»;

30. Сколько различных слов можно составить из слова «Комбинаторика» при условии, что:

а) никаких ограничений нет;

б) слова начинаются с буквы «А»;

в) слова начинаются с буквы «Т».

31. Сколькими способами колоду из 36 карт можно сдать шести игрокам?

32. Сколькими способами можно посадить рядом 3 англичан, 3 немцев и 3 французов так, чтобы никакие три соотечественника не сидели



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



204

Заккрыть

рядом?

33. Сколькими способами можно раскрасить квадрат, разделённый на четыре равных квадрата, пятью цветами так, что:

- а) допускается окрашивание разных квадратов в один цвет;
- б) различные квадраты окрашиваются в различные цвета.

34. Сколькими способами можно раскрасить квадрат, разделённый на девять равных квадратов, пятью цветами, допуская окрашивание разных квадратов в один цвет?

35. Сколькими способами можно назвать троих котят, имея 6 различных вариантов при условии, что котята названы по-разному?

36. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 10 карт. Определите в скольких случаях среди них окажутся:

- а) пиковая дама;
- б) все карты одной масти;
- в) ни одной дамы;
- д) хотя бы одна десятка.

37. Сколько имеется возможностей трижды вытащить пиковую даму из колоды в 52 карты при пятикратном выборе с возвращением?

38. Сколько имеется пятизначных натуральных чисел, которые делятся на 5?

39. Сколько имеется четырёхзначных натуральных нечётных чисел?

40. Сколько имеется пятизначных натуральных чётных чисел?

41. Сколькими способами можно расположить на книжной полке семь



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



205

Закреть

различных книг?

42. Сколькими способами можно выбрать и расположить в ряд на книжной полке 5 книг из 9?

43. Сколько существует чётных четырёхзначных чисел, у которых все цифры различны?

44. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых участвует три нуля, а остальные цифры различны?

45. Сколькими пятизначных чисел можно составить из цифр $1, 2, \dots, 9$ так, чтобы чётные цифры стояли на нечётных местах, а нечётные — на чётных?

46. Каких чисел в первом миллионе больше — содержащих двойку в десятичной записи, или не содержащих её?

47. Из колоды в 36 карт выбрали 6 карт. В скольких случаях среди них окажется:

а) ровно 3 туза;

б) все карты одной масти.

48. Сколько имеется пятизначных чисел, в которых цифра 3 встречается 2 раза?

49. Сколькими способами можно переставить буквы в словах «семи-нар», «лекция» чтобы никакие две гласные буквы не стояли рядом?

50. Сколькими способами можно расставить в очередь 12 мужчин и 8 женщин так, чтобы никакие две женщины не стояли рядом?

51. В конкурсе на звание «Мисс факультета» участвуют 13 блондинок



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



206

Заккрыть

и 17 брюнеток. Сколькими способами их можно выстроить на сцене так, чтобы никакие две блондинки не стояли рядом?

52. Супруги Петровы поссорились. Сколько способов имеется усадить их на 10-местной скамье вместе с четырьмя другими супружескими парами так, чтобы Петровы рядом не сидели?

53. Сколько имеется четырёхзначных чисел, у которых:

- а) каждая следующая цифра больше предыдущей;
- б) каждая следующая цифра меньше предыдущей.

54. Пусть каждая из 5 семей состоит из 4 человек. Из этих 20 человек 6 заболели скарлатиной. Сколько существует различных вариантов для следующих случаев:

- а) карантину должны быть подвергнуты ровно 2 семьи;
- б) карантину должны быть подвергнуты ровно 3 семьи;
- в) карантину должны быть подвергнуты не менее 3 семей.

55. В автобус садятся 42 пассажира. Автобус делает 7 остановок, на каждой из которых выходит ровно 6 пассажиров. Сколько всего возможно вариантов такого выхода пассажиров?

56. Докажите, что $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}$ делятся на n , если n — простое число.

57. Докажите, что произведение любых n последовательных натуральных чисел делится на $n!$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



207

Закрыть

3.2.3 Разбиения

Образец 1. Группа из 24 студентов сдаёт экзамен в форме тестирования на компьютерах в аудитории, где имеется 6 машин. Для этого группу надо разбить на четыре подгруппы по 6 человек. Сколькими способами можно сделать такое разбиение?

Решение. Все условия для применения формулы $C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}$ выполняются. Поэтому искомое число способов равно

$$C_{24}^{6,6,6,6} = \frac{24!}{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!}.$$

Образец 2. Группа из 24 студентов для проведения интеллектуальной игры разбивается на четыре подгруппы по 6 человек. Сколькими способами можно сделать такое разбиение?

Решение. И в предыдущей, и в настоящей задачах группа из 24 студентов разбивается на 4 подгруппы по 6 человек. При этом в первой задаче, в отличие от второй, важен порядок групп. Это значит, важен порядок захода групп в аудиторию. В настоящей задаче порядок групп роли не играет. Поэтому в нашей задаче надо значение $\frac{24!}{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!}$, полученное в предыдущей задаче, разделить на $4!$, то есть на значение, равное количеству порядков четырёх групп. Поэтому искомое число способов равно $\frac{24!}{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 4!}$.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

208

[Заккрыть](#)

1. Сколькими способами можно раздать 15 различных конфет Оле, Саше и Диме так, чтобы:

- а) каждый получил по 5 конфет;
- б) каждый получил по 5 конфет и Оля получила «Белочку» и «Мишку»;
- в) каждый получил по 5 конфет и Оля получила «Белочку», а Саша — «Мишку».

2. 10 супружеских пар катаются на пяти четырёхместных лодках. Сколькими способами людей можно рассадить так, что в каждой лодке окажется двое мужчин и двое женщин?

3. Сколькими способами можно разбить на пары:

- а) 10 человек;
- б) 20 человек;
- в) $2n$ человек.

4. Сколькими способами из 5 различных роз, 6 различных гладиолусов и 7 различных астр можно составить:

- а) шесть букетов каждый из которых содержит по три цветка;
- б) два букета по 9 цветков;
- в) три букета по 5 цветков и один букет из трёх цветков;
- г) два букета по 3 цветка, два — по 5 цветков и два — по одному.

5. Сколькими способами группу из 25 студентов можно разбить на пять подгрупп так, чтобы:

- а) в двух подгруппах было по 5 человек, в двух — по 6 и в одной — 3;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



209

Заккрыть

- б) в трёх подгруппах было по 5 человек, в двух — по 4 и в одной — 2;
в) в трёх подгруппах было по 4 человека, в двух — по 5 и в одной — 8.

6. Группа из 25 человек сдала экзамен по дискретной математике следующим образом:

- 3 человека получили девятки;
- 4 человека получили восьмёрки;
- 6 человек получили шестёрки;
- 6 человек получили пятёрки;
- 3 человека получили четвёрки;
- 2 человека получили тройки;
- 1 человек получил двойку.

Сколько вариантов имеется сдачи таким образом экзамена?

7. Сколькими способами 10 студентов можно расселить по двум двухместным и двум трёхместным комнатам в общежитии при условии, что Катя и Оля хотят жить в одной комнате?

8. 27 шаров с номерами от 1 до 27 разложили поровну в три ящика. Сколько имеется вариантов того, что:

- а) шары с номерами 1 и 27 окажутся в одном ящике;
- б) шары с номерами 5 и 25 окажутся в разных ящиках?

9. Группу из 25 человек необходимо распределить на педагогическую практику следующим образом:

- лицей №1 — 3 человека;
- гимназия №1 — 4 человека;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



210

Заккрыть

- областной лицей — 4 человека;
- СШ №7 — 6 человек;
- СШ №30 — 5 человек;
- СШ №24 — 3 человека.

Сколькими способами можно распределить студентов на подпрактику?

10. В студенческой группе, состоящей из 25 человек, проходили выборы старосты. За выдвинутую кандидатуру проголосовали 12 человек, против — 10, воздержались — 3. Сколькими способами могло быть проведено такое голосование?

11. Квадрат разбили на 9 равных квадратов. Скольким способами квадрат можно раскрасить 4 цветами так, чтобы в первый цвет были окрашены 3 части, во второй — 2, в третий — 3, в четвёртый — 1?



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



211

Заккрыть

3.2.4 Формула бинома Ньютона. Полиномиальная формула

Образец 1. Решите комбинаторное уравнение $C_{x+1}^{x-1} = 21$, где $x \in \mathbb{N}$.

Решение. Применим формулу $C_n^r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$:

$$C_{x+1}^{x-1} = \frac{(x+1)!}{(x+1-x+1)! \cdot (x-1)!} =$$
$$\frac{(x+1)!}{2! \cdot (x-1)!} = \frac{(x-1)! \cdot x \cdot (x+1)}{1 \cdot 2 \cdot (x-1)!} = \frac{x \cdot (x+1)}{2}.$$

Таким образом, $\frac{x \cdot (x+1)}{2} = 21$. Решив это уравнение, мы получим, что его корнями являются числа -7 и 6. При этом условию задачи удовлетворяет только значение 6.

Образец 2. Докажите тождество $C_n^m \cdot C_m^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}$.

Решение. Преобразуем $C_n^m \cdot C_m^k = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} \cdot \frac{m!}{(m-k)! \cdot k!} =$

$$\frac{n!}{(n-m)! \cdot (m-k)! \cdot k!}.$$

Аналогично получим, что

$$C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k-m+k)! \cdot (m-k)!} =$$

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

212

[Закреть](#)

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

213

[Заккрыть](#)

$$= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-m)! \cdot (m-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-m)! \cdot (m-k)!}.$$

Следовательно, $C_n^m \cdot C_m^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}$.

Образец 3. Найдите коэффициент при xy^2z после раскрытия скобок в выражении $(x + 2y + z - 1)^5$.

Решение. Найдём вначале коэффициент при xy^2zt в разложении степени $(x + 2y + z + t)^5$:

$$C_8^{1,2,1,1} = \frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 20160.$$

Это значит в разложении степени $(x + 2y + z + t)^5$ имеется член $20160xy^2zt$. Приняв $t = -1$ мы получим, что при раскрытии скобок в $(x + 2y + z - 1)^5$ будет член $-20160xy^2z$.

1. Решите следующие комбинаторные уравнения:

а) $A_x^2 \cdot C_x^1 = 48$, где $x \in N$;

б) $\frac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}} = \frac{2}{3}$, где $x \in N$;

в) $C_{3x+1}^{3x-1} = 120$, где $x \in N$;

г) $15 \cdot C_{x+1}^{x-4} = 7 \cdot A_{x+1}^3$, где $x \in N$;

д) $2 \cdot A_x^2 \cdot C_x^1 = 96$, где $x \in N$;

е) $\frac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x}^{x-1}} = \frac{7}{13}$, где $x \in N$.

2. Докажите тождества:

а) $C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + \dots + 2^n \cdot C_n^n = 3^n$;

б) $C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{n-(k+1)}^0 = C_n^k$, где $0 \leq k < n$;

в) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$;

г) $C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-2} + \dots + C_{n-k-1}^0 = C_n^k$;

д) $C_1^0 + C_2^1 + \dots + C_{n+1}^n = C_{n+2}^n$;

е) $C_2^0 + C_3^1 + \dots + C_{n+2}^n = C_{n+3}^n$;

ж) $\sum_{j=0}^k C_{n+j}^j = C_{n+k+1}^k$;

и) $C_{n-2}^m + 2 \cdot C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2} = C_n^m$;

к) $C_{n-3}^m + 3 \cdot C_{n-3}^{m-1} + 3 \cdot C_{n-3}^{m-2} + C_{n-3}^{m-3} = C_n^m$.

3. Докажите, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n+1)$.

4. Найдите суммы:

а) $C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + 3 \cdot C_n^2 + \dots + (n+1) \cdot C_n^n$;

б) $C_n^1 - 2 \cdot C_n^2 + 3 \cdot C_n^3 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot C_n^n$;

в) $C_n^0 + \frac{1}{2} \cdot C_n^1 + \frac{1}{3} \cdot C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1} \cdot C_n^n$;

г) $C_n^0 - \frac{1}{2} \cdot C_n^1 + \frac{1}{3} \cdot C_n^2 + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot C_n^n$.

