УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»
Кафедра алгебры и геометрии

О.В. Матысик
А.А. Трофимук

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ

*Электронный учебно-методический комплекс
для студентов дневной и заочной формы получения образования
отделения 1–02 05 01 «Математика и информатика»
физико-математического факультета*

Брест
БрГУ имени А.С.Пушкина
2013

Авторы:

Матысик Олег Викторович — заведующий кафедрой алгебры и геометрии БрГУ им. А.С. Пушкина, кандидат физико-математических наук, доцент

Трофимук Александр Александрович — доцент кафедры алгебры и геометрии БрГУ им. А.С. Пушкина, кандидат физико-математических наук

Редактор:

Зубей Екатерина Владимировна — преподаватель кафедры алгебры и геометрии БрГУ им. А.С. Пушкина

Рецензенты:

Савчук Вячеслав Фёдорович — заведующий кафедрой прикладной математики и технологий программирования БрГУ им. А.С. Пушкина, кандидат физико-математических наук, доцент

Кафедра высшей математики Брестского государственного технического университета

ЭУМК написан в соответствии с действующей типовой программой по дисциплине «Введение в математику» и ставит своей целью облегчить самостоятельную работу студентов с теоретическим материалом при подготовке к лекциям, практическим занятиям и к зачету.

Предназначено для студентов дневной и заочной формы получения образования отделения 1–02 05 01 «Математика и информатика» физико-математического факультета.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Настоящий ЭУМК предназначен для студентов дневной и заочной формы получения образования отделения 1–02 05 01 «Математика и информатика». Он написан в соответствии с действующей типовой программой по курсу «Введение в математику», утверждённой учебно-методическим объединением высших учебных заведений Республики Беларусь.

ЭУМК «Введение в математику» содержит примерный тематический план, курс лекций, практические задания, перечень вопросов к зачету и контрольные тесты.

Примерный тематический план отражает содержание ЭУМК, соответствующее типовой учебной программе.

В курсе лекций излагается теоретический материал, содержащий вопросы логики высказываний, математической логики, логики предикатов, теории множеств и комбинаторики. Теоретический материал иллюстрируется многочисленными примерами решения задач. Наличие большого количества примеров поможет студентам качественно подготовиться к практическим занятиям и к зачету.

В практической части предложен перечень номеров задач, разбитых по тематике курса.

В рамках ЭУМК студентам предложены контрольные тесты, которые могут использоваться ими для самоконтроля после изучения материала.

ЭУМК «Введение в математику» ставит своей целью изложить основные математические понятия и научить студентов пользоваться ими. Вопросы, изучаемые в курсе, востребованы всеми без исключения математическими дисциплинами.

В соответствии с учебной программой на изучение дисциплины «Введение в математику» отводится 68 аудиторных часов, из них: 34 часа — лекции и 34 часа — практические занятия. Дисциплина изучается на первом курсе в первом семестре. Итоговый учет успеваемости осуществляется в форме зачета.

Авторы

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
1	**Элементы математической логики**	**6**	**6**
1.1	Элементы логики высказываний.	2	2
1.2	Тавтологии. Законы логики. Применения законов логики. Доказательство от противного. Методы доказательств.	2	2
1.3	Элементы логики предикатов.	2	2
2	**Элементы теории множеств**	**20**	**20**
2.1	Множества.	2	2
2.2	Булева алгебра.	2	2
2.3	Декартрово произведение множеств.	2	2
2.4	Бинарное отношение.	3	2
2.5	Отношение порядка.	1	2
2.6	Отношение эквивалентности.	2	2
2.7	Отображение.	2	2
2.8	Функции и отображения.	2	2
2.9	Обратные отображения.	2	2
2.10	Мощность множества.	2	2
3	**Элементы комбинаторики**	**8**	**8**
3.1	Метод математической индукции.	4	2
3.2	Комбинаторика с повторениями.	2	2
3.3	Комбинаторика без повторений. Бином Ньютона.	2	2
	Контрольная работа.		**2**
	ИТОГО (68ч.)	**34**	**34**

Кафедра АиГ

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Элементы логики высказываний

Высказывания. Логические союзы. Таблицы истинности.

Элементы математической логики

Тавтологии. Законы логики. Применения законов логики. Доказательство от противного. Методы доказательств.

Элементы логики предикатов

Предикаты. Кванторы всеобщности и существования. Отрицание высказываний, содержащих кванторы.

Раздел 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Множества

Множество. Подмножество. Операции над множествами. Равные множества. Доказательство равенства множеств.

Булева алгебра

Булева алгебра. Методы доказательства равенства множеств.

Декартово произведение множеств

Определение и свойства декартова (прямого) произведения множеств.

Бинарные отношения

Бинарные отношения на множествах и между множествами. Рефлексивные, антирефлексивные, симметричные, антисимметричные, асимметричные и транзитивные бинарные отношения на множестве.

Отношение порядка

Отношения порядка и строгого порядка, отношения линейного порядка.

Отношение эквивалентности

Отношение эквивалентности, его определение и свойства. Классы эквивалентности. Разбиение множества. Фактор-множество.

Отображения

Отображения. Образ элемента и образ подмножества. Полный прообраз элемента и полный прообраз подмножества. Инъективные, сюръективные и биективные отображения.

Функции и отображения

Композиция отображений. Ассоциативность композиции отображений. Обратное отображение. Критерий существования обратных отображений. Свойства обратных отображений. Подстановки.

Обратные отображения

Определение и свойства обратных отображений. Критерий обратимости отображения.

Мощность множества

Конечные множества. Бесконечные множества. Равномощные множества. Счётные множества. Несчётность множества чисел на (0;1).

Раздел 3. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Метод математической индукции

Метод математической индукции. Разные формы метода математической индукции. Применение метода математической индукции для доказательства равенств, неравенств, делимости и решения других задач.

Комбинаторика с повторениями

Комбинаторика с повторениями. Правила комбинаторики. Формулы комбинаторики с повторениями.

Комбинаторика без повторений. Бином Ньютона

Сочетания, перестановки и размещения. Бином Ньютона. Правило включений и исключений.

РАЗДЕЛ 1
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

1.1 Высказывания и операции над ними

Определение 1.1. *Повествовательное предложение, про которое можно сказать, что оно истинное или ложное, называется высказыванием (утверждением).*

Пример 1.1.

1) Рига — столица Латвии (истина).
2) Три — простое число (истина).
3) Семь — чётное число (ложь).
4) $2 \cdot 3 = 6$ *(истина).*

Определения, вопросительные, восклицательные и безличные предложения высказываниями не являются.

Высказывания будем обозначать большими латинскими буквами — A, B, C, $D \ldots$.

Каждому высказыванию припишем значение истинности (1 или 0). И договоримся вместо выражения «A — истинное» писать $A \equiv 1$, а вместо «A — ложное» писать $A \equiv 0$.

Определение 1.2. *Элементарные (простые) высказывания — высказывания, которые воспринимаются, как одно целое, не раскладываемое на высказывания — части.*

Сложные (составные) высказывания строятся из простых при помощи слов: «не», «и», «или», «если ..., то», «тогда и только тогда, когда» — эти слова называются *логическими операциями*.

Определение 1.3. *Логическая операция, соответствующая частице «не», называется отрицанием.*

Знак отрицания: $\rceil$ или $^{-}$. Если A — высказывание, то его отрицание запишется $\overline{A}$ (запись $\overline{A}$ читается «не A»).

Определение отрицания можно ввести и при помощи *таблицы истинности*:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Отрицание высказывания A есть высказывание истинное тогда и только тогда, когда A — ложное.

Пример 1.2.
A: "$2 \cdot 3 = 5$" $\equiv 0$,
$\overline{A}$: "$2 \cdot 3 \neq 5$" $\equiv 1$;
A: "$2 > 3$" $\equiv 0$ (2 больше 3),
$\overline{A}$: "$2 \leq 3$" $\equiv 1$ (2 не больше 3).

Определение 1.4. *Логическая операция, соответствующая союзу «и», называется конъюнкцией (лат. conjunctio — связь).*

Знак конъюнкции : $\wedge$ или &. Запись $A \wedge B$ читается «A и B». Конъюнкция высказываний A и B задаётся следующей *таблицей истинности*:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Таким образом, конъюнкция высказываний A и B есть высказывание истинное тогда и только тогда, когда каждое из них истинное.

Пример 1.3.
A: «7 — простое число» $\equiv 1$, *B: «6 — нечётное число»* $\equiv 0$;
$A \wedge B$ *«7 — простое число и 6 — нечётное число»* $\equiv 0$.

Определение 1.5. *Логическая операция, соответствующая союзу «или», называется* <u>*дизъюнкцией*</u> *(лат. disjunctio — разрешение).*

Знак дизъюнкции : $\vee$. Запись $A \vee B$ читается «A или B». Дизъюнкцию высказываний A и B можно задать следующей *таблицей истинности*:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Таким образом, дизъюнкция высказываний A и B есть высказывание ложное тогда и только тогда, когда каждое из них ложное.

Пример 1.4.
A: «$2+2=5$» $\equiv 0$, B: «$6+3=9$» $\equiv 1$;
$A \vee B$: «$2+2=5$ *или* $6+3=9$» $\equiv 1$.

Определение 1.6. *Логическая операция, соответствующая выражению «если …, то», называется* <u>*импликацией*</u> *(лат. implicite — тесно связываю).*

Знак импликации: $\Rightarrow$. Запись $A \Rightarrow B$ читается: «если A, то B», «A имплицирует B», «из A следует B», «A влечёт B».

Импликация высказываний A и B задаётся следующей *таблицей истинности*:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

В импликации A называют посылкой (условием, антицедентом), B — заключением (консеквентом).

Таким образом, импликация высказываний A и B — есть высказывание ложное тогда и только тогда, когда A — истина, а B — ложь.

Пример 1.5.
A: «$10 - 5 = 5$» $\equiv 1$,
B: «3 — *чётное число*» $\equiv 0$;
$A \Rightarrow B$: *«если* $10 - 5 = 5$, *то* 3 — *чётное число»* $\equiv 0$.

Определение 1.7. *Логическая операция, соответствующая выражению «тогда и только тогда, когда», называется эквиваленцией (лат. aequs — равный, valentis — имеющий силу).*

Знак эквиваленции: $\Leftrightarrow$. Запись $A \Leftrightarrow B$ читается: «A тогда и только тогда, когда B».

Зададим данную логическую операцию высказываний A и B следующей *таблицей истинности*:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Поэтому эквиваленция высказываний A и B — есть высказывание истинное тогда и только тогда, когда A и B принимают одинаковые значения истинности.

Пример 1.6.

A: *«6 — нечётное число»* $\equiv 0$,

B: *«сумма углов треугольника равна 1600»* $\equiv 0$;

$A \Leftrightarrow B$: *«6 — нечётное число тогда и только тогда, когда сумма углов треугольника равна 1600»* $\equiv 1$.

1.2 Формулы логики высказываний. Равносильные формулы. Законы логики

Введём в рассмотрение высказывательные переменные — переменные, вместо которых можно подставлять любые элементарные высказывания.

Зададим алфавит логики высказываний:

1) A, B, C, $\ldots$ — символы высказывательных переменных;

2) 1, 0 — символы логических констант;

3) $^{-}$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ — символы логических операций;

4) (,) — скобки (дополнительные символы для указания порядка выполнения логических операций).

Определение 1.8. (формулы логики высказываний)

1) Любая высказывательная переменная — формула.

2) Символы 1 и 0 — формулы.

3) Если F_1 и F_2 — формулы, то $\left(\overline{F_1}\right)$, $\left(\overline{F_2}\right)$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \Rightarrow F_2)$, $(F_1 \Leftrightarrow F_2)$ — формулы.

4) Никаких других формул в логике высказываний нет.

Примем следующий порядок выполнения операций: $^{-}$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ (если отсутствуют скобки).

Определение 1.9. *Формулы F_1 и F_2 называются равносильными, если при любом наборе значений истинности входящих в их состав переменных, эти формулы принимают одинаковые значения истинности.*

Основные равносильности формул

1) $A \vee A \equiv A$;
1′) $A \wedge A \equiv A$;
2) $A \vee \overline{A} \equiv 1$;
2′) $A \wedge \overline{A} \equiv 0$;
3) $A \vee 1 \equiv 1$;
3′) $A \wedge 1 \equiv A$ (нейтральность 1 у конъюнкции);
4) $A \vee 0 \equiv A$ (нейтральность 0 у дизъюнкции);
4′) $A \wedge 0 \equiv 0$;
5) $\overline{\overline{A}} \equiv A$;
6) $A \vee B \equiv B \vee A$ (коммутативность дизъюнкции);
6′) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ (коммутативность конъюнкции);
7) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ (ассоциативность дизъюнкции);
7′) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ (ассоциативность конъюнкции);
8) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
(дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции);
8′) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
(дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции);

9) $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$;
9′) $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$;
10) $A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$;
11) $\overline{A \Rightarrow B} \equiv A \wedge \overline{B}$;
12) $A \Rightarrow B \equiv \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$;
13) $A \Leftrightarrow B \equiv B \Leftrightarrow A$;
14) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$;
15) $A \Leftrightarrow B \equiv \overline{A} \Leftrightarrow \overline{B}$.

Пример 1.7. *Доказать, что* $A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$.
Обозначим F_1: $A \Rightarrow B$, F_2: $\overline{A} \vee B$ *и докажем:* $F_1 \equiv F_2$.

A	B	$\overline{A}$	F_1	F_2
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Из таблицы истинности очевидно, что F_1 *и* F_2 *равносильные:* $F_1 \equiv F_2$.

Определение 1.10. *Логическая формула, которая принимает значение истинности 1 при любом наборе значений истинности входящих в неё переменных, называется тождественно истинной формулой, тавтологией, законом логики.*

Определение 1.11. *Логическая формула, которая принимает значение истинности 0 при любом наборе значений истинности входящих в неё переменных, называется тождественно лживой формулой, противоречием.*

Нетрудно доказать, что $F_1 \equiv F_2$ тогда и только тогда, когда $F_1 \Leftrightarrow F_2$ – закон логики (тавтология).

Таким образом, заменой в формулах 1 - 15 знака «$\equiv$» знаком «$\Leftrightarrow$» получим законы логики (тождественно истинные формулы).

К примеру:

1) $A \vee \overline{A} \Leftrightarrow 1$ — закон исключения третьего;

2) $\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$ — закон двойного отрицания;

3) $\begin{array}{l} \overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B} \\ \overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B} \end{array}$ — законы де Моргана;

4) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ — закон контропозиции;

5) $\overline{A \vee \overline{A}} \Leftrightarrow 0$ — закон противоречия.

1.3 Высказывательные формы. Кванторы. Преобразование высказываний с кванторами

Определение 1.12. *Предложение с переменными, которое становится высказыванием при подстановке вместо переменных их значений, называется высказывательной формой.*

Определение 1.13. *Выражение «для всех x» («для любого x») называется квантором всеобщности по переменной x и обозначается символом $(\forall x)$.*

Определение 1.14. *Выражение «существует x такое, что ...» называется квантором существования по переменной x и обозначается символом $(\exists\, x)$.*

Определение 1.15. *Выражение «существует единственное x такое, что ...» называется квантором существования и единственности по переменной x и обозначается символом $(\exists!\, x)$.*

Определение 1.16. *Приписывание спереди к высказывательной форме квантора назовём навешиванием квантора.*

Навешивание квантора на высказывательную форму $P(x)$ от одной переменной x преобразует её в высказывание.

$(\forall x)\ P(x)$ — высказывание истинное, если $P(x)$ принимает значение истинности 1 для всех значений переменной x.

$(\exists x)\ P(x)$ — высказывание истинное, если $P(x)$ принимает значение истинности 1 хотя бы для одного значения переменной x.

$(\exists\, !x)\ P(x)$ — высказывание истинное, если $P(x)$ принимает значение истинности 1 только для одного значения переменной x.

Пример 1.8.

1) $((\forall x \in N)\, x + 3 = 1) \equiv 0$;
2) $((\exists x \in R)\, x + 8 = 10) \equiv 1$;
3) $\big((\exists ! x)\, x^2 = 4\big) \equiv 0$.

Если на высказывательную форму от n переменных $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ навесить k кванторов $(k \leq n)$, то получим высказывательную форму от $n - k$ переменных при $k < n$ и высказывание при $k = n$.

Если переставить местами одноименные кванторы, которые стоят рядом, то получится равносильное высказывание, например,
$(\forall x)(\forall y)\ P(x,\ y) \equiv (\forall y)(\forall x)\ P(x, y)$.

Если же переставить стоящие рядом разноимённые кванторы, то значение истинности высказывания изменится, например
$((\forall x)\,(\exists y)\, x + y = 1) \equiv 1$, а $((\exists y)\,(\forall x)\, x + y = 1) \equiv 0$.

При построении отрицания высказываний с кванторами квантор $(\forall x)$ заменяется на квантор $(\exists\, x)$ и наоборот, а высказывательная форма $P(x)$ заменяется на $\overline{P(x)}$:
$\overline{((\forall x)\, P(x))} \equiv (\exists x)\, \overline{P(x)}$,
$\overline{((\exists x)\, P(x))} \equiv (\forall x)\, \overline{P(x)}$.

Отрицание высказывания, содержащего квантор $(\exists! x)$, можно построить следующим образом:
$\overline{(\exists! x)\, P(x)} \equiv \overline{(\exists x)\, P(x) \wedge (\forall y)\,(\forall z)\,(P(y) \wedge P(z) \Rightarrow y = z)}$.

Квантор $(\forall x)$ является дистрибутивным относительно конъюнкции и импликации двух высказываний:
$(\forall x)\,(P(x) \wedge S(x)) \equiv (\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, S(x)$,
$(\forall x)\,(P(x) \Rightarrow S(x)) \equiv (\forall x)\, P(x) \Rightarrow (\forall x)\, S(x)$.

А квантор $(\exists x)$ дистрибутивен относительно дизъюнкции двух высказываний:
$(\exists x)\,(P(x) \vee S(x)) \equiv (\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, S(x)$.

Нетрудно проверить, что $(\forall x)\,(P(x) \Rightarrow S(x)) \equiv (\forall x)\left(\overline{S(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}\right)$.

1.4 Взаимно обратные, противоположные, контропозитивные математические предложения. Необходимые и достаточные условия. Доказательство от противного

Математические предложения часто формулируются в виде импликаций.

Если $A \Rightarrow B \equiv 1$, то импликацию $A \Rightarrow B$ принято называть теоремой. Тогда предложение A называется условием, а B — заключением теоремы.

Для импликации $A \Rightarrow B$ (1), которую назовём прямой, определим ещё три импликации таким образом: $B \Rightarrow A$ (2), которая называется обратной к (1). Аналогично (1) — обратная к (2).

Итак, (1) и (2) взаимно обратные предложения.

$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ (3) — предложение противоположное к (1) и по закону контропозиции (3)$\Leftrightarrow$(2).

$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (4) — противоположное к (2) и по закону контропозиции (4) $\Leftrightarrow$ (1) и обратно (3).

Таким образом, (1) и (3), (2) и (4) — взаимно противоположные, (1) и (2), (3) и (4) — взаимно обратные, (1) и (4), (2) и (3) — взаимно контрпозиционные.

Определение 1.17. *Условие A называется достаточным для заключения B, если прямая импликация $A \Rightarrow B$ — истина (A — достаточное условие для B).*

Определение 1.18. *Условие A называется <u>необходимым</u> для заключения B, если импликация $B \Rightarrow A$ — истина (A — необходимое условие для B).*

Определение 1.19. *Условие A называется <u>необходимым и достаточным</u> для B, если истинны обе импликации $B \Rightarrow A$ и $A \Rightarrow B$ (аналогично B для A).*

В этом случае $B \Leftrightarrow A$ — критерий.

