М.А. Калавур

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЭМАТЫКА І ПРАКТЫКУМ ПА РАШЭННІ ЗАДАЧ. ГЕАМЕТРЫЯ (ПЛАНІМЕТРЫЯ)

Установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

М.А. Калавур

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЭМАТЫКА І ПРАКТЫКУМ ПА РАШЭННІ ЗАДАЧ. ГЕАМЕТРЫЯ (ПЛАНІМЕТРЫЯ)

Вучэбна-метадычны комплекс
для студэнтаў фізіка-матэматычнага факультэта

Брэст
БрДУ імя А.С. Пушкіна
2018

УДК 514:004.02(075.8)
ББК 22.151.0я73-41
К 17

Рэкамендавана рэдакцыйна-выдавецкім саветам установы адукацыі «Брэсцкі дзяржаўны універсітэт імя А.С. Пушкіна»

Рэцэнзенты:

кафедра вышэйшай матэматыкі ДУА
“Брэсцкі дзяржаўны тэхнічны універсітэт”
(канд. тэхн. навук, дац. Л.П. Махніст)

загадчык кафедры матэматычнага аналіза,
дыферэнцыянальных ураўненняў і іх дадаткаў
ДУА “Брэсцкі дзяржаўны унівесітэт імя А.С. Пушкіна”,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт
М.М. Сэндзер

К 17 **Калавур, М.А.** Элементарная матэматыка і практыкум па рашэнні задач: вучэбна-метадычны комплекс / М. А. Калавур ; Брэсц. дзярж. ун-т імя А.С. Пушкіна. – Брэст : Выд-ва БрДУ, 2018. – 70 с.

У комплексе разгледжаны асноўныя метады рашэння задач па планіметрыі. Выданне мае вялікую практычную накіраванасць: утрымлівае аналіз розных метадаў рашэння, узоры рашэння тыпавых задач, заданні для самастойнай працы.

Прызначана для студэнтаў фізіка-матэматычнага факультэта.

УДК 514:004.02(075.8)
ББК 22.151.0я73-41

ЗМЕСТ

Прадмова 5
Змест вучэбнага матэрыялу 6
Прыкладнае планаванне 8
Метады рашэння планіметрычных задач 10
Метад геаметрычных пераўтварэнняў 13
Каардынатны метад 16
Вектарны метад 19
Ілюстрацыя метадаў рашэння планіметрычных задач 23
Метады рашэння задач на пабудову 33
Геаметрычныя няроўнасці (доказы ў геаметрыі) 38
Тэарэма Пталемея 43
Заданні для самастойнай працы 47
Прамавугольны трохвугольнік 47
Раўнабедраны трохвугольнік 49
Адвольны трохвугольнік 51
Шматвугольнікі 53
Метрычныя суадносіны ў акружнасці 55
Упісаныя і апісаныя трохвугольнікі і чатырохвугольнікі 58
Плошчы плоскіх і камбінаваных фігур 61
Задачы на пабудову 63
Геаметрычныя няроўнасці 65
Пытанні да заліка 67
Літаратура 69
Прэзентацыі 70

ПРАДМОВА

Вучэбна-метадычны комплекс прызначаны для студэнтаў фізіка-матэматычнага факультэта спецыяльнасці 1-02 05 01 “Матэматыка і інфарматыка”. Ён напісаны ў адпаведнасці з дзейючай тыпавой праграмай курса “Элементарная матэматыка і практыкум па рашэнні задач”, якая зацверджана вучэбна-метадычным аб’яднаннем вышэйшых навучальных устаноў Рэспублікі Беларусь. Комплекс накіраваны на знаёмства с асноўнымі метадамі рашэння геаметрычных задач і фармаванне ўменняў рашаць планіметрычныя задачы.

Структура ЭУМК:

1. Тэарэтычны раздзел, які ўтрымлівае неабходныя тэарэтычныя звесткі.
2. Практычны раздел, які ўтрымлівае задачны матэрыял з рашэннямі.
3. Раздзел кантроля ведаў, які ўтрымлівае пытанні для самаправеркі, задачы для самастойнага рашэння.
4. Дапаможны раздзел, які ўтрымлівае рэкамендуемую літаратуру.
5. Прэзентацыі.

У працы разглядаюцца тэарэтычныя асновы метадаў рашэння задач па планіметрыі, якія ілюструюцца на задачах рознага ўзроўня цяжкасці. Валоданне дадзенымі метадамі дапаможа фармаванню прафесійных уменняў будучага настаўніка матэматыкі.

Комплекс утрымлівае заданні для самастойнай кантрольнай працы па дзевяці асноўных тэмах планіметрыі, якія могуць быць выкарыстаны пры падрыхтоўцы студэнтаў да курсавых і дзяржаўнага экзаменаў.

Для правядзення кантроля прапануюцца пытанні да экзамена. У дапаможнай частцы комплекса выкладаюцца змест вучэбнага матэрыяла па праграме, прыкладнае планаванне і літаратура.

Пры выкананні самастойнай працы спачатку патрэбна вывучыць тэарэтычны матэрыял, які выкладзены ў дапаможніку і ў дадатковай літаратуры.

Пасля гэтага разглядваюцца прыклады рашэння задач, і можна прыступаць да рашэння задач патрэбнага варыянта.

ЗМЕСТ ВУЧЭБНАГА МАТЭРЫЯЛУ

“ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЭМАТЫКА І ПРАКТЫКУМ ПА РАШЭННІ ЗАДАЧ. ГЕАМЕТРЫЯ”

Раздзел 2. Геаметрыя

Тэма 1. Агляд асноўных тэарэм і формул планіметрыі

Паўтарэнне і абагульненне асноўных планіметрычных суадносінаў, тэарэм, формул, правіл вываду.

Тэма 2. Метады рашэння планіметрычных задач

Метад роўных трохвугольнікаў. Сутнасць метаду доказу ад процілеглага і яго асаблівасці. Алгебраічны метад. Метад апорных задач. Метад плошчаў.

Тэма 3. Асноўныя суадносіны паміж элементамі трохвугольнікаў. Роўнасць, падобнасць трохвугольнікаў

Прыкметы роўнасці трохвугольнікаў у задачах. Даследаванне ўласцівасцяў трохвугольнікаў. Падобнасць трохвугольнікаў. Уласцівасці падобных трохвугольнікаў. Прапарцыянальнае дзяленне адрэзкаў у трохвугольніку. Тэарэма Чэвы і Менелая. Прымяненне падобнасці да рашэння задач.

Тэма 4. Метрычныя суадносіны ў трохвугольніку і акружнасці

Уласцівасці хорд, сякучых і датычных акружнасці. Апорныя задачы.

Тэма 5. Надзвычайныя пункты і лініі трохвугольніка

Пункты перасячэння бісектрыс, медыян і вышыняў трохвугольніка. Акружнасць і прамая Эйлера.

Тэма 6. Шматвугольнікі

Асноўныя віды шматвугольнікаў, чатырохвугольнікаў, іх уласцівасці і прыкметы. Упісаныя і апісаныя, правільныя шматвугольнікі.

Тэма 7. Метады геаметрычных пераўтварэнняў

Асноўныя метады геаметрычных пераўтварэнняў (восевая і цэнтральная сіметрыі, паралельны перанос, паварот, падобнасць, гаматэтыя) і іх дадаткі.

ПРЫКЛАДНАЕ ПЛАНАВАННЕ

Нумар тэмы	Назва тэмы, занятка, пералік вывучаемых пытанняў	Колькасць аўдыторных гадзін	
		лекцыі	практычныя заняткі
	4 семестр (58 гадзін)	20	38
1	**Агляд асноўных тэарэм і формул планіметрыі** 1. Паўтарэнне і абагульненне асноўных планіметрычных суадносінаў, тэарэм, формул, правіл вывада.		
2	**Метады рашэння планіметрычных задач**		
2.1	Метады рашэння планіметрычных задач. 1. Агульныя метады рашэння планіметрычных задач. 2. Метад геаметрычных пераўтварэнняў. 3. Каардынатны метад. 4. Вектарны метад.	6	
2.2	Ілюстрацыя метадаў рашэння планіметрычных задач 1. Прымяненне алгебраічнага метада. 2. Прымяненне вектарнага метада. 3. Прымяненне каардынатнага метада.	2	2
3	**Надзвычайныя пункты і лініі трохвугольніка** 1. Пункты перасячэння бісектрыс, медыян і вышыняў трохвугольніка. 2. Акружнасць і прамая Эйлера. 3. Ортатрохвугольнік. 4. Тэарэма Пталемея і вынікі з яе.	4	4
4	**Асноўныя суадносіны паміж элементамі трохвугольніка. Роўнасць, падобнасць трохвугольнікаў** 1. Задачы на прамавугольныя трохвугольнікі. 2. Задачы на раўнабедраныя трохвугольнікі. 3. Задачы на адвольныя трохвугольнікі. 4. Камбінаваныя задачы. 5. Тэарэмав Чэвы. 6. Тэарэма Менелая.	2	4
5	**Геаметрычныя няроўнасці (доказы ў геаметрыі)** 1. Дастатковыя ўмовы няроўнасці адрэзкаў і вуглоў. 2. Сінтэтычны метад доказу няроўнасцяў. 3. Прымяненне элементаў матэматычнага аналізу для доказу геаметрычных няроўнасцяў.	2	2
6	**Шматвугольнікі**		

6.1	Шматвугольнікі. 1. Асноўныя віды шматвугольнікаў, чатырохвугольнікаў, іх уласцівасці і прыкметы. 2. Рашэнне задач, якія звязаны з паралелаграмам і трапецыяй. 3. Камбінаваныя задачы.		4
6.2	Упісаныя і апісаныя трохвугольнікі і чатырохвугольнікі. 1. Упісаныя трохвугольнікі. 2. Апісаныя трохвугольнікі. 3. Адвольнае размяшчэнне акружнасці і трохвугольніка. 4. Акружнасць і чатырохвугольнік. 5. Камбінаваныя задачы.		6
6.3	Плошчы. Метад плошчаў. 1. Плошча трохвугольніка. 2. Плошча чатырохвугольніка. 3. Плошча шматвугольніка. 4. Прымяненне метада плошчаў для рашэння задач на доказ і вылічэнне.		4
7	**Метрычныя суадносіны ў акружнасці** 1. Акружнасць і датычныя. 2. Размяшчэнне дзвюх акружнасцей. 3. Размяшчэнне трох і болей акружнасцей.		2
8	**Плошчы камбінаваных фігур** 1. Плошчы ўпісаных і апісаных фігур. 2. Рашэнне задач на плошчы.		2
9	**Задачы на пабудову** 1. Паняцце канструктыўнай задачы. Агульная схема рашэння. 2. Асноўныя метады рашэння задач на пабудову. Метад геаметрычных месцаў. 3. Метад геаметрычных пераўтварэнняў. 4. Алгебраічны метад. 5. Геаметрычныя пабудовы іншымі сродкамі.	4	4
10	**Абагульненне. Выніковы кантроль засваення курса** 1. Агляд і паўтарэнне тэарэтычных пытанняў курса. 2. Рашэнне задач рознымі спосабамі.		2
11	**Кантрольная праца**		2

2. МЕТАДЫ РАШЭННЯ ПЛАНІМЕТРЫЧНЫХ ЗАДАЧ

2.1. Агульныя метады рашэння планіметрычных задач

Сярод метадаў рашэння геаметрычных задач па планіметрыі вылучаюць асноўныя тры метады: геаметрычны, алгебраічны і камбінаваны.

Пры рашэнні задач на доказ у асноўным выкарыстоўваецца геаметрычны метад. Патрабуемае сцвярджэнне выводзіцца з шэрагу вядомых тэарэм з дапамогай лагічных разважанняў. Для знаходжання ланцужка разважанняў выкарыстоўваецца аналітычны метад, які пачынаецца з таго, што трэба даказаць і заканчваецца тым, што дадзена. Затым з дапамогай сінтэза атрымліваецца доказ. У працэсе рашэння задач на доказ нярэдка патрабуецца даказваць роўнасць двух адрэзкаў. Гэта можна зрабіць некалькімі шляхамі:

1) адрэзкі разглядаюцца як стораны двух трохвугольнікаў і даказваецца, што трохвугольнікі роўныя, а разглядаемыя стораны з'яўляюцца адпаведнымі;

2) адрэзкі разглядваюцца як стораны аднаго трохвугольніка і даказваецца, што ён з'яўляецца раўнабедраным трохвугольнікам, а разглядаемыя стораны з'яўляюцца бакавымі;

3) адрэзкі замяняюцца роўнымі адрэзкамі і даказваецца роўнасць новых адрэзкаў;

4) адрэзкі разглядваюцца як стораны чатырохвуглыніка і даказваецца, што чатырохвугольнік з'яўляецца паралелаграмам і разглядаемыя стораны з'яўляюцца процілеглымі;

5) знаходзяцца лікавыя значэнні даўжыняў адрэзкаў і паказваецца, што яны роўныя;

6) даўжыні адрэзкаў выражаюцца праз новы адрэзак і паказваецца, што атрыманыя выразы тоесна роўныя;

7) даказваецца, што адзін адрэзак пераходзіць у другі пры некаторым руху і гэтак далей.

Нярэдка пры рашэнні геаметрычных задач прыходзіцца выконваць дадатковыя пабудовы: правядзенне прамой, паралельнай або перпендыкулярнай адной з дадзеных на малюнку; падваенне медыяны трохвугольніка з наступнай дабудовай да паралелаграма; правядзенне радыюсаў у пункты дотыку дзвюх акружнасцяў або акружнасці і прамой; правядзенне сярэдзінавага перпендыкуляра да адрэзка і гэтак далей. Разгледзім прыклад.

Задача 1. Пункт K ляжыць на старане BC трохвугольніка ABC, а пункт M – на працягу стараны AC за пункт A, пры гэтым AM = AC, BK:KC = 3:4. У якім стасунку MK падзяляе плошчу трохвугольніка ABC?

Пры рашэнні мэтазгодна правесці праз пункт A прамую, якая паралельная прамой MK, да перасячэння са стараной BC.

Адной з разнавіднасцяў геаметрычнага метаду з'яўляецца метад геаметрычных пераўтварэнняў (цэнтральная і восевая сіметрыі, паралельны перанос, паварот, гаматэтыя, падобнасць). Геаметрычныя пераўтварэнні дапамагаюць рашаць шматлікія задачы на вылічэнне.