5. Найдите коэффициент при A после раскрытия скобок в выражении $(x + y + z)^5$, если A есть:

а) x^2y^2z ;

б) xy^3z ;

в) x^3z^2 ;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



214

Заккрыть

г) xy^4 ;

д) y^5 ;

е) y^4z .

6. В разложении $(x + y)^{15}$ найдите член, содержащий:

а) y^7 ;

б) x^9 ;

в) x^{12} ;

г) y^6 ;

д) x^{10} .

7. Найдите коэффициент при A после раскрытия скобок в выражении $(x - 2 + y)^6$, если A есть:

а) x^3y^3 ;

б) x^3y^2 ;

в) x^2y^2 ;

г) xy^3 ;

д) x^5 ;

е) x^4y .

8. Найдите коэффициент при A после раскрытия скобок в выражении $(2x + 3y - 1)^5$, если A есть:

а) x^2y ;

б) xy^3 ;

в) x^5 ;

г) xy ;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



215

Закреть

д) xy^2 ;

е) x^4 .

9. Запишите разложение для:

а) $(x + y)^4$;

б) $(x + y)^5$;

в) $(x + y)^6$;

г) $(x + y)^7$.

10. Дана седьмая строка треугольника Паскаля: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7,

1. Запишите восьмую и девятую его строки.

11. Раскройте скобки в выражении $(x + y + z)^5$ и выпишите слагаемые, содержащие:

а) x^3 ;

б) y^4 ;

в) z^5 .

12. Определите коэффициент в следующих членах многочлена, полученного из алгебраического выражения $(x + y + z)^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^4$:

а) $x^3y^3z^4$;

б) $x^2y^4z^4$;

в) x^5y^5 ;

г) $x^2y^2z^6$.

13. Запишите разложение многочлена $(x + y + z)^3$.

14. Найдите коэффициент при x^6y^7z в разложении выражения $(3x^2 + 2y - 7z)^{11}$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



216

Заккрыть

15. Найдите коэффициент при x^8 в разложении выражения $(1 + x^2 - x^3)^9$.

16. Найдите сумму всех коэффициентов в многочлене $(x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4)^3$.

17. Найдите рациональные члены в разложении $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5$.

18. Найдите слагаемое, свободное от x , в разложении выражения $(\frac{2}{\sqrt{x}} + x)^{15}$.

19. Найдите значение n для выражения $(1 + x)^n$, если коэффициенты при x^5 и x^{12} в разложении данного выражения совпадают.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



217

Закреть

3.2.5 Формула включений и исключений. Задача о беспорядках

Образец 1. Сколько имеется натуральных чисел, меньших 500, которые делятся хотя бы на одно из чисел 3, 5, 7?

Решение. Введём следующие обозначения:

A — множество чисел, меньших 500 и делящихся на 3;

B — множество чисел, меньших 500 и делящихся на 5;

C — множество чисел, меньших 500 и делящихся на 7.

Натуральных чисел, меньших чем 500, имеется 499: 1, 2, ..., 499.

Из этих чисел каждое третье делится на 3. Поэтому чисел, делящихся на 3, имеется $\left[\frac{499}{3} \right] = 166$, где $[a]$ — целая часть числа a . Это значит $|A| = 166$.

Аналогично получим, что $|B| = \left[\frac{499}{5} \right] = 99$, $|C| = \left[\frac{499}{7} \right] = 71$.

Исходя из введённых ранее обозначений следует, что $A \cap B$ — множество чисел, меньших 500 и делящихся на 3 и 5.

Очевидно, такими числами среди чисел 1, 2, ..., 499 является каждое пятнадцатое. Поэтому $|A \cap B| = \left[\frac{499}{15} \right] = 33$. Аналогично, $|B \cap C| = \left[\frac{499}{35} \right] = 14$, $|A \cap C| = \left[\frac{499}{21} \right] = 23$. Кроме того, $|A \cap B \cap C| = \left[\frac{499}{85} \right] = 5$.

Множеством чисел, которые меньше чем 500 и делятся хотя бы на



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



218

Закреть

одно из чисел 3, 5, 7, является множество $A \cup B \cup C$. Тогда по формуле включений и исключений получаем, что искомое число равно

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| = 166 + 99 + 71 - (33 + 23 + 14) + 5 = 336 - 70 + 5 = 271.$$

Отметим так же количество чисел, меньших 500 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5, 7 равно $499 - |A \cup B \cup C| = 499 - 271 = 228$.

Образец 2. *Староста группы подал в деканат следующие сведения о студентах. В группе 25 человек, в том числе 12 юношей. Спортом занимаются 16 человек, из них 6 юношей и 12 иногородних. 6 юношей являются иногородними и занимаются спортом. 18 человек являются иногородними и среди них 8 юношей. Покажите, что поданные старостой сведения являются неточными.*

Решение. Обозначим через α_1 свойство «быть юношей», через α_2 — свойство «быть иногородним», через α_3 — свойство «заниматься спортом». Тогда из условия задачи следует, что $N(\alpha_1) = 12$, $N(\alpha_2) = 18$, $N(\alpha_3) = 16$, $N(\alpha_1, \alpha_2) = 8$, $N(\alpha_1, \alpha_3) = 6$, $N(\alpha_2, \alpha_3) = 12$, $N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 6$, $N = 25$.

Найдём $N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3)$ — число иногородних девушек, не занимающихся спорта. Имеем:

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

219

[Заккрыть](#)

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)**220**[Заккрыть](#)

$$\begin{aligned} N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3) &= N - (N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + N(\alpha_3)) + (N(\alpha_1, \alpha_2) + \\ &+ N(\alpha_1, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_3)) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 25 - (12 + 18 + 16) + (8 + 6 + 12) - 6 = \\ &= 25 - 46 + 26 - 6 = -1. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получим, что число иногородних девушек, не занимающихся спортом, равно -1. Полученное значение противоречит здравому смыслу. А это говорит о том, что поданные старостой сведения являются неточными.

1. Каждый из 63 студентов первого курса, изучающих информатику, может посещать и дополнительные лекции. Из 63 студентов 16 слушают курс бухгалтерии, 37 — курс коммерческой деятельности и 5 изучают обе эти дисциплины. Сколько студентов не посещают дополнительные занятия?

2. В группе 25 студентов. В понедельник 12 человек посетили лекцию по алгебре, 8 — лекцию по геометрии, 10 человек не посетили ни одну из этих лекций. Сколько студентов посетили только лекцию по алгебре?

3. Сколько имеется натуральных чисел, меньших числа N , которые делятся хотя бы на одно из чисел a, b, c при условии, что:

а) $N = 750, a = 2, b = 3, c = 11$;

б) $N = 900, a = 3, b = 5, c = 7$;

в) $N = 850, a = 2, b = 5, c = 7$;

г) $N = 742, a = 5, b = 3, c = 11;$

д) $N = 934, a = 2, b = 7, c = 11;$

е) $N = 851, a = 3, b = 7, c = 11;$

ж) $N = 963, a = 2, b = 3, c = 7.$

4. Сколько имеется натуральных чисел, меньших числа N , которые не делятся ни на одно из чисел a, b, c при условии, что:

а) $N = 942, a = 2, b = 3, c = 5;$

б) $N = 852, a = 3, b = 5, c = 7;$

в) $N = 957, a = 2, b = 3, c = 7;$

г) $N = 847, a = 3, b = 5, c = 13;$

д) $N = 971, a = 2, b = 3, c = 13;$

е) $N = 894, a = 3, b = 5, c = 11;$

ж) $N = 984, a = 5, b = 7, c = 13.$

5. Сколько имеется натуральных чисел, не превосходящих числа и не делящихся ни на одно из чисел при условии, что:

а) $N = 1000, a = 2, b = 6, c = 10;$

б) $N = 984, a = 3, b = 5, c = 12;$

в) $N = 895, a = 2, b = 6, c = 15;$

г) $N = 971, a = 3, b = 6, c = 10;$

д) $N = 874, a = 6, b = 10, c = 15;$

е) $N = 1002, a = 6, b = 10, c = 12;$

ж) $N = 993, a = 3, b = 10, c = 12.$

6. Из 100 студентов третьего курса оказалось, что 60 читает журнал



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



221

Закрыть

A , 50 — журнал B , 50 — журнал C , 30 — журналы A и B , 20 — журналы A и C , 40 — журналы B и C , 10 — журналы A , B и C . Сколько студентов:

- а) не читает ни один из журналов;
- б) читает ровно два журнала;
- в) читает не менее двух журналов?

7. Студенты первого курса, изучающие информатику, могут посещать и дополнительные дисциплины. В этом году 25 из них выбрали бухгалтерию, 27 — бизнес, 12 — туризм. Кроме того, было 20 студентов, слушающих курс бухгалтерии и бизнеса, 5 изучали бухгалтерию и туризм, 3 — туризм и бизнес. Известно, что никто не отважился посещать сразу три курса. Сколько студентов посещали по крайней мере один дополнительный курс? Сколько из них были увлечены только туризмом?

8. На одной из кафедр университета работает 13 человек, причём каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский, семеро — немецкий, шестеро — французский. Пятеро знают английский и немецкий, четверо — английский и французский, трое — немецкий и французский. Сколько человек знают:

- а) все три языка;
- б) ровно два языка;
- в) только английский язык?

9. Найти число простых чисел, не превосходящих числа N :

- а) $N = 125$;
- б) $N = 196$;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



222

Заккрыть

в) $N = 211$;

г) $N = 247$;

д) $N = 311$.

10. Показать, что если натуральное число $n = 30m$, то число натуральных чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15, равно $22m$.

11. Четыре студента сдали в гардероб свои куртки и перепутали номерки. Сколько возможно вариантов того, что ровно k студентов получат свои куртки назад?

а) $k = 0$;

б) $k = 1$;

в) $k = 2$;

г) $k = 3$;

д) $k = 4$.

12. Староста пятого курса дал следующие сведения о студентах. На 5 курсе учится 45 студентов, в том числе 25 юношей. 30 студентов учатся хорошо, в том числе 16 юношей. Спортсом занимается 28 студентов, из них 18 юношей и 17 хорошо успевающих студентов. 15 студентов учатся хорошо и в то же время занимаются спортом. Являются ли поданные сведения достоверными?

13. В результате опроса 70 человек выяснили: 45 знают английский, 31 — немецкий, 52 — французский. Три языка знают 8 человек, английский и французский — 28, английский и немецкий — 16, немецкий и



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



223

Заккрыть

французский — 20. Сколько человек не знают ни одного языка?

14. В отделе компьютерной фирмы работает несколько человек, причём каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 6 человек знают английский, 6 — немецкий, 7 — французский, 4 — английский и немецкий, 3 — немецкий и французский, 2 — французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек:

- а) работает в отделе;
- б) знает только английский;
- в) знает только французский?

15. На факультете работает 67 преподавателей. Из них 47 знают английский язык, 35 — немецкий, 23 — оба языка. 20 — французский, 12 — английский и французский, 11 — немецкий и французский, все три языка знают 5 человек. Сколько человек не знает ни одного из этих языков?

16. На автокурсах 28 слушателей из 100 посещают занятия по ПДД, 25 — занимаются с инструкторами, 20 — занимаются на тренажёрах, 11 — одновременно с ПДД занимаются с инструкторами, 3 — одновременно с ПДД ходят на тренажёры, 42 — ждут своей очереди, чтобы начать заниматься хотя бы по одному из курсов. Сколько людей посещают все три вида занятий?

17. На вступительном экзамене были предложены 3 задачи по алгебре, по геометрии и по тригонометрии. Из 1000 абитуриентов алгебру решили 800 человек, геометрию — 700, тригонометрию — 600, алгебру



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



224

Заккрыть

и геометрию — 600, алгебру и тригонометрию — 500, тригонометрию и геометрию — 400. Число абитуриентов, решивших все три задачи в три раза больше чем число абитуриентов, не решивших ни одной задачи. Сколько человек не решили ни одной из трёх предложенных задач?