Заметим, что одно предложение может быть только достаточным, только необходимым, необходимым и достаточным, не необходимым и недостаточным для другого предложения.

Например,если $A \Rightarrow B \equiv 1$ и $B \Rightarrow A \equiv 0$,
то A является только достаточным условием для B.

Пример 1.9. *В следующих предложениях вместо многоточия вставить слова «достаточно», «необходимо» и их отрицание так, чтобы получились правильные высказывания.*

1) Для того, чтобы четырёхугольник был параллелограммом, . . . , чтобы его диагонали были равные.

<u>Решение</u>:

A: диагонали четырёхугольника равные.
B: четырёхугольник – параллелограмм.

Построим импликации:

$A \Rightarrow B \equiv 0$, значит, A недостаточное для B.

$B \Rightarrow A \equiv 0$, значит, A не необходимое для B.

Нужно вставить: не необходимо и недостаточно.

2) Для того, чтобы четырёхугольник был ромбом, ..., чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны.

Решение:

A: диагонали четырёхугольника взаимно перпендикулярны.

B: четырёхугольник — ромб.

Построим импликации:

$A \Rightarrow B \equiv 0$ — условие A недостаточное для B.

$B \Rightarrow A \equiv 1$ — условие A является необходимым для B.

Нужно вставить: необходимо.

3) Для того, чтобы целое число делилось на 2, ..., чтобы запись числа заканчивалась цифрой 0.

Решение:

A: запись целого числа заканчивается цифрой 0.

B: целое число делится на 2.

Построим импликации:

$A \Rightarrow B \equiv 1$ — *условие A является достаточным для B.*
$B \Rightarrow A \equiv 0$ — *условие A не является необходимым для B.*
Нужно вставить: достаточно.

4) Для того, чтобы ab $(a, b \in N)$ *делилось на 5, ..., чтобы a или b делились на 5.*

Решение:

A: натуральное число a делится на 5 или натуральное число b делится на 5.
B: ab *делится на 5.*

Построим импликации:
$A \Rightarrow B \equiv 1$ — *условие A является достаточным для B.*
$B \Rightarrow A \equiv 1$ — *условие A является необходимым для B.*
Нужно вставить: необходимо и достаточно.

Определение 1.20. *Необходимое и достаточное условие называют критерием. Достаточное условие — признаком. Необходимое условие — свойством.*

В математических текстах вместо слова «достаточно» употребляют слово «тогда», а вместо «необходимо» — слово «только тогда», поэтому вместо выражения «необходимо и достаточно» употребляют «тогда и только тогда».

По-другому говоря, когда условие A достаточно для B, читают «B тогда, когда A». А если A необходимо для B, то читают «B только тогда, когда A».

Пример 1.10. *В следующем предложении вместо многоточия вставить слова «только тогда», «тогда» так, чтобы получилось правильное высказывание.*

1) $\angle\alpha = \angle\beta$, *…, когда* $\sin\alpha = \sin\beta$.

Решение:

A: $\sin\alpha = \sin\beta$.
B: $\angle\alpha = \angle\beta$.

Построим импликации:
$A \Rightarrow B \equiv 0$ — *условие* A *не является достаточным для* B.
$B \Rightarrow A \equiv 1$ — *условие* A *является необходимым для* B.
Нужно вставить: только тогда.

Во многих случаях при определении математических понятий используется слово «если» в смысле «тогда и только тогда».

Пример 1.11. *«Треугольник называется равнобедренным, если у него две стороны равны». Хотя равенство двух сторон треугольника — необходимое и достаточное условие для того, чтобы его назвали равнобедренным.*

Если рассмотреть взаимно обратные теоремы $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то их вместе можно записать, как $B \Leftrightarrow A$ и тогда читают «B тогда и только тогда, когда A», или «A необходимо и достаточно для B».

Доказательство теоремы $B \Leftrightarrow A$ состоит из 2-х частей:

1. Доказательство теоремы $B \Rightarrow A$ (необходимость A для B).
2. Доказательство теоремы $A \Rightarrow B$ (достаточность A для B).

В математике встречается доказательство от противного. Смысл этого метода заключается в следующем. Надо доказать теорему $A \Rightarrow B$. Сначала делают допущение, что при условии A (истинном) имеет место $\overline{B}$. Затем путём рассуждений доказывают, что $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ или $\overline{B} \Rightarrow \overline{C}$ (где C — аксиома или доказанная раньше теорема).

Так как при $\overline{B} \equiv 1$, $\overline{B} \Rightarrow \overline{A} \equiv 1$, $\overline{B} \Rightarrow \overline{C} \equiv 1$, то $\overline{A} \equiv 1$, $\overline{C} \equiv 1$, и в обоих случаях это противоречит истинности как условия A, так аксиомы C. Поэтому допущение сделано не верно, значит, $A \Rightarrow B \equiv 1$.

РАЗДЕЛ 2
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

2.1 Множества

2.1.1 Понятие множества

Понятие множества — исходное, первоначальное, а потому и неопределённое понятие в современной математике (введено немецким математиком Георгом Кантором (1845–1918)).

Интуитивно, <u>множество</u> — совокупность объектов, рассматриваемых как одно целое. При этом будем считать, что множество состоит из разных объектов: например, множество студентов математического факультета, множество городов Брестского района, множество натуральных чисел.

Множества будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C, ... или прописными буквами с индексами A_1, A_2, ...

Определение 2.1. *Отдельные объекты, из которых состоят множества, будем называть <u>элементами множеств</u> и обозначать маленькими латинскими буквами* a, b, c ... *или* a_1, a_2, ...

Если a является элементом множества A, то это записывают так $a \in A$ (читается «a принадлежит A»).

Определение 2.2. *Множество, которое не имеет ни одного элемента, называют* *пустым* *и обозначают* $\emptyset$.

Определение 2.3. *Множества подразделяются на* *конечные* *и* *бесконечные* *(конечные имеют конечное количество элементов, бесконечные – те, которые не являются конечными).*

Способы задания множеств

1) Перечисление (для конечных множеств с небольшим количеством элементов).

Пример 2.1. $A = \{1,\ 2,\ 5,\ 8,\ 10\}$.

2) Описание множества при помощи характеристического свойства (универсальный способ).

Так, запись $A = \{x\,|P\,(x)\,\}$ – будет означать, что A – это множество всех x, которые обладают свойством $P(x)$.

Пример 2.2.
1) $M = \left\{x \in R \middle| x^2 < 4\right\} = \{x \in R\,||x| < 2\} = (-2, 2)$ *– бесконечное множество действительных чисел, квадрат которых меньше 4.*
2) $A = \left\{x \middle| x^2 - 3x + 2 = 0\right\} = \{1, 2\}$ *– конечное множество корней уравнения* $x^2 - 3x + 2 = 0$.
3) $Q = \left\{\frac{m}{n}\,|m \in Z,\ n \in N\right\}$ *– бесконечное множество рациональных чисел.*

Определение 2.4. *Два множества A и B называются равными ($A=B$), когда они состоят из одних и тех же элементов (каждый элемент A является элементом B и наоборот).*

2.1.2 Подмножества. Диаграммы Эйлера–Венна

Определение 2.5. *Множество A называется подмножеством множества B, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B.*

Обозначают $A \subset B$ (читают «A включается в B»).
Очевидно, что каждое множество является своим подмножеством.

Теорема 2.1. *Пустое множество $\emptyset$ является подмножеством любого множества.*

Доказательство.

Его проведём методом от противного. Пусть A – произвольное множество, нужно доказать, что $\emptyset \subset A$.

Пусть $\emptyset$ не является подмножеством A, тогда $\emptyset$ содержит хотя бы один элемент, который не принадлежит A. Но $\emptyset$ не содержит ни одного элемента. Значит, предположение (допущение) не верно.

Теорема 2.1 доказана.

Отношения между множествами удобно показывать с помощью специальных диаграмм, на которых множества представляются как множества пунктов плоскости, ограниченные простыми замкнутыми кривыми (диаграммы Эйлера–Венна).

Включение $A \subset B$ можно показать так (рисунок 2.1):

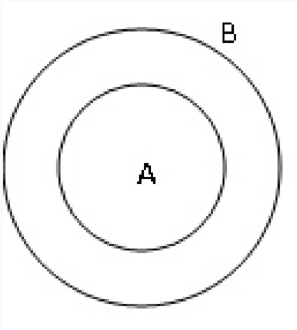

Рис. 2.1:

Теорема 2.2. ***(критерий равенства множеств).***

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \ \wedge \ B \subset A.$$

(Множества A и B равны тогда и только тогда, когда A есть подмножество B, и B – есть подмножество A).

Доказательство.

Необходимость: $A = B \Rightarrow A \subset B \;\wedge\; B \subset A$. Поскольку $A = B$, тогда по определению 2.4 множества состоят из одних и тех же элементов, следовательно $A \subset B \;\wedge\; B \subset A$.

Достаточность: аналогично.

Теорема 2.2 доказана.

2.1.3 Действия над множествами и их основные свойства

Определение 2.6. *Объединением множеств A и B называется множество, которое состоит из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.*

Пишут $A \cup B$, читают: «объединение A и B». Таким образом, $A \cup B = \{x \,|x \in A \vee x \in B\}$.

На диаграммах Эйлера—Венна объединение множеств выглядит так (рисунок 2.2):

Определение 2.7. *Пересечением множеств A и B называется множество, которое состоит из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат A и B одновременно.*

Пишут $A \cap B$, читают: «пересечение A и B». Таким образом, $A \cap B = \{x \,|x \in A \;\wedge\; x \in B\}$.

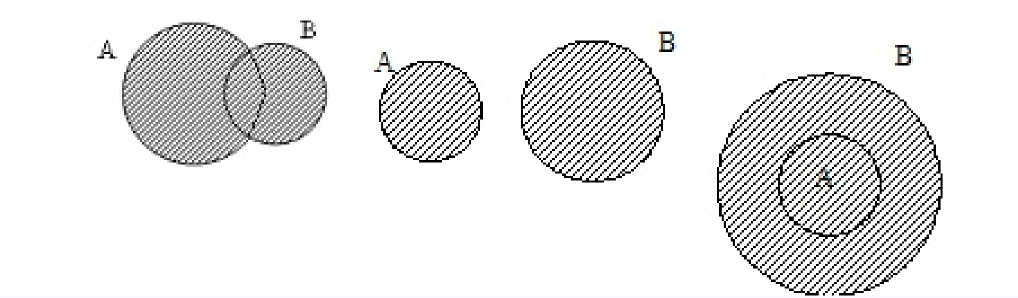

Рис. 2.2:

На диаграммах Эйлера–Венна пересечение множеств выглядит так (рисунок 2.3):

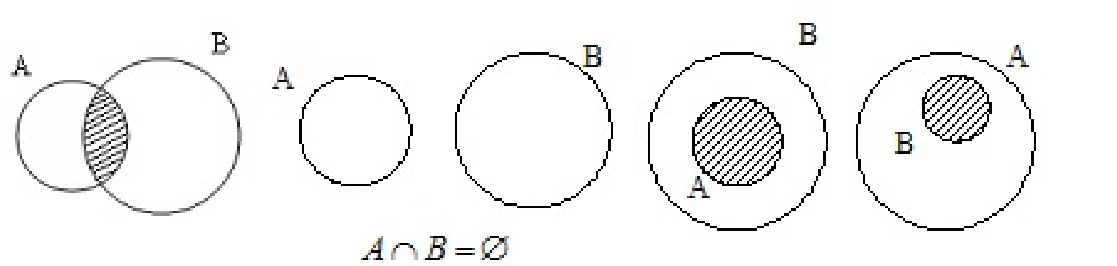

Рис. 2.3:

Понятия пересечения и объединения легко распространяются на случай любой совокупности множеств.

Определение 2.8. *<u>Разностью</u> множеств A и B называется множество, которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат A и не принадлежат B.*

Обозначают $A \backslash B$. Таким образом, $A \backslash B = \{x \,|\, x \in A \;\wedge\; x \notin B\}$.

На диаграммах Эйлера—Венна разность множеств выглядит так (рисунок 2.4):

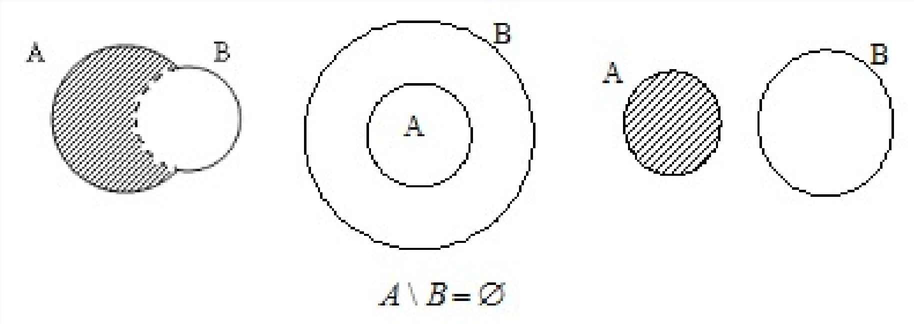

Рис. 2.4:

Определение 2.9. *Если $A \subset B$, то множество $B \backslash A$ называется <u>дополнением</u> A до B.*

На диаграмме Эйлера–Венна дополнение множества выглядит так (рисунок 2.5):

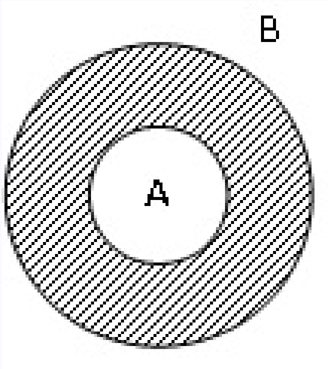

Рис. 2.5:

Определение 2.10. *Часто множества A, B, C, … являются подмножествами некоторого множества U, которое принимается за универсальное (основное).*

Под $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, … будем понимать дополнения множеств A, B, C до универсального U. Так, к примеру (рисунок 2.6):

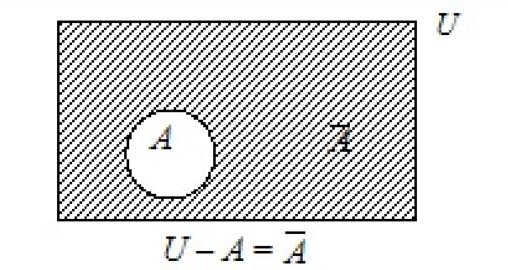

Рис. 2.6:

Основные свойства действий над множествами

1. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения);
1′. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность объединения);
2′. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность пересечения);
3. $A \cup A = A$;
3′. $A \cap A = A$;
4. $A \cup \emptyset = A$;
4′. $A \cap \emptyset = \emptyset$;
5. $A \cup U = U$;
5′. $A \cap U = A$;
6. $A \cup \overline{A} = U$ (здесь $\overline{A}$ – дополнение A);

$6'$. $A \cap \overline{A} = \emptyset$ (здесь $\overline{A}$ – дополнение A);
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения);
$7'$. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения);
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (здесь $\overline{A \cup B}$ – дополнение $A \cup B$).
$8'$. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (здесь $\overline{A \cap B}$ – дополнение $A \cap B$).

Докажем свойство 7:

$$\overset{M_1}{A \cup (B \cap C)} = \overset{M_2}{(A \cup B) \cap (B \cup C)}\,.$$

Используем критерий равенства множеств:

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2 \ \wedge \ M_2 \subset M_1.$$

$$\forall x \in M_1 \Rightarrow (x \in A \vee x \in (B \cap C)) \Rightarrow (x \in A \vee (x \in B \ \wedge \ x \in C)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((x \in A \vee x \in B) \ \wedge \ (x \in A \vee x \in C)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ (x \in (A \cup B) \ \wedge \ x \in (A \cup C)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)) \Rightarrow x \in M_2 \overset{df}{\Rightarrow} M_1 \subset M_2.$$

Можно провести доказательство в обратном направлении, тогда стрелки будут $\Leftrightarrow$ и результат будет: $M_1 \subset M_2 \ \wedge \ M_2 \subset M_1$. Тогда по критерию равенства множеств: $M_1 = M_2$.

Пример 2.3.
1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 7\}$, $C = \{1, 2, 4\}$.
Тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 7\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \cap C = \{1, 2\}$,

$$A \cup B \cup C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7\}\,,\ A \cap B \cap C = \emptyset,\ A \backslash B = \{1, 2\}\,.$$

2) $A = [-5, 6)$, $B = (2,\ 8]$.
Тогда (смотри рисунок 2.7)
$A \cap B = (2, 6)$, $A \cup B = [-5, 8]$, $A \backslash B = [-5, 2]$, $B \backslash A = [6, 8]$.

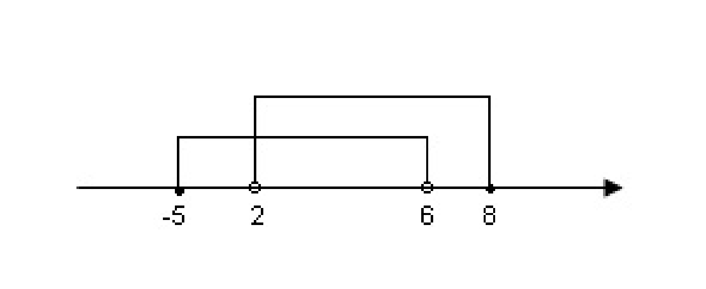

Рис. 2.7:

Пример 2.4. *Всего на потоке колледжа учится 100 слушателей. Среди них английский язык изучают 28 человек, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский –*

10, немецкий и французский — 5, немецкий, французский и английский — 3. Сколько слушателей изучают только английский язык? Сколько слушателей ничего не изучают?

Решение:

$A : 28, \;\; H : 30, \;\; \Phi : 42,$

$$A \cap H : 8, \;\; A \cap \Phi \; : 10, \;\; H \cap \Phi \; : 5, \;\; A \cap \Phi \; \cap H : 3.$$

Из рисунка 2.8 получим, что

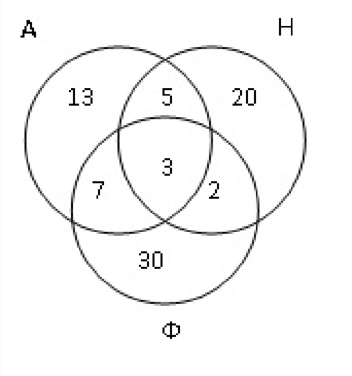

Рис. 2.8:

1) 13 (слушателей) – изучают только английский язык;
2) $100 - (13 + 20 + 30 + 3 + 7 + 5 + 2) = 100 - 80 = 20$ – не изучают ни один из языков.

Пример 2.5. *Доказать:* $(A \subset B) \Rightarrow (A \backslash C \subset B \backslash C)$.

Доказательство.

Докажем, что $A \backslash C \subset B \backslash C$, т.е. по df $\forall x \in A \backslash C$, $x \in B \backslash C$.

$$(\forall x \in A \backslash C \wedge A \subset B) \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge A \subset B \stackrel{\text{асс., комм. закон}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow x \in B \wedge x \notin C \Rightarrow x \in B \backslash C.$$

Пример 2.6. *Доказать, что* $A \backslash B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Доказательство.