Сутнасць алгебраічнага метаду заключаецца ў тым, што шуканая велічыня знаходзіцца з дапамогай раўнання або сістэмы раўнанняў, складзеных па ўмове задачы. Пры складванні раўнання выкарыстоўваюцца розныя геаметрычныя факты, формулы, тэарэмы. Напрыклад, прапарцыянальнасць адпаведных элементаў у падобных фігурах, тэарэмы сінусаў і косінусаў, элементы трыганаметрыі, уласцівасці бісектрысы трохвугольніка, уласцівасці медыяны прамавугольнага трохвугольніка, праведзенай да гіпатэнузы і гэтак далей. Найбольш распаўсюджаным шляхам атрымання раўнання з'яўляецца выраз якой-небудзь велічыні двума незалежнымі спосабамі. Такая велічыня называецца апорным элементам, а алгебраічны метад называюць метадам апорнага элемента. У якасці апорнага элемента выкарыстоўваюць даўжыню адрэзка, плошчу фігуры, велічыню вугла. Пры складанні раўнання могуць выбірацца вектарны, каардынатны або вектарна-каардынатны шляхі. У якасці апорнага элемента выкарыстоўваюцца раскладанне вектара па базісных вектарах, даўжыня вектара, адлегласць паміж двума пунктамі, вугал паміж вектарамі, скалярны здабытак вектараў, калінеярнасць вектараў. У гэтых выпадках кажуць аб прымяненні каардынатнага, вектарнага або вектарна-каардынатнага метадаў (падрабязна пра іх сутнасць будзе напісана ніжэй).

Адзначым, што калі фігура, якая з'яўляецца аб'ектам задачы, зададзена з дакладнасцю да падобнасці, то для складання раўнання мэтазгодна ўвесці "дапаможны параметр". У якасці дапаможнага параметра прымяняюць даўжыню якога-небудзь адрэзка, велічыню вугла. Пасля ўвядзення дапаможнага параметра знаходзяць выраз апорнага элемента двума незалежнымі спосабамі. Прыраўняўшы атрыманыя выразы, складваюць раўнанне. Аналагічна рашаюцца задачы на знаходжанне стасункаў некаторых велічыняў.

Раўнанне можа быць складзена не толькі шляхам ураўнівання двух незалежных выразаў апорнага элемента, але і з меркаванняў падобнасці або шляхам выкарыстання іншых залежнасцяў паміж элементамі геаметрычных фігур.

Да алгебраічнага метаду адносяць метад прамога ліку або паэтапна-вылічальны метад, які заключаецца ў паэтапным знаходжанні шэрагу прамежкавых велічыняў, з дапамогай якіх знаходзяць потым шуканыя велічыні. Пры знаходжанні прамежкавых велічыняў могуць быць выкарыстаны розныя геаметрычныя факты, формулы, тэарэмы, а таксама звесткі з вектарнай алгебры, аналітычнай геаметрыі.

Нярэдка пры рашэнні геаметрычных задач прыходзіцца на розных этапах прымяняць розныя метады (спачатку прымяняецца метад прамога ліку, потым складваецца раўнанне, напрыканцы, геаметрычным метадам даказваецца сцвярджэнне). У такіх выпадках кажуць, што задача рашаецца камбінаваным метадам. Разгледзім прыклад.

Задача 2. У трапецыі ABCD даўжыні асноў BC і AD адпаведна роўныя 9 і 12, а даўжыні дыяганаляў AC і BD адпаведна роўныя 10 і 17. Знайсці плошчу трапецыі.

Можна спачатку да дыяганалі AC прымяніць паралельны перанос на вектар $\overrightarrow{CB}$. Няхай пункт A пераходзіць у пункт K. Затым з дапамогай паэтапна-вылічальнага метада знаходзім плошчу трохвугольніка KBD, прымяніўшы формулу Герона. Затым геаметрычным метадам даказваем, што плошча трохвугольніка KBD роўная плошчы трапецыі ABCD.

Заўвага. Задача рашаецца і алгебраічным метадам, калі ў якасці апорнага элемента выбіраецца вышыня трапецыі.

2.2. МЕТАД ГЕАМЕТРЫЧНЫХ ПЕРАЎТВАРЭННЯЎ

Сутнасць метада геаметрычных пераўтварэнняў заключаецца ў пабудове мадэлі адной тэорыі (еўклідавай геаметрыі) у аб'ектах другой (групы геаметрычных пераўтварэнняў). Істотнай прыкметай матэматычнай мадэлі з'яўляецца наяўнасць сувязі паміж мадэллю і мадэлюемай тэорыяй. Для ўстанаўлення гэтай сувязі кожнаму пункту M ставіцца ў адпаведнасць цэнтральная сіметрыя з цэнтрам у дадзеным пункце M. Кожнай прамой l – восевая сіметрыя з воссю l. Для паказу розных суадносінаў паміж пунктамі і прамымі выкарыстоўваюцца кампазіцыі цэнтральных і восевых сіметрый.

$$M \in l \text{ адпавядае } S_M \circ S_l = S_l \circ S_M.$$

Выкарыстанне ўласцівасцяў канкрэтных геаметрычных пераўтварэнняў дазваляе прымяняць метад геаметрычных пераўтварэнняў пры рашэнні задач еўклідавай геаметрыі. Метад геаметрычных пераўтварэнняў можа выкарыстоўвацца як сродак абгрунтавання некаторых адносінаў паміж элементамі еўклідавай геаметрыі. Прымяненне праводзіцца па наступнай схеме:

1) выбіраецца геаметрычнае пераўтварэнне, якое валодае ўласцівасцю, неабходнай для абгрунтавання наяўнасці ўказаных адносінаў паміж аб'ектамі еўклідавай геаметрыі, і якое можна прымяніць пры рашэнні канкрэтнай задачы;

2) устанаўліваецца, што адзін аб'ект можа пераходзіць у другі пры выбраным геаметрычным пераўтварэнні;

3) абгрунтаванне наяўнасці указаных адносінаў паміж аб'ектамі абапіраецца на адпаведныя уласцівасці выбранага геаметрычнага пераўтварэння.

Прымяненне дадзенай схемы абумоўлівае неабходнасць актуалізацыі асноўных паняццяў тэорыі геаметрычных пераўтварэнняў і ўласцівасцяў асобных відаў. Абавязкова павінна быць сфарміравана ўменне будаваць вобразы фігур пры пэўным пераўтварэнні, устанаўліваць сувязі паміж геаметрычнымі аб'ектамі на мове геаметрычных пераўтварэнняў.

Базавымі паняццямі з'яўляюцца наступныя: адлюстраванне, пераўтварэнне, рух, адваротнае пераўтварэнне, спосаб задання геаметрычнага пераўтварэння, канкрэтныя віды геаметрычных пераўтварэнняў.

Асноўнымі ўласцівасцямі геаметрычных пераўтварэнняў з'яўляюцца:

– кампазіцыя рухаў ёсць рух;

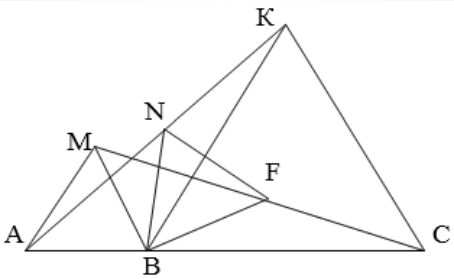
– пры руху прамыя пераходзяць у прамыя, прамені – у прамені, адрэзкі – у адрэзкі; захоўваюцца вуглы паміж праменямі;

– пераўтварэнне падобнасці пераводзіць прамыя ў прамыя, прамені – у прамені, адрэзкі – у адрэзкі; захоўвае вуглы паміж праменямі;

– пры руху пункты, якія ляжаць на прамой, пераходзяць у пункты, якія ляжаць на прамой, і захоўваецца парадак іх узаемнага размяшчэння.

Разгледзім прыклады прымянення метада геаметрычных пераўтварэнняў пры рашэнні геаметрычных задач.

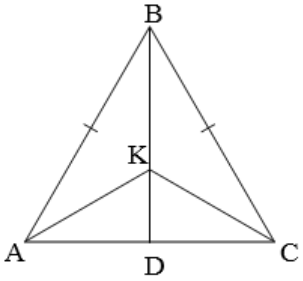
Задача 1. Пункт B ляжыць паміж пунктамі A і C. Па адзін бок ад прамой AC пабудаваны роўнастароннія трохвугольнікі AMB і BKC. Даказаць, што трохвугольнік з вяршынямі ў сярэдзінах адрэзкаў AK і MC і пункце B роўнастаронні.



Малюнак 1

Рашэнне. Разгледзім паварот вакол цэнтра B на вугал -60^o(малюнак 1). Пункт A пераходзіць у пункт M, пункт K пераходзіць у пункт C, тады адрэзак AK пераходзіць у адрэзак MC. Так як паварот з'яўляецца рухам, то сярэдзіна адрэзка AK пераходзіць у сярэдзіну адрэзка MC. Значыць, пры дадзеным павароце пункт N пераходзіць у пункт F. Адсюль вынікае, што BN=BF і $\angle NBF = 60^o$. Гэта значыць, што трохвугольнік BNF роўнастаронні.

Задача 2. На вышыні BD трохвугольніка ABC маецца пункт K, такі, што $\angle KAD = \angle KCD$. Даказаць, што трохвугольнік ABC раўнабедраны.



Малюнак 2

Рашэнне. Трохвугольнік AKD роўны трохвугольніку CKD па катэту і востраму вуглу (малюнак 2). Значыць пункты A і C сіметрычныя адносна прамой BD. Тады $S_{BD}(AB) = CB$. Адсюль вынікае, што AB=CB. Значыць трохвугольнік ABC раўнабедраны.

2.3. КААРДЫНАТНЫ МЕТАД

Абсцыса (лац. “адсякаць”) – адрэзак, які адсякаецца на восі іксоў. Ардыната (лац. “упарадкаваны”) – першапачаткова была адна вось і ардынаты былі адрэзкі, паралельныя адзін аднаму, гэта значыць у кожнай абсцысе будаваўся свой перпендыкуляр, калі сістэма каардынат была прамавугольная.

Каардынаты (пункта) – лікі, якія ўзятыя ў пэўным парадку і характарызуюць становішча пункта на лініі, на плоскасці. Прамая, на якой указаны спосаб паказу сапраўдных лікаў, называецца каардынатнай.

Каардынатная плоскасць – плоскасць, на якой разглядаюцца дзве сям’і несамаперасякаючыхся ліній, такіх, што кожная лінія адной сям’і перасякаецца з кожнай лініяй другой сям’і толькі ў адным пункце. Пачатковыя лініі выбралі $x=0$ і $y=0$ (восі каардынат). Лініі x=const і y=const – каардынатныя лініі.

Каардынатны метад – спосаб вызначэння становішча пункта на прамой, на плоскасці з дапамогай лікаў (для дэкартавай сістэмы каардынат). Выкарыстўваючы каардынатны метад, алгебраічныя раўнанні можна вытлумачыць у выглядзе геаметрычных вобразаў (графікаў) і, наадварот, шукаць рашэнне геаметрычных задач з дапамогай аналітычных формул (раўнанняў і іх сістэм).

Для прымянення каардынатнага метада павінны быць сфармаваны наступныя базавыя веды і ўменні.

1. Ведаць запіс пункта ў каардынатнай форме і па дадзенай каардынатнай форме будаваць яго на каардынатнай плоскасці (на прамой). A(x;y) і A(x) – каардынатныя формы задання пункта на плоскасці і на прамой.

2. Ведаць заданне прамой у каардынатнай форме і па дадзенай каардынатнай форме будаваць прамую на каардынатнай плоскасці.

Прамая адназначна вызначаецца раўнаннем, калі: а) яму задавальняюць каардынаты (x;y) любога пункта гэтай прамой; б) любая пара лікаў (x;y), якая задавальняе раўнанню прамой, прадстаўляе сабою каардынаты адпаведнага пункта прамой. Любая прамая на кардынатнай плоскасці мае раўнанне выгляду $ax+by+c=0$ (або прынятае для школьнага курса алгебры $y=kx+b$). Знайшоўшы каардынаты двух пунктаў, можна атрымаць геаметрычны вобраз прамой на каардынатнай плоскасці.

Аналагічна раўнанне акружнасці з цэнтрам $C(a;b)$ і радыюсам r будзе мець выгляд $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (калі цэнтр акружнасці ў пачатку каардынат, то раўнанне акружнасці $x^2+y^2=r^2$); раўнанне парабалы $y=ax^2, a\neq 0$ (шляхам зрухаў восяў каардынат можна перайсці да раўнання выгляду $y=ax^2+bx+c$). У аналітычнай геаметрыі кананічны выгляд гіпербалы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Калі $b=a$, то гіпербала раўнабокая і яе раўнанне $x^2-y^2=a^2$. Калі за восі каардынат прыняць асімптоты раўнабокай парабалы, то раўнанне будзе мець выгляд $xy=\frac{a^2}{2}$, або, прымаючы $\frac{a^2}{2}=k$, атрымаем школьнае раўнанне гіпербалы $y=\frac{k}{x}$.

Неабходна памятаць асноўнае патрабаванне да раўнання любой лініі. Раўнанне будзе раўнаннем лініі, калі яму задавальняюць каардынаты (x;y) любога пункта гэтай лініі, і наадварот, любая пара лікаў (x;y), якая задавальняе раўнанню лініі, прадстаўляе сабою каардынаты пункта лініі.

Веданне раўнанняў асноўных ліній зводзіцца да рашэння дзвюх вучэбных задач: а) па зададзеным уласцівасцям лініі скласці яе раўнанне; б) па зададзенаму раўнанню лініі высвятліць яе геаметрычныя ўласцівасці. У курсе алгебры гэта гучыць наступным чынам: па зададзенаму раўнанню лініі пабудаваць яе графік і з дапамогай графічнай мовы высвятліць уласцівасці функцыі, а затым высветленыя ўласцівасці перакласці на аналітычную мову.

Пры рашэнні задач выкарыстоўваюцца наступныя факты з аналітычнай геаметрыі: адлегласць паміж пунктамі; дзяленне адрэзка ў дадзеным стасунку; знаходжанне каардынат сярэдзіны адрэзка.

Сутнасць выкарыстання каардынатнага метаду зводзіцца да некалькіх найбольш істотных дзеянняў: напісанне (складанне) раўнання лініі (прамой, парабалы, гіпербалы, акружнасуці і г.д.); знаходжанне адлегласці паміж пунктамі (напісанне раўнання адрэзка), знаходжанне каардынат пунктаў на адрэзку (пункта, які дзеліць адрэзак у зададзеным стасунку; сярэдзіны адрэзка).

1 этап. Размясціць фігуры на каардынатнай плоскасці так, каб больш рацыянальна можна выразіць у каардынатнай форме адрэзкі фігуры і “убачыць” выкарыстанне каардынатнага метаду для знаходжання шуканага элемента.

2 этап. Запісаць у каардынатнай форме з улікам дадзеных разглядаемыя пункты.