18. Из 100 студентов 37 сдали зачёты по теории чисел, анализу и геометрии. При этом 37 человек не сдали теорию чисел, 14 — не сдали теорию чисел и анализ, 48 — не сдали геометрию, 23 — не сдали геометрию и теорию чисел, 29 — не сдали анализ, 41 — не сдали анализ и геометрию. Сколько человек не сдали ни одного зачёта?

19. 5 студентов сдают экзамен, по которому имеется ровно 5 билетов. При этом каждый студент выучил ровно один билет и никакие два студента не выучили один и тот же билет. Сколько имеется вариантов того, что каждый студент вытянет не "свой" билет?



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



225

Заккрыть

3.2.6 Рекуррентные соотношения. Решение рекуррентных соотношений

Образец 1. Дано рекуррентное соотношение $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ с начальными условиями $f_1 = 1, f_2 = 1$. Докажите тождество $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$.

Решение. Возьмём первую часть доказываемого тождества и будем в нём последовательно выражать $f_i (i = n + 2, n + 1, n \dots, 3)$ через f_{i-1} и f_{i-2} , применяя рекуррентное соотношение $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$:
 $f_{n+2} - 1 = f_n + f_{n+1} - 1 = (f_n + f_{n-1}) + f_n - 1 = (f_n + f_{n-1} + f_{n-2}) + f_{n-1} - 1 = (f_n + f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}) + f_{n-2} - 1 = \dots = (f_n + f_{n-1} + \dots + f_1) + f_2 - 1 = (f_n + f_{n-1} + \dots + f_1) + 1 - 1 = f_n + f_{n-1} + \dots + f_1$.

Образец 2. Найдите частное решение линейного рекуррентного соотношения $f_{n+2} - 4 \cdot f_{n+1} + 3 \cdot f_n = 0$ при начальных условиях $f_1 = 10, f_2 = 16$.

Решение. Рассматриваемое рекуррентное соотношение $f_{n+2} - 4 \cdot f_{n+1} + 3 \cdot f_n = 0$ является линейным рекуррентным соотношением второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическим уравнением для этого рекуррентного соотношения является уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$, которое имеет два действительных корня 1 и 3. Тогда общее решение исходного рекуррентного соотношения будет иметь вид $f_n = c_1 \cdot 1^{n-1} + c_2 \cdot 3^{n-1}$ или $f_n = c_1 + c_2 \cdot 3^{n-1}$

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

226

[Закрыть](#)

Найдём теперь частное решение при начальных условиях $f_1 = 10, f_2 = 16$. Для этого подставим значения $f_1 = 10, f_2 = 16$ и в формулу общего решения:

$$\begin{cases} 10 = c_1 + c_2 \cdot 3^0, \\ 16 = c_1 + c_2 \cdot 3^1 \end{cases}$$

Найдём c_1 и c_2 . Для этого решим систему

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 10, \\ c_1 + 3c_2 = 16 \end{cases}$$

Решив её, мы получим, что $c_1 = 7, c_2 = 3$. Тогда частное решение при указанных начальных условиях будет иметь вид $f_n = 7 + 3 \cdot 3^{n-1}$ или $f_n = 3^n + 7$.

1. Среди чисел последовательности Фибоначчи $f_1, f_2, \dots, f_{12}$ укажите простые, составные и числа, не являющиеся квадратом других чисел. Найдите $\frac{f_{n+1}}{f_n}$, где $n \leq 11$.

2. Дано рекуррентное соотношение $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ с начальными условиями $f_1 = 1, f_2 = 1$. Докажите следующие тождества:

а) $f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$;

б) $f_2 + f_4 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$;

в) $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot f_n = (-1)^{n+1} \cdot f_{n-1} + 1$;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



227

Закреть

$$\Gamma) f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1};$$

$$\Delta) f_1 + 2 \cdot f_2 + 3 \cdot f_3 + \dots + n \cdot f_n = n \cdot f_{n+2} - f_{n+3} + 2;$$

$$\text{е) } n \cdot f_1 + (n-1) \cdot f_2 + \dots + f_n = f_{n+4} - (n+3);$$

$$\text{ж) } f_{n+m} = f_{n-1} \cdot f_m + f_n \cdot f_{m+1};$$

$$\text{з) } f_{2n} = f_{n+1}^2 + f_{n-1}^2;$$

$$\text{и) } f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 + f_{n-1}^3;$$

$$\text{к) } f_n^2 = f_{n-1} \cdot f_{n+1} + (-1)^{n+1};$$

$$\text{л) } f_{n+2} \cdot f_{n-1} = f_{n+1}^2 - f_n^2.$$

3. Дано рекуррентное соотношение $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ с начальными условиями $f_1 = 1, f_2 = 1$. Докажите, что:

а) каждые два соседних числа f_{n+1} и f_n являются взаимно простыми;

б) для любых m и $n = km$ число f_n делится на число f_m .

4. Дана последовательность $f_1, f_2, f_3, \dots$ чисел Фибоначчи. Вычислите:

$$\text{а) } f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_3 + \dots + f_{n-1} \cdot f_n;$$

$$\text{б) } f_3 + f_6 + \dots + f_{3n};$$

$$\text{в) } f_1^3 + f_2^3 + \dots + f_n^3.$$

5. Найдите общее решение линейного рекуррентного соотношения:

$$\text{а) } f_{n+2} - 5f_{n+1} + 6f_n = 0;$$

$$\text{б) } f_{n+2} - 3f_{n+1} + f_n = 0;$$

$$\text{в) } f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n = 0;$$

$$\text{г) } f_{n+3} - 3f_{n+2} + 3f_{n+1} - f_n = 0;$$

$$\text{д) } f_{n+2} + 3f_n = 0;$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



228

Заккрыть

е) $f_{n+2} + 2f_{n+1} + f_n = 0$;

ж) $f_{n+2} - f_n = 0$;

з) $f_{n+2} - 3f_{n+1} + 2f_n = 0$.

6. Найдите частное решение линейного рекуррентного соотношения:

а) $f_{n+2} - 5f_{n+1} + 6f_n = 0, f_1 = 1, f_2 = 2$;

б) $2f_{n+2} - 3f_{n+1} + f_n = 0, f_1 = 1, f_2 = 2$;

в) $f_{n+2} - f_n = 0, f_1 = 2, f_2 = 0$;

г) $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0, f_1 = 1, f_2 = 1$;

д) $f_{n+2} - 2f_{n+1} + 6f_n = 0, f_1 = 1, f_2 = 2$;

е) $f_{n+2} + 4f_{n+1} - 4f_n = 0, f_1 = 1, f_2 = 4$;

ж) $f_{n+1} = \frac{1}{3}f_n + 2, f_1 = 6$;

з) $f_{n+2} - 4f_{n+1} + 1f_n = 0, f_1 = 1, f_2 = 2$;

и) $f_{n+2} - 3f_n = 0, f_1 = 2, f_2 = 0$;

к) $f_{n+2} - 3f_{n+1} + 2f_n = 0, f_1 = 1, f_2 = \frac{3}{2}$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



229

Закрыть

3.2.7 Производящие функции

Образец 1. Построить производящую функцию для рекуррентного соотношения $f_{n+2} - 6 \cdot f_{n+1} + 3 \cdot f_n = 0$, где $f_1 = 1, f_2 = -2$.

Решение. Для построения производящей функции выполним следующие действия:

1) Умножим обе части исходного соотношения $f_{n+2} - 6 \cdot f_{n+1} + 3 \cdot f_n = 0$ на x^n , где $n = 0, 1, 2, \dots$. В результате получим систему уравнений.

2) Сложим левые части системы уравнений, в также — правые:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} \cdot x^n - 6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} \cdot x^n + 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot x^n = 0.$$

3) Искомая производящая функция будет иметь вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot x^n = f_0 + f_1 \cdot x^1 + f_2 \cdot x^2 + \dots$$

4) Кроме того,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} \cdot x^n &= f_1 + f_2 \cdot x^1 + f_3 \cdot x^2 + \dots = \frac{1}{x}(f_1 \cdot x + f_2 \cdot x^2 + \dots) = \\ &= \frac{1}{x}(f(x) - f_0) = \frac{1}{x}(f(x) - 1), \text{ так как } f_0 = 1. \end{aligned}$$

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

230

[Заккрыть](#)

5) Аналогично получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} \cdot x^n = f_2 + f_3 \cdot x^1 + f_4 \cdot x^2 + \dots = \frac{1}{x^2}(f_2 \cdot x^2 + f_3 \cdot x^3 + f_4 \cdot x^4 + \dots) = \frac{1}{x^2}(f(x) - f_0 - f_1 \cdot x) = \frac{1}{x^2}(f(x) - 1 + 2x)$$

так как $f_0 = 1, f_1 = -2$.

6) Подставим полученные значения в 2):

$$\frac{1}{x^2}(f(x) - 1 + 2x) - 6 \cdot \frac{1}{x}(f(x) - 1) + 3 \cdot f(x) = 0$$

7) Домножим обе части на x^2 :

$$f(x) - 1 + 2x - 6x(f(x) - 1) + 3x^2 \cdot f(x) = 0,$$

$$f(x) - 1 + 2x - 6x \cdot f(x) + 6x + 3x^2 \cdot f(x),$$

$$f(x) \cdot (1 - 6x + 3x^2) = 1 - 8x,$$

$$\text{откуда } f(x) = \frac{1 - 8x}{1 - 6x + 3x^2}$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



231

Закреть

Таким образом $f(x) = \frac{1 - 8x}{1 - 6x + 3x^2}$, — производящая функция для рекуррентного соотношения $f_{n+2} - 6 \cdot f_{n+1} + 3 \cdot f_n = 0$, где $f_1 = 1, f_2 = -2$.

1. Найдите производящую функцию для следующих рекуррентных соотношений:

а) $f_{n+2} - 4f_{n+1} + 3f_n = 0$, где $f_0 = 10, f_1 = 16$;

б) $f_{n+2} - 5f_{n+1} + 6f_n = 0$, где $f_0 = 1, f_1 = -2$;

в) $2f_{n+2} - 3f_{n+1} + f_n = 0$, где $f_0 = 1, f_1 = 2$;

г) $2f_{n+2} - f_n = 0$, где $f_0 = 2, f_1 = 0$;

д) $f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n = 0$, где $f_0 = 1, f_1 = 2$;

е) $f_{n+3} - 3f_{n+2} + 3f_{n+1} - f_n = 0$, где $f_0 = 1, f_1 = 3, f_2 = 6$;

ж) $f_{n+2} - (b+1)f_{n+1} + bf_n = 0$, где $f_0 = 10, f_1 = b+1$;

з) $f_{n+2} + 3f_n = 0$, где $f_0 = 1, f_1 = 1$.

2. Найти производящие функции для последовательностей, заданных следующими рекуррентными соотношениями:

а) $f_{n+2} = 4f_{n+1} - 3f_n$;

б) $f_{n+2} = 3f_n$;

в) $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$;

г) $f_{n+2} = -2f_{n+1} - f_n$.

3. Показать, что функция $A(x)$ является производящей для последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$, если:

а) $a_n = a^n, A(x) = \frac{1}{1 - ax}$;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



232

Заккрыть

$$\text{б) } a_n = n, A(x) = \frac{x}{(1-x)^2};$$

$$\text{в) } a_n = n \cdot (n-1), A(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3};$$

$$\text{г) } a_n = n^2, A(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



233

Закрыть

3.3 Контрольные тесты

Пройти тестирование по теме 1 "Правила суммы, произведения"

Пройти тестирование по теме 2 "Выборки, размещения"

Пройти тестирование по теме 3 "Сочетания"

Пройти тестирование по теме 5 "Формула бинома Ньютона"

Пройти тестирование по теме 6 "Полиномиальная формула"

Пройти тестирование по теме 7 "Формула включений и исключений"

Пройти тестирование по теме 8 "Задача о беспорядках"

Пройти тестирование по теме 9 "Реккурентные соотношения"

Пройти тестирование по теме 10 "Решение рекуррентных соотношений"

Пройти тестирование по теме 11 "Производящие функции"

Пройти тестирование по теме 12 "Разбиения чисел"



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



234

Закрыть

Глава 4

Булевы функции

4.1 Теоретическая часть

4.1.1 Понятие булевой функции

Определение 4.1. Функция $f(x_1x_2, \dots, x_n)$ называется булевой, если она сама и её аргументы принимают значения из множества $E = \{0, 1\}$. Булевы функции называют ещё истинностными или функциями алгебры логики.