Необходимость: $A \backslash B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$. Докажем методом от противного. Пусть $A \cap B \neq \emptyset$, тогда $\exists\, x \in A \wedge x \in B$, поэтому $x \notin A \backslash B$ (т. е. $A \backslash B = \overline{A}$ – не выполняется).

Достаточность: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \backslash B = A$.

а) Дано:

$A \cap B = \emptyset \;\wedge\; x \in A \backslash B$, доказать $x \in A$.

Пусть

$$\forall x \in A \backslash B \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x \in A \wedge x \notin B \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow x \in A \Rightarrow A \backslash B \subset A.$$

б) Дано:
$A \cap B = \emptyset\ \wedge\ y \in A$, доказать $y \in A \backslash B$.
Возьмем

$$\forall y \in A \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow\ y \in A \wedge y \notin B \Rightarrow y \in A \backslash B \Rightarrow A \subset A \backslash B.$$

2.2 Бинарные ($n-$арные) отношения

2.2.1 Прямое (декартовое) произведение множеств

Определение 2.11. *Под* *упорядоченной парой* *будем понимать совокупность двух элементов, расположенных в определённом порядке.*

Обозначают $(a,\ b)$, где a – первый элемент, b – второй элемент пары $(a,\ b)$. Справедливо записать: $(a,\ b) = (c,\ d) \overset{df}{\Leftrightarrow} (a = c) \wedge (b = d)$.

Определение 2.12. *Прямым (декартовым) произведением множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар, где первый элемент принадлежит A, а второй – B.*

Обозначают $A \times B$. Таким образом, $A \times B = \{(a,b)\,|a \in A\ \wedge\ b \in B\}$. (Рене Декарт – французский учёный (1596–1650)).

Пример 2.7. $A = \{a,\ b,\ c\},\ B = \{e\}$.
Тогда $A \times B = \{(a,\ e)\,,\ (b,\ e)\,,\ (c,\ e)\}$, $B \times A = \{(e,\ a)\,,\ (e,\ b)\,,\ (e,\ c)\}$. *Отсюда очевидно, что* $A \times B \neq B \times A$ *(некоммутативность прямого произведения).*

Определение 2.13. *Обобщением понятия упорядоченной пары является понятие* *кортежа (упорядоченного набора)* *$n-$элементов (говорят ещё «упорядоченная $n-$ка элементов», «$n-$мерный вектор»).*

Обозначают $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$. Справедливо записать:

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i \quad \left(i = \overline{1,n}\right).$$

Определённое до этого прямое произведение двух множеств распространяется и на большее количество множеств:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots . \times A_n = \left\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \left| a_i \in A_i, i = \overline{1,n}\right.\right\}.$$

Определение 2.14. *Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то $A \times A \times \ldots \times A$ называют <u>прямым произведением $n-$й степени</u> множества A.*

Обозначают A^n. Будем считать $A^1 = A$, $A^0 = \emptyset$.

Пример 2.8. *Доказать:* $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$

<u>Доказательство.</u>

Обозначим $\underbrace{(X \cup Y) \ \times Z}_{M_1} = \underbrace{(X \times Z) \cup (Y \times Z)}_{M_2}$.

По критерию равенства двух множеств $I_1 = I_2 \Leftrightarrow I_1 \subset I_2 \ \wedge \ I_2 \subset I_1$.

Докажем, что $I_1 \subset I_2$.

По df :

$$\forall (a,b) \in M_1 \Rightarrow ((a \in X) \vee (a \in Y)) \wedge b \in Z \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((a \in X) \wedge (b \in Z)) \vee ((a \in Y) \wedge (b \in Z)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a,b) \in (X \times Z) \vee (a,b) \in (Y \times Z) \Rightarrow (a,b) \in (X \times Z) \cup (Y \times Z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M_1 \subset M_2,\ \textit{аналогично можно получить, что}\quad M_2 \subset M_1.$$

Тогда по критерию $M_1 = M_2$.

2.2.2 Бинарные (n-арные) отношения

Определение 2.15. *Любое подмножество прямого произведения двух разных множеств A и B называется бинарным отношением между элементами A и B. А подмножество прямого квадрата множества A – бинарным отношением между элементами множества A (бинарным отношением на множестве A) (от лат. bini – два).*

Обозначают ρ (ро). Если $(a,b) \in \rho$, то говорят, что a и b связаны отношением ρ или a находится в отношении ρ с b.

Вместо записи $(a,b) \in \rho$ пишут $a\ \rho\ b$.

Итак, $\rho \subset A \times B$ – бинарное отношение между A и B,
а $\rho \subset A^2$ –бинарное отношение на A.

Определение 2.16. *Множество всех первых элементов пар бинарного отношения называется областью определения ρ и обозначается $D(\rho)$.*

Определение 2.17. *Множество всех вторых элементов пар бинарного отношения называется областью значений ρ и обозначается $E(\rho)$.*

Если $\rho \subset A \times B$, то $D(\rho) = \{a \,|(a,b) \in \rho\} \subset A$, $E(\rho) = \{b \,|(a,b) \in \rho\} \subset B$.

Если же $\rho \subset A^2$, то $D(\rho) \subset A$, $E(\rho) \subset A$.

Определение 2.18. *Если ρ – бинарное отношение между элементами двух числовых множеств или на числовом множестве, то её пары показывают некоторые точки координатной плоскости, которые называются графиком бинарного отношения ρ.*

Обобщением понятия бинарного отношения является понятие n-арного (n-местного) отношения.

Определение 2.19. *Любое подмножество прямого произведения n-множеств называется n-арным (n-местным) отношением между элементами этих множеств. А любое подмножество прямого произведения n-й степени множества называется n-арным (n-местным) отношением на этом множестве.*

Пример 2.9.

1) $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{4, 5\}$,

$A \times B = \{(1,\ 4)\,,\ (1,\ 5)\,,\ (2,\ 4)\,,\ (2,\ 5)\,,\ (3,\ 4)\,,\ (3,\ 5)\}$.

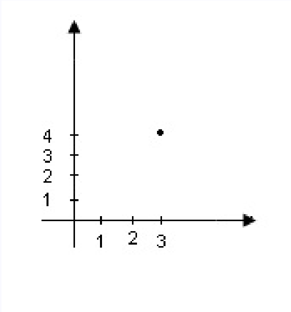

Рис. 2.9:

Пусть $a\ \rho_1\ b \Leftrightarrow b - a = 1$, *тогда* $\rho_1 = \{(3,4)\}$, $D(\rho_1) = \{3\}$, $E(\rho_1) = \{4\}$, *а график* ρ_1 *(смотри рисунок 2.9)*

Если же $a\ \rho_2\, b \Leftrightarrow b - a \geq 1 \ \wedge \ b < 5$, *то* $\rho_2 = \{(1,4), \ (2,4), \ (3,4)\}$, $D(\rho_2) = \{1, \ 2, \ 3\}$, $E(\rho_2) = \{4\}$, *а график* ρ_2 *(смотри рисунок 2.10)*

2) Пусть $A = \{3, \ 5\}$, $A^2 = \{(3,3), (3,5), (5,3), (5,5)\}$, $a\ \rho_3\ b \Leftrightarrow b = a$, *тогда* $\rho_3 = \{(3,3), (5,5)\} \subset A^2$ *– бинарное отношение на множестве* A, *и* $D(\rho_3) = \{3,5\} =$, $E(\rho_3) = \{3,5\} = A$.

3) Пусть A *– множество всех прямых плоскости, тогда* $\rho_4 = \{(a,b)\,|a,b \in A, \ a||b\} \subset A^2$ *– бинарное отношение параллельности на* A.

4) Пусть $\rho_5 = \left\{(x,y) \in N^2\,|x - y = 3\right\}$. *Тогда* $D(\rho_5) = \{4, \ 5, \ 6, \ ...\} \subset N$, $E(\rho_5) = N$,

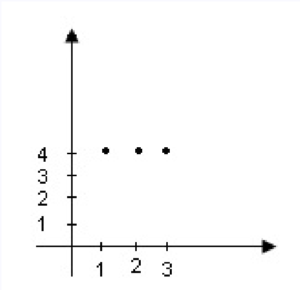

Рис. 2.10:

а график ρ_5 *(смотри рисунок 2.11)*

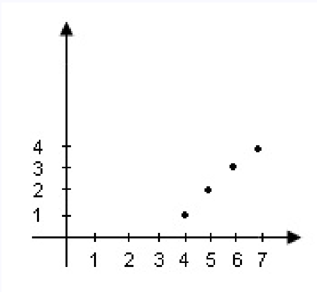

Рис. 2.11:

2.2.3 Некоторые виды бинарных отношений. Граф

Определение 2.20. *Бинарное отношение ρ на множестве A называется* *рефлексивным*, *если* $(\forall a \in A) \quad a\rho a$ *(a находится в отношении ρ с самим собой). Можно и так записать:* $(\forall a \in A) \quad (a, a) \in \rho$.

Пример 2.10. *Отношение параллельности по Колмогорову на множестве прямых плоскости, отношение делимости на множестве натуральных чисел; отношение равенства, «не больше», «не меньше» на числовых множествах являются рефлексивными.*

Определение 2.21. *Бинарное отношение ρ на множестве A называется* *антирефлексивным*, *если* $(\forall a \in A)$ $\overline{a\rho a}$. *Это означает, что* $(\forall a \in A) \quad (a, a) \notin \rho$.

Пример 2.11. *Отношение перпендикулярности на множестве прямых плоскости; отношения «больше» и «меньше» на числовых множествах являются антитрефлексивными.*

Определение 2.22. *Бинарное отношение ρ на множестве A называется* *симметричным*, *если* $(\forall a, b \in A) \quad a\rho b \Rightarrow b\rho a$. *Таким образом,* $(\forall a, b \in A)$, *если* $(a, b) \in \rho$, *то* $(b, a) \in \rho$.

Пример 2.12. *Отношения параллельности и перпендикулярности на множестве прямых плоскости, отношение равенства на числовых множествах являются симметричными.*

Определение 2.23. *Бинарное отношение ρ на множестве A называется* <u>*антисимметричным*</u>*, если* $(\forall a, b \in A) \quad a\rho b \ \wedge \ b\rho a \Rightarrow a = b$.

Пример 2.13. *Отношения «меньше», «больше», «не меньше», «не больше» являются антисимметричными.*

Определение 2.24. *Бинарное отношение ρ на множестве A называется* <u>*транзитивным*</u>*, если* $(\forall a, b, c \in A) \quad a\rho b \ \wedge \ b\rho c \Rightarrow a\rho c$.

Пример 2.14. *Отношение делимости на множестве Z, отношение «больше» на R являются транзитивными.*

Определение 2.25. *Бинарное отношение ρ на множестве A называется* <u>*связным*</u>*, если* $(\forall a, b \in A) \quad a \neq b \ \Rightarrow \ a\rho b \vee b\rho a$.

Пример 2.15. *Отношение «меньше» на R является связным.*

Пример 2.16. *Доказать, что отношение перпендикулярности прямых на множестве A (множество всех прямых на плоскости) симметрично.*

<u>*Доказательство.*</u>

$\rho = \left\{(a, b) \in A^2 \,|a \bot b\right\}$, *по условию* $a\rho b \Leftrightarrow a \bot b$.
Очевидно, что $((\forall a, b \in A) \ a \bot b \ \Rightarrow \ b \bot a) \equiv 1 (*)$.
Действительно, $\forall a, b \in A$ *возможны случаи:*
а) если $a \bot b \equiv 1$, *то* $b \bot a \equiv 1$, *значит, импликация* $(*)$ *истинна;*

б) если же $a \perp b \equiv 0$, то условие в (*) ложное, следовательно, импликация (*) истинна.

Пример 2.17. *Проверить, какими видами обладает отношение:*

$$\rho = \left\{(x, y) \in R^2 \,||x| = |y|\right\}\ .$$

<u>*Решение:*</u>

В нашем случае $x\rho y \Leftrightarrow |x| = |y|$. Тогда

а) $((\forall x \in R) \quad |x| = |x|) \equiv 1, \ \Rightarrow \rho$ *– рефлексивно.*

б) $((\forall x \in R) \quad |x| \neq |x|) \equiv 0, \ \Rightarrow \rho$ *– не антирефлексивно.*

Контрпример: $\left(\left(\underset{x=1}{\exists\, x} \in R\right) \quad |x| = |x|\right) \equiv 1.$

в)$((\forall x, y \in R) \quad |x| = |y| \Rightarrow |y| = |x|) \equiv 1, \ \Rightarrow \rho$ – симметрично.

г) $((\forall x, y \in R) \quad |x| = |y| \wedge |y| = |x| \Rightarrow x = y) \equiv 0, \Rightarrow \rho$ – не антисимметрично.

Контрпример: $\left(\left(\underset{x=1, y=-1}{\exists\, x, y} \in R\right) \quad |x| = |y| \wedge |y| = |x| \wedge x \neq y\right) \equiv 1.$

д) $((\forall x, y, z \in R) \quad |x| = |y| \wedge |y| = |z| \Rightarrow |x| = |z|) \equiv 1, \ \Rightarrow \rho$ – транзитивно.

е) $((\forall x, y \in R) \quad x \neq y \Rightarrow |x| = |y| \vee |y| = |x|) \equiv 0, \Rightarrow \rho$ – не связно.

Контрпример: $\left(\left(\underset{x=10, y=8}{\exists\, x, y} \in R\right) \quad x \neq y \wedge |x| \neq |y| \wedge |y| \neq |x|\right) \equiv 1.$

Поэтому, ρ – рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Граф

Определение 2.26. *Графом называется множество точек плоскости (вершины графа), соединенных ребрами, которые могут быть ориентированными и не ориентированными, в вершинах графа могут быть петли (смотри рисунок 2.12).*

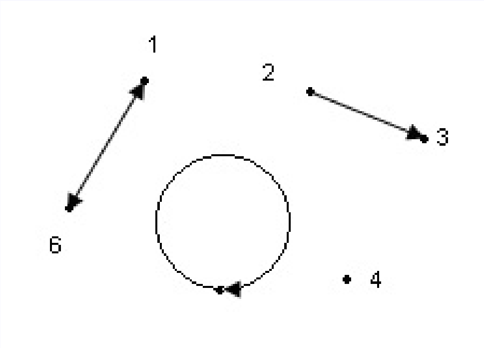

Рис. 2.12:

Если бинарное отношение задано на конечном множестве, то с помощью графа легко определяются свойства изучаемого бинарного отношения:

1. *рефлексивность*: в каждой точке графа есть петля;

2. *антирефлексивность*: ни в одной точке графа нет петли;

3. *симметричность*: если на графе есть ребра, то они не ориентированы;

4. *антисимметричность*: если на графе есть ребра, то они ориентированы;

5. *транзитивность*:

   (a) если на графе есть ориентированные ребра;

   (b) если на графе ребра не ориентированные, то на их концах есть петли;

   (c) если ребра выходят из одной вершины, то они должны образовывать правило треугольника сложения векторов;

6. *связность*: все вершины графа связаны ребрами.

Пример 2.18. *На множестве* $X = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 10\}$ *бинарное отношение задано следующим образом:* $a\rho b \Leftrightarrow a - b = 8$. *Определить свойства данного бинарного отношения.*

Решение:

В нашем случае $\rho = \left\{(a, b) \in X^2 | a - b = 8\right\} = \{(10,\ 2)\,, (9,\ 1)\}$. Значит, имеем $D\,(\rho) = \{9,\ 10\}\,,\ \ E\,(\rho) = \{1,\ 2\}$.

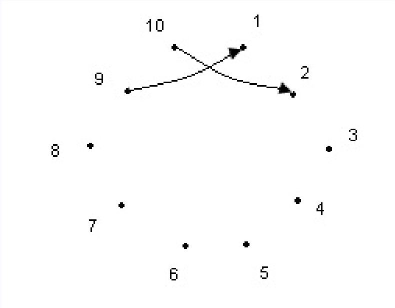

Рис. 2.13:

1 способ: построим граф (смотри рисунок 2.13)

1) ρ—не является рефлексивным, так как не в каждой точке графа есть петля;

2) ρ антирефлексивно, так как ни в одной точке графа нет петли;

3) ρ не является симметричным, так как на графе ребра ориентированы;

4) ρ антисимметрично, так как на графе ребра ориентированы;

5) ρ транзитивно, так как на графе есть ориентированные ребра;

6) ρ не является связным, так как не все вершины графа связаны ребрами.

2 способ:

1) $((\forall a \in X\ )\ \ a - a = 8) \equiv 0$, следовательно, ρ не является рефлек-

сивным.

Контрпример: $((\exists a = 1 \in X) \quad a - a \neq 8) \equiv 1$.

2) $((\forall a \in X) \quad a - a \neq 8) \equiv 1$, следовательно, ρ антирефлексивно.

3) $((\forall a, b \in X) \quad a - b = 8 \Rightarrow b - a = 8) \equiv 0$, следовательно, ρ не является симметричным.

Контрпример: $\left((\exists\limits_{a=9,\, b=1} a, b \in X) \quad a - b = 8 \wedge b - a \neq 8\right) \equiv 1$.

4) $((\forall a, b \in X) \quad a - b = 8 \wedge b - a = 8 \Rightarrow a = b) \equiv 1$, следовательно, ρ антисимметрично.

5) $((\forall a, b, c \in X) \quad a - b = 8 \wedge b - c = 8 \Rightarrow a - c = 8) \equiv 1$, следовательно, ρ транзитивно.

6) $((\forall a, b \in X) \quad a \neq b \Rightarrow a - b = 8 \vee b - a = 8) \equiv 0$, следовательно, ρ не является связным.

Контрпример: $\left(\left(\exists\limits_{a=6,\, b=2} a, b \in X\right) \quad a \neq b \wedge a - b \neq 8 \wedge b - a \neq 8\right) \equiv 1$.

2.3 Отношение эквивалентности. Фактор–множество. Разбиение множества

Важным видом бинарного отношения является отношение эквивалентности.

Определение 2.27. *Бинарное отношение на множестве A называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обозначают $\sim$ (читают «эквивалентно»).*

Пример 2.19.
1) $\rho = \{(x,y) \in R^2 \,\|x| = |y|\}$ *– отношение эквивалентности на R.*
2) Отношение параллельности (по Колмогорову) на множестве прямых плоскости – отношение эквивалентности.

Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве A, a – любой фиксированный элемент множества A.

Определение 2.28. *Множество всех элементов $x \in A$, эквивалентных a, это значит таких, что $(x,a) \in \rho$, называется классом эквивалентности, порождённым элементом a и обозначается K_a.*

Таким образом, $K_a = \{x \in A \,|\, x\rho a \;\; (x \sim a)\}$.
Заметим, что $K_a \neq \emptyset$. Действительно, по определению рефлексивности ρ $(\forall a \in A)$ $a\,\rho\, a$. Значит, $a \in K_a$.
Поэтому, K_a – непустое подмножество множества A.

Пусть x, y – любые элементы K_a. Тогда $x \sim a$ и $y \sim a$. Учитывая симметричность и транзитивность ρ, получим последовательно: $a \sim y$ и $x \sim y$. Это значит, что любые два элемента из K_a эквивалентные. Отсюда следует, что каждый элемент из K_a эквивалентен любому другому элементу из K_a, а не только элементу a. Поэтому любой элемент K_a называется представителем этого класса.

Определение 2.29. *Множество всех классов эквивалентности для данного отношения эквивалентности ρ на множестве A называется фактор–множеством множества A по отношению эквивалентности ρ и обозначается $A/_{\rho}$.*

Таким образом, $A/_{\rho} = \{K_a \,|a \in A\}$.