3 этап. Перавесці на каардынатную мову ўмову задачы.

4 этап. Рашыць задачу ў каардынатнай форме.

5 этап. Запісаць, зыходзячы з плану рашэння задачы, раўнанне ліній, адлегласць паміж пунктамі, каардынаты сярэдзіны адрэзка і гэтак далей.

6 этап. Выканаць пераўтварэнне атрыманага ў каардынатнай форме выразу.

7 этап. Асэнсаваць атрыманыя вынікі на той мове, на якой была запісана задача.

Прымяненне каардынатнага метаду – гэта прыватны выпадак мадэлявання.

Веды і ўменні, неабходныя для сфармаванасці метада: 1) разуменне асноўных задач метада (пабудова пункта па яго каардынатах і знаходжанне каардынат зададзенага пункта на прамені, прамой і плоскасці); 2) веданне раўнанняў, найбольш сустракаемых фігур (прамой, парабалы, гіпербалы, акружнасці); 3) веданне формулы адлегласці паміж пунктамі і ўменне знайсці гэтую адлегласць (задача аб сярэдзіне адрэзка); 4) уменне выконваць пераклад з аналітычнай мовы на графічную і наадварот.

Уменні ўсвядомленага прымянення метада: а) уменне даваць абгрунтаванне прымянення графічнай або аналітычнай мовы ў залежнасці ад канкрэтнай сітуацыі задачы; б) уменне найбольш рацыянальна размясціць фігуру на каардынатнай плоскасці для прымянення каардынатнага метада пры рашэнні матэматычнай задачы.

Прымяненне каардынатнага метада зводзіцца да наступных дзеянняў: а) пераклад з аналітычнай мовы на графічную асноўных адносінаў задачы (або наадварот); б) пераўтварэнне або даследванне аб’екта на новай мове, больш зручнай і выніковай для вывучэння аб’екта; в) пераклад выніка пераўтварэння або даследавання на мову рашаемай задачы; г) асэнсаванне атрыманага выніка.

2.4. ВЕКТАРНЫ МЕТАД

Вектар – адно з фундаментальных паняццяў сучаснай матэматыкі, якое шырока выкарыстоўваецца ў розных яе галінах. У працах Г. Бесэля, Ж. Аргана, К.Ф. Гауса па тэорыі комплексных лікаў устаноўлена сувязь паміж арыфметычнымі аперацыямі над комплекснымі лікамі і геаметрычнымі аперацыямі над вектарамі ў двумернай прасторы. У працах У. Гамільтана, Г. Грасмана, Ф. Мёбіуса паняцце вектара знайшло шырокае прымяненне пры вывучэнні ўласцівасцяў трохмернай і шматмернай прастораў. Зараз на вектарнай аснове выкладаецца лінейная алгебра, аналітычная геаметрыя, дыферэнцыяльная геаметрыя, функцыянальны аналіз і іншыя. Упершыню паняцце вектара было ўведзена прафесарам астраноміі Дублінскага ўніверсітэта Уільямам Гамільтанам (1805-1865 г.г.) у першай публікацыі па тэорыі кватэрыёнаў. Слова “вектар” паходзіць ад лацінскага слова “vehere”, што азначае несці.

Да паняцця вектара як накіраванага адрэзка прыводзяць шматлікія задачы механікі і іншых галінаў фізікі: тэорыі пругкасці, тэорыі электрамагнітных палёў і гэтак далей.

Многія геаметрычныя сцвярджэнні і вылічэнні могуць быць даказаны і праведзены з дапамогай вектараў (табліца 1).

Табліца 1 – Рашэнне геаметрычных задач вектарным спосабам

Геаметрычная задача	Вектарнае рашэнне
a||b	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, дзе адрэзкі AB і CD належаць адпаведна прамым a і b, k – лік. У залежнасці ад выбару ўзнікаюць розныя вектарныя суадносіны, сярод якіх выбіраюцца патрэбныя.
Пункты A, B, C належаць прамой a	а) устанавіць справядлівасць адной з наступных роўнасцяў: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$; б) даказаць роўнасць $\overrightarrow{QC} = p\overrightarrow{QA} + q\overrightarrow{QB}$, дзе $p+q=1$ і Q – адвольны пункт
$a \perp b$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, дзе пункты A і B належаць прамой a, а пункты C і D – прамой b.
Вылічыць даўжыню адрэзка	Пераўтварыць шуканы адрэзак у вектар і выкарыстаць формулу $a^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 = (\overrightarrow{a})^2$.
Вылічыць велічыню вугла	Выбраць на старанах вугла вектары $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, выкарыстаць формулу: $cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\|}$.
M – пункт перасячэння медыян трохвугольніка ABC	а) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, дзе O – адвольны пункт; б) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$.
$M \in (ABC)$	$\overrightarrow{MA} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

У панятыйны апарат вектарнага метада ўваходзяць наступныя паняцці: вектар, пачатак вектара, канец вектара, модуль вектара, роўныя вектары, нулявы вектар, каардынаты вектара, праекцыя вектара на вось, калінеярныя вектары, адзінкавы вектар, каардынатныя вектары (орты), скалярны здабытак вектараў, вугал паміж ненулявымі вектарамі.

Вектарам называецца накіраваны адрэзак.

Вектары $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ называюцца аднолькава накіраванымі, калі паўпрамыя AB і CD аднолькава накіраваныя.

Абсалютнай велічынёй (модулем) вектара называецца даўжыня адрэзка, які паказвае вектар.

Нулявым вектарам называецца вектар, у якога пачатак супадае з яго канцом.

Два вектары называюцца роўнымі, калі яны сумяшчаюцца паралельным пераносам.

Няхай вектар $\overrightarrow{a}$ мае пачаткам пункт $A_1(x_1; y_1)$, а канцом пункт $A_2(x_2; y_2)$. Каардынатамі вектара $\overrightarrow{a}$ называюцца лікі $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Сумай вектараў $\overrightarrow{a}(a_1; a_2)$ і $\overrightarrow{b}(b_1; b_2)$ называецца вектар $\overrightarrow{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

Рознасцю вектараў $\overrightarrow{a}(a_1; a_2)$ і $\overrightarrow{b}(b_1; b_2)$ называецца такі вектар $\overrightarrow{c}$, які ў суме з вектарам $\overrightarrow{b}$ дае вектар $\overrightarrow{a}$. Вектар $\overrightarrow{c}$ мае каардынаты $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

Здабыткам вектара $\overrightarrow{(a_1; a_2)}$ на лік λ называецца вектар з каардынатамі $(\lambda a_1; \lambda a_2)$.

Два ненулявыя вектары называюцца каліненярнымі, калі яны ляжаць на адной прамой або на паралельных прамых.

Скалярным здабыткам вектараў $\overrightarrow{a}(a_1; a_2)$ і $\overrightarrow{b}(b_1; b_2)$ называецца лік, роўны суме здабыткаў адпаведных каардынат $a_1b_1 + a_2b_2$.

Асноўныя дзеянні, неабходныя для прымянення вектарнага метаду: складанне вектараў (правілы “трохвугольніка”, “паралелаграма”); адыманне вектараў; множанне вектара на лік; прадстаўленне вектара ў выглядзе сумы, рознасці двух вектараў, у выглядзе здабытку вектара на лік; замена вектара роўным яму пры дапамозе паралельнага пераносу; прадстаўленне вектара ў выглядзе раскладання па двух некалінеярных вектарах; пераход ад суадносінаў паміж вектарамі да суадносінаў паміж іх даўжынямі і выкананне зваротнага дзеяння; выраз даўжыні вектара праз яго скалярны квадрат; выраз велічыні вугла паміж вектарамі праз скалярны здабытак і даўжыні гэтых вектараў.

Схема прымянення вектарнага метаду для рашэння геаметрычных задач складаецца з наступных этапаў.

1. Перавод умовы задачы на мову вектараў:

а) увядзенне ў разгляд вектараў;

б) выбар базісных вектараў;

в) раскладанне ўсіх уведзеных вектараў па базісным;

г) выбар сістэмы каардынат (калі гэта неабходна).

2. Складанне сістэмы вектарных роўнасцяў (або адной роўнасці).

3. Спрашчэнне вектарных роўнасцяў.

4. Замена вектарных роўнасцяў алгебраічнымі раўнаннямі.

5. Рашэнне алгебраічных раўнанняў.

6. Тлумачэнне геаметрычнага сэнсу атрыманага рашэння сістэмы (або аднаго раўнання).

Дзеянні для авалодання кампанентамі метада: перавод геаметрычных тэрмінаў на мову вектараў і рашэнне зваротнай задачы; перавод умовы задачы на мову вектараў; складанне сістэмы вектарных роўнасцяў па ўмове задачы; выбар базісных вектараў; раскладанне ўсіх уведзеных вектараў па базісным; спрашчэнне вектарных роўнасцяў; замена вектарных роўнасцяў алгебраічнымі раўнаннямі; рашэнне алгебраічных раўнанняў; тлумачэнне геаметрычнага сэнсу рашэння.

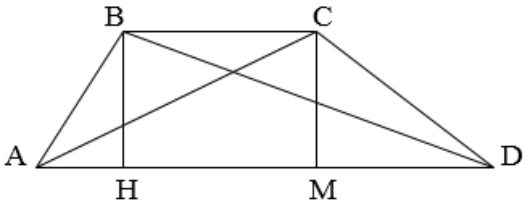
ІЛЮСТРАЦЫЯ МЕТАДАЎ РАШЭННЯ ПЛАНІМЕТРЫЧНЫХ ЗАДАЧ

Прымяненне алгебраічнага метада

Задача. Асновы трапецыі роўныя 30 см і 12 см, а дыяганалі роўныя 20 см і 34 см. Знайсці плошчу трапецыі.

Дадзена: ABCD – трапекцыя, BC||AD, BC=12 см, AD=30 см, AC=20 см, BD=34 см.

Знайсці: S_{ABCD}.



Малюнак 3

Рашэнне. Апусцім перпендыкуляры з пунктаў B і C на ніжнюю аснову AD. Няхай AH=x см. З прамавугольнага трохвугольніка ACM выражаем:

$$CM^2 = AC^2 - AM^2 = 20^2 - (x+12)^2.$$

З прамавугольнага трохвугольніка BDH выражаем:

$$BH^2 = BD^2 - HD^2 = 34^2 - (30-x)^2.$$

Так як BH=CM, то атрымаем і рашым раўнанне:

$$20^2 - (x+12)^2 = 34^2 - (30-x)^2,$$
$$(30-x)^2 - (x+12)^2 = 34^2 - 20^2,$$
$$(18-2x)\cdot 42 = 14\cdot 54,$$
$$18 - 2x = 18,$$
$$x = 0.$$

Значыць, AH = 0 см. Трапецыя ABCD будзе прамавугольнай. Знойдзем вышыню трапецыі CM.

$$CM = \sqrt{20^2 - (0+12)^2} = 16 \text{ (см)}.$$

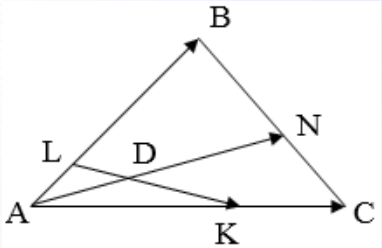
$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2}\cdot CM = \frac{12+30}{2}\cdot 16 = 336 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Адказ: 336 см^2.

Прымяненне вектарнага метада

Разгледзім прыклады.

Задача 1. На старанах AB. BC і AC трохвугольніка ABC узяты адпаведна пункты L, N і K. Прычым, AL:AB = 1:4, BN:BC = AK:AC = 2:3. $LK \cap AN = D$. Знайсці AD:AN.



Малюнак 4

Абазначым $\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AN}} = x, \dfrac{\overrightarrow{LD}}{\overrightarrow{LK}} = y \Rightarrow \overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{LD} = y\overrightarrow{LK}$ (малюнак 4). За базісныя вектары выбіраем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b}$. Раскладваем вектары па базісных.

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b}, \overrightarrow{AD} = x(\frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b}) = \frac{x}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2x}{3}\overrightarrow{b}.$$

$$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{b} - \frac{1}{4}\overrightarrow{a},$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{LK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{a} + y(\frac{2}{3}\overrightarrow{b} - \frac{1}{4}\overrightarrow{a}) = \frac{1-y}{4}\overrightarrow{a} + \frac{2y}{3}\overrightarrow{b}.$$

Пераходзім да алгебраічных раўнанняў. Атрымаем сістэму:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{1-y}{4}, \\ \dfrac{2x}{3} = \dfrac{2y}{3}. \end{cases}$$

Рашаючы сістэму, атрымліваем: $x = \dfrac{3}{7}$.

Значыць, $\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{AN} = 3 : 7$.

Тады AD:AN = 3:7.
Адказ: 3:7.

Заўвага. Дадзеную задачу можна рашыць без выкарыстання вектарнага метада, калі заўважыць, што KN||AB.

Тады $\dfrac{KN}{AB} = \dfrac{CK}{CA} = \dfrac{1}{3}$.

Выразім AB праз AL і атрымаем: $\dfrac{KN}{AB} = \dfrac{KN}{4AL} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{KN}{AL} = \dfrac{4}{3}$.

Разгледзім трохвугольнікі ALD і NKD.

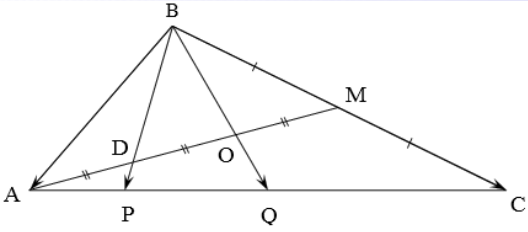
Дадзеныя трохвугольнікі падобныя па двух вуглах.

Адсюль вынікае $\dfrac{AN}{ND} = \dfrac{AL}{NK} = \dfrac{3}{4}$.

Знаходзім $\dfrac{AN}{AD} = \dfrac{AD+DN}{AD} = 1 + \dfrac{DN}{AD} = 1 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{7}{3}$.

Значыць, AD:AN = 3:7.

Задача 2. У трохвугольніку ABC на аснове AC узяты пункты P і Q, так, што AP<AQ. Прамыя BP і BQ падзяляюць медыяну AM на тры роўныя часткі. Знайсці даўжыню AC, калі даўжыня PQ роўная 3.



Малюнак 5

Рашэнне. Рашым задачу вектарным метадам. Няхай медыяна AM перасякае адрэзкі BP і BQ у пунктах D і O (малюнак 5). Так як $OM = \frac{1}{3}AM$, то BQ таксама з'яўляецца медыянай, гэта значыць AQ = CQ. Уводзім у разгляд вектары $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{BQ}$. У якасці базісных выбіраем вектары $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{BC}$. Раскладваем уведзеныя вектары праз базісныя.