Булеву функцию $f(x_1x_2, \dots, x_n)$ можно задать таблицей, в которой будет 2^n строк и $n + 1$ столбец. В первых n столбцах записываются всевозможные наборы значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, в $(n + 1)$ -ом столбце – значение функции f на этих наборах. Условимся наборы значений переменных $x_1x_2, \dots, x_n$ записывать в порядке возрастания целых чисел, определяемых этими наборами как записями чисел в двоичной системе счисления. Таблицу, в которой эти наборы записаны в указанном порядке, будем называть стандартной.

Пример 4.1. Стандартная таблица 4.1 задаёт булеву функцию $f(x_1x_2)$ от двух переменных.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

235

[Закрыть](#)

Таблица 4.1.

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Замечание 4.1. Для любых двух функций от одного и того же числа переменных их стандартные таблицы отличаются только лишь последним столбцом. Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. Число всех булевых функций, зависящих от n переменных, равно 2^{2^n} .

Число булевых функций от одной переменной равно 4 и все они представлены в таблице 4.2.

Таблица 4.2.

x_1	$f_1(x_1)$	$f_2(x_1)$	$f_3(x_1)$	$f_4(x_1)$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Функции $f_1(x_1) = 0$ и $f_2(x_1) = 1$ являются константами, $f_3(x_1) = x_1$ и $f_4(x_1) = \overline{x_1}$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



236

Закреть

Замечание 4.2. Сами константы 1 и 0 считаются нульместными функциями.

По аналогии с тем как в п.1.1 определялись логические операции конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция и отрицание можно определить и соответствующие булевы функции с теми же обозначениями ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $-$). Кроме этих функций введём в рассмотрение ещё три (табл. 3.3).

Таблица 4.3.

x_1	x_2	x_1/x_2	$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

Функции x_1/x_2 , $x_1 \downarrow x_2$, $x_1 \oplus x_2$ называются соответственно штрих Шеффера, стрелка Пирса и сложение по модулю 2.

Определение 4.2. Булевы нуль-, одно- и двуместные функции называются элементарными.

Определение 4.3. Переменная x_i ($1 \leq i \leq n$) в булевой функции $f(x_1x_2, \dots, x_n)$ называется существенной, если имеется такой набор значений $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$, что выполняется условие



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



237

Заккрыть

$f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$. В противном случае переменная x_i называется несущественной или фиктивной.

Пример 4.2. В булевой функции $f(x_1x_2)$, заданной таблицей 4.1, переменная x_1 является несущественной.

Замечание 4.3. Если переменная $x_i (1 \leq i \leq n)$ в булевой функции $f(x_1x_2, \dots, x_n)$ является несущественной, то значение функции f зависит от $n - 1$ переменных $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Это значит, функция f представляет собой некоторую функцию $g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. В этом случае говорят, что функция g получена из функции f путем удаления несущественной переменной x_i , а функция f получена из функции g путем введения несущественной переменной x_i .

Пример 4.3. Функция $f(x_2) = x_2$ получена из функции, представленной в таблице 4.1, путем удаления фиктивной переменной x_1 , а функция, представленная в таблице 4.1, получена из функции $f(x_2) = x_2$ путем введения фиктивной переменной x_1 .

Определение 4.4. Две функции называются равными, если одну из них можно получить из другой путем введения или удаления фиктивных переменных.

Пример 4.4. Функция $f(x_2) = x_2$ и функция, заданная таблицей 4.1, являются равными.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

238

[Закреть](#)

Замечание 4.4. Введение фиктивных переменных позволяет функцию от n переменных рассматривать как функцию от большего числа переменных. В силу этого любое множество функций можно рассматривать как множество функций, зависящих от одного и того же числа переменных.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



239

Закрыть

4.1.2 Формулы

В логике высказываний, исходя из символов логических операций и символов высказываний, строились формулы. Аналогично и здесь будем строить формулы, исходя из символов булевых функций и символов переменных.

Множество всех булевых функций обозначим через P_2 .

Определение 4.5. Пусть G – некоторое подмножество булевых функций. Тогда:

1. Каждая переменная является формулой над G ;
2. Символы 0 и 1 являются формулами над G ;
3. Каждое выражение $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$ является формулой над G ;
4. Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$ и $A_1, A_2, \dots, A_n$ – формулы над G , то выражение $f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ тоже является формулой над G . При этом, $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются подформулами формулы $f(A_1, A_2, \dots, A_n)$;
5. Других формул над G нет.

Пример 4.5. Пусть $G = \{\rightarrow, \downarrow, /\}$. Тогда:
 $((x_1 \rightarrow x_2)/x_1)$ – формула над G ;
 $((x_2 \downarrow (x_1 \rightarrow x_2)))$ – формула над G ;
 $((x_1 \rightarrow x_2)/(x_1 \leftrightarrow x_2))$ – не является формулой над G , так как символ $\leftrightarrow$ не входит во множество G .

Замечание 4.5. Будем придерживаться тех же соглашений об

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

240

[Закреть](#)

опускании скобок, что и в главе 1. Это значит сохраняется тот же приоритет выполнения операций: $-$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$.

Замечание 4.6. Подставляя на места переменных их значения, будем получать значение формулы. Исходя из этого, тождественно-истинные, тождественно-ложные и выполнимые формулы определяются аналогично тому, как это делалось в логике высказываний.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



241

Закрыть

4.1.3 Равносильность

Определение 4.6. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – совокупность переменных, входящих хотя бы в одну из формул P и Q . Тогда формулы P и Q называются равносильными, если на любом наборе значений переменных эти формулы принимают одинаковые значения. В этом случае пишут $P \equiv Q$.

Замечание 4.7. Равносильности, которые имели место в логике высказываний, остаются в силе и для рассматриваемых формул. Чтобы отметить это обстоятельство новые равносильности запишем, продолжая нумерацию равносильностей главы 1.

23. $A \circ B \equiv B \circ A$, где $\circ \in \{/, \downarrow, \oplus\}$.

24. $A \circ (B \circ C) \equiv (A \circ B) \circ C$, где $\circ \in \{/, \downarrow, \oplus\}$.

25. $A \wedge (B \oplus C) \equiv (A \wedge B) \oplus (A \wedge C)$

26. $A \oplus A \equiv 0$.

27. $A \oplus 1 \equiv \bar{A}$.

28. $A \leftrightarrow B \equiv (A \oplus B) \oplus 1$.

29. $A \rightarrow B \equiv ((A \wedge B) \oplus A) \oplus 1$.

30. $A \oplus B \equiv \overline{A \leftrightarrow B}$.

31. $A / B \equiv \overline{A \leftrightarrow B}$.

32. $A \downarrow B \equiv \overline{A \leftrightarrow B}$.

Замечание 4.8. В равносильностях 23, 24 и в левой и в правой частях должен находиться символ одной и той же булевой функции.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



242

Закреть

Замечание 4.9. Применяя равносильности 1 -32 и заменяя в формуле A подформулу P на равносильную ей формулу Q , мы получаем формулу B , равносильную формуле A . Этот прием позволяет преобразовывать формулы в равносильные им более простые формулы или формулы, имеющие специальный вид.

Пример 4.6. Упростить формулу: $(x \oplus y) \vee (x \wedge y) \equiv \overline{x \leftrightarrow y} \vee \vee(x \wedge y) \equiv \overline{(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)} \vee (x \wedge y) \equiv \overline{(\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee x)} \vee (x \wedge y) \equiv (\overline{x} \vee y) \vee (\overline{y} \vee x) \vee (x \wedge y) \equiv (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge y) \equiv (x \wedge \overline{y}) \vee \vee(y \wedge (\overline{x} \vee x)) \equiv (x \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge 1) \equiv (x \wedge \overline{y}) \vee y \equiv (x \vee y) \wedge (\overline{y} \vee y) \equiv (x \vee y) \wedge 1 \equiv x \vee y.$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



243

Закреть

4.1.4 Нормальные формулы

Здесь мы покажем, что каждую булеву функцию можно задать формулой некоторого специального вида.

Определение 4.7. Пусть $\sigma \in \{0, 1\}$. Определим

$$x^\sigma = \begin{cases} \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0, \\ x, & \text{если } \sigma = 1, \end{cases}$$

Замечание 4.10. $x^\sigma = 1$ тогда и только тогда, когда $x = \sigma$.

Определение 4.8. Формула вида $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$ называется элементарной конъюнкцией.

Пример 4.7. а) $x_1 \wedge x_2$, $x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3$, $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, – элементарные конъюнкции;

б) $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ – не является элементарной конъюнкцией.

Замечание 4.11. $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n} = 1$ тогда и только тогда, когда для каждого i ($1 \leq i \leq n$) выполняется условие $x_i = \sigma_i$.

Определение 4.9. Всякая дизъюнкция элементарных конъюнкций называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

Замечание 4.12. Одна элементарная конъюнкция также считается дизъюнктивной нормальной формой.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



244

Закреть

Пример 4.8. Следующие формулы являются дизъюнктивными нормальными формами:

- 1) $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3})$;
- 2) $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2})$;
- 3) $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$;
- 4) $(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$.

Определение 4.10. ДНФ называется совершенной (СДНФ), если каждая буква формулы входит в каждый дизъюнктивный член ровно один раз (с отрицанием или без него).

Пример 4.9. Дизъюнктивные нормальные формы 2) и 4) из предыдущего примера являются совершенными, формы 1) и 3) – нет.

Теорема 4.2. Всякая булева функция, тождественно не равная нулю, может быть единственным образом представлена в виде СДНФ.

Доказательство теоремы проведем в три этапа. Пусть дана булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ и пусть функция будет задана стандартной таблицей.

I. На этом этапе построим СДНФ. В таблице отметим строки $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ такие, что $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$. Для каждой такой строки $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ строим элементарную конъюнкцию $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$. Построенные таким образом элементарные конъюнкции соединяем знаками дизъюнкции, в результате чего и получаем СДНФ.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

245

[Заккрыть](#)

II. Покажем, что построенная нами СДНФ определяет исходную булеву функцию $f(x_1x_2, \dots, x_n)$. Для этого возьмем произвольный, но фиксированный набор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ значений $x_1x_2, \dots, x_n$ и подставим его в функцию $f(x_1x_2, \dots, x_n)$ и в построенную СДНФ. При этом, возможны будут два случая.

а) $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$. Тогда из способа построения СДНФ будет следовать, что в СДНФ имеется дизъюнктивный член $x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}$. При подстановке в него набора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ получим $\alpha_1^{\alpha_1} \wedge \alpha_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \alpha_n^{\alpha_n}$. В силу замечания 3.11 этот дизъюнктивный член примет значение 1. Тогда и вся СДНФ на основании равносильности 15 примет значение 1.

в) $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$. Тогда в СДНФ дизъюнктивного члена $x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}$ уже не будет. Рассмотрим произвольный дизъюнктивный член $x_1^{\beta_1} \wedge x_2^{\beta_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\beta_n}$. При подстановке в него набора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ получим $\alpha_1^{\beta_1} \wedge \alpha_2^{\beta_2} \wedge \dots \wedge \alpha_n^{\beta_n}$. Поскольку $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$, а $f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = 1$, то имеется хотя бы один номер $i (1 \leq i \leq n)$ такой, что $\alpha_i \neq \beta_i$. Тогда в силу замечания 4.11 получим $\alpha_1^{\beta_1} \wedge \alpha_2^{\beta_2} \wedge \dots \wedge \alpha_n^{\beta_n} = 0$. Таким образом, произвольный дизъюнктивный член $x_1^{\beta_1} \wedge x_2^{\beta_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\beta_n}$ принял значение 0. Следовательно, и вся СДНФ, как дизъюнкция нулей, примет значение 0.