Определение 2.30. *Построение фактор-множества $A/_{\rho}$ называют факторизацией множества A по отношению ρ.*

Пример 2.20. *Рассмотрим отношение эквивалентности $\rho_1 = \left\{(x, y) \in R^2 \,||x| = |y|\right\}$. Пусть a – $\forall$ фиксированное действительное число. $K_a = \{x \in R \,|x \sim \mathrm{a}\}$. По условию, $x \sim a \Leftrightarrow |x| = |a|$, отсюда $x = \pm a$. Значит, $K_a = \{-a, a\}$.*

Например, $K_{\sqrt{2}} = \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$, $K_0 = \{0\}$.

Тогда $R/_{\rho_1} = \{K_a \,|a \in R\} = \{\{-a, a\} \,|a \in R\}$ – фактор-множество множества R по отношению эквивалентности ρ_1.

Определение 2.31. *Совокупность непустых попарно непересекающихся подмножеств множества A, в объединении дающих множество A, называется разбиением множества A. Подмножества множества A, составляющие его разбиение, называются классами разбиения.*

Пример 2.21.
Пусть $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$, *тогда* $S = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ – *разбиение* A, *а* $\{1, 2\}$, $\{3\}$, $\{4, 5\}$ – *классы разбиения. (Доказать самостоятельно). Единственное ли это разбиение?*

Теорема 2.3. *Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве A. Тогда фактор-множество $A/_{\rho}$ является разбиением множества A.*

Доказательство.

Покажем, что классы эквивалентности, из которых состоит фактор–множество $A/_{\rho}$, являются классами разбиения множества A. Действительно,

1) Любой класс эквивалентности K_a – непустое подмножество множества A (доказано раньше).

2) Разные классы эквивалентности K_a и K_b не пересекаются.

Докажем утверждение 2) методом от противного, это значит, допустим, что $K_a \cap K_b \neq \emptyset$. Тогда $(\exists c)$ $c \in K_a \wedge c \in K_b$. Докажем, что

$K_c = K_a$ (1) и $K_c = K_b$ (2) , это значит, класс эквивалентности определяется любым своим представителем.

Пусть x – любой элемент из K_c, тогда $x \sim c$ (3) . Так как $c \in K_a$, то $c \sim a$ (4) . Из (3) и (4) по транзитивности ρ следует, что $x \sim a$, а значит, $x \in K_a$. Таким образом, доказано, что $K_c \subset K_a$ (5) .

Если x – любой элемент из K_a , то $x \sim a$ (6) . Кроме этого, из (4) на основе симметричности ρ имеем $a \sim c$ (7) . Тогда из (6) и (7) следует, что $x \sim c$, это значит, $x \in K_c$.Таким образом, доказано, что $K_a \subset K_c$ (8) . Из (5) и (8) следует, что $K_a = K_c$. Равенство (2) доказывается аналогично.

Тогда получим, что $K_a = K_b$ и это противоречит условию. Значит, предположение сделано не верно. Поэтому разные классы эквивалентности не пересекаются.

3) $\cup_{a\in A} K_a = A$ (9), это значит, объединение всех классов эквивалентности, составляющих $A/_\rho$, есть множество A.

Действительно, так как $K_a \subset A$, то и $\cup_{a\in A} K_a \subset A$.

С другой стороны, любой элемент $a \in A$ принадлежит классу K_a . Поэтому $a \in \cup_{a\in A} K_a$, а значит, $A \in \cup_{a\in A} K_a$. Отсюда равенство (9) доказано. Таким образом, по определению разбиения непустого множества, фактор–множество $A/_\rho$ является разбиением множества A.

Теорема 2.3 доказана.

Из теоремы 2.3 следует, что любое отношение эквивалентности на множестве A определяет разбиение множества A, классами которого являются классы эквивалентности.

Теорема 2.4. *Пусть S – разбиение непустого множества A, $\rho_S = \{(x,y)\ ,\ x,y \in A |\ x,y$ принадлежат одному и тому же классу разбиения$\}$ – бинарное отношение принадлежности одному и тому же классу разбиения на множестве A. Тогда отношение ρ_S является отношением эквивалентности на A, причём фактор–множество $A/_{\rho_S}$ совпадает с разбиением S.*

<u>Доказательство.</u>

1) Имеем $\rho_S = \{(x,y)\,, x, y \in A, x$ и y в одном классе разбиения$\}$. Докажем, что ρ_S – отношение эквивалентности.

а) $(\forall x \in A)$ $[x$ и x в одном классе$]$, поэтому $x\rho_S x$, следовательно, ρ_S – рефлексивно;

б) $(\forall x, y \in A)$ $[x$ и y в одном классе, следовательно, и y, x в одном классе$]$, поэтому $x\rho_S y \Rightarrow y\rho_S x$, следовательно, ρ_S – симметрично;

в) $(\forall x, y, z \in A)$ $[$если x и y в одном классе и y, z в одном классе, то и x, z в одном классе$]$, поэтому $x\,\rho_S\,y\ \wedge\ y\,\rho_S z \Rightarrow x\,\rho_S z$, следовательно ρ_S – транзитивно.

Таким образом, ρ_S – отношение эквивалентности.

2) Тогда из теоремы 2.3 следует, что $A/_{\rho_S} = S$.

Теорема 2.4 доказана.

Из теоремы 2.4 следует, что любое разбиение непустого множества задаёт на этом множестве отношение эквивалентности, для которого классы разбиения служат классами эквивалентности.

Пример 2.22. *Пусть* $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $S = \{\{1,\ 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ *— разбиение множества* A,
$\rho_S = \{(1,\ 1), (1,\ 2), (2,\ 1), (2,\ 2), (3,\ 3), (4,\ 4), (5,\ 5)\}$ *— отношение принадлежности одному и тому же классу разбиения. Тогда по теореме 2.4* ρ_S *— отношение эквивалентности на множестве* A, *причём* $A/_{\rho_S} = S$.

Пример 2.23. *Пусть* $I = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$,
$\rho_2 = \{(1,\ 1), (1,\ 2), (2,\ 1), (2,\ 2), (3,\ 3), (3,\ 4), (4,3), (4,4), (5,5))\}$.
Если ρ_2 *—отношение эквивалентности, то построить фактор—множество* $M/_{\rho_2}$ *и восстановить само разбиение* S.

Решение:

На основании данного бинарного отношения на множестве $I = \{1, 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ построим граф (смотри рисунок 2.14):

Из графа видно, что данное ρ_2 — отношение эквивалентности. Поэтому мы для данного бинарного отношения можем построить классы эквивалентности. $K_1 = \{x \in M \mid x\,\rho_2 1\ (x \sim 1)\} = \{1,\ 2\}$, а поскольку $2 \in K_1$, то $K_2 = K_1$. Аналогично, $K_3 = \{x \in M \mid x \sim 3\} = \{3,\ 4\}$, а поскольку $4 \in K_3$, то $K_4 = K_3$. Тогда $K_5 = \{x \in M \mid x \sim 5\} = \{5\}$.

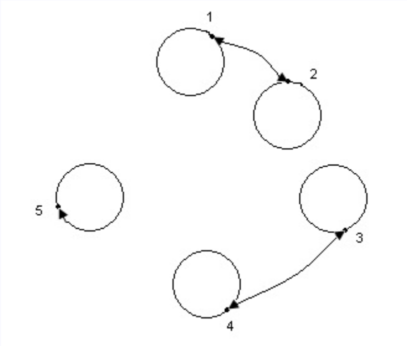

Рис. 2.14:

Построим теперь фактор-множество $M/_{\rho_2}$.

Это можно сделать по-разному, так как некоторые классы эквивалентности совпадают. К примеру, получим $M/_{\rho_2} = \{K_1, K_3, K_5\}$ (очевидно, что $K_1 \cup K_3 \cup K_5 = M$).

А поскольку по теореме 2.4 $M/_{\rho_2} = S$, то в нашем случае получим: $S = \{\{1,\ 2\}, \{3,\ 4\}, \{5\}\}$.

Кафедра АиГ

Начало

Содержание

Назад

На весь экран

Закрыть

2.4 Отношение порядка

Определение 2.32. *Бинарное отношение на множестве A называется отношением порядка, если оно транзитивно и антисимметрично.*

Определение 2.33. *Множество, на котором задано отношение порядка, называется упорядоченным.*

Определение 2.34. *Отношение порядка на множестве A называется отношением нестрогого (строгого) порядка, если оно рефлексивно (антирефлексивно). Множество A в этом случае называется нестрого (строго) упорядоченным.*

Определение 2.35. *Отношение порядка на множестве A называется отношением линейного (частичного) порядка, если оно связное (несвязное). И множество A называется линейно (частично) упорядоченным.*

Пример 2.24.

1) отношение «меньше» или «больше» на множестве R — отношение строгого линейного порядка;

2) отношение «не меньше» или «не больше» на R — отношение нестрогого линейного порядка;

3) отношение делимости на множестве N — отношение нестрогого частичного порядка.

4) бинарное отношение из примера 2.18 — отношение строгого частичного порядка.

Замечание 2.1. *Упорядоченность не является свойством самого множества, так как одно и то же множество можно упорядочить по-разному с помощью разных отношений порядка. Так R линейно упорядоченное как в смысле строгого порядка, так и в смысле нестрогого порядка.*

2.5 Отображение (функция)

2.5.1 Функциональное отношение, отображение (функция), образ, праобраз. Равенство двух отображений

Определение 2.36. *Бинарное отношение ρ между элементами множеств A и B (или на множестве A) называется функциональным отношением, если $\forall a \in D(\rho)\ \exists! b \in E(\rho)$ (это значит, что в ρ нет пар с одинаковыми первыми координатами).*

Пример 2.25.

$\rho = \{(x, y) \in R^2 | y = x^2\} \subset R^2$ — бинарное отношение на R. В данном случае $A = R, B = R, D(\rho) = R, E(\rho) = [0; +\infty) \subset R$, причём $\forall x \in D(\rho) \exists! y = x^2 \in E(\rho)$, значит, ρ — функциональное отношение на R.

Пример 2.26. *Является ли функциональным отношением отношение $\varphi = \{(x, y) \in [-1; 1] \times R | x = \sin y\}$?*

Итак, из определения 2.36, φ — не является функциональным отношением.

Пусть ρ — бинарное отношение между элементами множеств A и B (на множестве A). Обозначим элементы множеств A и B точками на плоскости, а каждую пару $(a, b) \in \rho$ — стрелкой, которая идёт от точки a до точки b. Если ρ — функциональное отношение, то из каждой точки множества A выходит не больше одной стрелки (смотри рисунок 2.15).

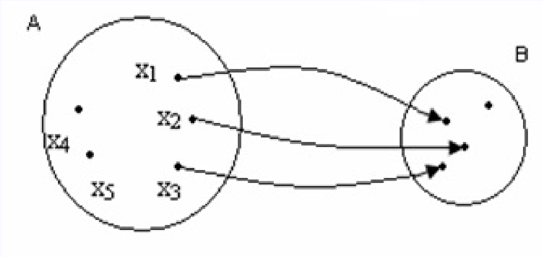

Рис. 2.15:

$$D(\rho) = \{x_1, x_2, x_3\}$$

Определение 2.37. *Функциональное отношение ρ между элементами множеств A и B (на множестве A) называется отображением множества A в B (A в A), если $D(\rho) = A,\ E(\rho) \subset B$ $(D(\rho) = A,$ $E(\rho) \subset A)$.*

Определение 2.38. *Функциональное отношение ρ между элементами множеств A и B (на множестве A) называется отображением множества A на B (A на A), если $D(\rho) = A,\ E(\rho) = B$ $(D(\rho) = A,\ E(\rho) = A)$.*

При отображении множества A в (на) B элементы множества A называются прообразами, а элемент, который принадлежит B и соответствует элементу $a \in A$ при отображении A в (на) B , называется образом

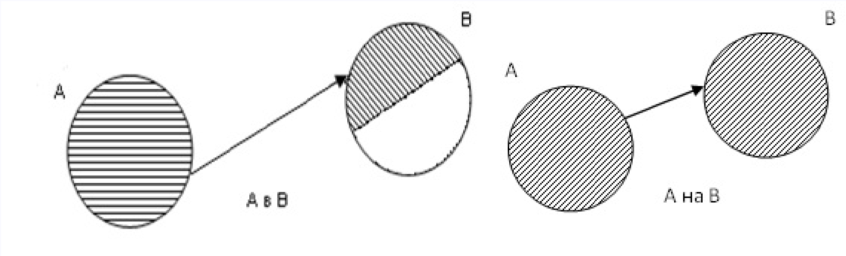

Рис. 2.16:

элемента $a \in A$.

Отображение ρ множества A в (на) B записывают так:
$\rho : A \xrightarrow{\text{в(на)}} B$ или $f : A \xrightarrow{\rho} B$

При стрелочном задании отображения $f : A \to B$ из каждого пункта множества A выходит <u>только одна стрелка</u> (смотри рисунок 2.17).

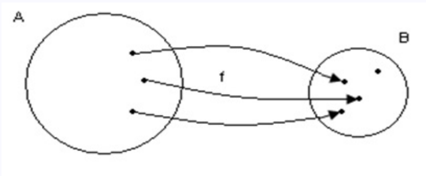

Рис. 2.17:

Определение 2.39. *Отображение $f : A \xrightarrow{\text{в(на)}} B$ называют <u>функцией</u> f с областью определения A и областью значений $E(f) \subset B$ $(E(f) = B)$.*

Пример 2.27.

1) $\rho_1 = \{(x, y) \in R^2 | y = x^2\}$ — функциональное отношение на множестве R, причём $D(\rho_1) = R$, $E(\rho_1) \subset R$. Поэтому, ρ_1 — отображение R в R

2) $\varphi = \{(x, y) \in [0; \infty) \times R | y = x^2\}$ — бинарное отношение между элементами множеств $[0; \infty)$ и R. Видно, что $\forall x \in [0; \infty) \exists! x^2 \in E(\varphi)$, где $E(\varphi) = [0; \infty) \subset R, D(\varphi) = [0; \infty)$. Значит, φ — отображение $[0; \infty) \xrightarrow{\text{в}} R$;

3) бинарное отношение ρ_2 задано на рисунке 2.18

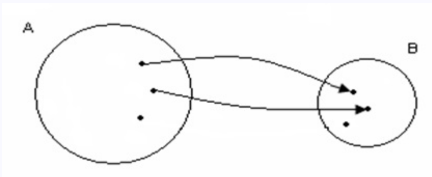

Рис. 2.18:

Отсюда видно, что ρ_2 — функциональное отношение, так как $\forall x \in D(\rho_2)\ \exists! y \in E(\rho_2)$, но ρ_2 — не отображение (так как $D(\rho) \neq A$).

Определение 2.40. *Элемент $y \in B$, который соответствует элементу $x \in A$ при отображении $f : A \to B$, называется образом элемента x при отображении f (значением функций f для аргумента x) и обозначается $f(x)$.*

Определение 2.41. *Множество образов всех элементов множества A при отображении $f : A \to B$ (это значит $E(f)$) называется образом множества A при отображении f и обозначается $f(A)$.*

Таким образом, $f(A) = \{f(x)|x \in A\}$, причём $f(A) \subset B \quad (f(A) = B)$

Определение 2.42. *Элемент $x \in A$, образом которого при отображении $f : A \to B$ является элемент $y \in B$ $(f(x) = y)$, называется прообразом элемента $y \in B$ при отображении f.*

Определение 2.43. *Множество всех прообразов элемента $y \in B$ при отображении $f : A \to B$ называется полным прообразом элемента $y \in B$ при отображении f и обозначается $f^{-1}(y)$.*

Таким образом, $f^{-1}(y) = \{x \in A \in |f(x) = y\}$.

Пример 2.28. $\varphi = \{(x, y) \in R \times [0; \infty)|y = x^2\}$ — *отображение* R *на* $[0; \infty)$. *Здесь* $\varphi(-1) = (-1)^2 = 1$ — *образ* -1 *при отображении* φ, $\varphi(R) = [0; \infty)$ — *образ множества* R *при отображении* φ. $-1, 1$ *прообразы* 1 *при отображении* φ, *так как* $\varphi(-1) = \varphi(1) = 1$.
А $\varphi^{-1}(1) = \{ -1; 1\}$ — *полный прообраз* 1 *при отображении* φ.

Замечание 2.2. *Отображение* $\varphi = \{(x, y) \in R \times [0; \infty) | y = x^2$ *можно записать так:* $\varphi : R \xrightarrow{\text{на}} [0; +\infty) \, |\varphi(x) = x^2$.

Так как отображения (функции) являются множествами, то для них можно применить определение равенства множеств:

Определение 2.44. *Два отображения (функции)* f *и* g *называются* *<u>равными</u>, если они состоят из одних и тех же пар (это значит* $D(f) = D(g)$ *и* $(\forall x \in D(f)) f(x) = g(x))$.

Пример 2.29. *Пусть* $f(x) = e^{\ln\ x}$; $g(x) = x$, $x > 0$. *Заметим, что* $D(f) = D(g) = (0; \infty)$ *и* $(\forall x \in D(f))\ f(x) = g(x)$. *Значит,* $f = g$.

2.5.2 Виды отображений (инъекция, сюръекция, биекция). Взаимно обратные отображения

Определение 2.45. *Отображение* $f : A \xrightarrow{\text{в(на)}} B$ *называется* *<u>инъективным (инъекция)</u>, если* $(\forall x_1, x_2 \in A)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \equiv (\forall x_1, x_2 \in A) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, *т.е.* *<u>если каждый образ из B имеет не более одного прообраза в A</u>. Поэтому (смотри рисунок 2.19)*

Пример 2.30. $\varphi : N \to N | \varphi(x) = x^2$ — *инъекция, так как* $((\forall x_1, x_2 \in N)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2) \equiv 1$.

Определение 2.46. *Отображение* $f : A \xrightarrow{\text{на}} B$ *называется* *<u>сюръективным (сюръекция)</u>.*

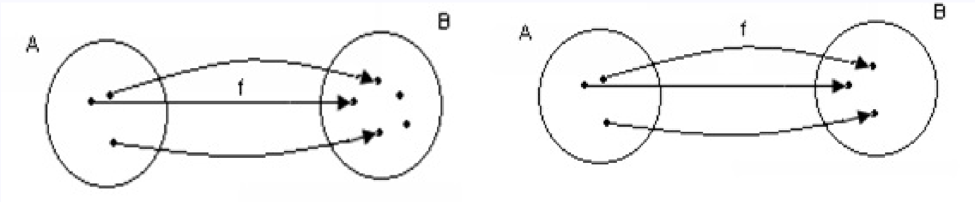

Рис. 2.19:

Таким образом, отображение $f : A \to B$ — сюръекция, если $f(A) = B$, т. е. если каждый элемент множества B является образом хотя бы одного элемента из A (прообраза). Поэтому (смотри рисунок 2.20)

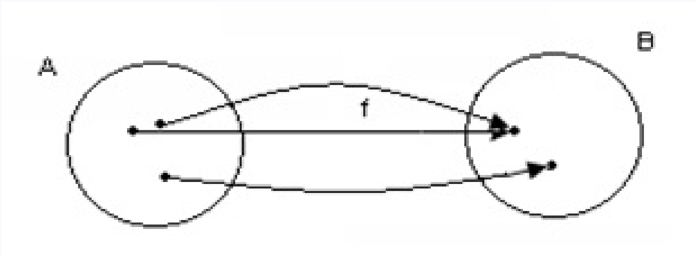

Рис. 2.20:

Пример 2.31.