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{c} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{a}}{2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{c} + \frac{1}{6}\overrightarrow{a}.$$

Абазначым AP = x. Тады $\overrightarrow{BP}$ раскладваецца па базісных вектарах.

$$\overrightarrow{BP} = \frac{3}{3+x}\overrightarrow{c} + \frac{x}{3+x}\overrightarrow{BQ} = \frac{3}{3+x}\overrightarrow{c} + \frac{x}{2(3+x)}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) = \frac{x}{2(3+x)}\overrightarrow{a} + \frac{6+x}{2(3+x)}\overrightarrow{c}.$$

З другога боку вектары $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{BP}$ калінеярныя. Атрымліваем:

$$\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BD} = \frac{\lambda}{6}\overrightarrow{a} + \frac{2\lambda}{3}\overrightarrow{c}.$$

Атрымалі два выразы для вектара $\overrightarrow{BD}$. Прыраўняем каэфіцыенты пры вектарах $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{c}$. Атрымаем сістэму:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2(3+x)} = \dfrac{\lambda}{6}, \\ \dfrac{6+x}{2(3+x)} = \dfrac{2}{3}\lambda. \end{cases}$$

Падзелім першае раўнанне на другое і атрымаем:

$$\frac{x}{6+x} = \frac{1}{4}.$$

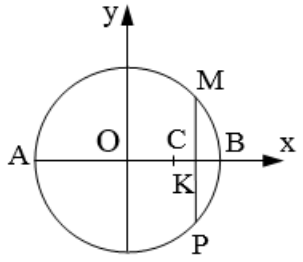
Рашаем апошняе раўнанне і знаходзім x = 2.
Тады QC = AQ = AP + PQ = 2 + 3 = 5.
Значыць, AC = 10.
Адказ: 10 лінейных адзінак.

Прымяненне каардынатнага метада

Разгледзім прыклады прымянення каардынатнага метаду для рашэння планімерычных задач.

Задача 1. Дадзена акружнасць з цэнтрам O і дыяметрам AB=4. Пункт C – сярэдзіна радыюса OB. Пабудуйце на акружнасці пункты M і P, сіметрычныя адносна прамой AB, так, каб прамая CP была перпендыкулярна прамой AM.

Рашэнне. Дапусцім, што пункты M і P пабудаваныя. Заўважаем, што дастаткова ведаць месца знаходжання пункта K, каб пабудаваць пункты M і P. Уводзім сістэму каардынат з пачаткам у цэнтры акружнасці і паспрабуем знайсці каардынаты пункта K (малюнак 6).



Малюнак 6

Знаходзім каардынаты пунктаў. A(-2;0), O(0;0), C(1;0), B(2;0), M(x;y), P(x;-y), K(x;0). Заўважаем, што патрэбна знайсці толькі x. З трох умоў, якім павінны задавальняць пункты M і P, мы выкарысталі толькі адну – сіметрычнасць адносна прамой AB.

Паспрабуем перавесці на каардынатную мову астатнія дзве ўмовы. Так як пункт M ляжыць на акружнасці. то яго каардынаты задавальняюць раўнанню дадзенай акружнасці. Раўнанне мае наступны выгляд $x^2 + y^2 = 4$. Каб перавесці на каардынатную мову перпендыкулярнасць прамых AM і CP, выкарыстаем скалярны здабытак вектараў. $\overrightarrow{AM}(x+2; y)$, $\overrightarrow{CP}(x-1; -y)$. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$. На кардынатнай мове

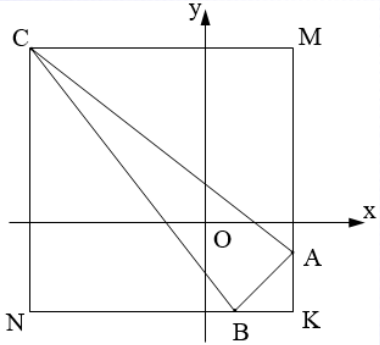
гэта азначае $(x+2)\cdot(x-1)-y^2=0$. Адсюль вынікае $x^2+x-2-y^2=0$. Значыць, нам трэба рашыць наступную сістэму адносна пераменнай x.

$$\begin{cases} x^2+y^2=4; \\ x^2+x-2-y^2=0. \end{cases}$$

Складваем пачленна два раўнанні і атрымаем $2x^2+x-6=0$. Рашаючы раўнанне, знаходзім карані $x_1=-2, x_2=1,5$. Па сэнсу задачы нам падыходзіць другі корань. Значыць, пункт K(1,5;0). Заўважаем, што пункт K з'яўляецца сярэдзінай адрэзка CB. Адсюль вынікае спосаб рашэння нашай задачы. Каб пабудаваць пункты M і P, трэба знайсці перасячэнне сярэдзінавага перпендыкуляра да адрэзка CB з акружнасцю.

Заўважаем, што дыяметр AB перпендыкулярны хордзе MP. Гэта азначае, што пункты M і P сіметрычныя адносна прамой AB. Вугал AMB прамы, таму што апіраецца на дыяметр. Лёгка даказваецца, што MB||CP. Значыць, $CP \perp AM$. Так як усе этапы пабудовы выконваюцца адназначна, то задача мае адно рашэнне.

Задача 2. Знайсці плошчу трохвугольніка ABC, калі яго вяршыні зададзены каардынатамі A(3;-1), B(1;-3), C(-6;6).



Малюнак 7

Рашэнне. Падвядзенне сістэмы каардынат ажыццяўляем другім спосабам. Калі пры рашэнні першай задачы сістэма каардынат накладвалася на малюнак, то зараз наадварот малюнак накладваецца на сістэму каардынат (малюнак 7). Задача можа рашацца рознымі спосабамі.

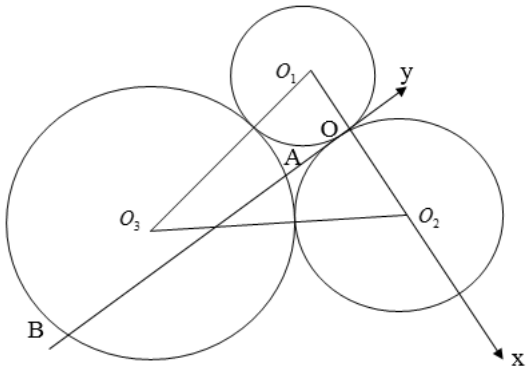
1. Знаходзім даўжыні старон і прымяняем формулу Герона.
2. Знаходзім даўжыню вышыні, апушчанай на сторану AB і даўжыню AB.
3. Знаходзім даўжыні старон AC і BC і велічыню вугла паміж імі.

Дабудуем трохвугольнік да прамавугольніка. Плошча нашага трохвугольніка знаходзіцца як рознасць плошчы прамавугольніка (у нашым выпадку квадрата) і плошчаў трох прамавугольных трохвугольнікаў.

$$S_{ABC} = S_{CMKN} - S_{CBN} - S_{CMA} - S_{KAB} = 81 - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 81 - 65 = 16.$$

Адказ: 16 квадратных адзінак.

Задача 3. Дадзены тры акружнасці радыюсамі 2, 8 і 10, якія датыкаюцца папарна знешнім чынам. Знайсці даўжыню хорды, якую адсякае агульная ўнутраная датычная першых дзвюх акружнасцей ад трэцяй акружнасці.



Малюнак 8

Рашэнне. Падводзім пад малюнак задачы сістэму каардынат Oxy (малюнак 8). Тады пункты будуць мець наступныя каардынаты $O_1(-2;0), O_2(8;0), O(0;0), O_3(x;y)$. Для знаходжання даўжыні адрэзка AB неабходна ведаць каардынаты пунктаў A і B, якія з'яўляюцца пунктамі перасячэння большай акружнасці з воссю Oy. Складваем раўнанне большай акружнасці. Спачатку знойдзем каардынаты яе цэнтра. Так як акружнасці датыкаюцца знешне, то $O_1O_3 = 12, O_2O_3 = 18$. Запішам наступныя раўнанні:

$$(x+2)^2 + y^2 = 12^2, (x-8)^2 + y^2 = 18^2.$$

Адымаем ад другога раўнання першае і атрымаем:

$$(x-8)^2 - (x+2)^2 = 18^2 - 12^2 \Rightarrow -10(2x-6) = 6 \cdot 30 \Rightarrow x - 3 = -9 \Rightarrow x = -6.$$

Падставім атрыманае значэнне ў першае раўнанне і атрымаем:

$$(-6+2)^2 + y^2 = 144 \Rightarrow 16 + y^2 = 144 \Rightarrow y^2 = 128 \Rightarrow y_1 = -8\sqrt{2}, y_2 = 8\sqrt{2}.$$

Па сэнсу задачы нам падыходзіць першае значэнне. Тады цэнтр большай акружнасці мае каардынаты $O_3(-6;-8\sqrt{2})$. Атрымліваем раўнанне большай акружнасці:

$$(x+6)^2 + (y+8\sqrt{2})^2 = 100.$$

Так як раўнанне восі Oy мае выгляд $x=0$, то падставіўшы гэтае значэнне ў раўнанне акружнасці, атрымаем:

$$6^2 + (y+8\sqrt{2})^2 = 100 \Rightarrow (y+8\sqrt{2})^2 = 64 \Rightarrow y + 8\sqrt{2} = -8 \text{ або } y + 8\sqrt{2} = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -8 - 8\sqrt{2} \text{ або } y = 8 - 8\sqrt{2}.$$

Значыць, $A(0;8-8\sqrt{2})$ і $B(0;-8-8\sqrt{2})$. Тады AB=16.

Адказ: 16 лінейных адзінак.

МЕТАДЫ РАШЭННЯ ЗАДАЧ НА ПАБУДОВУ

Задача на пабудову заключаецца ў патрабаванні пабудаваць загадзя ўказанымі інструментамі (цыркулем і лінейкай) некаторую фігуру, якая задавальняе пэўным патрабаванням. Рашэннем задачы з'яўляецца кожная фігура, якая задавальняе ўсім патрабаванням задачы. Рашэнне задачы на пабудову зводзіцца да ўказання канечнага ліку асноўных пабудоў. Матэматыкамі распрацавана схема рашэння задач на пабудову, якая складаецца з наступных этапаў: аналіз, пабудова, доказ, даследванне.

Мэта аналіза – устанаўленне залежнасцей паміж элементамі шуканай і дадзенай фігур; знаходжанне дапаможнай фігуры, якую можна пабудаваць на аснове дадзеных; устанаўленне спосабу атрымання шуканай фігуры з дапаможнай; складанне плана пабудовы, які паказвае паслядоўнасць канкрэтных элементарных задач. Аналіз пачынаецца са слоў "дапусцім, што фігура пабудавана". На выхадзе з аналіза павінен быць складзены план пабудовы.

Пабудова заключаецца ў выкананні элементарных дзеянняў, указаных у плане, іншымі словамі ў рэалізацыі плана рашэння. Праводзіцца запіс рашэння задачы з выкарыстаннем асноўных пабудоў і элементарных задач.

Мэтай доказу з'яўляецца ўстанаўленне таго, што пабудаваная фігура будзе шуканай, гэта значыць задавальняе ўсім патрабаванням задачы. Доказ можа абапірацца на этапы пабудовы.

Даследванне паказвае колькасць рашэнняў задачы пры дадзеным выбары дадзеных і выбраным спосабе пабудовы.

У метадычнай літаратуры вылучаюць наступныя метады рашэння задач на пабудову:

1) метад геаметрычных месцаў пунктаў (перасячэнняў);

2) метады геаметрычных пераўтварэнняў:

– метад паралельнага пераносу,

– метад восевай сіметрыі,

– метад цэнтральнай сіметрыі,

– метад павароту,

– метад падобнасці;

3) метад спрамлення;

4) метад адваротнасці;

5) алгебраічны метад;

6) метад інверсіі.

Сутнасць метада геаметрычных месцаў заключаецца ў тым, што для знаходжання некаторага пункта, які задавальняе пэўным умовам, будуюць ГМП, якія задавальняюць адной умове (фігуру F_1), а затым будуюць ГМП, якія задавальняюць другой умове (фігуру F_2). Шуканы пункт з'яўляецца пунктам перасячэння фігур F_1 і F_2. Метад прымяняецца, калі вядомыя некаторыя ГМП (акружнасць, сярэдзінавы перпендыкуляр, бісектрыса вугла і іншыя).

Метад паралельнага пераносу заключаецца ў наступным: якую-небудзь частку фігуры або ўсю фігуру паралельным пераносам пераводзяць так, каб у атрыманую фігуру ўвайшло максімальна магчымая колькасць дадзеных і яе можна было лёгка пабудаваць. Дадзеная фігура з'яўляецца дапаможнай. Пасля пабудовы дапаможнай фігуры выконваюць адваротны паралельны перанос і атрымліваюць шуканую фігуру. Дадзены метад выкарыстоўваецца пры пабудове шматвугольнікаў і знаходжанні найкарацейшай адлегласці паміж аб'ектамі.

Пры прымяненні метада сіметрыі адну з дадзеных фігур або яе частку адлюстроўваюць адносна выбраных цэнтра або восі. Атрымліваецца дапаможная фігура, якую можна пабудаваць вядомымі спосабамі. Затым знаходзіцца спосаб пераходу ад дапаможнай фігуры да шуканай. Дадзены метад выкарыстоўваецца для знаходжання пунктаў на прамой, калі яны звязаны з астатнімі пунктамі метрычнымі суадносінамі.

Метад павароту заключаецца ў павароце дадзенай або шуканай фігуры вакол мэтазгодна выбранага цэнтра на адпаведны вугал для аблягчэння пошуку рашэння на этапе аналіза. На этапе пабудовы звычайна выкарыстоўваецца паварот на той жа вугал у адваротным напрамку.

Метад падобнасці заключаецца ў тым, што будуецца фігура, якая падобная дадзенай і задавальняе ўсім умовам задачы, акрамя адной. На другім этапе будуецца шуканая фігура, якая падобная пабудаванай і задавальняе прапушчанаму патрабаванню. Звычайна ў задачах, рашаемых такім метадам, вылучаецца дзве групы дадзеных: 1) умовы, якія дазваляюць пабудаваць першапачатковую фігуру, падобную шуканай; 2) умова, якая вызначае лінейную частку шуканай фігуры або яе становішча на плоскасці.

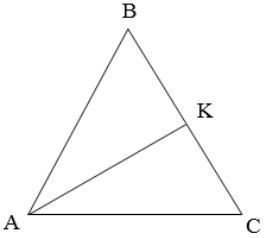
Метад спрамлення дазваляе некаторую ломаную лінію на шуканай фігуры замяніць адрэзкам прамой і атрымаць новую дапаможную фігуру. На першым этапе будуецца дапаможная фігура і вызначаецца пункт, у якім патрэбна сагнуць выпрамленую лінію, каб атрымаць шуканую фігуру. Дадзены метад прымяняецца пры рашэнні задач, у якіх дадзены сума або рознасць частак некаторай ломанай лініі.