Итак, на каждом наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ функция $f(x_1x_2, \dots, x_n)$ и построенная нами СДНФ принимают одинаковые значения. Следовательно, построенная нами СДНФ определяет исходную функцию



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



246

Закрыть

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

III. Покажем, что построенная нами СДНФ является единственной. Для этого предположим, что для исходной булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеются две различные СДНФ, обозначим их через P и Q . Поскольку P и Q – различные, то у P имеется хотя бы один дизъюнктивный член, которого нет у Q или наоборот. Пусть, например, у P имеется дизъюнктивный член $x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}$, которого нет у Q . Тогда, как было показано на втором этапе доказательства, при подстановке в P и в Q набора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ P примет значение 1, Q – значение 0. Пришли к противоречию, поскольку P и Q определяют одну и ту же булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и должны принимать одинаковые значения. Следовательно, наше предположение неверно. Теорема доказана.

Замечание 4.13. Первый этап доказательства теоремы определяет способ построения СДНФ булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданной таблицей.

Замечание 4.14. По аналогии с тем, как определялись элементарная конъюнкция, ДНФ, СДНФ, определяются элементарная дизъюнкция, КНФ, СКНФ.

Пример 4.10. Формулы 1) – 4) являются КНФ, формулы 2), 4) – СКНФ:

$$1) (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3});$$

$$2) (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2});$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



247

Заккрыть

$$3) (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3);$$

$$4) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Теорема 4.3. *Всякая булева функция, тождественно не равная 1, может быть единственным образом представлена в виде СКНФ.*

Замечание 4.15. *Теорема 4.3 доказывается аналогично теореме 4.2. Отметим лишь способ построения СКНФ булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданной таблицей.*

1. Отметим строки $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ такие, что $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$.

2. Для каждой такой строки $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ строим элементарную дизъюнкцию $x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}$.

3. Построенные таким образом элементарные дизъюнкции соединяем знаками конъюнкции, в результате чего и получаем СКНФ.

Пример 4.11. *Построим СДНФ и СКНФ для булевой функции $f(x_1 x_2)$, заданной таблицей 4.1:*

$$\text{СДНФ: } (x_1^0 \wedge x_2^0) \vee (x_1^1 \wedge x_2^0) = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2});$$

$$\text{СКНФ: } (x_1^1 \vee x_2^0) \wedge (x_1^1 \vee x_2^1) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2).$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



248

Закреть

4.1.5 Полнота и замкнутость

Определение 4.11. Система булевых функций $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ называется *полной*, если любую булеву функцию можно представить в виде формулы над F .

Приведем примеры полных систем.

Лемма 4.1. Система $\{\wedge, \vee, -\}$ является *полной*.

Доказательство. Из теорем 4.2 и 4.3 следует, что каждая булева функция может быть представлена в виде СДНФ или СКНФ. А поскольку в СДНФ и СКНФ из булевых функций входят только конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, то это и означает, что система $\{\wedge, \vee, -\}$ является *полной*. Доказано.

Докажем теорему, позволяющую из полноты одной системы булевых функций при выполнении определенных условиях получать полноту другой системы. Такая процедура называется сведением к заведомо полной системе.

Теорема 4.4. Пусть даны две системы булевых функций F и G , относительно которых известно, что система F является *полной* и каждая её функция представима в виде формулы над G . Тогда система G тоже является *полной*.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполняются. Рассмотрим произвольную булеву функцию h . Так как система F является пол-



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



249

Заккрыть

ной, то по определению функция h представима в виде формулы над F . А поскольку каждая функция системы F представима в виде формулы над G , то в итоге произвольная функция h представима в виде формулы над G . Следовательно, система G является полной. Доказано.

Лемма 4.2. Система $\{\vee, -\}$ является полной.

Доказательство. Система $F = \{\wedge, \vee, -\}$ по лемме 4.1 является полной. Кроме того, конъюнкция выражаются через дизъюнкцию и отрицание :

$$x_1 \wedge x_2 \equiv \overline{x_1 \vee \overline{x_2}}.$$

Следовательно, по теореме 4.4 система $G = \{\vee, -\}$ является полной. Доказано.

Лемма 4.3. Система $\{\vee, -\}$ является полной.

Эта лемма доказывается аналогично предыдущей.

Таким образом, имеются полные системы, каждая из которых состоит только из двух булевых функций. Естественно, возникает вопрос: есть ли полные системы, состоящие только из одной булевой функции. Ответ на этот вопрос даёт следующая лемма.

Лемма 4.4. Система $\{/\}$ является полной.

Доказательство. Система $F = \{\wedge, -\}$ по лемме 4.2 является полной. Кроме того, и конъюнкция и отрицание выражаются через штрих Шеффера:



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



250

Заккрыть

$$x_1 \wedge x_2 \equiv (x_1/x_2)/(x_1/x_2); \bar{x} \equiv x/x.$$

Следовательно, по теореме 4.4 система $G = \{/\}$ является полной. Доказано.

Определение 4.12. Пусть F – некоторое множество булевых функций. Тогда замыканием множества F называется множество всех булевых функций, представимых в виде формул над F . Замыкание множества F обозначается через $[F]$.

Замечание 4.16. Очевидно, система булевых функций F является полной, если $[F] = P_2$.

Отметим свойства замыкания.

1. $F \subset [F]$.
2. $[[F]] = [F]$.
3. Если $F_1 \subset F_2$, то $[F_1] \subset [F_2]$.
4. $[F_1] \cup [F_2] \subset [F_1 \cup F_2]$.

Определение 4.13. Класс (множество) булевых функций F называется замкнутым, если $[F] = F$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



251

Закреть

4.1.6 Важнейшие замкнутые классы

Рассмотрим пять важнейших замкнутых классов.

1. Класс T_0 – класс булевых функций сохраняющих константу 0.

Определение 4.14. Булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in T_0$, если выполняется условие $f(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Пример 4.12. Покажем, что функция $f(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ принадлежит классу T_0 : $f(0, 0) = 0 \wedge 0 = 0$.

Можно показать, что классу T_0 принадлежат функции $0, x, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2$ и не принадлежат $1, \bar{x}, x_1 \rightarrow x_2, x_1 \leftrightarrow x_2, x_1/x_2, x_1 \downarrow x_2$.

2. Класс T_1 – класс булевых функций сохраняющих константу 1.

Определение 4.15. Булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in T_1$, если выполняется условие $f(1, \dots, 1) = 1$.

Можно показать, что классу T_1 принадлежат функции $1, x, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \rightarrow x_2, x_1 \leftrightarrow x_2$, и не принадлежат $0, \bar{x}, x_1 \leftrightarrow x_2, x_1/x_2, x_1 \oplus x_2, x_1 \downarrow x_2$.

3. Класс S – класс всех самодвойственных функций.

Определение 4.16. Булева функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ называется двойственной к функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Определение 4.17. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется самодвойственной, если $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

252

[Заккрыть](#)

Самодвойственными являются функции $x, \bar{x}$.

4. Класс M – класс всех монотонных функций.

Наборы $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ будем обозначать соответственно через $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$.

Определение 4.18. Говорят, что набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ предшествует набору $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, если для каждого i ($1 \leq i \leq n$) выполняется условие $\alpha_i \leq \beta_i$. В этом случае пишут $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$.

Пример 4.13. $(0, 1, 0, 0) \preceq (1, 1, 0, 0)$.

Замечание 4.17. Не всякие два набора находятся в отношении предшествования. Например, ни один из следующих двух наборов не предшествует друг другу $(0, 1, 0, 1) \not\preceq (1, 0, 0, 0)$.

Определение 4.19. Функция f называется монотонной, если для любых двух наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ выполняется условие $f(\tilde{\alpha}) \preceq f(\tilde{\beta})$.

Монотонными являются функции $0, 1, x, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2$.

5. Класс L – класс всех линейных функций.

Определение 4.20. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется линейной, если её можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 \bigoplus c_1 \cdot x_1 \bigoplus c_2 \cdot x_2 \bigoplus \dots \bigoplus c_n \cdot x_n,$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



253

Закреть

где $\cdot$ — есть знак конъюнкции и $c_i \in 0, 1, i = \overline{1, n}$.

Замечание 4.18. Классы T_0, T_1, S, M, L являются попарно различными. Это следует из таблицы 4.4, где знак $+$ означает принадлежность функции классу и знак $-$ означает, что функция классу не принадлежит.

Таблица 4.4.

	Класс				
Функция	T_0	T_1	S	M	L
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
$\bar{x}$	-	-	+	-	+



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



254

Закреть

4.1.7 Свойства полноты и замкнутости

Теорема 4.5. *Каждый из классов T_0, T_1, S, M, L является замкнутым.*

Доказательство. Замкнутый класс определяется через множество булевых функций F как множество функций, представимых в виде формул над F . При этом должно выполняться условие $[F] = F$.

Покажем, что класс T_0 является замкнутым. Пусть класс T_0 определяется через множество булевых функций F . Очевидно, каждая функция $f \in F$ сохраняет константу 0. Для доказательства замкнутости класса T_0 надо показать, что любая булева функция $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$, представимая в виде формулы над F , принадлежит классу T_0 . Доказательство этого утверждения проведем по принципу математической индукции относительно $N(h)$ – числа символов булевых функций в формуле, представляющей функцию h в виде формулы над F .

1. $N(h) = 1$. Это значит, функция h является функцией из множества F и она, как отмечалась выше, сохраняет константу 0.

2. Пусть доказываемое утверждение выполняется для каждой функции g , для которой значение $N(g) < k$. Рассмотрим функцию $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такую, что $N(h) = k$. По определению 4.5 функция h имеет вид

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(A_1, A_2, \dots, A_m)$$

где $f \in F$ и каждое $A_i (1 \leq i \leq m)$ является либо переменной, либо фор-

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

255

[Закреть](#)

мулой над F . В силу замечания 4.4 каждое выражение A_i , являющееся формулой, как формулу от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Так как $N(h) = k > 1$ и $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(A_1, A_2, \dots, A_m)$, то $N(f) < k$ и каждый член $A_i (1 \leq i \leq m)$ являющийся формулой, содержит меньше, чем k символов булевых функций.

Подставим в $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(A_1, A_2, \dots, A_m)$ набор $(0, \dots, 0)$ вместо $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. По индуктивному предположению каждое выражение $A_i (1 \leq i \leq m)$, являющееся формулой, на этом наборе принимает значение 0. Следовательно, $h(0, \dots, 0) = f(0, \dots, 0)$. А поскольку $N(f) < k$, то по индуктивному предположению $f(0, \dots, 0) = 0$, то есть $h(0, \dots, 0) = 0$ и $h \in T_0$.

Таким образом, мы доказали замкнутость класса T_0 . Замкнутость остальных классов T_1, S, M, L доказывается аналогично. Теорема доказана.

Сформулируем критерий полноты систем булевых функций.

Теорема 4.6. Система булевых функций F является полной тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L .

Следствие 4.1. Если F – замкнутый класс и $F \neq P_2$, то F содержится по крайней мере в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L .

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

256

[Закреть](#)

Определение 4.21. Класс булевых функций F называется предполным, если он сам полным не является, а класс $F \cup \{f\}$, где f произвольная булева функция, не принадлежащая классу F , уже является полным.

Определение 4.22. В булевой алгебре имеется ровно пять предполных классов T_0, T_1, S, M, L .



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



257

Закрыть

4.1.8 Представление о результатах Поста

Замкнутые классы в P_2 глубоко изучил американский математик Э. Пост. Сформулируем важнейшие результаты, полученные им.

Определение 4.23. Система булевых функций $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ из замкнутого класса F называется *полной* в F , если её замыкание совпадает с F .

Определение 4.24. Система булевых функций $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ из замкнутого класса F называется его *базисом*, если она сама полна в F , но никакая её собственная подсистема полной в F не является.

Теорема 4.7. Каждый замкнутый класс из P_2 имеет конечный базис.

