Доклады Национальной академии наук Беларуси

2013 январь–февраль Том 57 № 1

УДК 519.6+517.983.54

О. В. МАТЫСИК

АПОСТЕРИОРНЫЙ ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ ЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

(Представлено член-корреспондентом Л. А. Яновичем)

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина *Поступило 29.10.2012*

В сообщении предлагается итерационный метод явного типа решения некорректных задач, представляющий собой семейство итерационных схем, зависящих от параметра k. Частный случай этого метода при $k = 1$ – метод простой итерации: $x_{n+1} = x_n + \alpha(y - Ax_n),\ x_0 = 0$ является наиболее изученным. Он рассматривался в монографиях М. М. Лаврентьева [1], Г. М. Вайникко и А. Ю. Веретенникова [2], работах И. В. Емелина и М. А. Красносельского [3–4], А. Б. Бакушинского [5], монографиях А. М. Денисова [6], А. А. Самарского и П. Н. Вабищевича [7] и др. Таким образом, предлагаемый метод является обобщением ранее изученных методов. Случай приближенной правой части уравнения и точного оператора для рассматриваемого метода изучен в [8]. Там исследован априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации, изучен случай неединственного решения задачи, доказана сходимость метода в энергетической норме. Априорный выбор параметра регуляризации для метода (3) в случае, когда правая часть и оператор заданы приближённо, рассмотрен в [9]. Сравнение предлагаемого метода с методом простой итерации показывает, что по мажорантным оценкам погрешности эти методы одинаковы. Однако предлагаемый метод имеет преимущество по сравнению с методом простой итерации в следующем: выполнение здесь одного шага итераций равносильно выполнению k шагов по методу простой итерации.

В данном сообщении продолжено изучение предлагаемого метода. Доказана его сходимость в случае апостериорного выбора числа итераций и получены оценки погрешности метода и оценки момента останова в предположении, что оператор задан приближено.

1. Постановка задачи. Пусть H и F – гильбертовы пространства, $A \in \mathfrak{L}(H, F)$, т. е. A – линейный оператор, действующий из H в F. Решается уравнение

$$Ax = y. \tag{1}$$

Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением.

Задача отыскания элемента $x \in H$ по элементу $y \in F$ является некорректной, так как сколь угодно малые возмущения в правой части y могут вызывать большие возмущения решения.

Предположим, что точное решение $x^* \in H$ уравнения (1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью итерационного метода

$$x_n = (E - \alpha A)^k x_{n-1} + A^{-1}[E - (E - \alpha A)^k]y,\ x_0 = 0,\ k \in N. \tag{2}$$

Считаем, что оператор A и правая часть y уравнения (1) заданы приближенно, т. е. вместо y известно приближение y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, а вместо оператора A известен оператор A_η, $\|A_\eta - A\| \le \eta$. Тогда метод (2) примет вид

$$x_{n(\delta,\eta)} = (E - \alpha A_\eta)^k x_{(n-1)(\delta,\eta)} + A_\eta^{-1}[E - (E - \alpha A_\eta)^k]y_\delta,\ x_{0(\delta,\eta)} = 0, k \in N. \tag{3}$$

Априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации в случае приближённой правой части и точного оператора для метода (3) изучен в [8]. Априорный выбор параметра регуляризации для метода (3) в случае, когда правая часть и оператор заданы приближённо, рассмотрены в [9].

Докажем сходимость метода (3) в случае апостериорного выбора параметра регуляризации для решения уравнения $A_\eta x = y_\delta$, где оператор A_η и правая часть уравнения заданы приближённо: $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Подобные вопросы изучались в [2], но только для других методов. Считаем, что нуль не является собственным значением оператора A_η, но принадлежит его спектру.

2. Правило останова по невязке. Зададим уровень останова ε > 0 и определим момент m останова итерационного процесса (3) условием

$$\left.\begin{aligned} &\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m),\\ &\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\| \le \varepsilon, \end{aligned}\right\} \ \varepsilon = b(\delta + \|x^*\|\eta), b > 1. \tag{4}$$

Предположим, что при начальном приближении $x_{0(\delta,\eta)}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|Ax_{0(\delta,\eta)} - y_\delta\| > \varepsilon.$ Покажем возможность применения правила (4) к методу (3).

3. Случай самосопряженной задачи. Пусть $H = F$, $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\sigma(A_\eta) \subseteq [0, M]$. Итерационный метод (3) запишем в виде

$$x_{n(\delta,\eta)} = g_n(A_\eta) y_\delta, \tag{3^1}$$

где $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}[1 - (1 - \alpha\lambda)^{kn}]$. В [8] получены условия для функций $g_n(\lambda)$:

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |g_n(\lambda)| \le \gamma n,\ \gamma = k\alpha,\ (n > 0),\ 0 < \alpha < \frac{2}{M}, \tag{5}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le \gamma_s n^{-s},\ \gamma_s = \left(\frac{s}{k\alpha e}\right)^s,\ 0 < \alpha \le \frac{5}{4M},\ 0 < s \le s_0 \tag{6}$$

(здесь s – степень истокопредставимости точного решения, $x^* = A^s z$, $\|z\| \le \rho$),

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le \gamma_0,\ \gamma_0 = 1,\ (n > 0),\ 0 < \alpha < \frac{2}{M}, \tag{7}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \to 0,\ n \to \infty,\ 0 < \alpha < \frac{2}{M}. \tag{8}$$