Пры прымяненні алгебраічнага метаду рашэння задач абазначаюць даўжыні вядомых адрэзкаў літарамі a, b, c, . . . , невядомых – x, y, z, ... Затым складваюць раўнанне або сістэму раўнанняў з дапамогай геаметрычных суадносінаў паміж шуканымі і дадзенымі адрэзкамі. Пасля гэтага рашаецца раўнанне або сістэма раўнанняў і атрымліваецца формула, якая выражае невядомыя адрэзкі праз вядомыя. Вызначаецца спосаб пабудовы невядомых адрэзкаў, зададзеных пэўнай формулай. Затым будуюцца невядомыя адрэзкі.

Задача 1. Пабудаваць раўнабедраны востравугольны трохвугольнік па бакавой старане і вышыні, праведзенай да гэтай стараны.

Аналіз

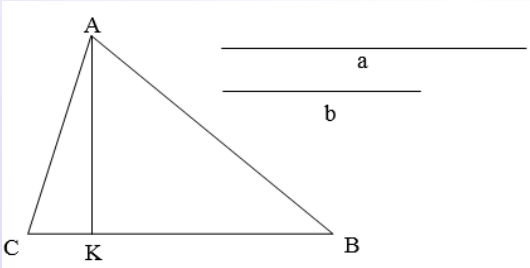
Дапусцім, што трохвугольнік пабудаваны. Паспрабуем знайсці дапаможную фігуру і спосаб пераходу ад дапаможнай фігуры да шуканай.



Малюнак 9

Заўважаем, што трохвугольнік ABK адназначна вызначаецца катэтам і гіпатэнузаю. Пункт C знаходзіцца на прамені BK і аддалены ад пункта B на адлегласць, роўную AB.

Пабудова



Малюнак 10

1. Будуем прамавугольны трохвугольнік АВК па гіпатэнузе АВ, роўнай зададзенай бакавой старане, і па катэту АК, роўнаму дадзенай вышыні.

2. Праводзім прамень ВК.

3. На прамені ад яго пачатку адкладваем адрэзак ВС=ВА.

4. Злучаем пункты А і С.

5. Трохвугольнік АВС шуканы.

Доказ

1. $BC = BA = a$ па пабудове. Значыць трохвугольнік АВС раўнабедраны з зададзенай бакавой стараной.

2. $AK \perp BC$ па пабудове. Значыць, АК вышыня трохвугольніка, праведзеная да бакавой стараны.

3. $AK = b$ па пабудове.

4. Трохвугольнік АВС шуканы.

Даследванне

1. Калі $b < a$, то задача мае адно рашэнне.

2. Калі $b \geq a$, то задача не мае рашэння.

Заўвага. Пры правядзенні даследвання ў шматлікіх задачах узнікаюць цяжкасці, таму ў школьным курсе матэматыкі дадзены этап апускаецца. Рашэнне школьных задач на пабудову складаецца з наступных трох этапаў:

1) пошук рашэння;

2) пабудова;

3) доказ.

ГЕАМЕТРЫЧНЫЯ НЯРОЎНАСЦІ (ДОКАЗЫ Ў ГЕАМЕТРЫІ)

Вылучаюць два метады: метад аптымізацыі, геаметрычны метад.

Метад аптымізацыі прымяняецца ў два этапы. На першым этапе складваецца матэматычная мадэль геаметрычнай задачы. На другім этапе дадзеная мадэль даследуецца сродкамі матэматычнага аналізу. Разгледзім падрабязна кожны з гэтых этапаў.

1. Пры аналізе ўмовы задачы вызначаюць аптымізуемую велічыню (велічыня, для якой трэба знайсці найбольшае або найменшае значэнне). Дадзеная велічыня будзе выконваць ролю функцыі і абазначаецца літарай y (або S, R, r у залежнасці ад умовы задачы).

2. За незалежную пераменную выбіраюць адну з невядомых велічынь (старана, вугал і г.д.) і абазначаюць літарай x. Звычайна ролю дадзенай велічыні выконвае велічыня, ад значэння якой залежыць аптымізуемая велічыня.

3. У адпаведнасці з умовай задачы ўстанаўліваюцца рэальныя межы змянення пераменнай x.

4. На этапе геаметрычнага рашэння задачы пераменная y выражаецца праз пераменную x і вядомыя велічыні з апорай на ўмову задачы.

5. Атрыманы выраз задае функцыю $y = f(x)$.

6. Для функцыі знаходзяць найбольшае (найменшае) значэнне на прамежку рэальнага змянення x.

7. Вынік, атрыманы ў папярэднім пункце, асэнсоваюць для рашаемай геаметрычнай задачы.

Шосты пункт схемы рэалізуецца сродкамі матэматычнага аналізу і выконваецца па наступнаму плану.

1) знаходзяць $D(f)$;

2) знаходзяць $f'x$;

3) знаходзяць крытычныя пункты для функцыі, гэта значыць унутраныя пункты $D(f)$, у якіх вытворная роўная 0 або не існуе;

4) з атрыманых пунктаў адбіраюць тыя, якія належаць рэальнаму прамежку змянення x;

5) знаходзяць значэнні функцыі на канцах прамежка і ў выбраных пунктах;

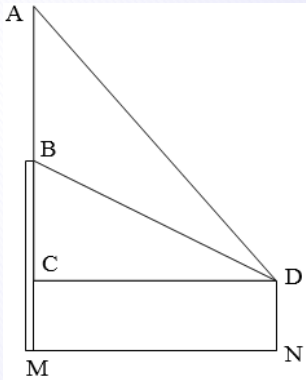
6) сярод знойдзеных значэнняў функцыі выбіраюць найбольшае (найменшае) значэнне.

Калі рэальны прамежак змянення пераменнай x не ўтрымлівае сваіх канцоў, то знаходзяць левабокавы ліміт функцыі на правым канцы і правабокавы ліміт на левым канцы прамежка.

Пры складванні мадэлі поспех залежыць ад удалага выбару незалежнай пераменнай. Выбар лічыцца ўдалым, калі атрыманы выраз нескладаны.

Задача 1. Статуя вышынёй 4 м стаіць на калоне вышынёй 5,6 м. На якой адлегласці ад калоны павінен стаць чалавек, каб бачыць статую пад найбольшым вуглом, калі адлегласць ад зямлі да ўзроўня вачэй роўная 1,6 м?

Рашэнне. У якасці аптымізуемай велічыні выбіраецца велічыня вугла, пад якім чалавек бачыць статую. Абазначым дадзеную велічыню праз y. У якасці пераменнай выбіраем адлегласць ад чалавека да статуі і абазначаем яе праз x (малюнак 11).



Малюнак 11

$\angle ADB = y$, MN=CD=x. Выразім пераменную y праз пераменную x. Знойдзем спачатку тангенс шуканага вугла.

$$tg\angle ADB = tg(\angle ADC - \angle BDC) = \frac{tg\angle ADC - tg\angle BDC}{1 + tg\angle ADC \cdot tg\angle BDC}.$$

BC=BM-CM=5,6-1,6=4 (м), AC=AB+BC=8 (м). Адсюль знаходзім:

$$tg\angle ADC = \frac{AC}{CD} = \frac{8}{x},\ tg\angle BDC = \frac{BC}{CD} = \frac{4}{x}.$$

Падстаўляем знойдзеныя значэнні.

$$tg\angle ADB = \frac{\frac{8}{x} - \frac{4}{x}}{1 + \frac{8}{x} \cdot \frac{4}{x}} = \frac{\frac{4}{x}}{\frac{x^2+32}{x^2}} = \frac{4x}{x^2+32}.$$

Значыць, атрымаем наступную функцыю: $y = arctg\frac{4x}{x^2+32}$. Знаходзім рэальныя межы змянення велічыні x: $0 < x < +\infty$. Для знаходжання найбольшага значэння функцыі прыменім элементы матэматычнага аналіза.

1. $D(y) = R$.

2. $y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{4x}{x^2+32}\right)^2} \cdot \left(\frac{4x}{x^2+32}\right)' = \frac{(x^2+32)^2}{x^4+80x^2+1024} \cdot \frac{4(x^2+32) - 4x \cdot 2x}{(x^2+32)^2} =$

$$= \frac{-4x^2+128}{x^4+80x^2+1024} = \frac{-4(x^2-32)}{x^4+80x^2+1024}.$$

3. Знаходзім крытычныя пункты функцыі $x^2 - 32 = 0 \Rightarrow x^2 = 32 \Rightarrow x = \pm 4\sqrt{2}$.

Назоўнік не роўны нулю пры любых значэннях пераменнай x.

4. Рэальнаму прамежку змянення x належыць толькі $x = 4\sqrt{2}$.

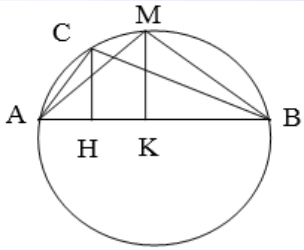
5. Заўважаем, што пры пераходзе праз дадзены пункт вытворная мяняе знак з + на -. Значыць, у гэтым пункце функцыя прыймае найбольшае значэнне.

Адказ. $4\sqrt{2}$ м.

Заўвага. Найбольшае значэнне можна было шукаць і для функцыі $y = \frac{4x}{x^2+32}$, таму што тангенс пры змяненні вугла з'яўляецца нарастальнай функцыяй. Таму значэнні пераменнай x, пры якіх тангенс і арктангенс прыймаюць найбольшае значэнне, супадаюць.

Задача 2. Даказаць, што з усіх трохвугольнікаў з дадзенай асновай і дадзеным вуглом пры вяршыні раўнабедраны трохвугольнік мае найбольшую плошчу.

Рашэнне. Дадзім геаметрычны доказ.



Малюнак 12

Апішам вакол трохвугольніка ABC акружнасць (малюнак 12). Вяршыні ўсіх астатніх трохвугольнікаў з дадзенай асновай і дадзеным вуглом пры вяршыні ляжаць на дузе ABC. Возьмем раўнабедраны трохвугольнік AMC і дакажам, што $S_{ABC} < S_{ABM}$. Апусцім з пунктаў C і M перпендыкуляры на AB. Тады CH і MK – вышыні трохвугольнікаў ABC і AMB адпаведна. Няхай радыюс акружнасці, апісанай вакол трохвугольнікаў ABC і AMB, роўны R. Тады пры дапамозе тэарэмы сінусаў атрымаем:

$$MK = 2R \cdot sin\angle MBK,\ CH = 2R \cdot sin\angle CBH.$$

Але вугал MBK большы за вугал CBH, таму што апіраецца на большую дугу. Улічваючы, што гэта вострыя вуглы прамавугольных трохвугольнікаў, атрымаем $sin\angle MBK > sin\angle CBH$. Заўважаем, што MK>CH.

Значыць, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH < \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MK = S_{AMB}$.

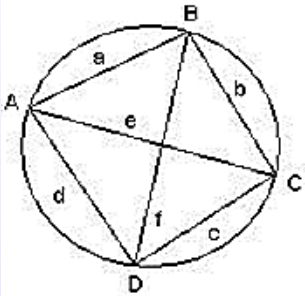
ТЭАРЭМА ПТАЛЕМЕЯ

Клаўдзій Пталемей (*Claudius Ptolemaeus*), які жыў напрыканцы першага — пачатку другога стагоддзя н.э., быў старажытнагрэчаскім вучоным-астраномам, матэматыкам, астролагам, географам, оптыкам і тэарэтыкам музыкі. Ён вядомы як каментатар Еўкліда. Пталемей спрабаваў даказаць знакаміты Пяты пастулат. Асноўная праца Пталемея — “Альмагест”, у якім ён выклаў звесткі па астраноміі. Уключаў “Альмагест” і каталаг зорнага неба.

Тэарэма Пталемея. Вакол чатырохвугольніка можна апісаць акружнасць тады і толькі тады, калі здабытак яго дыягоналяў роўны суме здабыткаў яго процілеглых старон.

Доказ неабходнасці. Паколькі чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны ў акружнасць, то:

$$\angle ABC + \angle ADC = \pi, \text{ адкуль } cos\angle ABC + cos\angle ADC = 0.$$



З трохвугольніка ABC па тэарэме косінусаў знаходзім:

$$cos\angle ABC = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab}.$$

Аналагічна з трохвугольніка ADC:

$$cos\angle ADC = \frac{d^2 + c^2 - e^2}{2dc}.$$

Сума гэтых косінусаў роўная нулю:

$$cos\angle ABC = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab} + cos\angle ADC = \frac{d^2 + c^2 - e^2}{2dc} = 0.$$

Адсюль выразім e^2:

$$e^2 = \frac{ab(d^2 + c^2) + dc(a^2 + b^2)}{ab + dc} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

Разгледзім трохвугольнікі ABD і BCD і знойдзем f^2:

$$f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Адсюль:

$$(ef)^2 = (ac + bd)^2, ef = ac + bd,$$

што і трэба было даказаць.

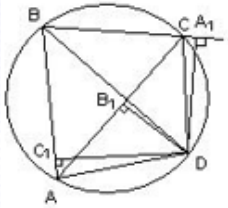
Мімаходам мы даказалі яшчэ адно сцверджанне. Для чатырохвугольніка, які ўпісаны ў акружнасць,

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Доказ дастатковасці. Няхай выконваецца роўнасць:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

Дакажам, што вакол чатырохвугольніка $ABCD$ можна апісаць акружнасць.



Абазначым праз R радыюс акружнасці, апісанай вакол $\triangle ABC$. З пункта D апусцім перпендыкуляры на прамыя AB, BC і AC. Абазначым пункты перасячэння гэтых прамых і перпендыкуляраў да іх праз C_1, A_1 і B_1 адпаведна. Па тэарэме сінусаў для трохвугольніка A_1CB_1 атрымліваем (дыяметр апісанай акружнасці для гэтага трохвугольніка роўны CD):

$$A_1B_1 = CDsin\angle A_1CB_1 = CDsin\angle BCA.$$

Па тэарэме сінусаў для трохвугольніка ABC маем:

$$AB = 2Rsin\angle BCA.$$

Значыць,

$$A_1B_1 = \frac{CD \cdot AB}{2R}.$$

Такім жа чынам, разглядваючы трохвугольнікі B_1CC_1 і A_1CC_1, атрымаем суадносіны:

$$B_1C_1 = \frac{BC \cdot AD}{2R}, \; A_1C_1 = \frac{AC \cdot BD}{2R}.$$

Адсюль, падстаўляючы гэтыя выразы ў зыходную роўнасць, маем:

$$2R(A_1B_1 + B_1C_1) = C_1A_1 \cdot 2R,$$

або

$$C_1A_1 = A_1B_1 + B_1C_1,$$

адкуль вынікае, што пункты A_1, B_1 і C_1 ляжаць на адной прамой.