Теорема 4.8. Мощность множества замкнутых классов в P_2 – счетная.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



258

Закрыть

4.2 Практическая часть

4.2.1 Функции. Равносильность

Образец 1. Построить таблицу истинности для формулы $((x \oplus y) \rightarrow z)/y$.

Решение. Булевы функции от одной переменной задаются следующим образом:

x	x	0	1	$\bar{x}$
0	0	0	1	1
1	1	0	1	0

Булевы функции от двух переменных ($\vee$ - дизъюнкция, $\wedge$ - конъюнкция, $\rightarrow$ - импликация, $\longleftrightarrow$ - эквиваленция, $\oplus$ - сумма по модулю 2, $/$ - штрих Шеффера, $\downarrow$ - стрелка Пирса) определяются следующим образом:

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$	$x \longleftrightarrow y$	$x \oplus y$	x/y	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Исходя приведенных таблиц таблица для рассматриваемой формулы $((x \oplus y) \rightarrow z)/y$ будет иметь вид:

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

259

[Закреть](#)

x	y	z	$x \oplus y$	$((x \oplus y) \rightarrow z)$	$((x \oplus y) \rightarrow z)/y$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

1.1. Построить таблицы истинности для следующих формул:

a) $(x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow z) \oplus (z \rightarrow x));$

b) $(\bar{x} \vee y) \vee (x \wedge \bar{z}) \downarrow (x \leftrightarrow y);$

c) $\bar{x} \rightarrow (\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus z \wedge x));$

d) $((x/y) \downarrow z)/y \downarrow z).$

1.2. Какие из следующих формул являются тождественно истинными, а какие – тождественно ложными?

e) $((x \oplus y) \leftrightarrow z) \wedge (x \rightarrow y \wedge z);$

f) $((\bar{x} \vee \bar{y}) \downarrow (x \oplus \bar{y})) \oplus (\bar{x} \rightarrow \bar{y} \rightarrow (\bar{x} \vee y));$

g) $(x \vee \bar{y}) \wedge z \rightarrow ((x \leftrightarrow z) \oplus y) \wedge (x \wedge y \wedge z).$

1.3. Равносильны ли следующие формулы:

a) $x \oplus (y \rightarrow z)$ и $(x \oplus y) \rightarrow (x \oplus z);$

b) $x \rightarrow y \rightarrow ((x \wedge \bar{y}) \oplus (x \leftrightarrow \bar{y}))$ и $(x \vee y) \vee (\bar{x} \vee \bar{y});$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



260

Закреть

- c) $x \downarrow (y \wedge z) \equiv (x \downarrow y) \wedge (x \downarrow z)$;
d) $x / (y \wedge z) \equiv (x / y) \wedge (x / z)$;
e) $x \oplus (y \wedge z) \equiv (x \downarrow y) \wedge (x \oplus z)$;
f) $x \downarrow (y \vee z) \equiv (x \downarrow y) \vee (x \downarrow z)$;
g) $x / (y \vee z) \equiv (x / y) \vee (x / z)$;
h) $x \oplus (y \vee z) \equiv (x \oplus y) \vee (x \oplus z)$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



261

Заккрыть

4.2.2 Специальные виды формул.

Образец 1. Постройте полином Жегалкина для следующей формулы $(x_1/x_2) \downarrow x_3$.

Решение. Приведем вначале алгоритм построения полинома Жегалкина.

1. Строим формулу, равносильную исходной и содержащую только связки $\wedge, -$.

2. Заменяем $\bar{x}$ на $x \oplus 1$.

3. Раскрываем скобки, пользуясь равносильностью $x \wedge (y \oplus z) \equiv (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$.

4. Приводим подобные члены.

Применим алгоритм к исходной формуле: $(x_1/x_2) \downarrow x_3 \stackrel{33}{\equiv} \stackrel{33}{\equiv} \overline{x_1 \wedge x_2} \downarrow x_3 \stackrel{34}{\equiv} \overline{x_1 \wedge x_2 \vee x_3} \stackrel{11}{\equiv} \overline{x_1 \wedge x_2} \wedge \overline{x_3} \stackrel{1}{\equiv} (x_1 \wedge x_2) \wedge \overline{x_3} \stackrel{29}{\equiv} \stackrel{29}{\equiv} (x_1 \wedge x_2) \wedge (x_3 \oplus 1) \stackrel{27}{\equiv} (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \oplus (x_1 \wedge x_2 \wedge 1) \stackrel{14}{\equiv} (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \oplus (x_1 \wedge x_2)$.

2.1. Приведите к ДНФ:

a) $((x_1 \rightarrow x_2 \wedge x_3) \wedge (x_2 \wedge x_4 \oplus x_3) \rightarrow x_1 \wedge \overline{x_4}) \vee \overline{x_1}$;

b) $(x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_2 \wedge x_3$; g) $x_1 \oplus x_2$;

c) $(x_1 \rightarrow x_2 \wedge \overline{x_3}) \oplus x_2$; h) $(x_1 \downarrow x_3) \oplus x_2$;

d) $(x_1/x_2) \downarrow x_3$; i) (01101100) ;

e) $(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \downarrow x_3)$; j) (10001110) ;

f) $((x_1 \rightarrow x_2) \vee \overline{x_3})/x_1$; k) (01010001) .



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



262

Закреть

2.2. Формулы из примера 2.1. приведите к СДНФ.

2.3. Формулы из примера 2.1. приведите к КНФ и СКНФ.

2.4. Подсчитать число функций от n переменных, для которых СКНФ является одновременно и ДНФ.

2.5. Представить полиномами Жегалкина:

- а) $x_1 \rightarrow x_2$; е) $(x_1 \rightarrow x_2 \wedge \overline{x_3}) \oplus x_2$;
- б) $(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \downarrow x_3)$; ф) $(x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_2 \wedge x_3$;
- с) $((x_1 \rightarrow x_2) \vee \overline{x_3})/x_1$; г) $x_1 \vee x_2 \wedge \overline{x_3}$
- д) $(x_1 \rightarrow x_2) \oplus x_2 \wedge \overline{x_3}$; h) $x_1 \vee x_2 \vee x_3$;
- и) $x_1 \wedge x_2 \vee x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_3$;
- ж) $x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \vee \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3$;
- к) $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$.

2.6. Доказать, что всякая формула может быть представлена полиномом Жегалкина.

2.7. Подсчитать число функций от n переменных, которые переходят в себя после перестановки x_1 и x_2 .

2.8. С помощью метода Блейка построить сокращенную ДНФ:

- а) $x_1 \wedge x_2 \vee \overline{x_1} \wedge x_3 \vee \overline{x_2} \wedge x_3$;
- б) $\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \vee x_1 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4 \vee x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4$;
- с) $\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \vee x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \vee x_3 \wedge x_4$;
- д) $x_1 \wedge x_2 \vee \overline{x_1} \wedge x_3 \vee x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_4 \vee \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$.

2.9. Построить сокращенную ДНФ по заданной КНФ:

- а) $(x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



263

Заккрыть

$$b) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \wedge \overline{x_3});$$

$$c) (x_1 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3});$$

$$d) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_4) \wedge (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}).$$

2.10. Перечислить существенные переменные функций, определяемых следующими формулами:

$$a) (x_1 \rightarrow (x_1 \vee x_2)) \rightarrow x_3;$$

$$b) x \vee x_2 \rightarrow x_2;$$

$$c) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_2} \wedge x_3 \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \wedge x_4;$$

$$d) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}).$$

2.11. Показать, что x_1 является фиктивной переменной:

$$a) (x_1 \oplus x_2) \wedge (x_1 \downarrow x_2);$$

$$b) (((x_3 \rightarrow x_2) \vee x_1) \wedge (x_2 \rightarrow x_1) \wedge x_3 \wedge \overline{x_1}) \oplus x_3;$$

$$c) ((x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_3}) \rightarrow (\overline{x_1} \rightarrow x_2 \wedge \overline{x_3})) \wedge x_2.$$

2.12. Указать фиктивные переменные функции:

$$a) (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0);$$

$$b) (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1);$$

$$c) (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0).$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



264

Заккрыть

4.2.3 Полнота, замкнутость.

3.1. Пусть M_1 и M_2 – такие замкнутые в P_2 классы, что $M_1 \setminus M_2 \neq \emptyset$. Привести примеры конкретных классов M_1 и M_2 , которые удовлетворяли бы следующим условиям:

- а) $M_1 \cap M_2 = \emptyset, \quad M_2 \setminus M_1 \neq \emptyset, \quad [M_1 \cup M_2] = M_1 \cup M_2$;
- б) $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset, \quad M_2 \setminus M_1 \neq \emptyset, \quad [M_1 \cup M_2] = M_1 \cup M_2$;
- в) $M_1 \subset M_2, \quad [M_1 \setminus M_2] \neq M_1 \setminus M_2$;
- г) $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset, \quad M_2 \setminus M_1 \neq \emptyset, \quad [M_1 \setminus M_2] = M_1 \setminus M_2$;
- е) $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset, \quad M_2 \setminus M_1 \neq \emptyset, \quad [M_1 \oplus M_2] = M_1 \oplus M_2$.

3.2. Из системы A , полной для замкнутого класса $[A]$, выделить базис:

- а) $A = \{0, 1, x, \bar{x}\}$;
- б) $A = \{1, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;
- в) $A = \{x \vee y, x \wedge y \wedge z, x \vee y \wedge z, (x \vee y) \wedge z\}$;
- г) $A = \{x \vee y \vee z, x \wedge y \wedge z, x \rightarrow y \rightarrow z, (x \vee y) \rightarrow z\}$.

3.3. Доказать, что всякий замкнутый класс в P_2 , содержащий функцию, отличную от константы, содержит и функцию x .

3.4. Используя критерий полноты, выяснить, полна ли система P :

- а) $P = \{x \rightarrow y, x \rightarrow \bar{y} \wedge z\}$;
- б) $P = \{x \wedge \bar{y}, \bar{x} \leftrightarrow y \wedge z\}$;
- в) $P = \{0, 1, x \wedge (y \leftrightarrow z) \vee \bar{x} \wedge (y \oplus z)\}$.

3.5. Доказать полноту следующих систем функций:

- а) $\{x \wedge y, \bar{x}\}$;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



265

Заккрыть

- b) $\{x \vee y, \bar{x}\};$
- c) $\{x \wedge y, x \oplus y, 1\};$
- d) $\{\overline{x \vee y}\};$
- e) $\{\overline{x \wedge y}\};$
- f) $\{x \oplus y, x \vee y, 1\};$
- g) $\{x \oplus y \oplus z, x \wedge y, 0, 1\};$
- h) $\{x \rightarrow y, \bar{x}\};$
- i) $\{x \rightarrow y, 0\}.$

3.6. Показать, что следующие системы не являются полными:

- a) $\{\bar{x}, 1\};$
- b) $\{x \wedge y, x \vee y\};$
- c) $\{x \oplus y, \bar{x}\};$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



266

Закрыть

4.2.4 Замкнутые классы.

4.1. Является ли функция g двойственной к функции f , если:

a) $f = x \oplus y, \quad g = x \leftrightarrow y$;

b) $f = x \rightarrow y, \quad g = y \rightarrow x$;

c) $f = x \wedge y \vee x \wedge z \vee y \wedge z, \quad g = x \wedge y \oplus x \wedge z \oplus y \wedge z$;

d) $f = x \oplus y \oplus z, \quad g = x \oplus y \oplus z$;

e) $f = \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z \vee x \wedge (y \leftrightarrow z), \quad g(x, y, z) = (01101101).$

4.2. Пользуясь принципом двойственности, построить формулу, реализующую функцию, двойственную к функции f . Полученное выражение упростить, записав в виде ДНФ или в виде полинома Жегалкина:

a) $f = x \wedge y \vee y \wedge z \vee x \wedge t \vee z \wedge t$;

b) $f = x \wedge 1 \vee y \wedge (z \wedge t \vee 0) \vee \bar{x} \wedge y \wedge z$;

c) $f = (x \rightarrow y) \oplus ((x \downarrow x) / (\bar{x} \leftrightarrow y \wedge z))$;

d) $f = (\bar{x} \vee y \vee (y \wedge \bar{z} \oplus 1)) \rightarrow 1$.