1) $\varphi : [0;\infty) \to [0;\infty) | \varphi(x) = x^2$ *— сюрьекция, так как* φ *— отображение на* $(\varphi([0;\infty)) = [0;\infty))$, *т.е.* $\forall y \in [0;\infty) \exists \sqrt{y} \in [0;\infty)$.

2) Из рисунка 2.21 видно, что это отображение $f : A \xrightarrow{\text{в}} B$ *(но не*

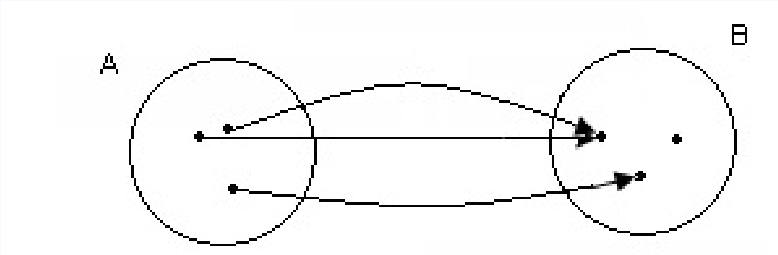

Рис. 2.21:

инъекция и не сюрьекция).

Определение 2.47. *Отображение* $f : A \to B$ *которое одновременно является сюрьекцией и инъекцией, называется биективным (биекцией) или взаимно однозначным отображением* A *на* B.

Другими словами, если $f : A \to B$ — биекция, то каждый элемент множества B (образ) имеет только один прообраз в A.

Пример 2.32. $\varphi : [0;\infty) \to [0;\infty) | \varphi(x) = x^2$ — *биекция, так как* $((\forall x_1, x_2 \in [0;\infty))x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2) \equiv 1$, *а то что* φ — *сюръекция, мы уже показали ранее.*

Пусть f — произвольное биективное отображение множества A на множество B. Тогда для каждого элемента $y \in B\ \exists! x \in A$ — его прообраз из A при отображении f.

Значит, существует отображение B на A, которое любой элемент $y \in B$ переводит в его прообраз при отображении f.

Определение 2.48. *Отображение множества B на A, которое ставит в соответствие каждому элементу $y \in B$ его прообраз $x \in A$ при биективном отображении $f : A \to B$ называется обратным отображением к отображению f и обозначается f^{-1}.*

Таким образом, $f^{-1} : B \to A | f^{-1}(y) = x, f(x) = y$.

Таким образом, если f переводит x в y, то f^{-1} переводит y в x, это значит $f^{-1}(f(x)) = x$. Заметим, что f^{-1} — тоже биекция.

Пример 2.33. *Записать функцию, обратную к функции $y = 3x + 2$.*

Решение:

У нас $D(y) = R, E(y) = R, f : R \to R, f(x) = 3x + 2$. *Причем* f — *инъекция, так как* $((\forall x_1, x_2 \in R)x_1 \neq x_2 \Rightarrow 3x_1 + 2 \neq 3x_2 + 2) \equiv 1$, *и* f — *сюръекция, так как* $(\forall 3x + 2 \in R)(\exists x \in R)$. *Следовательно,*

f — биекция, поэтому построим обратную функцию $f^{-1}: x = \dfrac{y-2}{3}$ и, переобозначив, получим $y = \dfrac{x-2}{3}$.

Определение 2.49. *Отображение, для которого существует обратное отображение, называется обратимым.*

Отображение является обратимым тогда и только тогда, когда оно биективно.

Поэтому, если $f : A \to B$ — биекция, то это записывают: $f : A \leftrightarrow B$ или $A \xleftrightarrow{f} B$, очевидно: $(f^{-1})^{-1} = f$. Поэтому, f и f^{-1} — взаимно обратные отображения.

Пример 2.34. *Пусть $f : [0; \infty) \leftrightarrow [0; \infty) | f(x) = x^2$, тогда получим, что $f^{-1} : [0; \infty) \leftrightarrow [0; \infty) | f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.*

2.5.3 Композиция отображений (функций)

Пусть даны два отображения $f : A \to B$ и $g : B \to C$.

Отображение f переводит $\forall x \in A$ в $y = f(x) \in B$, а отображение g переводит y в $z = g(y) \in C$. В результате $\forall x \in A$ соответствует единственный элемент $z = g(f(x)) \in C$ (смотри рисунок 2.22)

Определение 2.50. *Отображение A в (на) C, которое ставит в соответствие $\forall x \in A$ элемент $g(f(x)) \in C$, называется композицией*

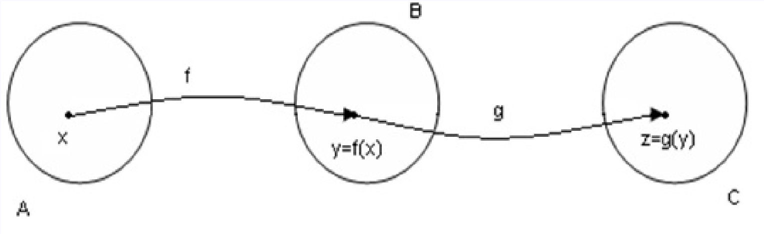

Рис. 2.22:

(произведением, суперпозицией) отображений $f : A \to B$ *и* $g : B \to C$ *и обозначается* $g \circ f$ *или* gf.

Таким образом, композиция отображений $f : A \to B$ и $g : B \to C$ есть отображение $g \circ f$, которое $\forall x \in A$ ставит в соответствие $g(f(x)) \in C$: $g \circ f : A \to C | (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Определение 2.51. *В случае, если* f *и* g *являются функциями, то* $g \circ f$ *называется сложной функцией, составленной из функций* f *и* g.

Определение 2.52. *Операцию нахождения композиции функций (отображений) называют умножением функций (отображений).*

Заметим, что умножение функций (отображений) не коммутативно, так как $(\exists f, g)\ f \circ g \neq g \circ f$.

Пример 2.35. $f(x) = \sin\ x$, $g(x) = x^2$, *тогда получим, что* $g \circ f = g(f(x)) = \sin\ x^2$, $f \circ g = f(g(x)) = \sin(x)^2$. *Очевидно, что* $f \circ g \neq g \circ f$. *Нетрудно доказать, что умножение отображений ассоциативно:* $(\forall f, g, \varphi)\ (f \circ g) \circ \varphi = f \circ (g \circ \varphi)$.

Пример 2.36. $f(x) = 3x$, $\varphi(x) = x^6$, $g(x) = \sin\ x$. *Справедливо записать:* $(\varphi \circ g \circ f)(x) = \varphi(g(f(x))) = \sin^6(3x)$, $(g \circ f \circ \varphi)(x) = g(f(\varphi(x))) = \sin(3(x^6))$, $(g \circ \varphi \circ f)(x) = g(\varphi(f(x))) = \sin(3x)^6$.

2.6 Предикаты. Логические операции над предикатами. Равносильность предикатов на множестве

Рассмотрим высказывательную форму $P(x):\ x$ — простое число. Если в неё вместо x подставить натуральные числа, то получатся истинные или лживые высказывания. Таким образом, для каждого натурального числа однозначно определяется элемент из множества $\{1,0\}$ (истина, ложь). Значит, $P(x)$ задаёт отображение $N \xrightarrow{\text{на}} \{1,0\}$ или функцию, определенную на N, которая принимает значения из множества $\{1,0\}$. Такая функция называется логической функцией одной переменной или одноместным предикатом и обозначается P.

В данном примере предикат P разбивает область определения N на два подмножества, на одном из которых он принимает значение 1 (истина), а на другом — 0 (ложь). На первом подмножестве каждый элемент обладает свойством «быть простым», а на другом — свойством «не быть простым».

Определение 2.53. *Одноместным предикатом P, определенном на множестве A, называется логическая функция с областью определения A, таким образом $P : A \to \{1,0\}$.*

Определение 2.54. *Подмножество области определения одноместного предиката P, на котором он принимает значение 1, называется областью истинности этого предиката и обозначается T_p.*

Всякий одноместный предикат выражает некоторое свойство.

Определение 2.55. *Одноместные предикаты P_1 и P_2 , определенные на множестве A, называют равносильными на этом множестве и пишут $P_1 \equiv P_2$, если $(\forall x \in A)P_1(x) = P_2(x)$, т.е. когда предикаты принимают одинаковые значения истинности.*

Обобщением понятия одноместного предиката является понятие многоместного предиката, с помощью которого выражаются отношения.

Определение 2.56. *n-местным предикатом P, определенным на множестве $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n(A^n)$, называется отображение $P : A_1 \times A_2 \times ... \times A_n(A^n) \to \{1, 0\}$.*

Всякий $n-$местный предикат P разбивает свою область определения на два подмножества, на одном из которых он принимает значение 1, на другом – 0.

Определение 2.57. *Подмножество области определения предиката P, на котором он принимает значение 1, называется областью истинности этого предиката и обозначается T_p.*

Области истинности n-местного предиката, определенного на множестве $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n(A^n)$, являются n-арным отношением между элементами множеств $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, (на множестве A). Таким образом, n-местный предикат определяет n-арное отношение.

Например, высказывательная форма $x < y$, где $x, y \in Z$, задаёт отображение множества Z^2 на $\{1, 0\}$ или логическую функцию с областью определения Z^2 (двухместный предикат). Этот предикат определяет бинарное отношение «меньше» на множестве Z.

Определение 2.58. *n-местные предикаты P_1 и P_2 , определенные на одном и том же множестве $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n(A^n)$, называют <u>равносильными</u> на этом множестве и пишут $P_1 \equiv P_2$, если $\forall (x_1, x_2, .., x_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n(A^n) P_1(x_1, x_2, .., x_n) = P(x_1, x_2, .., x_n)$, т.е. когда предикаты принимают одинаковые значения истинности.*

Иногда говорят «предикат $P(x)$ (или $P(x_1, x_2, .., x_n)$)» в смысле «предикат, определенный высказывательной формой $P(x)$
(или $P(x_1, x_2, .., x_n)$)».

Поскольку предикаты, как и высказывания, принимают значения истинности 1 и 0, то над ними можно выполнять все операции логики высказываний ($-$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$). Кроме этого, для предикатов применима ещё логическая операция навешивания квантора. Используя понятие предиката, можно дать определения таких важных для математики понятий как уравнение и неравенство, система уравнений и система неравенств, совокупность уравнений и совокупность неравенств.

Пример 2.37.

1) Найти область истинности предикатов, определенных на множестве $A = \{1, 2, 3, .., 9\}$.

Решение:

а) $P(x): (x-1)(x-2)=0$, *следовательно,* $T_p=\{1,\ 2\}$.

б) $P(x):\ x/3,$ *следовательно,* $T_p=\{3k\,|k=1,\ 2,\ 3\}$.

в) $P(x): 4(x+1)>20$, *следовательно,* $T_p=\{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.

2) $P(x): |x|\geq 2,\ \ Q(x): |x|<3,\ A=R$. *Найти* $T_{P\vee Q},\ \ T_{P\wedge Q}$.

Решение:

У нас $T_p=(-\infty,-2]\bigcup[2,\infty)$, $T_Q=(-3,3)$. *Поскольку верно записать, что* $T_{P\vee Q}=T_P\bigcup T_Q$, $T_{P\wedge Q}=T_P\bigcap T_Q$, *то*

$$T_{P\vee Q}: \left[\begin{array}{l} |x|\geq 2,\\ |x|<3, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 2,\\ x\leq -2,\\ -3<x<3, \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in R,$$

$$T_{P\wedge Q}: \left\{\begin{array}{l} |x|\geq 2,\\ |x|<3, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3<x\leq -2,\\ 2\leq x<3. \end{array}\right.$$

Следовательно, $T_{P\vee Q}=R,\ \ T_{P\wedge Q}=(-3,-2]\bigcup[2,\ 3)$.

2.7 Булева алгебра

Определение 2.59. *Булевой алгеброй* $B = [A, \wedge, \vee, ', O, I]$ *называется множество* $\vee$, *двумя отмеченными элементами («универсальными границами»)* O, I *и одной унарной операцией* $'$, *причем для любых* $x, y, z \in A$ *выполняется:*

L1. $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x$ (идемпотентность),

L2. $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x$ (коммутативность),

L3. $\left.\begin{array}{l} x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \end{array}\right\}$ (ассоциативность),

L4. $x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x$ (поглощение),

$\left.\begin{array}{ll} \text{L5}a. & x \wedge [y \vee (x \wedge z)] = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ \text{L5}b. & x \vee [y \wedge (x \vee z)] = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{array}\right\}$ (модулярность),

L6. $\left.\begin{array}{l} x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{array}\right\}$ (дистрибутивность),

L7. $\left.\begin{array}{ll} x \wedge O = O, & x \vee O = x \\ x \wedge I = x, & x \vee I = I \end{array}\right\}$ (универсальные границы),

L8. $x \wedge x' = O, \quad x \vee x' = I$(дополнение),

L9. $(x')' = x$ (инволютивность),

L10. $(x \wedge y)' = x' \vee y', \quad (x \vee y)' = x' \wedge y'$ (закон де Моргана).

Обратите внимание на аксиоматический характер этого определения. Мы считаем заданными пять операций на множестве A (две бинарные, одна унарная, две 0-арных) и перечисляем 21 тождество сгруппированные в десять аксиом, или постулатов. Алгебраическая система является булевой алгеброй тогда и только тогда, когда она имеет такой набор операций и этот набор удовлетворяет всем выписанным аксиомам. (Разумеется, способ обозначений этих операций не играет роли, но используемые здесь символы сейчас общеупотребительны.)

Операции $\wedge$ и $\vee$ называются соответственно булевым произведением или пересечением, и булевой суммой или объединением. Аналогично называются результаты применения этих операций.

Пример 2.38.
Двухэлементная булева алгебра $B = [0, 1, \wedge, \vee, ', \ 0, 1]$ *имеет следующие операции:* $\wedge-$ *«наименьший из ... »,* $\vee-$ *«наибольший из ... »,* $'$ *— «другой элемент». Например,* $0 \wedge 1 = 0$, $0 \vee 1 = 1$, $0' = 1$.

Пример 2.39.
Тривиальная булева алгебра имеет вид : $[0, \wedge, \vee, ', \ 0, 0]$ *с операциями* $0 \wedge 0 = 0 \vee 0 = 0' = 0$ *и* $O = 0$, $I = 0$.

В дальнейшем мы будем заниматься в основном конечными булевыми алгебрами.

Пример 2.40. *Для любого положительного целого числа* n *булева алгебра* $B^n = [P(n), \wedge, \vee, ', \emptyset, n]$, *содержащая* 2^n *элементов, состоит из всех подмножеств множества* $n = \{1, \ldots, n\}$.

Операции $\wedge$, $\vee$, $'$ *есть соответственно теоретико-множественное* *пересечение, объединение и дополнение. Универсальные границы: $O = \emptyset$ и все множество $I = n$.*

Список из 21 тождества L1 – L10 очень избыточен. Например, аксиомы L1, L5, L9 и L10 следуют из остальных шести. Покажем это сначала для L1. Справедлива

Лемма 2.1. ***(Дедекинд)***. *Законы идемпотентности L1 следуют из законов поглощения L4.*

Доказательство.

Положив $y = x \wedge x$ в первом тождестве L4, мы получим

$$x \wedge [x \vee (x \wedge x)] = x.$$

Из второго тождества L4 (с $y = x$) следует, что выражение в квадратных скобках равно x. Значит, $x \wedge [x \vee (x \wedge x)] = x \wedge x$.

Поэтому $x = x \wedge x$. Тождество $x = x \vee x$ доказывается аналогично, если в предыдущем рассуждении заменить все $\wedge$ на $\vee$ и наоборот.

Лемма 2.1 доказана.

Теорема 2.5. *Любая общезначимая теорема о булевых алгебрах, в формулировке которой участвуют только операции $\wedge$, $\vee$ и $'$, остается общезначимой, если в ее формулировке всюду заменить $\wedge$ на $\vee$ и наоборот.*

Лемма 2.2. *Аксиома L5 следует из L1 – L4 и L6.*

Доказательство.
Пользуясь последовательно L6, L3, L4 и L6, получаем

$$x \wedge [y \vee (x \wedge z)] = x \wedge [(y \vee x) \wedge (y \vee z)] = [x \wedge (y \vee x)] \wedge (y \vee z) = \\ = x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)\,.$$

Лемма 2.2 доказана.

Аксиомы L1 – L10 для булевых алгебр были написаны в форме тождеств относительно трех операций $\wedge$, $\vee$ и $'$. Существует внешне совершенно другая система аксиом для булевых алгебр, которая формулируется в терминах свойств отношения *частичного порядка*. Укажем важнейшие связи между этими тремя булевыми операциями и отношением порядка.

Интуитивно ясно, что это отношение относится к $\wedge$, $\vee$ и $'$ так же, как отношение *включения* подмножеств $S \subset T$к операциям $S \bigcap T$, $S \bigcup T$ и $\overline{S}$. Например, отношение $S \subset T$ эквивалентно любому из четырех отношений: $S \bigcap T = S$, $\quad S \bigcup T = T$, $\quad S \bigcap \overline{T} = \emptyset$, $\quad \overline{S} \bigcup T = U$.

В лемме 2.4 ниже, исходя только из аксиом L1–L10, можно показать, что четыре аналогичных отношения эквивалентны в любой булевой алгебре.

Лемма 2.3. *В любой булевой алгебре из* $a \wedge x = O$ *и* $a \vee x = I$ *следует, что* $x = a'$.

Доказательство.
Действительно,

$$x = x \wedge I = x \wedge (a \vee a') = (x \wedge a) \vee (x \wedge a') = O \vee (x \wedge a') = \\ = (a \wedge a') \vee (x \wedge a') = (a \vee x) \wedge a' = I \wedge a' = a'.$$

Лемма 2.3 доказана.

Полагая $a = I$ и $x = O$ и учитывая, что $I \wedge O = O$ и $I \vee O = I$ в силу L7 и L2, получаем, что $O' = I, \quad I' = O$ в любой булевой алгебре.

Лемма 2.4. *Во всякой булевой алгебре A четыре соотношения:* $a \wedge b = a, \quad a \vee b = b, \quad a' \vee b = I, \quad a \wedge b' = O$ *равносильны.*

Доказательство.

Если $a \wedge b = a$, то $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$ в силу L4. Далее, если $a \vee b = b$, то $a' \vee b = a' \vee (a \vee b) = (a' \vee a) \vee b = I \vee b = I$. Если $a' \vee b = I$, то по закону де Моргана L10 находим $a \wedge b' = (a' \vee b)' = I' = O$. Наконец, если $a \wedge b' = O$, то

$$a \wedge b = (a \wedge b) \vee O = (a \wedge b) \vee (a \wedge b') = a \wedge (b \vee b') = a \wedge I = a,$$

что завершает цикл импликаций. Лемма 2.4 доказана.

Определение 2.60. *В любой булевой алгебре отношение определяется с помощью любого из соотношений леммы 2.4.*

Это отношение «включения» играет фундаментальную роль, ибо в его терминах можно определить все булевы операции. Например, O и I определяются как универсальные границы: $O \leq a \leq I$ для всех $a \in A$. Действительно, из леммы 2.4 эти соотношения равносильны $O \vee a = a$ и $a \vee I = I$ соответственно, которые выполняются в силу L7 (и L2).

Теорема 2.6. *В любой булевой алгебре $B = [A, \wedge, \vee, ']$ отношение $a \leq b$ является частичным порядком. Более того в терминах этого отношения операции $\wedge$ и $\vee$ восстанавливаются так:*

$a \wedge b =$*н.н.г. (наибольшая нижняя граница)* $\{a, b\}$,
$a \vee b =$*н.н.г. (наименьшая верхняя граница)* $\{a, b\}$.