Дакажам зараз, што з гэтага вынікае, што вакол чатырохвугольніка $ABCD$ можна апісаць акружнасць (дастатковая ўмова тэарэмы Сімсана).

Пабудуем акружнасці на адрэзках AD і CD як на дыяметрах. Першая з іх праходзіць праз пункты B_1 і C_1 (вуглы AB_1D і AC_1D прамыя), а другая — праз пункты A_1 і B_1 ($\angle CB_1D = \angle CA_1D = \frac{\pi}{2}$). Вуглы AB_1C_1 і A_1B_1C роўныя як вертыкальныя, адсюль вынікае, што $\angle ADC_1 = \angle CDA_1$, а значыць, і $\angle DAC_1 = \angle DCA_1$. Адсюль $\angle DAB + \angle DCB = \pi$, і вакол чатырохвугольніка $ABCD$ можна апісаць акружнасць.

ЗАДАННІ ДЛЯ САМАСТОЙНАЙ ПРАЦЫ

Прамавугольны трохвугольнік

1. У прамавугольным трохвугольніку медыяна, праведзеная да гіпатэнузы, падзяляе прамы вугал у стасунку 1:2 і роўная 5. Знайсці стораны трохвугольніка.

2. Пункт на гіпатэнузе, роўнааддалены ад абодвух катэтаў, падзяляе гіпатэнузу на адрэзкі даўжынёй 30 і 40. Знайсці перыметр трохвугольніка.

3. У прамавугольным трохвугольніку медыяны, праведзеныя да катэтаў, роўныя $\sqrt{156}$ і $\sqrt{89}$ дм. Знайсці гіпатэнузу.

4. Перыметр прамавугольнага трохвугольніка роўны 60 дм, а вышыня, праведзеная да гіпатэнузы, роўная 12 дм. Знайсці стораны трохвугольніка.

5. У прамавугольным трохвугольніку катэты роўныя 2 і $\sqrt{2}$. Знайсці бісектрысу прамога вугла трохвугольніка.

6. У прамавугольным трохвугольніку з гіпатэнузай 20 і катэтатам 16 праведзена бісектрыса вугла, процілеглага дадзенаму катэту. Знайсці адлегласць ад вяршыні прамога вугла да дадзенай бісектрысы.

7. Катэты прамавугольнага трохвугольніка роўныя 6 і 8. Знайсці адлегласць ад асновы бісектрысы большага вострага вугла да гіпатэнузы.

8. Бісектрыса вострага вугла трохвугольніка падзяляе катэт на адрэзкі 15 і 39. Знайсці перыметр трохвугольніка.

9. У прамавугольным трохвугольніку з гіпатэнузай 20 праведзена медыяна да катэта. Знайсці катэты трохвугольніка, калі медыяна роўная $4\sqrt{13}$.

10. Медыяны прамавугольнага трохвугольніка, праведзеныя да катэтаў, адносяцца як $\sqrt{3} : 1$. Знайсці меншы вугал трохвугольніка.

11. У прамавугольным трохвугольніку вышыня, праведзеная да гіпатэнузы, падзяляе яе на адрэзкі 6 і 18. Знайсці большы катэт трохвугольніка.

12. З вяршыні прамога вугла трохвугольніка праведзены вышыня і медыяна. Знайсці стасунак катэтаў, калі вышыня і медыяна стасуюцца як 4:5.

13. У прамавугольным трохвугольніку катэты стасуюцца як 1:4. Знайсці стасунак вышыні і медыяны, якія выходзяць з прамога вугла.

14. У прамавугольным трохвугольніку з катэтамі 5 і 12 праведзена бісектрыса прамога вугла. Знайсці тангенс вострага вугла, пад якім бісектрыса перасякае гіпатэнузу.

15. У прамавугольным трохвугольніку катэты стасуюцца як 3:2. Вышыня, праведзеная да гіпатэнузы, падзяляе яе на адрэзкі, адзін з якіх на 2 см даўжэйшы за другі. Знайсці даўжыню гіпатэнузы.

16. З вяршыні прамога вугла трохвугольніка праведзены медыяна і вышыня. Знайсці адлегласць паміж асновамі вышыні і медыяны, калі катэты роўныя 6 і $3\sqrt{5}$.

17. Катэты прамавугольнага трохвугольніка з гіпатэнузай 40 стасуюцца як 1:3. Знайсці вышыню трохвугольніка, праведзеную да гіпатэнузы.

18. Гіпатэнуза прамавугольнага трохвугольніка роўная 25, а адзін з катэтаў роўны 10. Знайсці праекцыю другога катэта на гіпатэнузу.

19. У прамавугольным трохвугольніку з вяршыні прамога вугла праведзены медыяна $2\sqrt{3}$ і бісектрыса $\sqrt{2}$. Знайсці перыметр трохвугольніка.

20. У прамавугольным трохвугольніку з вострым вуглом 30° да гіпатэнузы праведзена медыяна. Даказаць, што медыяна падзяляе зыходны трохвугольнік на роўнастаронні і раўнабедраны трохвугольнікі.

Раўнабедраны трохвугольнік

1. У раўнабедраным трохвугольніку аснова роўная $\frac{16}{3}$ дм, а вышыня, праведзеная да асновы, роўная 6 дм. Знайсці даўжыню медыяны да бакавой стараны трохвугольніка.

2. У раўнабедраным трохвугольніку медыяна, праведзеная да бакавой стараны, роўная 7, а вугал пры вяршыні роўны 120°. Знайсці аснову трохвугольніка.

3. У раўнабедраным трохвугольніку косінус вугла пры аснове роўны $\frac{5}{12}$. Знайсці стасунак асновы да бісектрысы вугла пры аснове.

4. У роўнастароннім трохвугольніку ABC праведзена сярэдняя лінія MN, паралельная старане AC. Праз вяршыню A і сярэдзіну сярэдняй лініі праведзена прамая да перасячэння з BC у пункце D. Знайсці даўжыню стараны трохвугольніка, калі $AD = \sqrt{7}$.

5. Да бакавых старон раўнабедранага трохвугольніка праведзены вышыні. Даўжыня адрэзка, канцамі якога з'яўляюцца асновы вышынь, роўная $9\frac{1}{3}$ дм. Знайсці аснову трохвугольніка, калі бакавая старана роўная 18 дм.

6. Да бакавых старон раўнабедранага трохвугольніка праведзены бісектрысы. Аснова трохвугольніка роўная 12 см. Знайсці бакавую сторану, калі даўжыня адрэзка з канцамі ў асновах бісектрыс роўная 7,2 см.

7. Вугал пры вяршыні раўнабедранага трохвугольніка роўны 64°. Знайсці вугал паміж бісектрысай знешняга вугла пры аснове і вышынёй, праведзенай з вяршыні гэтага вугла.

8. У раўнабедраным трохвугольніку ABC вышыня, праведзеная да асновы AC, пунктамі K і M падзелена на тры роўныя часткі. У якім стасунку прамыя CK і CM падзяляюць сторану AB?

9. У раўнабедраным трохвугольніку медыяна, праведзеная да бакавой стараны, роўная 5 см. Знайсці бакавую старану, калі аснова роўная $4\sqrt{2}$ см.

10. Знайсці вышыню раўнабедранага трохвугольніка з бакавой стараной 5 і косінусам вугла пры вяршыні роўным $-\frac{7}{25}$.

11. Знайсці бісектрысу вострага вугла прамавугольнага раўнабедранага трохвугольніка, калі гапатэнуза роўная $4\sqrt{2}$ см.

12. У раўнабедраным трохвугольніку вышыня стасуецца да асновы як 3:4, а бакавая старана роўная $2\sqrt{39}$ см. Знайсці аснову трохвугольніка.

13. Вышыня раўнабедранага трохвугольніка, праведзеная да бакавой стараны, роўная 4 см. Знайсці бакавую старану, калі вугал пры вяршыні трохвугольніка роўны 30°.

14. У раўнабедраным трохвугольніку ABC AB=BC=10 см, а аснова роўная 12 см. Бісектрысы вуглоў пры аснове перасякаюцца ў пункце K. Знайсці даўжыню адрэзка BK.

15. У раўнабедраным трохвугольніку з асновай b і бакавой стараной a знайсці адлегласць паміж асновамі бісектрыс вуглоў пры аснове.

16. Аснова раўнабедранага трохвугольніка $\sqrt{32}$, а медыяна да бакавой стараны 5. Знайсці даўжыню бакавой стараны.

17. У роўнастароннім трохвугольніку вышыня роўная 6 см. Вызначыць даўжыню праекцыі гэтай вышыні на другую вышыню.

18. Старана роўнастаронняга трохвугольніка роўная 10 см. Вызначыць адлегласць ад пункта перасячэння бісектрыс да стараны трохвугольніка.

19. Пункт M ляжыць унутры роўнастаронняга трохвугольніка ABC. Знайсці вышыню гэтага трохвугольніка, калі AM=BM=2 см, CM=1 см.

20. Знайсці вышыню раўнабедаранага трохвугольніка, калі яго аснова роўная 12 см, а вышыня, праведзеная да асновы, роўная адрэзку, які злучае сярэдзіны асновы і бакавой стараны.

Адвольны трохвугольнік

1. Стораны трохвугольніка маюць даўжыні 16, 18, 26. Знайсці даўжыню медыяны да большай стараны.

2. У трохвугольніку вугал, заключаны паміж старанамі 3 і 9 см, падзелены напалавіну. Адзін з адрэзкаў трэцяй стараны роўны адной з дадзеных старон. Знайсці трэцюю сторану.

3. У трохвугольніку ABC са старанамі AB=6, AC=7, BC=5 праведзена вышыня CD. Знайсці даўжыню адрэзка AD.

4. У трохвугольніку ABC са старанамі AB=9, BC=10, AC=11 праведзена медыяна AM. Знайсці даўжыню медыяны.

5. У трохвугольніку са старанамі 6 і 8 медыяны, праведзеныя да гэтых старон, перасякаюцца пад прамым вуглом. Знайсці даўжыню трэцяй стараны.

6. У трохвугольніку ABC вышыні, праведзеныя з вяршыняў A і C, перасякаюцца ўнутры трохвугольніка і пунктам перасячэння падзяляюцца адпаведна ў стасунках 5:2 і 4:5, лічачы ад вяршыні. Знайсці велічыню вугла B.

7. Стораны трохвугольніка AB=15, BC=12, AC=18. Бісектрысы CM і BK перасякаюцца ў пункце O. Знайсці стасунак CO:OM.

8. У востравугольным трохвугольніку ABC вышыні AE і CK роўныя 16, 32 і 24, AK:KB=10:7. Знайсці даўжыню стараны BC.

9. У востравугольным трохвугольніку ABC AC=8, BC=$5\sqrt{2}$. Вышыні BK і AE перасякаюцца ў пункце O так, што AO:OE=3:1 і BO:OK=2:3. Знайсці даўжыню стараны AB.

10. У трохвугольніку ABC BC=a, AC=b. Знайсці сторану AB, калі вугал, які ляжыць супраць гэтай стараны, у два разы большы за вугал, які ляжыць супраць стараны AC.

11. На старанах AC і BC трохвугольніка ABC узяты пункты K і E так, што CK:KA=2:3, CE:EB=4:3. У якім стасунку пункт перасячэння адрэзкаў AE і BK падзяляе адрэзак KB?

12. Вышыня, аснова і сума бакавых старон трохвугольніка роўныя адпаведна 24, 28 і 56. Знайсці бакавыя стораны.

13. Даўжыні дзвюх старон востравугольнага трохвугольніка роўныя $\sqrt{12}$ см і $\sqrt{10}$ см. Знайсці даўжыню трэцяй стараны, калі яна роўная праведзенай да яе вышыні.

14. Аснова трохвугольніка роўная 20 см а медыяны да бакавых старон роўныя 18 см і 24 см. Знайсці бакавыя стораны трохвугольніка.

15. Бісектрыса вугла трохвугольніка падзяляе процілеглую старану на адрэзкі даўжынёй 4 см і 2 см, вышыня да гэтай стараны роўная $\sqrt{15}$ см. Знайсці даўжыні старон трохвугольніка, калі вядома, што яны выражаюцца натуральнымі лікамі.

16. У трохвугольніку ABC BC=14 см, AC=15 см, AB=13 см. Знайсці адлегласць ад пункта перасячэння вышыняў да вяршыні A.

17. У трохвугольніку ABC BC=18 см, AC=15 см, AB=12 см. Знайсці даўжыню бісектрысы вугла A трохвугольніка.

18. У трохвугольніку ABC вугал A удвая большы за вугал B, а даўжыні старон, процілеглых гэтым вуглам, адпаведна роўныя 12 см і 8 см. Знайсці даўжыню трэцяй стараны трохвугольніка.

19. Вышыня трохвугольніка, роўная 2 см, падзяляе вугал трохвугольніка ў стасунку 2:1, а аснову трохвугольніка на часткі, меншая з якіх роўная 1 см. Знайсці даўжыню асновы.

20. У трохвугольніку ABC праведзена вышыня CH. Знайсці залежнасць паміж вуглямі A і B, калі $CH^2 = HA \cdot HB$.

Шматвугольнікі

1. Бісектрысы тупых вуглоў пры аснове трапецыі перасякаюцца на другой аснове. Вышыня трапецыі роўная 12, а бісектрысы роўныя 15 і 13. Знайсці большую старану трапецыі.

2. Сярэдняя лінія трапецыі роўная 56 см. Пункт перасячэння дыяганаляў аддалены ад асноў на 6 і 8 см. Знайсці асновы трапецыі.

3. У паралелаграме адзін з вуглоў роўны 120°, а стасунак квадратаў даўжыняў дыяганаляў роўны $\frac{1}{3}$. Знайсці стасунак даўжыняў сумежных старон паралелаграма.

4. Даўжыні асноў трапецыі роўныя 20 і 5, даўжыня вышыні роўная 3. Знайсці даўжыню вышыні трохвугольніка, пабудаванага на большай аснове трапецыі працягам яе бакавых старон.

5. Вуглы пры аснове трапецыі роўныя 40° і 50°. Сярэдняя лінія трапецыі роўная 4, а даўжыня адрэзка, які злучае сярэдзіны асноў, роўная 1. Знайсці большую аснову трапецыі.

6. У трапецыі меншая аснова роўная 2 см, прылеглыя вуглы – па 135°. Вугал паміж дыяганалямі, які звернуты да асновы, роўны 150°. Знайсці сярэднюю лінію трапецыі.