4.3. Самодвойственна ли функция f :

a) $f = x \wedge y \vee x \wedge z \vee y \wedge z$;

b) $f = \overline{x \rightarrow y \rightarrow x \wedge z} \rightarrow (y \rightarrow z)$;

c) $f = (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge t \vee \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$;

d) $f = (0001001001100111).$

4.4. Найти все самодвойственные функции от двух переменных.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



267

Заккрыть

4.5. Разлагая функцию f в полином Жегалкина, выяснить, является ли она линейной:

- a) $(x_1 \wedge x_2 \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \oplus x_3$;
- b) $x_1 \wedge x_2 \wedge (x_1 \oplus x_2)$;
- c) $\overline{x_1} \wedge x_2 \vee \overline{x_2} \wedge x_3 \vee \overline{x_3} \wedge x_4 \vee \overline{x_4} \wedge x_1$;
- d) $(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1) \leftrightarrow x_3$.

4.6. Выяснить, можно ли функцию $x \rightarrow y$ реализовать формулой над множеством Φ , где:

- a) $\Phi = L \cup \{x \wedge y \vee x \wedge z \vee z \wedge y\}$;
- b) $\Phi = L \setminus S$;
- c) $\Phi = (L \cup \{x \wedge y \vee y \wedge z \vee z \wedge x\}) \setminus S$;
- d) $\Phi = (L \cup \{x \wedge y\}) \setminus S$.

4.7. Выяснить, какие из ниже перечисленных систем образуют базис в L :

- a) $\{1, x \oplus y\}$;
- b) $\{x \leftrightarrow y, x \oplus y \oplus z\}$;
- c) $\{x \leftrightarrow y, x \oplus y, 0\}$;
- d) $\{0, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;
- e) $\{1 \oplus x \oplus y \oplus z, x \oplus y \oplus z\}$.

4.8. Выяснить, каким из множеств $T_0 \cup T_1, T_1 \setminus T_0$ принадлежат перечисленные ниже функции:

- a) $((x \vee y) \rightarrow (x/(y \wedge z))) \downarrow ((y \leftrightarrow z) \rightarrow x)$;
- b) $(x \wedge y \rightarrow z)/((x \rightarrow y) \downarrow (z \oplus \overline{x} \wedge y))$;



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



268

Закреть

с) $(x \rightarrow y) \wedge (y \downarrow z) \vee (z \rightarrow y)$.

4.9. Сколькими способами можно расставить скобки в выражении $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$, чтобы получилась формула, реализующая функцию из T_0 ?

4.10. Какие из ниже перечисленных функций являются монотонными:

а) $x \rightarrow (x \rightarrow y)$;

б) $x \rightarrow (y \rightarrow x)$;

с) $x \wedge y \wedge (x \oplus y)$;

д) $x \wedge y \oplus y \wedge z \oplus z \wedge x \oplus z$;

е) $x \wedge y \vee x \wedge z \vee \bar{x} \wedge z$;

ф) $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$;

г) $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}$;

h) $x \wedge y \vee x \vee \bar{x} \wedge z$;

и) (00110111);

j) (01100111);

к) (0001010101010111);

л) (0000000010111111).

4.11. Являются ли константы монотонными функциями?

4.12. Какие из основных функций от двух переменных являются монотонными?

4.13. Какие из линейных функций являются монотонными?



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



269

Закреть

4.3 Контрольные тесты

Пройти тестирование по теме "Булевы функции"



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



270

Закрыть

Глава 5

Приложение

5.1 Терминологический словарь

5.1.1 Алгебра высказываний

Определение 5.1. *Конъюнкцией* называют операцию, которая двум высказываниям A, B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $A \wedge B$. Высказывание $A \wedge B$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A, B истинны.

Определение 5.2. *Дизъюнкцией* называют операцию, которая двум высказываниям A, B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $A \vee B$. Высказывание $A \vee B$ ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A, B ложны.

Определение 5.3. *Импликацией* называют операцию, которая двум высказываниям A, B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $A \rightarrow B$. Высказывание $A \rightarrow B$ ложно лишь тогда, когда A – истинно, а B – ложно.

Определение 5.4. *Эквиваленцией* называют операцию, которая двум высказываниям A, B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $A \leftrightarrow B$. Высказывание $A \leftrightarrow B$ истинно лишь тогда, когда оба высказывания A, B истинны или оба ложны.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

271

[Закреть](#)



Определение 5.5. *Отрицанием* называют операцию, которая высказыванию A ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $\bar{A}$. Высказывание $\bar{A}$ истинно лишь тогда, когда A ложно. Запись $\bar{A}$ читают «не A » или «неверно, что A ». Отрицание $\bar{A}$ записывают еще и в виде $\neg A$.

Определение 5.6. 1. Всякая буква, обозначающая высказывание (конкретное или произвольное), является *формулой*.

2. Символы 0 и 1 являются *формулами*.

3. Если P – *формула*, то $\bar{P}$ – *формула*.

4. Если P и Q – *формулы*, то $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \leftrightarrow Q)$ – *формулы*.

5. *Формулами* являются только те выражения, которые можно получить при помощи п. 1-4.

Определение 5.7. *Формулы*, получаемые по пунктам 1, 2 называются элементарными, все остальные – неэлементарными или составными.

Определение 5.8. Пусть даны две формулы P и Q , и пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – совокупность всех различных букв, входящих хотя бы в одну из этих формул. Тогда формулы P и Q называется *равносильными*, если при любом наборе значений $X_1, X_2, \dots, X_n$ эти формулы принимают одинаковые истинностные значения.

Начало

Оглавление

Приложение

Назад



272

Закрыть

Определение 5.9. Формула называется *тавтологией*, если она принимает значение 1 при любом наборе значений входящих в нее букв.

Определение 5.10. Формула называется *противоречием*, если при любом наборе значений входящих в нее букв она принимает значение 0.

Определение 5.11. Формула называется *выполнимой*, если имеется хотя бы один набор значений букв, входящих в формулу, на котором формула принимает значение 1.

Определение 5.12. Формула B называется *логическим следствием* формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 1$), если формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ является *тавтологией*.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



273

Заккрыть

5.1.2 Логика предикатов

Определение 5.13. Предикатом называется функция, множеством значений которой являются истинностные значения 0 и 1.

Определение 5.14. Пусть $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – предикат определенный на множестве M . Тогда предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется

Определение 5.15. Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на некотором множестве M . Тогда под выражением $\forall x P(x)$ понимают высказывание, которое истинно тогда, когда $P(x)$ истинно для любого $x \in M$ и ложно в противном случае. Запись " $\forall x P(x)$ " читают "для любого $x P(x)$ истинно". Символ $\forall$ называется квантором всеобщности.

Определение 5.16. Пусть даны предикаты $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенные на одном и том же множестве M . Тогда:

- предикаты $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются равносильными, если на любом наборе $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ значений из M они принимают одинаковые истинностные значения;
- предикат $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется следствием предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если всякий набор $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ значений из M , удовлетворяющий предикату $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяет и предикату $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



274

Заккрыть



Определение 5.17. Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на некотором множестве M . Тогда под выражением $\exists xP(x)$ понимают высказывание, которое истинно тогда, когда существует хотя бы одно $x \in M$ для которого $P(x)$ истинно и ложно в противном случае. Запись $\exists xP(x)$ читают "существует x , для которого $P(x)$ истинно". Знак $\exists$ называется квантором существования.

Определение 5.18. 1. Каждая формула логики высказываний является формулой (логики предикатов).

2. Символ всякого предиката является формулой.

3. Если A и B формулы, x – переменная, то выражения $\bar{A}$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \iff B)$, $\forall x(A)$, $\exists x(A)$ также являются формулами.

4. Формулами являются только те выражения, которые можно получить по пунктам 1 – 3.

Определение 5.19. В формулах $\forall x(A)$ и $\exists x(A)$ формула A называется областью действия кванторов $\forall x$ и $\exists x$ соответственно.

Определение 5.20. Вхождение переменной в данную формулу называется связанным, если оно следует за знаком квантора или находится в области действия какого-либо квантора по этой переменной. Вхождение переменной не являющиеся связанными, называются свободными.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

275

[Закреть](#)



Определение 5.21. Если имеется хотя бы один набор значений переменных, на котором значение *формулы* A равно 1, то формула называется *выполнимой на множестве* M .

Определение 5.22. Формула называется *выполнимой*, если имеется множество, на котором она *выполнима*.

Определение 5.23. Если значение *формулы* на любом наборе значений из множества M равно 1, то она называется *тождественно-истинной на множестве* M .

Определение 5.24. Если формула *тождественно-истинна* на любом множестве, то она называется *общезначимой*.

Определение 5.25. Пусть даны две *формулы* A и B , определенные на одном и том же множестве M . *Формулы* A и B называются *равносильными на множестве* M , если на любом наборе значений переменных из M они принимают одинаковые значения. В этом случае пишут $A \equiv_M B$,

Определение 5.26. Две формулы A и B называются *равносильными*, если они равносильны на любом множестве. В этом случае пишут $A \equiv B$.

Определение 5.27. Формула, в которой из операций логики высказываний содержатся лишь $\wedge$, $\vee$, $\neg$, а знаки отрицания относятся

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

276

[Закреть](#)

только к простым высказываниям и предикатам, называется *предваренной формулой*.

Определение 5.28. *Предваренная формула* называется *нормальной*, если в ней либо совсем нет кванторов, либо кванторы вынесены за скобки.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



277

Закрыть

5.1.3 Комбинаторный анализ

Определение 5.29. *Пересчёт* — определение числа элементов данного конечного множества, обладающих тем или иным свойством или группой свойств.

Определение 5.30. *Перечисление* — это выделение всех элементов данного конечного множества, обладающих тем или иным свойством или группой свойств.

Определение 5.31. Пусть X — конечное множество, состоящее из n элементов. Тогда:

- 1) говорят, что мощность множества X равна n и пишут $|X| = n$;
- 2) говорят, что элемент $x \in X$ может быть выбран n способами;
- 3) множество X называют n -множеством.

Определение 5.32. Набор элементов $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ из множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ называется *выборкой* объекта r из n элементов или (n, r) -выборкой.

Определение 5.33. *Выборка* называется *упорядоченной (неупорядоченной)*, если порядок следования элементов в ней определён (не определён).

Определение 5.34. Упорядоченная (n, r) -*выборка*, в которой элементы могут повторяться называется (n, r) -*размещением с повторениями*.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



278

Заккрыть



Определение 5.35. Упорядоченная (n, r) -выборка, в которой элементы попарно различны, называется (n, r) -размещением без повторений или просто (n, r) -размещением.

Определение 5.36. Перестановкой n -множества X называется (n, n) -размещение без повторений.

Определение 5.37. Неупорядоченная (n, r) -выборка, в которой элементы могут повторяться, называется (n, r) -сочетанием с повторениями.

Определение 5.38. Неупорядоченная (n, r) -выборка, в которой элементы попарно различны, называется (n, r) -сочетанием без повторений или просто (n, r) -сочетанием.

Определение 5.39. Перестановкой с повторениями n -множества называется всякая упорядоченная последовательность, в которой первый элемент n -множества встречается k_1 раз, второй — k_2 раз, и т.д., n -ый элемент исходного множества — k_n раз.

Определение 5.40. Числа $C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ называются полиномиальными коэффициентами.

Определение 5.41. Рекуррентным называется соотношение, в котором для вычисления некоторого члена числовой последовательности используются значения предыдущих членов этой же последовательности.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

279

[Закрыть](#)

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

280

[Закреть](#)

Определение 5.42. Говорят, что *рекуррентное соотношение* для последовательности $f_1, f_2, f_3, \dots$ имеет порядок k , если оно позволяет выразить элемент f_{n+k} через k предыдущих элементов $f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k-1}$.

Определение 5.43. *Решением рекуррентного соотношения* называется формула, выражающая n -ый член последовательности $f_1, f_2, f_3, \dots$ через n . При этом последовательность $f_1, f_2, f_3, \dots$ так же называется решением данного рекуррентного соотношения.