Лемма 2.5. *(изотонность)*. *В любой булевой алгебре A из $b \leq c$ следует, что $a \wedge b \leq a \wedge c$ и $a \vee b \leq a \vee c$ для всех $a \in A$. Булевы операции возникают не только в теории множеств, но и в логике. Пусть буквами p, q, r, ... обозначены любые свойства объектов (быть красным, синим, мягким ...). Булевы комбинации этих символов имеют следующую интерпретацию: $p \wedge q$ означает p и q; $p \vee q$ означает p или q; p' означает не p.*

Эти соглашения тесно связаны с действиями над множествами. Пусть, например, p и q — некоторые свойства и пусть $S(p)$ означает множество всех объектов, обладающих свойством p. Тогда

$$S(p \vee q) = S(p) \cup S(q), \; S(p \wedge q) = S(p) \cap S(q), \; S(p') = [S(p)]'.$$

Заметим, что $\vee$ в булевой алгебре означает «неразделительное или» («и/или»), а «разделительное или» выражается многочленом $p+q=(p\wedge q')\vee(p'\wedge q)$: «$p$ или q, но не оба вместе». В английском и русском языке связка «или» двусмысленна.

Более общая логическая интерпретация булевых операций состоит в рассмотрении общих *высказываний* $p, q, r, \ldots$ Как и в случае электрических сигналов в схемах, предполагается, что высказыванию может отвечать одно из двух истинностных значений: «истина» или «ложь». Символическим равенством «$p=q$» можно обозначать утверждение, что p и q логически эквивалентны (более обычна запись $p\Leftrightarrow q$). Аналогично, словесные формулировки «из p следует q», или «если p, то q», записываются $p\Rightarrow q$, что логически эквивалентно $p'\vee q$ («либо q истинно, либо p ложно»).

Некоторые высказывания истинны безотносительно к истинности или ложности своих составных частей только в силу своей логической структуры; они называются *тавтологиями.*

Простейшая тавтология: $p\vee p'$ («или p или не p»). Вот еще одна важная тавтология: $[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)]\Rightarrow(p\Rightarrow r)$. Она выражает транзитивность отношения $\Rightarrow$.

Нетрудно убедиться, что аксиомы L1 – L10 булевых алгебр согласуются с законами интуитивной логики не только для множеств, но и для свойств объектов (предикатов) и для высказываний. Это фундаментальное наблюдение и исследование его Булем и другими положило начало современной символической логике.

Определение 2.61. *Пусть* $B = [A, \wedge, \vee, ', O, I]$ *– некоторая булева алгебра. Её* *<u>булевой подалгеброй</u>* *называется подмножество* $S \subset A$, *обладающее следующими свойствами:*

1) S *содержит* O *и* I*;*
2) S *содержит дополнение* x' *любого своего элемента* x*;*
3) вместе с любой парой x, y S *содержит* $x \wedge y$ *и* $x \vee y$.

Из L7 видно, что для любого элемента $x \in A$ с $O < x < I$ четыре элемента O, x, x', I составляют булеву подалгебру A, порожденную x (или x').

Теорема 2.7. *Всякая булева подалгебра* S *булевой алгебры* B *является булевой алгеброй* $C = [S, \wedge, \vee, ', O, I]$ *относительно операций в* B.

Подалгебра $\{O, x, x', I\}$, порожденная элементом x, является наименьшей подалгеброй, содержащей x.

2.8 Мощность множества

2.8.1 Понятие мощности множества

Начиная обсуждение расширения понятия «количества элементов» применительно к бесконечным множествам, условимся, что это расширенное понятие будет удовлетворять следующему требованию:

(*) *если* A *и* B – *множества и* $A \subseteq B$, *то «количество элементов» множества* A *меньше или равно «количеству элементов» множества* B *(часть не может быть больше целого).*

Конечно, сформулированное условие следует понимать таким образом, что расширенное понятие «количества элементов» позволит в дальнейшем определить отношение «меньше» применительно к этому понятию и для этого отношения должно быть выполнено условие (*). Отметим, что для любой пары конечных множеств A и B условие (*) выполнено и в общем не кажется противоестественным. Это наше соглашение (после введения отношения «больше») немедленно приведет к утверждению:

Пусть A – *бесконечное множество. Тогда «количество элементов» в* A *больше, чем в любом конечном множестве.*

Пусть A и B – конечные непустые множества. Как выяснить, содержат ли они одно и то же количество элементов? Для этого есть два способа.

Во-первых, можно пересчитать (перенумеровать) элементы этих множеств, т. е. представить множества A и B в виде $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$. Если полученные натуральные числа n и m равны, то ответ на поставленный выше вопрос утвердительный, если не равны – отрицательный.

Заметим, что нумерации множеств A и B представляют собой биекции $f_1 : S_n \to A$ и $f_2 : S_m \to B$ начальных отрезков натурального ряда S_n и S_m на множества A и B соответственно. Очевидно, что только в случае, когда $n = m$ (т. е. множества A и B содержат равные количества элементов), существует биекция $f = f_2 \circ f_1^{-1}$ множества A на множество B. Таким образом, можно сказать, что

(**) *множества A и B включают равное количество элементов, если существует биекция одного из них на другое.*

Отметим, что этот второй способ (прямой, без предварительного пересчета) установления равенства (или неравенства) количеств элементе конечных множеств можно использовать и на практике. Например, если при пошиве обуви нужно выяснить, одно ли и то же количество правых левых сапог произведено, то достаточно, не пересчитывая их, составить пары: правый сапог – левый сапог. Если множество всех сапог разобьётся на полные комплекты, т. е. если удастся установить взаимно однозначное соответствие (биекцию) между множествами правых и (левых) сапог, то ответ на интересующий нас вопрос утвердительный. Если же осталось некоторое количество правых (левых) сапог, для которых не хватает пар (не существует биекции упомянутых выше множеств), то ответ отрицательный.

Снимая теперь условие конечности множеств A и B в формулировке: (**), приходим к следующему определению «равночисленности» (равномощности) двух произвольных множеств:

Определение 2.62. *Множество A называется <u>равномощным</u> множеству B, если существует биективное отображение множества A на множество B. Пустое множество равномощно только самому себе.*

Условие равномощности множества A множеству B будем записывать в виде $|A|=|B|$.

Справедливы следующие свойства:

1. $|A|=|A|$ – *каждое множество равномощно себе (рефлексивность).*
2. *Если* $|A|=|B|$, *то* $|B|=|A|$ *(симметричность).*
3. *Если* $|A|=|B|$ *и* $|B|=|C|$, *то* $|A|=|C|$ *(транзитивность).*

Замечание 2.3. *Несмотря на то что понятие равномощности множеств обладает свойствами, определяющими отношение эквивалентности, мы все же не можем считать его таковым, поскольку всякое отношение эквивалентности определяется в некотором множестве, а в нашем случае это лишь некое свойство множеств, находящихся в биективном соответствии. Разумеется, если ограничиться только* *подмножествами данного множества X, то отношение равномощности является отношением эквивалентности.*

Сформулировав понятие равномощности множеств, перейдем к определению понятия «количества» элементов произвольного множества. Зададимся вопросом: что означает, например, следующее утверждение: *количество элементов множества A равно пяти*? Понятно, что смысл утверждения заключается в существовании биекции множества A на начальный отрезок S_5 натурального ряда. Применительно к другому пятиэлементному множеству B это снова означает лишь существование биекции между B и S_5. Отмеченные выше три свойства биекции показывают, что «количество пять» есть свойство любого пятиэлементного множества находиться в биективном соответствии с множеством S_5. Теперь уже понятно, что «количество пять» означает свойство, общее для всех множеств, находящихся в биективном соответствии с множеством S_5. Более того, это свойство на самом деле не зависит от множества S_5. Таким образом, количество элементов конечного множества — это его свойство, выражающее то обстоятельство, что оно может находиться в биективном соответствии с одними множествами и не находиться с другими (например, пятиэлементное множество не может находиться в биективном соответствии с семиэлементным). Нетрудно видеть, что такое определение количества элементов может быть распространено и на бесконечные множества. Традиционно, когда рассматриваются произвольные множества, вместо термина «количество элементов множества» употребляется термин «мощность множества».

Определение 2.63. *Мощностью непустого множества A называется его свойство находиться в биективном соответствии с определенными множествами (и не находиться с другими). Мощностью пустого множества называется его свойство не находиться в биективном соответствии ни с каким множеством.*

Мощность множества A будем обозначать символом $|A|$.

Из определения 2.63 следует, *что всякое множество A обладает мощностью.*

Заметим, что из определения вытекает, что мощность множества полностью задается теми множествами, с которыми оно находится в биективном соответствии. Из этого и из свойств биекции следует, что два множества имеют одинаковую мощность тогда и только тогда, когда они равномощны в смысле определения 2.62. Приведем примеры равномощных множеств.

Пример 2.41. *Множество четных натуральных чисел $2N$ равномощно множеству натуральных чисел N: $|2N|=|N|$.*

Пример 2.42. *Любые два отрезка множества вещественных чисел R равномощны: если a, b, c, $d \in R$ и $a < b$, $c < d$, то $|[a;\, b]|=|[c;\, d]|$. Это же верно и для открытых интервалов: $|(a;\, b)|=|(c;\, d)|$.*

Пример 2.43. *Множество вещественных чисел R равномощно любому открытому интервалу:* $|\mathrm{R}|=|(a;\ b)|$.

Для примера 2.43 на рисунке 2.23 представлен графический способ построения биекции открытого интервала на прямую.

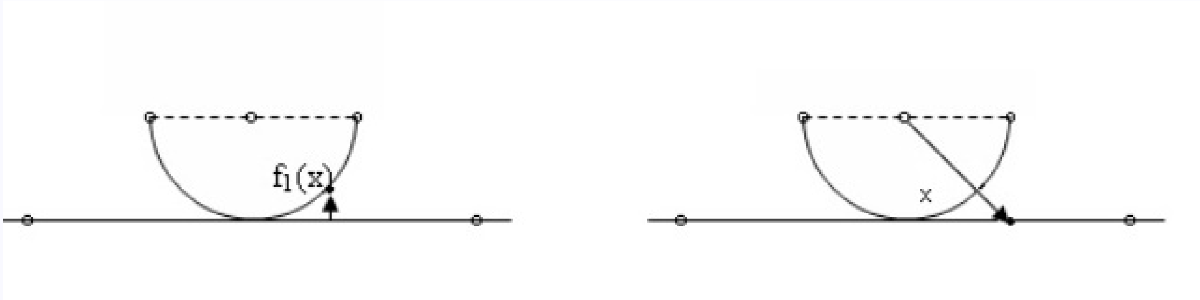

Рис. 2.23:

Искомая биекция здесь является композицией $f_2 \circ f_1$ двух биекций. Первая из них, f_1, отображает интервал $(a;\ b)$ на открытую полуокружность AB, а вторая, f_2, полуокружность AB – на вещественную прямую R.

Пример 2.44. $|[0,\ 1]|=|(0,\ 1)|$.

Пример 2.45. *Множество натуральных чисел N равномощно множеству целых чисел Z:* $|N|=|Z|$. *Так как, легко показать, что функ-*

ция $f : N \to Z$, $f(n) = (-1)^n \left[\frac{n}{2}\right]$ *есть биекция. Здесь символом* $[a]$ *обозначена целая часть числа* a.

Из примеров 2.41 – 2.45 вытекает, что $|[a;\ b]| = |(c;\ d)| = |R|$ для любых a, b, c, $d \in R$ таких, что $a < b$, $c < d$.

2.8.2 Сравнение множеств по их мощностям

Пусть A и B – конечные множества, n и m – числа элементов в A и B соответственно. Говорят, что количество элементов в множестве A *меньше*, чем количество элементов в множестве B, если $n < m$. Теоретически проблема сравнения конечных множеств по количеству их элементов может решаться и без обращения к расширенному натуральному ряду, т. е. без нахождения чисел n и m. Действительно, пусть нам заданы два конечных множества A и B. Легко видеть, что количество элементов в A меньше, чем в B, если и только если в B существует подмножество C, не совпадающее с B и равномощное A.

Но такой подход для произвольных множеств приводит к противоречию. В самом деле, этим подходом, мы получим, например, для множеств $A{=}2N$ и $B{=}N$, что $|A|{<}|B|$ (поскольку для $A{=}C$ будем иметь: $C{\subset}B$ и $|A|{=}|C|$, но мы уже знаем, что $|A|{=}|B|$ (пример 2.41)). Таким образом, если мы хотим, чтобы свойство $|A|{<}|B|$ исключало равенство $|A|{=}|B|$, то буквальное перенесение рассмотренного выше подхода с конечных на произвольные множества оказывается неудовлетворительным. С учетом нашей неудачной попытки дадим определение.

Определение 2.64. *Мощность множества A меньше или равна мощности множества B $(|A| \leq |B|)$, если в B имеется подмножество C такое, что $|A| = |C|$.*

Из этого определения вытекает, в частности, что для любого множества B верно следующее утверждение:

Утверждение 2.1. $|\emptyset| \leq |B|$ – *мощность пустого множества меньше или равна мощности любого множества.*

Иногда для определения понятия «меньше или равно» используют следующее определение, эквивалентное предыдущему.

Определение 2.65. *Мощность множества A меньше или равна мощности множества B $(|A| \leq |B|)$, если либо множество B пустое, либо существует инъективное отображение множества A в множество B.*

Для любых множеств A, B, C верны утверждения:

1. $|A| \leq |A|$ (*рефлексивность*);
2. $(|A| \leq |B|$ *и* $|B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$ (*транзитивность*);
3. $(|A| \leq |B|$ *и* $|B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$ (*антисимметричность*).

Справедлива

Лемма 2.6. *Пусть A_0, A_1, A_2— множества, причем выполняется $A_0 \supset A_l \supset A_2$ и $/A_0/=/A_2/$. Тогда все множества A_0, A_1, A_2 равномощны.*

Лемма 2.6 используется при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2.8. ***(Кантора–Бернштейна).*** *Если множество A равномощно некоторому подмножеству множества B, а множество B равномощно некоторому подмножеству множества A, то A и B равномощны.*

Определение 2.66. *Пусть A и B – два множества. Говорят, что мощность множества A меньше мощности множества B $(|A|<|B|)$, если $|A|\leq|B|$ и $|A|\neq|B|$.*

Определение 2.67. *Если множества A и B удовлетворяют хотя бы одному из условий:* 1) $|A|<|B|$; 2) $|A|=|B|$; 3) $|A|>|B|$, *то они называются сравнимыми по мощности.*

2.8.3 Счетные множества и множества мощности континуума

Определение 2.68. *Счетным называется множество, равномощное множеству натуральных чисел N.*

Теорема 2.9. *Любое бесконечное подмножество произвольного счетного множества является счетным.*

Следствие 2.1. *Если существует инъекция бесконечного множества X в некоторое счетное множество, то множество X является счетным.*

Теорема 2.10. *1) Объединение конечного семейства конечных множеств конечно; 2) объединение счетного семейства конечных множеств является конечным либо счетным множеством; 3) объединение конечного или счетного семейства конечных или счетных множеств при условии счетности хотя бы одного множества семейства — счетное множество. В частности, объединение счетного семейства счетных множеств счетно.*

Следствие 2.2. *Декартово произведение конечного множества счетных множеств является счетным.*

Следствие 2.3. *Множество целых чисел Z счетно.*

Следствие 2.4. *Множество рациональных чисел Q счетно.*

Следствие 2.5. *Множество $Q[x]$ многочленов от одной переменной с рациональными коэффициентами счетно.*

Определение 2.69. *Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется несчетным.*

Пример 2.46. *Множество всех подмножеств множества натуральных чисел N несчетно.*

Теорема 2.11. *Множество $2^N = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...) \,|x_n \in \{0,\ 1\}\}$ бесконечных последовательностей из нулей и единиц является несчетным множеством.*

Следствие 2.6. *Декартово произведение $\prod_{n\in N} \{0,\ 1\}_n$ несчетно.*

Теорема 2.12. *Если X – бесконечное множество, а Y – конечное или счетное множество, то $|X \cup Y| = |X|$.*

Следствие 2.7. *Если X – несчетное множество, а Y – его конечное либо счетное подмножество, то $|X \setminus Y| = |X|$.*

Следствие 2.8. *Всякое бесконечное множество X имеет собственное подмножество, равномощное X.*

Определение 2.70. ***(Дедекинд)*** *Множество называется бесконечным, если оно равномощно какой-либо своей собственной части.*

Определение 2.71. *Множество X называется множеством мощности континуума, если X равномощно множеству 2^N.*

Теорема 2.13. *Множество $(0,\ 1) = \{x \in R \mid 0 < x < 1\}$ всех вещественных чисел, принадлежащих единичному интервалу, имеет мощность континуума.*

Следствие 2.9. *Множество всех чисел, принадлежащих любому интервалу множества вещественных чисел R, имеет мощность континуума.*

Следствие 2.10. *Множество I иррациональных вещественных чисел имеет мощность континуума.*

Следствие 2.11. *Множество точек произвольной прямой в евклидовой геометрии имеет мощность континуума.*

2.8.4 Операции над мощностями

Определение 2.72. *Пусть α и β – произвольные мощности; B и D – некоторые множества, такие, что $|B|=\alpha$, $|D|=\beta$. Тогда:*

1. <u>суммой</u> $\alpha+\beta$ *называется мощность объединения $B\cup D$ при условии $B\cap D=\emptyset$*: $\alpha+\beta=|\mathrm{B}\cup\mathrm{D}|$, если $B\cap D=\emptyset$;
2. <u>произведением</u> $\alpha\ \beta$ *называется мощность декартова произведения $B\times D$*: $\alpha\ \beta=|B\times D|$;
3. <u>*степенью*</u> β^{α} *называется мощность множества D всех отображений вида $f: B\to D$*: $\beta^{\alpha}=|D|$.

Теорема 2.14. ***(монотонность).*** *Для любых мощностей α, β, γ истинна следующая импликация:*

$$(\alpha\leq\gamma)\Rightarrow\left(\alpha+\beta\leq\gamma+\beta,\ \ \alpha\cdot\beta\leq\gamma\cdot\beta,\ \ \beta^{\alpha}\leq\beta^{\gamma},\ \ \alpha^{\beta}\leq\gamma^{\beta}\right).$$

Теорема 2.15. *Для любых мощностей α, β, γ выполняются равенства:*

1) $\alpha+\beta = \beta+\alpha$;

2) $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$;

3) $\alpha\beta = \beta\alpha$;

4) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$;

5) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Если α,β,γ — мощности и α, β, $\gamma \neq 0$, то

6) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}$;

7) $(\alpha\beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}$;

8) $\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^{\beta})^{\gamma}$.

РАЗДЕЛ 3
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

3.1 Метод математической индукции

В основе метода математической индукции лежит принцип математической индукции. Применяют разные формы этого принципа.

Теорема 3.1. ***(основная форма принципа математической индукции).*** *Если предложение $P(n)$ с натуральной переменной n истинно для числа 1 и из истинности этого предложения для любого, но фиксированного натурального числа k вытекает его истинность и для следующего числа $k+1$, то $P(n)$ – истинно для любого натурального числа n:*

$$(P(1) \wedge (\forall\, k \in N)\, P(k) \Rightarrow P(k+1)) \Rightarrow (\forall n \in N)\, P(n)\,.$$

{Доказательство теоремы 3.1 основано на ***аксиоме индукции****: если множество M включает в себя число 1 и вместе с каждым принадлежащим ему числом k содержит и следующее число $k+1$, то $M=N$. Это можно записать: $1 \in M \wedge (\forall\, k \in N)\;\; k \in M \Rightarrow (k+1) \in M \Rightarrow M = N\,.$}*

Доказательство.