7. Сума вострых вуглоў трапецыі роўная 90°, вышыня роўная 2 см, а асновы – 12 і 16 см. Знайсці бакавыя стораны трапецыі.

8. У прамавугольнай трапецыі ABCD вуглы A і D прамыя, AB і CD – асновы. AB=1, CD=4, AD=5. На старане AD узяты пункт M так, што вугал CMD удвая большы за вугал BMA. У якім стасунку пункт M падзяляе старану AD.

9. Даўжыня дыяганалі BD трапецыі ABCD роўная a, а даўжыня бакавой стараны AD роўная b. Знайсці даўжыню асновы CD, калі вядома, што даўжыні асновы, дыяганалі і бакавой стараны трапецыі, якія выходзяць з вяршыні C, роўныя паміж сабою.

10. У трапецыі з асновамі m і n праз пункт перасячэння дыяганаляў праведзена прамая, паралельная аснове. Знайсці даўжыню адрэзка прамой, якая заключана паміж бакавымі старанамі.

11. У выпуклым чатырохвугольніку ABCD даўжыня адрэзка, які злучае сярэдзіны старон AB і CD, роўная 1. Прамыя BC і AD перпендыкулярныя. Знайсці даўжыню адрэзка, які злучае сярэдзіны дыяганаляў AC і BD.

12. Дадзена раўнабедраная трапецыя ABCD. AD=10, BC=2, AB=CD=5. Бісектрыса вугла BAD перасякае працяг асновы BC у пункце K. Знайсці даўжыню бісектрысы вугла B у трохвугольніку ABK.

13. У раўнабедранай трапецыі асновы роўныя m і n, а вугал дыяганалі з асновай роўны α. Знайсці даўжыню адрэзка, які злучае пункт перасячэння дыяганаляў з сярэдзінай бакавой стараны трапецыі.

14. У паралелаграме са старанамі a і b і вуглом α праведзены бісектрысы чатырох вуглоў. Знайсці перыметр чатырохвугольніка, абмежаванага бісектрысамі.

15. У выпуклым чатырохвугольніку ABCD вуглы пры вяршынях A і B прамыя, велічыня вугла пры вяршыні D роўная 45°, BC=1, даўжыня дыяганалі BD роўная 5. Знайсці перыметр гэтага чатырохвугольніка.

16. У трапецыі ABCD бакавая старана $AB=4\sqrt{3}$. Адрэзак AK, дзе K – сярэдзіна бакавой стараны CD, з'яўляецца бісектрысай вугла A і AK=4. Знайсці даўжыню адрэзка BK.

17. У паралелаграме з вострым вуглом 45° адлегласць ад пункта перасячэння дыяганаляў да няроўных старон паралелаграма роўныя $\sqrt{2}$ і 3. Знайсці перыметр паралелаграма.

18. У паралелаграма стораны роўныя $5\sqrt{2}$ і $7\sqrt{2}$, а меншы вугал паміж дыяганалямі роўны меншаму вуглу паралелаграма. Знайсці суму даўжыняў дыяганаляў паралелаграма.

19. У прамавугольнай трапецыі дыяганалі ўзаемна перпендыкулярныя. Большая дыяганаль складае з меншай бакавой стараной вугал 60°. Знайсці даўжыню сярэдняй лініі трапецыі, калі даўжыня меншай дыяганалі роўная 6.

20. У квадраце ABCD са стараной 1 на старанах AB і BC узяты адпаведна пункты M і K так, што перыметр трохвугольніка MBK роўны 2. Знайсці велічыню вугла MDK.

Метрычныя суадносіны ў акружнасці

1. З аднаго пункта акружнасці праведзены дзве хорды даўжынёй 9 і 17 см. Знайсці радыюс акружнасці, калі адлегласць паміж сярэдзінамі хорд роўная 5 см.

2. Агульная знешняя датычная дзвюх акружнасцяў, якія датыкаюцца знешнім чынам, утварае з лініяй цэнтраў вугал 30°. Знайсці стасунак большага радыюса да меншага.

3. Шырыня колца, утворанага дзвюма канцэнтрычнымі акружнасцямі, роўная 8 дм, даўжыня хорды большай акружнасці роўная 4 м. Знайсці радыюсы акружнасцяў, калі хорда датыкаецца меншай акружнасці.

4. Акружнасці радыюсамі 8 і 4 см датыкаюцца знешнім чынам. З цэнтра меншай акружнасці праведзены адрэзак даўжынёй 16 см пад вуглом 30° да лініі цэнтраў. Знайсці даўжыні тых частак адрэзка, якія ляжаць па-за акружнасцямі.

5. Са знешняга пункта да акружнасці радыюсам 10 см праведзены сякучая даўжынёй 16 см і датычная. Знайсці стасунак датычнай да знешняга адрэзка сякучай, калі сякучая аддалена ад цэнтра на адлегласць 8 см.

6. Дзве акружнасці радыюсаў $\sqrt{2}$ і 1 см перасякаюцца ў пункце A. Адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцяў роўная 2 см. Хорда AC большай акружнасці перасякае меншую акружнасць у пункце B і падзяляецца гэтым пунктам напалавіну. Знайсці даўжыню хорды AC.

7. У востры вугал, роўны 60°, упісаны дзве акружнасці, якія датыкаюцца знешнім чынам. Радыюс меншай акружнасці роўны 3 см. Знайсці радыюс большай акружнасці.

8. Дадзены дзве акружнасці радыюсамі 7 і 14 см, якія не перасякаюцца. Да акружнасцяў праведзены агульныя датычныя, якія перасякаюцца ў пункце A адрэзка, які злучае лінію цэнтраў і мае даўжыню $14\sqrt{3}$ см. Знайсці перыметр фігуры, абмежаванай адрэзкамі датычных, заключаных паміж пунктамі дотыку, і большымі дугамі акружнасцяў, якія злучаюць пункты дотыку.

9. Дадзены дзве акружнасці радыюсамі 5 і 10 см. Да акружнасцяў праведзены агульныя знешнія датычныя, якія перасякаюцца на лініі цэнтраў у пункце K. Адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцяў роўная $10\sqrt{3}$ см. Знайсці перыметр фігуры, якая абмежавана адрэзкамі датычных, заключаных паміж пунктамі дотыку, і маленькімі дугамі акружнасцяў, якія злучаюць пункты дотыку.

10. У паўкруг радыюса R упісаны два кругі, якія датыкаюцца адзін аднаго, паўкруга і яго дыяметра. Знайсці радыюс упісанага круга, калі радыюс другога круга роўны r.

11. Дзве акружнасці ўпісаны ў востры вугал 60° і датыкаюцца знешнім чынам. Знайсці адлегласць ад пункта дотыку акружнасцяў да стараны вугла, калі радыюс большай акружнасці роўны 23.

12. З пункта C па-за акружнасцю праведзена датычная CA да акружнасці, дзе A – пункт дотыку. CA=20 см. Праз цэнтр акружнасці і пункт C праведзена прамая, на якую з пункта A апушчаны перпендыкуляр AB, роўны 12 см. Знайсці радыюс акружнасці.

13. У акружнасці радыюса $\sqrt{3}$ см з аднаго канца дыяметра праведзена датычная. А з другога – хорда, якая сцягвае дугу ў 120°. Хорда працягнута да перасячэння з датычнай. Знайсці знешні адрэзак сякучай.

14. З пункта K на акружнасці праведзены датычная і хорда KA. Вугал паміж імі роўны 60°. Знайсці даўжыню меншай дугі, адсякаемай хордай KA, калі даўжыня акружнасці роўная 6.

15. Дадзены дзве акружнасці, якія датыкаюцца знешнім чынам у пункце M. З пункта K адной акружнасці праведзены датычная да гэтай акружнасці, якая перасякае другую акружнасць у пунктах P і T, і прамая KM, якая перасякае другую акружнасць у пункце O. Знайсці даўжыню адрэзка TO, калі KM=10 і MO=8.

16. Дзве акружнасці радыюсамі 16 і 25 датыкаюцца знешнім чынам. Знайсці радыюс акружнасці, упісанай у крывалінейны трохвугольнік, які ўтвораны дадзенымі акружнасцямі і іх агульнай знешняй датычнай.

17. У акружнасці радыюса r праведзена хорда, роўная палавіне радыюса. Праз адзін канец хорды праведзена датычная да гэтай акружнасці, а праз другі – сякучая, паралельная датычнай. Знайсці адлегласць паміж датычнай і сякучай.

18. Праз канцы дугі акружнасці, якая ўтрымлівае 120°, праведзены датычныя да акружнасці. Радыюс акружнасці роўны 5 см. Знайсці даўжыню акружнасці, упісанай у фігуру, абмежаваную датычнымі і дадзенай дугой.

19. Дзве акружнасці радыюсаў 14 і 7 датыкаюцца знешнім чынам. З цэнтра меншай акружнасці пад вуглом 30° да лініі цэнтраў праведзены адрэзак даўжынёй 28. Знайсці даўжыню той часткі адрэзка, якая ляжыць паміж акружнасцямі.

20. Дзве акружнасці радыюсаў r_1 і r_2 датыкаюцца знешнім чынам. Прамая перасякае акружнасці ў пунктах A, B, C і D, так што AB=BC=CD. Знайсці AD.

Упісаныя і апісаныя трохвугольнікі і чатырохвугольнікі

1. У прамавугольны трохвугольнік з перыметрам 36 см упісана акружнасць. Пункт дотыку з акружнасцю падзяляе гіпатэнузу ў стасунку 2:3. Знайсці даўжыні старон трохвугольніка.

2. У раўнабедраным трохвугольніку з вуглом пры аснове 30° даўжыня вышыні, апушчанай на аснову, на 2 большая за радыюс упісанай акружнасці. Знайсці даўжыню асновы.

3. Даўжыня катэта і гіпатэнузы прамавугольнага трохвугольніка роўныя адпаведна 9 і 15 см. Знайсці адлегласць паміж цэнтрамі ўпісанай і апісанай акружнасцяў.

4. У трохвугольніку са старанамі 10 см, 12 см, 18 см праведзена акружнасць, якая датыкаецца дзвюх меншых старон, а цэнтр знаходзіцца на большай старане. Знайсці радыюс акружнасці.

5. Цэнтр акружнасці, апісанай вакол раўнабедранай трапецыі з асновамі 12 см і 20 см, ляжыць на большай аснове трапецыі. Знайсці даўжыні дыяганалі і бакавой стараны.

6. У прамавугольным трохвугольніку на вышыні, праведзенай да гіпатэнузы, як на дыяметры пабудавана акружнасць, якая перасякае катэты ў пунктах, аддаленых ад вяршыні прамога вугла на 12 см і 18 см. Знайсці даўжыні катэтаў.

7. Даўжыні бакавых старон трапецыі роўныя 6 і 10. Пункт перасячэння дыяганаляў падзяляе іх у стасунку 5:11. Знайсці даўжыні асноў трапецыі, калі вядома, што ў яе можна ўпісаць акружнасць.

8. У раўнабедраную трапецыю ўпісана акружнасць радыюса 8 см. Пункт дотыку падзяляе бакавую старану на адрэзкі, рознасць паміж якімі роўная 12 см. Знайсці даўжыню сярэдняй лініі трапецыі.

9. У паўакружнасць упісаны дзве акружнасці радыюсаў $\sqrt{13}$ і $\sqrt{52}$, якія датыкаюцца знешнім чынам. Знайсці даўжыню радыюса паўакружнасці.

10. Даўжыня стараны ромба ABCD роўная 12, а адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцяў, апісаных вакол трохвугольнікаў ABC і BCD, роўная 16. Знайсці радыюс большай акружнасці.

11. Акружнасці радыюсаў 6 і 12 з цэнтрамі адпаведна ў пунктах K і M датыкаюцца знешнім чынам у пункце C. Да акружнасцяў праведзены агульная знашняя датычная і агульная ўнутраная датычная. Датычныя перасякаюцца ў пункце D, а O – пункт дотыку агульнай знешняй датычнай і меншай акружнасці. Знайсці радыюс акружнасці, упісанай у чатырохвугольнік CDOK.

12. Вакол правільнага трохвугольніка апісана акружнасць радыюса 6. На акружнасці ўзяты пункт, які аддалены ад адной з вяршыняў на адлегласць 5. Знайсці рознасць адлегласцяў ад дадзенага пункта да дзвюх другіх вяршыняў трохвугольніка.

13. У прамавугольным трохвугольніку з катэтамі 6 і 8 см праведзена медыяна да гіпатэнузы. Знайсці адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцяў, упісаных у трохвугольнікі, на якія медыяна падзяліла дадзены трохвугольнік.

14. У трохвугольніку ABC AB=BC=39 см, AC=30см. Праведзены вышыні AK і BE. Знайсці радыюс акружнасці, якая праходзіць праз пункты K і E і датыкаецца стараны BC.

15. На адрэзку AC даўжынёй 24 см узяты пункт B так, што AB=8 см. На AC і на AB як на дыяметрах пабудаваны акружнасці. Знайсці радыюс акружнасці, якая датыкаецца дзвюх дадзеных і адрэзка AC.

16. Прамавугольнік са старанамі 12 і 16 см падзелены дыяганальлю на два трохвугольнікі. Знайсці адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцяў, упісаных у атрыманыя трохвугольнікі.

17. Акружнасць датыкаецца дзвюх сумежных старон квадрата і падзяляе кожную з дзвюх іншых старон на адрэзкі 1 і 17 см. Знайсці радыюс акружнасці.

18. У трапецыі ABCD асновы BC=10, AD=15 і бакавыя стораны AB=3, CD=4. Знайсці радыюс акружнасці, якая праходзіць праз пункты A і B і датыкаецца стараны CD.

19. Акружнасць праходзіць праз вяршыні B, C і D трапецыі ABCD і датыкаецца бакавой стараны AB у пункце B. Знайсці даўжыню дыяганалі BD, калі асновы трапецыі роўныя 3 і 12.

20. З пункта M да акружнасці з цэнтрам O і радыюсам 2 см праведзена датычная ME. Адрэзак OM перасякае акружнасць у пункце K і ўтварае з датычнай вугал 60°. Знайсці радыюс акружнасці, упісанай у крывалінейны трохвугольнік KEM.

Плошчы плоскіх і камбінаваных фігур

1. Медыяна трохвугольніка даўжынёй 6 перпендыкулярная другой медыяне даўжынёй 9. Знайсці плошчу трохвугольніка.

2. У трохвугольніку ABC медыяна AM і бісектрыса BE перпендыкулярныя і перасякаюцца ў пункце K. Знайсці плошчу трохвугольніка ABC, калі плошча трохвугольніка MEK роўная $5см^2$.