Определение 5.44. *Решение рекуррентного соотношения k -го порядка* называется общим, если оно зависит от k констант $c_1, c_2, \dots, c_k$, и путём подбора этих констант можно получить любое решение данного рекуррентного соотношения.

Определение 5.45. Рекуррентное соотношение вида

$$f_{n+k} = \alpha_1 \cdot f_{n+k-1} + \alpha_2 \cdot f_{n+k-2} + \dots + \alpha_k \cdot f_n \quad (3.24)$$

называется *линейным рекуррентным соотношением порядка k* с постоянными коэффициентами.

Определение 5.46. Уравнение $x^2 - \alpha_1 \cdot x - \alpha_2 = 0$ называется *характеристическим уравнением* линейного рекуррентного соотношения $f_{n+2} = \alpha_1 \cdot f_{n+1} + \alpha_2 \cdot f_n$.

Определение 5.47. Если дана числовая последовательность $a_0, \dots, a_n, \dots$, то функция

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$$

называется *производящей функцией* для последовательности $a_0, \dots, a_n, \dots$

Определение 5.48. Если дана числовая последовательность $a_0, \dots, a_n, \dots$, то функция

$$F(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + a_n \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}$$

называется *экспоненциальной производящей функцией* для последовательности указанной выше.

Определение 5.49. Двойственной диаграммой Феррерса называется диаграмма, получаемая из диаграммы Феррерса, транспонированием строк и столбцов.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



281

Закреть

5.1.4 Булевы функции

Определение 5.50. Функция $f(x_1x_2, \dots, x_n)$ называется булевой, если она сама и её аргументы принимают значения из множества $E = \{0, 1\}$. Булевы функции называют ещё истинностными или функциями алгебры логики.

Определение 5.51. Булевы нуль-, одно- и двуместные функции называются элементарными.

Определение 5.52. Переменная $x_i (1 \leq i \leq n)$ в булевой функции $f(x_1x_2, \dots, x_n)$ называется существенной, если имеется такой набор значений $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$, что выполняется условие $f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$. В противном случае переменная x_i называется несущественной или фиктивной.

Определение 5.53. Две функции называются равными, если одну из них можно получить из другой путем введения или удаления фиктивных переменных.

Определение 5.54. Пусть G – некоторое подмножество булевых функций. Тогда:

1. Каждая переменная является формулой над G ;
2. Символы 0 и 1 являются формулами над G ;
3. Каждое выражение $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$ является формулой над G ;

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

282

[Закрыть](#)

4. Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$ и $A_1, A_2, \dots, A_n$ - формулы над G , то выражение $f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ тоже является формулой над G . При этом, $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются подформулами формулы $f(A_1, A_2, \dots, A_n)$;
5. Других формул над G нет.

Определение 5.55. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ - совокупность переменных, входящих хотя бы в одну из формул P и Q . Тогда формулы P и Q называются равносильными, если на любом наборе значений переменных эти формулы принимают одинаковые значения. В этом случае пишут $P \equiv Q$.

Определение 5.56. Пусть $\sigma \in \{0, 1\}$. Определим

$$x^\sigma = \begin{cases} \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0, \\ x, & \text{если } \sigma = 1, \end{cases}$$

Определение 5.57. Формула вида $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$ называется элементарной конъюнкцией.

Определение 5.58. Всякая дизъюнкция элементарных конъюнкций называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

Определение 5.59. ДНФ называется совершенной (СДНФ), если каждая буква формулы входит в каждый дизъюнктивный член ровно один раз (с отрицанием или без него).



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



283

Закреть

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

284

[Закреть](#)

Определение 5.60. Система булевых функций $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ называется полной, если любую булеву функцию можно представить в виде формулы над F .

Определение 5.61. Пусть F – некоторое множество булевых функций. Тогда замыканием множества F называется множество всех булевых функций, представимых в виде формул над F . Замыкание множества F обозначается через $[F]$.

Определение 5.62. Класс (множество) булевых функций F называется замкнутым, если $[F] = F$.

Определение 5.63. Булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in T_0$, если выполняется условие $f(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Определение 5.64. Булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in T_1$, если выполняется условие $f(1, \dots, 1) = 1$.

Определение 5.65. Булева функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}$ называется двойственной к функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Определение 5.66. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется самодвойственной, если $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Определение 5.67. Говорят, что набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ предшествует набору $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, если для каждого i ($1 \leq i \leq n$) выполняется условие $\alpha_i \leq \beta_i$. В этом случае пишут $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$.

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

285

[Закреть](#)

Определение 5.68. Функция f называется монотонной, если для любых двух наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ выполняется условие $f(\tilde{\alpha}) \preceq f(\tilde{\beta})$.

Определение 5.69. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется линейной, если её можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 \bigoplus c_1 \cdot x_1 \bigoplus c_2 \cdot x_2 \bigoplus \dots \bigoplus c_n \cdot x_n,$$

где $\cdot$ есть знак конъюнкции и $c_i \in 0, 1, i = \overline{1, n}$.

Определение 5.70. Класс булевых функций F называется предполным, если он сам полным не является, а класс $F \cup \{f\}$, где f произвольная булева функция, не принадлежащая классу F , уже является полным.

Определение 5.71. В булевой алгебре имеется ровно пять предполных классов T_0, T_1, S, M, L .

Определение 5.72. Система булевых функций $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ из замкнутого класса F называется полной в F , если её замыкание совпадает с F .

Определение 5.73. Система булевых функций $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ из замкнутого класса F называется его базисом, если она сама полна в F , но никакая её собственная подсистема полной в F не является.

5.2 Основные формулы комбинаторики

1. Формула числа всех размещений с повторениями:

$$\bar{A}_n^r = n^r$$

2. Формула числа всех размещений без повторений:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

3. Формула числа всех перестановок:

$$P_n = n!$$

4. Формула числа всех перестановок с повторениями:

$$P_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

5. Формула числа всех сочетаний без повторений:

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

6. Формула числа всех сочетаний с повторениями:

$$\bar{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$$

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

286

[Закрыть](#)

7. Формула числа всех разбиений множества на k подмножеств:

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

8. Формула бинома Ньютона:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

9. Свойства биномиальных коэффициентов:

9.1. $C_n^0 = 1$;

9.2. $C_n^n = 1$;

9.3. $C_n^r = C_n^{n-r}$;

9.4. $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$;

9.5. $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$;

9.6. $\sum_{k=0}^n C_n^k \cdot (-1)^k = 0$;

9.7. $\sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$;

9.8. $C_{n+r}^k = \sum_{i=0}^k C_n^i \cdot C_r^{k-i}$.

10. Полиномиальная формула:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots \cdot x_k^{n_k}$$

11. Формула включений и исключений для двух множеств:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



287

Заккрыть

12. Формула включений и исключений для трёх множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

13. Формула включений и исключений для n множеств:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = & \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \\ & + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \dots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap \\ & \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

14. Формула включений и исключений в интерпретации наличия свойств $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$:

$$\begin{aligned} N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = & N - \sum_{i=1}^m N(\alpha_i) + N_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m}(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) - \\ & - N_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m}(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}) + \dots + \\ & + (-1)^k N_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m}(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}) + \dots + (-1)^m N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \end{aligned}$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



288

Заккрыть

15. Рекуррентное соотношение для последовательности чисел Фибоначчи:

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \text{ где } f_1 = 1, f_2 = 1$$



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



289

Закрыть

5.3 Список важнейших равносильностей

5.3.1 Список важнейших равносильностей логики высказываний

- | | |
|---|---|
| 1. $\overline{\overline{A}} \equiv A$ | 13. $A \vee \overline{A} \equiv 1$ |
| 2. $A \wedge A \equiv A$ | 14. $A \wedge 1 \equiv A$ |
| 3. $A \vee A \equiv A$ | 15. $A \vee 0 \equiv A$ |
| 4. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ | 16. $A \wedge 0 \equiv 0$ |
| 5. $A \vee B \equiv B \vee A$ | 17. $A \vee 1 \equiv 1$ |
| 6. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ | 18. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ |
| 7. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ | 19. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ |
| 8. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \wedge (A \vee C)$ | 20. $(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) \equiv A$ |
| 9. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | 21. $(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) \equiv A$ |
| 10. $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ | 22. $A \rightarrow B \equiv \overline{A} \wedge B$ |
| 11. $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$ | 23. $A \rightarrow B \equiv \overline{B} \rightarrow \overline{A}$ |
| 12. $A \wedge \overline{A} \equiv 0$ | 24. $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ |

[Начало](#)[Оглавление](#)[Приложение](#)[Назад](#)

290

[Закрыть](#)

5.3.2 Список важнейших равносильностей логики предикатов

$$25. \overline{\forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv \exists x_i \overline{P(x_1, x_2, \dots, x_n)};$$

$$26. \overline{\exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv \forall x_i \overline{P(x_1, x_2, \dots, x_n)};$$

$$27. \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge \forall x_i Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \dots, x_n));$$

$$28. \exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \exists x_i Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \dots, x_n));$$

$$29. \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q);$$

$$30. \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q);$$

$$31. \exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q);$$

$$32. \exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q); \text{ (где } Q \text{ не содержит } x_i \text{ пункты 29, 30, 31, 32)}$$

$$33. \forall x_i \forall x_j P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \forall x_j \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$34. \exists x_i \exists x_j P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \exists x_j \exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$35. \forall y P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv P(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$36. \exists y P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv P(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$37. \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \forall y P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n);$$

$$38. \exists x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \exists y P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Следствие о знаке отрицания



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



291

Заккрыть

Литература

1. Будько А.Е. Математическая логика и дискретная математика / А.Е. Будько, Д.А. Будько — Брест., 2014. — 178с.
2. Скуратович Е.А. Дискретная математика / Е.А. Скуратович, В.А. Иванюкович. — Минск, 2013. — 287с.
3. Виленкин, Н.А. Комбинаторика/ Н.А. Виленкин — Минск: Наука, 1969.—325с.
4. Гаврилов, Г.П. Сборник задач по дискретной математике/ Г.П.Гаврилов. — М., 1992.—308с.
5. Деза, Е.И. Основы дискретной математики/ Е.И.Деза, Д.А.Модель — Москва: ЛИБРОКОРМ, 2010.—224с.
6. Журавлёв Ю.И. Сборник задач по дискретному анализу/ Ю.И. Журавлёв, Ю.А.Федько, Т.М.Дадашев. — М.: МФТИ, 2004.—100с.
7. Мощенский, А.В. Математические основы информатики/ А.В. Мощенский, В.А.Мощенский. — Минск, 2008.—155с.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



292

Закреть

8. Нефедов, В.Н. Курс дискретной математики/ В.Н.Нефедов, В.А.Осипова. — М., 1992.—264с.

9. Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов/ Ф.А.Новиков. — СПб., 2008.—312с.

10. Палий, И.А. Дискретная математика. Курс лекций/ И.А.Палий. — М., 2008.—352с.

11. Плотников, А.Д. Дискретная математика/ А.Д.Плотников — М., 2005.—288с.

12. Тюрин, С.Ф. Дискретная математика: практическая дискретная математика и математическая логика/ С.Ф.Тюрин, А.Ю.Алесь — Москва: Финансы и статистика: 2010.—384с.

13. Хагарт, Р. Дискретная математика для программистов/ Р.Хагарт — М., 2005.—400с.

14. Судоплатов, С.В. Математическая логика и теория алгоритмов / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – Новосибирск, 2008.

15. Шапоров, С.Д. Математическая логика. Курс лекций и практических занятий / С.Д. Шапоров. – СПб., 2005.

16. Игошин, В.Н. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов / В.Н. Игошин. – М., 2007.

17. Игошин, В.Н. Математическая логика и теория алгоритмов / В.Н.Игошин. – М., 2004.

18. Тимофеева, И.Л. Математическая логика. Курс лекций / И.Л.Тимофеева. – М., 2007.



Начало

Оглавление

Приложение

Назад



293

Закреть