Пусть $M = \{n \in N / P(n) \equiv 1\}$ – область истинности $P(n)$. $1 \in M$, так как по условию теоремы 3.1 $P(1) \equiv 1$, и $(\forall\, k \in N)\;\; k \in M \Rightarrow (k+1) \in M$ (из истинности $P(k)$ следует истинность $P(k+1)$. Поэтому, в силу аксиомы индукции, $M = N$. Значит, $P(n) \equiv 1$ для $\forall\, n \in N$. Теорема 3.1 доказана.

Таким образом, доказательство истинности предложения $P(n)$ для $\forall\, n \in N$ методом математической индукции, соответствующим основной форме принципа математической индукции, состоит из 2-х частей:
1) доказывают, что $P(1) \equiv 1$;
2) доказывают, что из истинности $P(k)$, где k – любое фиксированное натуральное число, следует, что $P(k+1) \equiv 1$.

Переменную n называют переменной, по которой проводится индукция.

Первую часть доказательства называют базой (базисом) индукции, вторую – индукционным шагом.

Бывает, что предложение $P(n)$ не определено или ложно при $n = 1$, но становится истинным при $n \geq 2$ или, вообще, при $n \geq n_0$, где $n_0 \in N$, $n_0 \geq 2$. Тогда для доказательства истинности этого предложения пользуются обобщением основной формы принципа математической индукции.

Теорема 3.2. ***(обобщение основной формы принципа математической индукции).*** *Если предложение $P(n)$ с натуральной переменной n истинно для некоторого $n_0 \in N$ и из истинности этого предложения для любого, но фиксированного $k \in N$, $k \geq n_0$ следует его истинность и для следующего числа $k+1$, то $P(n)$ истинно для $\forall\, n \in N$, $n \geq n_0$:*

$$(P(n_0) \wedge (\forall\, k \in N,\ k \geq n_0)\, P(k) \Rightarrow P(k+1)) \Rightarrow (\forall n \in N,\ n \geq n_0)\, P(n).$$

Теорема 3.3. ***(другая форма принципа математической индукции).*** *Если предложение $P(n)$ с натуральной переменной n истинно для числа 1 и из истинности этого предложения для всех натуральных чисел l, меньших любого, но фиксированного натурального числа $k \geq 2$, следует его истинность и для числа k, то $P(n)$ истинно для $\forall\, n \in N$:*

$$(P(1) \wedge (\forall\, l,\ k \in N,\ l < k,\ k \geq 2)\, P(l) \Rightarrow P(k)) \Rightarrow (\forall n \in N)\, P(n).$$

Теорема 3.4. ***(обобщение другой формы принципа математической индукции).*** *Если предложение $P(n)$ с натуральной переменной n истинно для некоторого натурального числа n_0 и из истинности этого предложения для всех натуральных чисел l, $n_0 \leq l < k$, где k – любое фиксированное натуральное число, $k \geq n_0 + 1$, следует его истинность для числа k, то $P(n)$ истинно для $\forall\, n \in N$, $n \geq n_0$:*

$$(P(n_0) \wedge (\forall\, l,\ k \in N,\ n_0 \leq l < k,\ k \geq n_0 + 1)\, P(l) \Rightarrow P(k)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (\forall n \in N,\ n \geq n_0)\, P(n)\,.$$

Методом математической индукции доказываются предложения, определённые при целых отрицательных n (с помощью замены $n = -m$), а также предложения, определённые на Z, начиная с $n = n_0$. В последнем случае доказательство основано на следующей форме принципа математической индукции: *если предложение $P(n)$, где $n \in Z$, истинно для некоторого $n_0 \in Z$ и из истинности этого предложения для любого фиксированного $k \in Z,\ \ k \geq n_0$ следует, что оно истинно для $k+1$, то $P\,(n)$ истинно для $\forall\, n \in Z,\ \ n \geq n_0$.*

Обосновал метод математической индукции французский учёный Блез Паскаль (1623–1662).

Пример 3.1. *Докажите, что*
$1 \cdot 1\,! + 2 \cdot 2\,! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n\,! = (n+1)\,!\ - 1.$

Доказательство.

Обозначим данное равенство с $n \in N$ через $P\,(n)$.
1) $P(1) = 1 \cdot 1\,! \Rightarrow P(1) \equiv 1$
2) Предположим, что при $n = k$:
$1 \cdot 1\,! + 2 \cdot 2\,! + \ldots + k \cdot k! = (k+1)\,!\ - 1,$ *т. е. что* $P\,(k) \equiv 1.$
Доказжем, что $P\,(k+1) \equiv 1,$ *т. е. что*

$$1 \cdot 1\,! + 2 \cdot 2\,! + \ldots + k \cdot k! + (k+1)\,(k+1)\,! = (k+2)\,! - 1.$$

В самом деле, имеем $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + \; + (k+1)!(k+1) = (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1.$
Таким образом, в силу теоремы 3.1 $P(n) \equiv 1, \; \forall\, n \in N.$

3.2 Основные понятия и краткие исторические сведения

Представителям самых различных специальностей приходится решать задачи, в которых рассматриваются те или иные комбинации, составленные из букв, цифр или иных объектов. Например, из некоторого множества выбирают его подмножество, элементы данного множества располагают в каком-то порядке, составляют пары из элементов двух данных множеств, распределяют различные виды работ между рабочими, выбирают в шахматах из нескольких следующих ходов наилучший и т.д.

Поскольку в таких и подобным им задачам речь идёт о некоторых комбинациях работ, ходов и др., то такие задачи называют комбинаторными.

Определение 3.1. *Область математики, в которой изучаются комбинаторные задачи, называется комбинаторикой. В комбинаторике изучаются конечные множества и их подмножества, отображения, а также кортежи, составленные из элементов конечных множеств.*

Комбинаторика как отрасль науки возникла в XVI веке. Раньше в жизни привилегированных слоёв большое место занимали азартные игры. В карты и игральные кости выигрывались и проигрывались золото и бриллианты, дворцы и имения, породистые кони и дорогие украшения. Были распространены также и всевозможные лотереи, поэтому в тот период комбинаторные задачи касались в основном азартных игр. Многих тогда интересовали вопросы: сколькими способами можно выбросить данное число очков, бросая две или три кости, как можно получить два короля в данной карточной игре?

Такие и другие проблемы азартных игр являлись движущей силой развития комбинаторики как науки (в одновременном развитии теории вероятностей). Одним из первых, кто занялся подсчётом числа различных комбинаций при игре в кости, являлся итальянский математик Н. Тарталья. Он составил таблицу, в которой указывалось, сколькими способами может выпасть n очков при бросании двух или трёх игральных костей.

Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII веке французские учёные Б. Паскаль, П. Ферма. Исходным пунктом их исследования являлась также проблема азартных игр. Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами таких учёных как Я. Бернулли, К. Лейбниц, Л. Эйлер. Однако и у этих учёных играли основную роль исследования приложений к азартным играм, в частности, лото.

В последнее время комбинаторика продолжает бурно развиваться, это развитие связано с повышением интереса к проблемам дискретной математики. Комбинаторные методы используются при решении транспортных задач, задач на составление расписаний, составление сетевых графиков производства и реализации продукции. Существуют тесные межпредметные связи между комбинаторикой и линейным программированием, теорией вероятностей, статистикой и т.д. Методы комбинаторики используется при составлении и декодировании шифров, а также при решении других задач теории информации.

3.3 Общие правила комбинаторики

Большинство задач комбинаторики основано на двух основных правилах, которые называются правилом суммы и правилом произведения. Будем обозначать число элементов конечного множества X через $\mu(X)$, а множество, состоящее из n-элементов, называть n-множеством. Например, если X есть множество $X = \{1, 4, 7, 9, 15\}$, то $n = 5$ (количество), а само X называется 5-множеством.

Справедливо следующее утверждение: *если множество X содержит m элементов, а множество Y — n элементов и эти множества не пересекающиеся, то объединение множеств $X \cup Y$ содержит $m + n$ элементов:*

$$X \cap Y = \emptyset \Rightarrow \mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y).$$

Такое утверждение в комбинаторике называется *правилом суммы.* В случае, если множества X и Y являются пересекающимися, дело обстоит иначе, так как в этом случае элементы множеств X и Y в их объединение войдут только один раз, считая и общие элементы этих множеств, поэтому из суммы элементов множеств X и Y надо вычесть количество множества элементов их пересечения. Получим, что для любых множеств X и Y верно равенство:

$$\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y) - \mu(X \cap Y).$$

Правило суммы иногда в комбинаторике формулируют по-другому: *если некоторый объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, то выбор «либо A, либо B» можно осуществить $m+n$ способами.*

При использовании правила суммы последней формулировки надо следить, чтобы ни один из способов выбора объекта A не совпадал с каким-нибудь способом выбора объекта B, в таком случае имеем $(m+n-k)$ способа выбора, где k – число совпадений.

Приведем без вывода формулу для числа элементов в объединении трех множеств:

$$\mu(X\cup Y\cup Z)=\mu(X)+\mu(Y)+\mu(Z)-\mu(X\cap Y)-\\ -\mu(X\cap Z)-\mu(Y\cap Z)+\mu(X\cap Y\cap Z).$$

Второе основное правило комбинаторики называется *правилом произведения* и касается подсчёта числа кортежей (пар), которые можно составить из элементов данных конечных множеств (из элементов двух множеств). Часто при составлении комбинации из двух элементов известно, сколькими способами можно выбрать первый элемент и сколькими способами – второй, в предположении, что число способов выбора не зависит от того, как выбран первый элемент. Рассмотрим следующую задачу: *сколько пар вида (x_k, y_e) можно составить из элементов данных множеств*: $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Запишем все такие пары в виде таблицы:

$$
\begin{array}{l}
(x_1, y_1)\,,\ (x_1, y_2)\,,\ \ldots,\ (x_1, y_n)\,, \\
(x_2, y_2)\,,\ (x_2, y_2)\,,\ \ldots,\ (x_2, y_n)\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(x_m, y_1)\,,\ (x_m, y_2)\,,\ \ldots,\ (x_m, y_n)\,.
\end{array}
$$

Эта таблица содержит m строк, а каждая строка содержит n элементов, т. е. пар. Общее число пар равно mn. Полученный результат также можно записать: $\mu\,(X \times Y) = \mu\,(X) \cdot \mu\,(Y)$. Записанное таким образом правило произведения в комбинаторике обычно формулируют так: *если элемент x можно выбрать m способами, а элемент y можно выбрать n способами, то упорядоченную пару $(x,\ y)$ можно выбрать mn способами.*

В случае построения кортежей справедливо записать:

$$\mu\,(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n) = \mu\,(X_1) \cdot \mu\,(X_2) \cdot \ldots \cdot \mu\,(X_n)\,.$$

3.4 Формула включений и исключений. Решето Эратосфена

Пусть имеется N предметов, отдельные из которых обладают свойствами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. При этом каждый предмет может обладать одним или несколькими свойствами либо не обладать никакими. Обозначим через $N\ (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ количество предметов (объектов), обладающих свойствами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ и, быть может, какими-нибудь ещё свойствами. Если надо подчеркнуть, что берутся предметы, не обладающие некоторым свойством, то это свойство записываем со знаком штрих. Поэтому $N\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3', \alpha_4)$ – количество предметов, обладающих свойствами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$, но не обладающих свойством α_3. Вопрос об остальных свойствах остаётся открытым. Число предметов, не обладающих ни одним из указанных выше свойств $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, будем обозначать $N\ (\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_n')$. Имеет место равенство

$$N\ (\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_n') = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - ... - N(\alpha_n) + N(\alpha_1\alpha_2) + \\ N(\alpha_1\alpha_3) + .. + N(\alpha_1\alpha_n) + ... + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - ... - \\ N(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_1) + ... + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n).$$

В записанной формуле алгебраическая сумма распространена на все комбинации свойств без учёта их порядка, при этом знак «+» ставится тогда, когда число учитываемых свойств чётно, и знак «−», если это число не чётно.

Формула называется *формулой исключений и включений*. Здесь сначала исключаются все предметы, обладающие хотя бы одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, затем включаются предметы, обладающие, по крайней мере, двумя свойствами, затем исключаются предметы, обладающие тремя свойствами и т.д.

Пример 3.2. *Каждый студент в группе — либо девушка, либо блондин, либо говорит по английски. В группе 16 девушек, из них 6 блондинок, и 4 блондинки знают английский язык. Всего в группе 11 блондинов, по английски из них говорят 8. Всего студентов, которые могут общаться на английском языке 20, из них 12 девушек. Сколько студентов в данной группе?*

Решение. Пусть A — множество девушек, B — множество студентов со светлыми волосами, C — множество студентов, которые знают английский язык. Тогда $N(A \cup B \cup C)$ — искомое число студентов в группе; $A \cap B$ — множество блондинок; $A \cap C$ — множество девушек, которые говорят по английски; $B \cap C$ — множество всех блондинов (юношей и девушек), которые знают английский язык; $A \cap B \cap C$ — множество блондинок, которые говорят по английски. Из данных задачи следует, что $N(A) = 16$, $N(B) = 11$, $N(C) = 20$, $N(A \cap B) = 6$, $N(A \cap C) = 12$, $N(B \cap C) = 8$, $N(A \cap B \cap C) = 4$. Теперь при $n = 3$ получаем $N(A \cup B \cup C) = 16 + 11 + 20 - (6 + 12 + 8) + 4 = 25$. Таким образом, в группе 25 студентов.

Одной из проблем математики является проблема расположения простых чисел в натуральном ряду чисел. Возникает задача: *сколько простых чисел содержится среди n натуральных чисел.*

Впервые для не очень большого n ответ на этот вопрос дал древнегреческий учёный Эратосфен, который жил в III в. до н. э. в Александрии.

Метод Эратосфена состоит в следующем. Пусть нам надо узнать количество простых чисел от 1 до 100. Число 1 Эратосфен считал простым, в этом ряду чисел вычёркиваются все числа, делящиеся на 2, кроме самого числа 2. Затем среди не зачёркнутых чисел вычёркиваются все числа, делящиеся на 3, кроме числа 3, и т.д.

Подсчитаем, сколько останется чисел в первой сотне, если по методу Эратосфена вычёркиваем все числа, делящиеся на 2, 3, 5, т. е. найдём, сколько чисел содержится в первой сотне, которые не делятся ни на одно из чисел 2, 3, 5. Пусть α_1 — свойство числа делиться на 2, α_2 и α_3 — свойство чисел делиться на 3, 5 соответственно, тогда $N(\alpha_1, \alpha_2)$ означает, сколько чисел делится на 2 и на 3, а значит, и на 6; $N(\alpha_1, \alpha_3)$ означает, сколько чисел делится на 2 и 5, а значит, и на 10; $N(\alpha_2, \alpha_3)$ сколько чисел делится на 3 и 5, значит, и на 15; $N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — сколько чисел делится на 2, 3 и 5, а значит, и на 30. Найдём количество чисел от 1 до 100, которые не обладают ни одним из свойств α_1, α_2, α_3. Для этого используем формулу включений и исключений:

$$N(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3') = 100 - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + N(\alpha_1, \alpha_2) +$$

$$+N(\alpha_1, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_3) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

$$N = 100, \quad N(\alpha_1) = 50, \ N(\alpha_2) = \left[\frac{100}{3}\right] = 33, \ N(\alpha_3) = 20,$$

$$N(\alpha_1, \alpha_2) = \left[\frac{100}{6}\right] = 16,$$

$$N(\alpha_1, \alpha_3) = 10, \quad N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3,$$

$$N(\alpha_2, \alpha_3) = \left[\frac{100}{15}\right] = 6.$$

Поэтому

$$N(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3') = 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26.$$

3.5 Соединения. Виды соединений

Пусть A – множество, состоящее из конечного числа элементов a_1, a_2, ..., a_n . Из различных элементов множества A можно образовывать группы. Если в каждую группу входит одно и тоже число элементов m $(m \le n)$, взятых из множества A, то говорят, что они образуют *соединения* из n элементов по m в каждом. В зависимости от того, входят ли в соединение все элементы множества A или только часть их, играет ли роль порядок элементов или не играет, различают три вида соединений: 1) *размещения*, 2) *перестановки* и 3) *сочетания*.

3.5.1 Размещения с повторениями и без повторений

Пусть дано m-множество X, множество, которое содержит m элементов. Поставим задачу: *найти число кортежей длины k (отличающихся друг от друга или составом, или порядком элементов), которые можно составить из элементов данного m-множества X.*

Определение 3.2. *Кортеж длины k, составленный из элементов множества X, называется размещением с повторениями из m элементов по k, а число таких кортежей называется числом размещений из m элементов по k и обозначается символом $\overline{A}_m^k$.*

Теорема 3.5. *Число размещений с повторениями из m элементов* *по k равно m^k, т. е.*

$$\overline{A}_m^k = m^k. \tag{3.1}$$

Формула (3.1) встречается при решении целого ряда задач.

Пример 3.3. *Найти число всевозможных подмножеств данного множества X.*

Решение: Перенумеруем элементы множества X: $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$, получим упорядоченное множество. Каждое подмножество $A \subset X$ можно «зашифровать» с помощью кортежа длины m из нулей и единиц. При этом в каждом таком картеже мы пишем единицу, если элемент с данным номером принадлежит данному подмножеству, и нуль, если он ему не принадлежит. Например, кортеж $(0, 1, 0, ..., 0, 1)$ означает, что данному подмножеству принадлежит второй и последний элемент, кортеж $\underbrace{(0, 0, ..., 0)}_{m-\text{раз}}$ – пустое множество, а кортеж $\underbrace{(1, 1, ..., 1)}_{m-\text{раз}}$ – само множество.

Откуда следует, что найти число подмножеств m-множества X – это всё равно, что найти число кортежей длины m, составленных из двух элементов 0 и 1, т. е. найти число размещений с повторениями из двух элементов по m, а число таких элементов размещений с повторениями, согласно формуле (3.1), равно $\overline{A}_2^m = 2^m$. Получается, что число возможных подмножеств данного m-множества равно 2^m. Например, число подмножеств множества $\{a, b, c, d, e\}$: $\overline{A}_2^5 = 2^5 = 32$.

Приведём общую формулировку задачи, приводящей к размещению без повторений. *Пусть дано m-множество X, сколько упорядоченных k-множеств можно образовать из элементов данного множества X?* Из сформулированной задачи видно, что $k \leq m$.

Рассмотрим случай $k < m$. Поскольку искомые k-подмножества являются упорядоченными, то они считаются различными, если отличаются друг от друга хотя бы одним элементом либо порядком следования элементов, т. е. состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в различном порядке.

Определение 3.3. *Такие упорядоченные k-подмножества данного m-множества, называются размещением без повторений из m элементов по k, а число таких k-размещений обозначают символом A_m^k.*

Теорема 3.6. *Число размещений без повторений из m элементов по k равно $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)$, т. е. $A_m^k = \frac{m\,!}{(m-k)\,!}$.*

Пример 3.4. *Научное общество состоит из 25 человек. Сколькими способами может быть сделан выбор президента, вице-президента, учёного секретаря и казначея общества?*

Решение: В данном случае требуется найти число размещений без повторений из 25 по 4 $\left(A_{25}^4\right)$, так как каждый член общества может занимать только один пост (повторений быть не может). И важную роль играет тот, кто будет выбран в руководство, и какие посты займут избранные (важен порядок следования избранных): $A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$ (способов).