3. Пункт дотыку акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік, падзяляе гіпатэнузу на адрэзкі даўжынёй m і n. Знайсці плошчу трохвугольніка.

4. У трапецыі ABCD з асновамі AD і BC дыяганалі перасякаюцца ў пункце O. Плошчы трохвугольнікаў AOD і BOC роўныя адпаведна 9 і 4. Знайсці плошчу трапецыі.

5. Аснова трохвугольніка падзяляецца вышынёй на часткі 36 і 14 см. Перпендыкулярна да асновы праведзена прамая, якая падзяляе плошчу гэтага трохвугольніка напалавіну. На якія часткі гэтая прамая разбіла аснову трохвугольніка?

6. Пункт K ляжыць на старане BC трохвугольніка ABC, а пункт M – на працягу стараны AC за пункт A, прычым AM=AC, BK:KC=3:4. У якім стасунку MK падзяляе плошчу трохвугольніка ABC?

7. У раўнабедранай трапецыі з асновамі даўжынёй 10 і 26 см дыяганалі перпендыкулярныя бакавым старанам. Знайсці плошчу трапецыі.

8. У раўнабедраны трохугольнік упісана акружнасць радыюса 7. Вышыня, праведзеная да асновы, падзяляецца акружнасцю ў стасунку 1:2. Знайсці плошчу трохвугольніка.

9. Стораны трохвугольніка ABC стасуюцца AB:BC:AC=4:5:6. Пункт M, які знаходзіцца па-за трохвугольнікам, аддалены ад старон AC, AB і BC адпаведна на адлегласці $\sqrt{7}$, $2\sqrt{7}$ і $3\sqrt{7}$. Знайсці перыметр трохвугольніка.

10. У трапецыі MPQF даўжыні асноў MF і PQ роўныя адпаведна 24 см і 4 см. Вышыня трапецыі мае даўжыню 5 см. Пункт C падзяляе бакавую старану на адрэзкі MC і CP. Даўжыня адрэзка MC у тры разы большая за даўжыню адрэзка CP. Знайсці плошчу трохвугольніка CQF.

11. Сярэдняя лінія раўнабедранай трапецыі роўная 5 см і падзяляе трапецыю на часткі са стасункам плошчаў 7:13. Знайсці даўжыню вышыні трапецыі, калі вядома, што ў трапецыю можна ўпісаць акружнасць.

12. Дыяганалі выпуклага чатырохвугольніка ABCD роўныя 144 і 42 см. Знайсці адлегласць паміж сярэдзінамі старон AB і CD, калі плошча чатырохвугольніка роўная 3024 $см^2$.

13. Цэнтр упісанай у трохвугольнік акружнасці злучаны з вяршынямі трохвугольніка. Атрыманыя трохвугольнікі маюць плошчы 4, 13, і 15 $см^2$. Знайсці перыметр зыходнага трохвугольніка.

14. У сектар POQ радыюса 6 см з цэнтральным вуглом α упісаны прамавугольнік так, што дзве яго вяршыні ляжаць на дузе сектара, а дзве другія – на радыюсах PO і PQ. Знайсці плошчу прамавугольніка, калі востры вугал паміж яго дыяганалямі роўны β.

15. У трохвугольніку ABC дадзены вострыя вуглы α і $\beta(\alpha > \beta)$ пры аснове AC. Праведзены вышыня BD і бісектрыса BE. Знайсці плошчу трохвугольніка BDE, калі плошча трохвугольніка ABC роўная S.

16. Дадзены прамавугольны трохвугольнік ABC з катэтамі $AB = a, BC = b$. Праз вяршыні B і C праведзена акружнасць радыюсам r, якая перасякае гіпатэнузу ў пункце E і катэт у пункце D. Знайсці плошчу трохвугольніка ADE.

17. Старана правільнага трохвугольніка, упісанага ў акружнасць, роўная 6. Вылічыць плошчу адсякаемага ёю сегмента.

18. У прамавугольным трохвугольніку гіпатэнуза роўная $\sqrt{7}$ і востры вугал роўны α. Знайсці стасунак плошчаў упісанай і апісанай акружнасцяў.

19. У трапецыі ABCD з асновамі AD=16 і BC=9 на працягу BC узяты пункт M, што CM=3,2. У якім стасунку прамая AM падзяляе плошчу трапецыі?

20. У прамавугольным трохвугольніку з вяршыні прамога вугла праведзены медыяна $2\sqrt{3}$ см і бісектрыса $\sqrt{2}$ см. Знайсці плошчу трохвугольніка.

Задачы на пабудову

1. Пабудаваць трохвугольнік па дзвюх старанах і медыяне да трэцяй стараны.

2. Дадзены дзве акружнасці і пункт M. Пабудаваць паралелаграм так, каб яго вяршыні належылі дадзеным акружнасцям, а пункт M з'яўляўся перасячэннем дыяганаляў паралелаграма.

3. Праз пункт M вугла ABC правесці прамую так, каб яна адсякала трохвугольнік найменшай плошчы, калі вядома, што пункт M не належыць старанам вугла.

4. Пабудаваць трохвугольнік па старане, рознасці дзвюх другіх старон і вуглу, які заключаны паміж першай стараной і большай з дзвюх другіх старон.

5. Пабудаваць трохвугольнік па дзвюм старанам і рознасці процілеглых вуглоў.

6. Пабудаваць трохвугольнік па зададзеных сярэдзінавых перпендыкулярах да яго старон.

7. У дадзеную акружнасць упісаць трохвугольнік, стораны якога паралельны тром дадзеным прамым.

8. Праз дадзены ўнутры круга пункт правесці хорду зададзенай даўжыні.

9. Пабудаваць правільны трохвугольнік так, каб адной яго вяршыняй быў пункт P, другая належыла дадзенай акружнасці, а трэцяя – дадзенай прамой.

10. Пабудаваць трапецыю па яе дыяганалях, вуглу паміж імі і адной з старон.

11. Пабудаваць чатырохвугольнік MPEK, ведаючы яго стораны і адрэзак AB, які злучае сярэдзіны старон MP і KE.

12. Дадзены акружнасці ω_1 і ω_2. Правесці праз дадзены пункт M прамую так, каб акружнасці адсякалі на ёй роўныя хорды.

13. Пабудаваць чатырохвугольнік па вуглах і дыяганалях.

14. Пабудуйце трохвугольнік па медыянах m_a, m_b і вуглу C.

15. Пабудуйце трохвугольнік па старане, процілегламу вуглу і суме дзвюх другіх старон.

16. Пабудуйце правільны трохвугольнік, вышыні якога перасякаюцца ў дадзеным пункце, а дзве вяршыні ляжаць на дадзенай акружнасці.

17. Пабудуйце квадрат, дзве вяршыні якога ляжаць на дадзенай акружнасці, а дыяганалі перасякаюцца ў дадзеным пункце.

18. Пабудуйце трохвугольнік ABC па старанах AB і AC і бісектрысе AK.

19. Дадзены вугал ABC і пункт M унутры яго. Пабудуйце акружнасць, якая датыкаецца старон вугла і праходзіць праз пункт M.

20. На плоскасці дадзены пункты A і E. Пабудуйце ромб ABCM, калі зададзена вышыня і пункт E з'яўляецца сярэдзінай стараны BC.

Геаметрычныя няроўнасці

1. Дакажыце, што сярод усіх трохвугольнікаў з фіксаваным паўперыметрам p найбольшую плошчу мае правільны трохвугольнік.

2. Перыметр трохвугольніка ABC раўны $2p$. На старанах AB і AC узяты пункты M і N так, што MN||BC і MN датыкаецца ўпісанай у трохвугольнік ABC акружнасці. Знайсці найбольшае значэнне даўжыні адрэзка MN.

3. Дадзены вугал ABC і пункт M унутры яго. Правядзіце праз пункт M прамую, якая адсякае ад дадзенага вугла трохвугольнік найменшай плошчы.

4. Дадзены вугал ABC і акружнасць унутры яго. Пабудуйце пункт акружнасці, сума адлегласцяў ад якога да прамых BA і BC найменшая.

5. Дыяганалі выпуклага чатырохвугольніка ABCD перасякаюцца ў пункце O. Якую найменшую плошчу можа мець гэты чатырохвугольнік, калі плошча трохвугольніка AOB роўная 4, а плошча трохвугольніка COD роўная 9?

6. Плошча трапецыі роўная 2. Якую найменшую велічыню можа мець найбольшая дыяганаль гэтай трапецыі?

7. Унутры акружнасці з цэнтрам O дадзены пункт A. Знайдзіце пункт M акружнасці, для якога вугал OMA максімальны.

8. На старане вострага вугла з вяршыняй A дадзены пункт B. Пабудуйце на другой старане вугла такі пункт X, што радыюс апісанай вакол трохвугольніка ABX акружнасці найменшы.

9. Праз дадзены ўнутры акружнасці пункт правесці хорду найменшай даўжыні.

10. Сярод усіх трохвугольнікаў з зададзенай сумай даўжыняў бісектрыс знайдзіце трохвугольнік з найбольшай сумай даўжынь вышыняў.

11. У які круг можна ўпісаць прамавугольнік найбольшай плошчы з перыметрам, роўным 56 см?

12. У раўнабедраны трохвугольнік са старанамі 15, 15 і 18 см упісаны паралелаграм найбольшай плошчы так, што вугал пры аснове у іх агульны. Знайсці даўжыні старон паралелаграма.

13. Знайдзіце даўжыні старон прамавугольніка найбольшай плошчы, упісанага у прамавугольны трохвугольнік са старанамі 18, 24, 30 см і маючага з ім агульны прамы вугал.

14. Бакавыя стораны трапецыі перпендыкулярныя. Якое найбольшае значэнне можа мець плошча трохвугольніка, утворанага дыяганалямі і сярэдняй лініяй трапецыі, калі даўжыні асноў трапецыі роўныя a і b?

15. У раўнабедраны трохвугольнік з вуглом 120° і даўжынёй асновы 8 см упісаны прамавугольнік, адна са старон якога ляжыць на аснове трохвугольніка. Знайсці даўжыні старон прамавугольніка найбольшай плошчы.

16. Сума даўжыняў дыяганаляў паралелаграма роўная 16 см. Знайдзіце мінімум сумы квадратаў даўжыняў усіх старон паралелаграма.

17. З усіх прамавугольнікаў з плошчай 9 $дм^2$ знайсці той, у якога перыметр найменшы.

18. Знайсці даўжыні старон прамавугольніка найбольшай плошчы, упісанага ў прамавугольную трапецыю з даўжынямі асноў 24 см і 8 см і даўжынёй вышыні 12 см.

19. Пры якім значэнні даўжыні вышыні прамавугольная трапецыя з вострым вуглом у 45° і перыметрам 4 см мае найбольшую плошчу?

20. Сума даўжыняў дзвюх старон трохвугольніка роўная a, а велічыня вугла паміж імі роўная 30°. Якімі павінны быць даўжыні старон трохвугольніка, каб яго плошча была найбольшай?

ПЫТАННІ ДА ЗАЛІКА

па курсу: “Элементарная матэматыка і ПРЗ” (планіметрыя)
Спецыяльнасць: “Матэматыка і інфарматыка” 5 семестр

1. Агульныя метады рашэння планіметрычных задач.
2. Каардынатны метад.
3. Вектарны метад.
4. Метад геаметрычных пераўтварэнняў.
5. Цудоўныя пункты і лініі трохвугольніка.
6. Асноўныя суадносіны паміж элементамі раўнабедранаго і прамавугольнага трохвугольніка.
7. Асноўныя суадносіны паміж элементамі рознастаронняга трохвугольніка.
8. Прыкметы роўнасці трохвугольнікаў.
9. Прыкметы падобнасці трохвугольнікаў.
10. Метады доказу геаметрычных няроўнасцяў.
11. Уласцівасці і прыкметы чатырохвугольнікаў.
12. Упісаныя і апісаныя трохвугольнікі.
13. Пазаўпісаная акружнасць.
14. Адвольнае размяшчэнне акружнасцяў, прамой і акружнасці.
15. Акружнасць і чатырохвугольнік.
16. Акружнасць і вуглы.
17. Уласцівасці хорд.
18. Датычныя і сякучыя.
19. Плошча трохвугольніка.
20. Плошча чатырохвугольніка.
21. Паняцце канструктыўнай задачы. Агульная схема рашэння.
22. Метады рашэння задач на пабудову.
23. Геаметрычныя няроўнасці.

24. Тэарэма Чэвы і яе дадаткі.
25. Уласцівасці артацэнтра.
26. Акружнасць дзевяці пунктаў, прамая Эйлера.
27. Тэарэма Менелая.

ЛІТАРАТУРА

1. Гусев, В.А. Практикум по элементарной математике. Геометрия: учеб. пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. ин-тов и учителей / В.А. Гусев, В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – М.: Просвещение, 1992. – 352 с.

2. Прасолов, В.В. Задачи по планиметрии. Ч. 1. – 2-е изд., перераб. и доп. / В.В. Прасолов. – М.: Наука, 1991. – 320 с.

3. Прасолов, В.В. Задачи по планиметрии. Ч. 2. – 2-е изд., перераб. и доп. / В.В. Прасолов. – М.: Наука, 1991. – 240 с.

4. Шлыкаў, У.У. Геаметрыя : вучэб. дапам. для 8-га кл. устаноў, якія забяспечваюць атрыманне агул. сярэд. адукацыі, з бел. мовай навучання / У.У. Шлыкаў: пер. з рус. мовы Г.М. Клімава, Я.А. Пастушэнка, Л.В. Саламаха. – 2-е выд., дап. - Мінск : Адукацыя і выхаванне, 2005. – 168 с.

5. Шлыкаў, У.У. Геаметрыя: вучэб. дапам. для 9-га кл. устаноў, якія забяспечваюць атрыманне агул. сярэд. адукацыі, з бел. мовай навучання з 12-гадовым тэрмінам навучання / У.У. Шлыкаў; пер. з рус. мовы Л.Э. Гаранінай. – Мінск: Нар. асвета, 2005. – 205 с.

6. Шлыков, В.В. Геометрия : учеб. пособие для 10-го кл. учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования, с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повышенный уровни) / В.В. Шлыков. – 2-е изд. – Минск : Нар. асвета, 2007. – 174 с.

7. Рогановский, Н.М., Рогановская, Е.Н. Элементарная математика / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская. - Мн.: изд-во «Дизайн ПРО», 2000. – 580 с.

ПРЭЗЕНТАЦЫІ

1. Каардынатны метад

2. Вектарны метад

3. Надзвычайныя пункты і лініі трохвугольніка

4. Ортатрохвугольнік

5. Задачы на пабудову

6. Акружнасць і прамая Эйлера