3.5.2 Перестановки без повторений и с повторениями

При составлении размещений без повторений из m по k мы получали упорядоченные k-подмножества, которые отличались друг от друга либо составом, либо порядком элементов. Вместо k упорядоченных подмножеств данного m-множества X будем рассматривать упорядоченные m-множества, каждое из которых содержит все элементы данного множества X следовательно, одно такое множество от другого отличается лишь порядком элементов.

Определение 3.4. *Такие упорядоченные m-множества, составленные из элементов m-множества X называются перестановками из m элементов или m-перестановками без повторений, а их число обозначают символом P_m.*

Из сказанного выше следует, что число m-перестановок без повторений равно числу размещений элементов из m по m: A_m^m. Отсюда легко следует формула для m-перестановок без повторений:

$$P_m = A_m^m = m\,(m-1)\,(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-m+1) = m\,!.$$

Пример 3.5. *Сколько пятизначных и трёхзначных чисел можно* *составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если в записи числа цифры не повторяются?*

Решение: На первую часть вопроса ответим: $P_5 = 5! = 120$. На вторую часть – $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)\,!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$.

Выше рассматривались перестановки из m элементов, которые были попарно различные, т. е. не содержали одинаковых элементов. Общая задача, связанная с перестановками с повторениями: *имеются предметы k различных типов; сколько перестановок можно сделать из m_1 элементов первого типа, m_2 элементов второго типа и т.д.?*

Решение: число элементов каждой перестановки равно m, где $m{=}m_1{+}m_2{+}\ ...{+}m_k$, если бы все элементы были различны в каждой перестановке, то число перестановок равнялось бы $m!$, но поскольку некоторые элементы совпадают, то получается меньшее число перестановок.

Рассмотрим перестановку: $(\underbrace{a, a, ..., a,}_{m_1}\ \underbrace{b, b, ..., b,}_{m_2} \ldots,\ \underbrace{x, x, ..., x)}_{m_k} \quad (*)$.

В этой перестановке сначала выписаны все элементы первого типа, их m_{1raz}, затем все элементы второго типа, их m_2, и, наконец, элементы k-го типа, их m_k. Элементы первого типа можно переставлять $m_1!$ способами, но так как все эти элементы одинаковы, то такие перестановки ничего не меняют. Точно так же ничего не меняет и $m_2!$ перестановок, образованных из элементов второго типа, ничего не меняют также $m_k!$, образованных из элементов m_k типа. Перестановки каждого из типов можно выполнять независимо друг от друга. По правилу произ-

ведения элементы перестановки (∗) можно переставлять друг с другом $m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!$ способами, и при этом перестановка остаётся неизменной. Поэтому множество всех $m!$ перестановок распадается на части, состоящие из $m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!$ одинаковых перестановок. Следовательно, число различных *перестановок с повторениями*, которые можно образовать из данных элементов, равно: $P\left(m_1, m_2, \ldots, m_k\right) = \frac{m!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!}$, где $m_1, m_2, \ldots, m_k$ указывают, сколько раз повторяются элементы каждого из типов, и при этом должно выполняться равенство:
$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m$.

Пример 3.6. *Сколько различных слов можно образовать из букв слова «математика», где под словом будем понимать некоторую совокупность из 10 букв, не обязательно имеющую смысл?*

Решение: Поскольку слово «математика» содержит 10 букв, то $m=10$, при этом буквы повторяются:

«м» — 2 раза,
«а» — 3 раза,
«т» — 2 раза,
«е» — 1 раза,
«к» — 1 раза,
«и» — 1 раза.

Таким образом, $P\left(2, 3, 2, 1, 1, 1\right) = \frac{10!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!} = \frac{10!}{2!\,3!\,2!} = 151200$.

3.5.3 Сочетания без повторений и с повторениями

Рассмотрим следующую задачу комбинаторики: *сколько подмножеств, содержащих по k элементов каждое, можно составить из элементов данного m−множества X?*

Определение 3.5. *<u>K-сочетаниями из m элементов</u> называются всевозможные k-подмножества, составленные из элементов данного m-множества X, которые отличаются друг от друга составом, но не порядком элементов, а число таких сочетаний, которые можно составить из элементов данного множества X, обозначается символом* C_m^k.

Символ C_m^k обозначает, что имеются в виду сочетания без повторений, т. е. одно k-подмножество X от другого отличается хотя бы одним элементом.

Теорема 3.7. *Число всех k-сочетаний, образованных из элементов данного m-элементного множества X, равно* $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k!)}$.

Замечание 3.1. $C_m^k = P\left(k, (m-k)\right) = \frac{m!}{k!(m-k)!}$.

Пример 3.7. *В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого 12-угольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?*

Решение:

Каждой точке пересечения двух диагоналей соответствуют четыре вершины 12-угольника, и каждым четырём вершинам соответствует одна точка пересечения диагоналей. Поэтому число всех точек пересечения диагоналей 12-угольника равно числу способов, которым можно выбрать четыре вершины среди двенадцати. При этом каждые отдельно взятые четыре вершины определяют две диагонали и одну точку их пересечения независимо от того, в каком порядке выбираются эти четыре вершины. Откуда следует, что ответом на вопрос задачи является число сочетаний без повторений из двенадцати элементов по четыре, т. е.

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{4!\,(12-4)\,!} = \frac{12!}{4!\,8!} = \frac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 8!} = 9\cdot 5\cdot 11 = 495.$$

Свойства сочетаний без повторений

$$1.C_m^k = \frac{A_m^k}{k!}.$$

$$2.C_m^k = C_m^{m-k},$$

$$3.C_m^{k-1} + C_m^k = C_{m+1}^k.$$

$$4.C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m.$$

$$5.C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+m-1}^m = C_{n+m}^m.$$

$$6.C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

7. $n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^m = 0$ при условии, что $m < n$.

Рассмотрим следующую задачу: *в кондитерском магазине продают 4 сорта пироженых: миндальное, бисквитное, песочное и слоёное. Сколькими способами можно купить 7 пироженых?*

Сформулированная выше задача отличается от рассмотренных ранее задач. Она не является задачей на размещение с повторениями, так как порядок, в котором даются пирожные покупателю, не имеет значения, а следовательно, она не является задачей на перестановки с повторениями, так как не обязательно покупать все пирожные. Значит, эта задача ближе всего к задаче на сочетания без повторений, но она отличается от таких задач тем, что в комбинацию могут входить повторяющиеся элементы.

Такие и подобные им задачи называются задачами на сочетание с повторениями из m элементов по k, обозначают $\overline{C}_m^k$.

Теорема 3.8. *Число сочетаний с повторениями из m элементов по k находится по формуле:* $C_m^{-k} = \frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!} = C_{m+k-1}^k$.

3.6 Бином Ньютона. Полиномиальная теорема

Известно, что $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3 = a^3+3ab^2+b^3$. Нетрудно заметить:

$$a^2+2ab+b^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2,$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3.$$

Возникает вопрос: как вычислить $(a+b)^n$, где n – число натуральное. Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 3.9. ***(биномиальная)***

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n. \quad (3.2)$$

Доказательство теоремы не трудно провести, воспользовавшись методом математической индукции. Равенство (3.2) можно записать в краткой форме: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

Теорему 3.9 иногда называют биномиальной, а числа C_n^k– биномиальными коэффициентами. Равенство (3.2) часто называют также *биномом Ньютона*, хотя такое название исторически не является справедливым. Формулу $(a+b)^n$ знал ещё среднеазиатский математик Омар

Хайям (1048–1131). В Западной Европе до Ньютона эту формулу использовал Блез Паскаль (1623–1662). Заслуга Ньютона состоит в том, что он обобщил формулу (3.2) для любого действительного числа n.

При доказательстве теоремы 3.9 использовалось комбинаторное равенство: $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$. Это равенство выражает важное свойство биномиальных коэффициентов. Оно показывает, что биномиальные коэффициенты можно выписать в виде треугольной таблицы, которую называют *треугольником Паскаля*:

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & 1 & & 1 & & & & & & & n=1\\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & n=2\\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & n=3\\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & n=4\\
1 & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & 1 & & & & n=5
\end{array}$$

В n-ой строке треугольника Паскаля стоят коэффициенты разложения $(a+b)^n$, причём каждый коэффициент кроме двух крайних, которые равны 1, равен сумме соответствующих коэффициентов из предыдущей строки (согласно равенству $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$).

Теорема 3.10. **(полиномиальная).**

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum \frac{n!}{r_1!\, r_2!\, \ldots\, r_k!} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_k^{r_k}, \qquad (3.3)$$

где суммирование производится по целым числам $r_1 \geq 0,\ r_2 \geq 0,\ \ldots,$ $r_k \geq 0$ *и таким, что* $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n.$

Из теоремы 3.10 видно, что $\frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!} = P(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k)$, так как выполняется: $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n,\ \ r_i \in Z,\ \ r_i \geq 0\ \ (i = \overline{1,\ k})$.

Пример 3.8. *Вычислить разложение* $(x + y + z)^5$.

<u>*Решение:*</u>

Найдем коэффициенты разложения, воспользовавшись формулой: (3.3)*:*

Тогда получим

$$(x + y + z)^5 = x^5 + y^5 + z^5 + 5x^4y + 5xy^4$$
$$+5x^4z + 5y^4z + 5yz^4 + 5xz^4+$$
$$+10x^3y^2 + 10x^3z^2 + 10y^3z^2 + 10x^2y^3$$
$$+10x^2z^3 + 10y^2z^3 + 20x^3yz + +20xy^3z + 20xyz^3$$
$$+30x^2y^2z + 30xy^2z^2 + 30x^2yz^2.$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Элементы логики высказываний

[8], №1.1 – 1.3; [14], №1.1 – 1.3, 1.6 – 1.9, 1.12, 1.13.

Элементы математической логики

[8], №1.4, 1.30 – 1.33; [14], №2.1–2.3, 2.10, 4.1–4.6.

Элементы логики предикатов

[8], №1.22–1.27; [14], №1.1, 1.5, 1.6.

Множества

[8], №1.5, 1.7, 1.11–1.14.

Декартово произведение множеств. Бинарные отношения. Отношение порядка. Отношение эквивалентности

[8], №1.34–1.36, 1.40 – 1.43, 1.45, 1.47, 1.49 – 1.51, 1.60

Отображения и функции. Обратные отображения

[8], №1.52, 1.57, 1.59–1.63.

Метод математической индукции

[8], №1.67 – 1.70.

Комбинаторика с повторениями. Комбинаторика без повторений. Бином Ньютона

[8], №1.72–1.74, 1.77; [13], №9.008–9.011, 9.017–9.029.

Вопросы к зачёту

1. Высказывания. Основные логические операции.

2. Формулы логики высказываний. Основные равносильности формул. Тавтологии. Теоремы. Достаточное и необходимое условие. Доказательство от противного.

3. Высказывательная форма. Кванторы и их свойства. Примеры.

4. Множество. Способы задания множеств. Пустое множество. Критерий равенства множеств. Действия над множествами и их основные свойства. Примеры.

5. Декартово произведение множеств.

6. Бинарное отношение. Область определения и область значений. График бинарного отношения. Примеры. Виды бинарных отношений. Примеры. Отношение эквивалентности.

7. Функциональное отношение. Примеры. Отображение. Отображение «в» и «на». Образ и прообраз. Равенство отображений. Примеры.

8. Виды отображений. Примеры. Композиция отображений. Обратное отображение.

9. Метод математической индукции. Основная теорема принципа мат. индукции с доказательством. Примеры.

10. Комбинаторика с повторениями. Правила комбинаторики. Формулы комбинаторики с повторениями.

11. Комбинаторика без повторений. Бином Ньютона.

12. Демонстрационный вариант билета к зачёту

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Определение высказывания.
2. Формулы логики высказываний.
3. Равносильные формулы.
4. Определение квантора.
5. Определение обратных математических предложений.
6. Определение противоположных математических предложений.
7. Определение контропозитивных математических предложений.
8. Определение множества.
9. Определение конечного и бесконечного множеств.
10. Диаграммы Эйлера-Венна.
11. Действия над множествами.
12. Определение области определения.
13. Определение области значения.
14. Определение декартового произведения.

15. Виды бинарных отношений.
16. Определение графа.
17. Определение отношения эквивалентности.
18. Определение отношения порядка.
19. Определение функционального отображения.
20. Определения образа и прообраза.
21. Виды отображений.
22. Определение одноместного предиката.
23. Логические операции над предикатами.
24. Определение булевой алгебры.
25. Определение мощности.
26. Определение мощности множества.
27. Определение счётного множества.
28. Определение бесконечного множества.
29. Определение мощности континуум.

30. Определение комбинаторики.

31. Принцип математической индукции.

32. Формула включений и исключений.

33. Виды соединений.

34. Определение Бинома Ньютона.

35. Ответьте на вопросы тестов:
    – Элементы математической логики
      тест №1
    – Элементы теории множеств
      тест №2
    – Элементы комбинаторики
      тест №3

Демонстрационный вариант билета к зачёту по дисциплине «Введение в математику»

БИЛЕТ № 0
Дисциплина «Введение в математику»
Специальность “Математика и информатика”

ЧАСТЬ I. Теоретические вопросы

1. Виды бинарных отношений.
2. Бином Ньютона.

ЧАСТЬ II. Практические задания

1. Задайте списком множество букв слова «молоко». Укажите его мощность.

Ответ:{м, о, л, к}, 4.

2. Задайте характеристическим свойством множество корней уравнения $sin\ x = 0$ двумя способами. Является ли это множество бесконечным?

Ответ: $\{x|sin\ x=0\}, \{x|x=\pi n,\ n\in \mathbf{Z}\}$.

3. Задано множество $A=\{1,2,[1,2]\}$. Являются ли правильными записи:
1) $1\subset A$;
2) $1\in A$;
3) $\{1,2\}\in A$;
4) $\{1,2\}\subset A$;
5) $[1,2]\in A$;
6) $[1,2]\subset A$;
7) $\{[1,2]\}\subset A$?

Ответ: 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) да; 6) нет; 7) да.

4. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5,6\}$. Найдите:
1) $A\cup B$;
2) $A\cap B$;
3) $A\backslash B$.

Ответ: 1) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$; 2) $\{3\}$; 3) $\{1,\ 2\}$.

5. $A=[3,5)\cup\{6\}$, $B=(4,6)$. Найдите:
1) $A\cup B$;
2) $A\cap B$;
3) $A\backslash B$.

Ответ: 1) $[3,\ 6]$; 2) $(4,\ 5)$; 3) $[3,\ 4]\cup\{6\}$.

6. Найти дополнение множества неположительных целых чисел A до множества $\mathbf{Z}$.

Ответ: $\mathbf{N}$.

7. Нарисуйте фигуру в координатной плоскости, являющуюся геометрической интерпретацией прямого (декартового) произведения множеств $[1, 2)$ и $\{2\}$.

10. Будет ли отношением эквивалентности на множестве $\mathbf{R}$ бинарное отношение «не больше» $(\leq)$?

Ответ: Нет.

8. Будет ли разбиением множества $A = \{1, 2, 3\}$ совокупность его подмножеств
$\{\{1\}, \{2\}, \{2, 3\}\}$?

Ответ: Нет.

9. Найти образ $f([1, 2])$ отрезка $[1, 2]$ и прообраз $f^{-1}((4, 9))$ интервала $(4, 9)$ при отображении $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$.

Ответ: $[1, 4]$, $(-3, -2) \cup (2, 3)$.

10. Является ли отображение $f : [0, \pi] \to [0, 1]$, $x \mapsto sin\ x$
1) сюръекцией;
2) инъекцией;
3) биекцией?

Ответ: 1) Да; 2) нет; 3) нет.

11. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 3x$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto cos\ x$. Найти $(g \circ f)(0)$.

Ответ: 1.

12. Проверить, что отображение $y : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $x \mapsto log_2\ x$ обратимо и найти обратное отображение.

Ответ: $y : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$, $x \mapsto 2^x$.

13. Построить эскиз графика функции $y = arcsin\ x (y = arccos\ x$, $y = arctg\ x, y = arcctg\ x)$. Указать $D(y)$ и $E(y)$.

14. Является ли множество четных чисел вполне упорядоченным?

Ответ: Да.

15. Какие из следующих множеств являются 1) счетными, 2) имеют мощность континуума:
а) $(-\infty, 1)$;
б)$\mathbf{T}$ (множество трансцендентных чисел);
в) $\mathbf{Z}$;
г) $\mathbf{Z} \cup (-\infty, 1)$;
д) $\mathbf{T} \times (-\infty, 1)$?

Ответ: 1) *в;* 2) *а, б, г, д.*

16. Студент должен доказать, что равенство $S(n) = 0$ выполняется для любых натуральных n, начиная с $n = 3$. Он проверил справедливость равенства $S(3) = 0$ и предположил, что $S(k) = 0$ при любых $k = 3, 4, 5, \ldots$ Какое еще утверждение ему нужно доказать, опираясь на это предположение?

Ответ: $S(k + 1) = 0$ при $k = 3, 4, 5, \ldots$

17. A и B — конечные множества, $|A| = 20$, $|A \cup B| = 50$, $|A \cap B| = 10$. Найти $|B|$.

Ответ: 40.

18. Сколькими способами из 7 кандидатур можно выбрать старосту,

профорга и физорга?

Ответ: 210.

19. Сколькими способами из 10 кандидатур можно выбрать трех делегатов на конференцию?

Ответ: 120.

20. Найти восьмой член разложения (девятый от начала) бинома Ньютона $(2a-b)^{10}$.

Ответ: $180a^2b^8$.

Литература

1. Вольвачев, Р.Т. Элементы математической логики и теории множеств / Р.Т. Вольвачев. – Минск : Университетское, 1986. – 112 с.

2. Карпов, В.Г. Математическая логика и дискретная математика / В.Г. Карпов, В.С. Мощенский. – Минск: Вышэйшая школа, 1977. – 254 с.

3. Биркгоф, Г. Современная прикладная алгебра / Г. Биркгоф, Т. Барти. – М. : Мир, 1976. – 400 с.

4. Кононов С. Г. Введение в математику : в 3-х частях / С.Г. Кононов, Р.И. Тышкевич, В.И. Янчевский. – Минск : БГУ, 2003. – Ч. 1. – 172 с.

5. Куратовский, К. Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовский. – М. : Мир, 1970. – 416 с.

6. Мощенский, В.А. Лекции по математической логике / В.А. Мощенский. – Минск : Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1973. – 159 с.

7. Харин, Н.Н. Математическая логика и теория множеств / Н.Н. Харин. – М. : Росвузиздат, 1963. – 192 с.

8. Шнеперман, Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Б. Шнеперман. – Минск : Вышэйшая школа, 1982. – 223 с.

9. Гиндикин, С.Г. Алгебра логики в задачах / С.Г. Гиндикин. – М. : Наука, 1972. – 288 с.

10. Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – М. : Наука, 1970. – 392 с.

11. Стол, Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р.Р. Стол. – М. : Просвещение, 1968. – 232 с.

12. Математика : учеб. пособие / Н.Я. Виленкин [и др.]. – М. : Просвещение, 1977. – 349 с.

13. Сборник задач по математике для поступающих в вузы: Учебное пособие/ под ред. М.И.Сканави. – 6-е изд.- М: Изд. Дом “ОНИКС 21 век”: Мир и образование, 2001. – 608 с.

14. Будько, А.Е. Дискретная математика и математическая логика : учебно-метод. рекомендации / А.Е. Будько, О.Н. Заверач. — Брест : Изд-во БрГУ им. А.С. Пушкина, 2003. — 39 с.