Справедлива

Л е м м а 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\| \le M$, *и выполнено условие* (6) *с* $s_0 > 1$. *Тогда для* $G_{n\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$ *справедливо соотношение для* $\forall \upsilon \in \overline{R(A)}$:

$$n\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\| \to 0 \ \textit{при}\ n \to \infty,\ \eta \to 0. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теоремой Банаха–Штейнгауза [10, с. 151], по которой сходимость $B_n u \to Bu$ при $n \to \infty$ для $\forall u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|$, $n = 1, 2, \ldots,$ ограничены не зависящей от n постоянной. Здесь $\|B_n\| = n\|A_\eta G_{n\eta}\|$ и по условию (6) нормы $\|B_n\|$ ограничены в совокупности

$$n\|A_\eta G_{n\eta}\| = n\|A_\eta(E - A_\eta g_n(A_\eta))\| = n \sup_{0\le\lambda\le M} \lambda|1 - \lambda g_n(\lambda)| \le n\gamma_1 n^{-1} = \gamma_1, (n > 0, \eta > 0).$$

Для элементов вида $\upsilon = A\omega$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, в силу (6) имеем

$$n\left\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\right\|=n\left\|A_\eta G_{n\eta}A\omega\right\|\le n\left\|A_\eta G_{n\eta}(A-A_\eta)\omega\right\|+n\left\|A_\eta G_{n\eta}A_\eta\omega\right\|\le\left(\gamma_1\eta+n\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^2\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\right)\|\omega\|\le$$
$$(\gamma_1\eta+n\gamma_2 n^{-2})\|\omega\|=(\gamma_1\eta+\gamma_2 n^{-1})\|\omega\|\to 0,\ n\to\infty,\eta\to 0.$$

По теореме Банаха–Штейнгауза $n\left\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\right\|\to 0$ при $n\to\infty,\eta\to 0.$ Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ A_\eta=A_\eta^*\ge 0,\ \left\|A_\eta-A\right\|\le\eta,\ \left\|A_\eta\right\|\le M,$ *и выполнены условия* (*6*) *и* (*8*). *Если для некоторых* $\upsilon_0\in\overline{R(A)},\ n_p\le\bar{n}=\text{const}$ *и* $\eta_p\to 0$ *имеем* $A_{\eta_p}G_{n_p}\upsilon_0\to 0$ *при* $p\to 0,$ *то* $G_{n_p\eta_p}\upsilon_0\to 0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу неравенства (7) последовательность $\upsilon_p=G_{n_p\eta_p}\upsilon_0$ ограничена, т. е. $\left\|\upsilon_p\right\|=\left\|G_{n_p\eta_p}\upsilon_0\right\|\le\gamma_0\left\|\upsilon_0\right\|,\ p\in N=\{1,2,...\}.$ Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $\upsilon_p-\!\!\to\upsilon,(p\in N'\subseteq N).$ Тогда $A_{\eta_p}\upsilon_p-\!\!\to A_{\eta_p}\upsilon,(p\in N').$ По условию $\omega_p=A_{\eta_p}\upsilon_p\to 0,$ значит, $A_{\eta_p}\upsilon=0.$ Но так как нуль не является собственным значением оператора A_{η_p}, то $\upsilon=0.$ Теперь $\left\|\upsilon_p\right\|^2=(\upsilon_p,G_{n_p\eta_p}\upsilon_0)=(\upsilon_p,(E-A_{\eta_p}g_{n_p}(A_{\eta_p}))\upsilon_0)=(\upsilon_p,\upsilon_0)$ – $(A_{\eta_p}\upsilon_p,g_{n_p}(A_{\eta_p})\upsilon_0)=(\upsilon_p,\upsilon_0)-$– $(\omega_p,g_{n_p}(A_{\eta_p})\upsilon_0)\to(\upsilon,\upsilon_0)=(0,\upsilon_0)=0,\quad(p\in N'),$ так как $\omega_p\to 0,\ \left\|g_{n_p}(A_{\eta_p})\right\|\le\gamma n_p\le\gamma\bar{n}.$ Итак, любая слабо сходящаяся подпоследовательность ограниченной последовательности υ_p стремится к нулю по норме. Отсюда следует, что и вся последовательность $\upsilon_p\to 0,\ p\to\infty$ по норме. Лемма 2 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующих теорем.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $H=F,\ A=A^*\ge 0,\ A_\eta=A_\eta^*\ge 0,\ \left\|A_\eta-A\right\|\le\eta,\ \left\|A_\eta\right\|\le M,\ (0<\eta\le\eta_0),$ $y\in R(A),\ \left\|y-y_\delta\right\|\le\delta$ *и выполнены условия* (*6*), (*7*) *с* $s_0>1.$ *Пусть параметр* $m(\delta,\eta)$ *выбран по правилу* (*4*). *Тогда* $(\delta+\eta)m(\delta,\eta)\to 0,\ x_{m(\delta,\eta)}\to x^*$ *при* $\delta\to 0,\ \eta\to 0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $x_{n(\delta,\eta)}=g_n(A_\eta)y_\delta,$ тогда

$$x_{n(\delta,\eta)}-x^*=-x^*+g_n(A_\eta)y_\delta=-G_{n\eta}x^*+G_{n\eta}x^*-x^*+g_n(A_\eta)y_\delta=-G_{n\eta}x^*+(E-A_\eta g_n(A_\eta))x^*-$$
$$x^*+g_n(A_\eta)y_\delta=-G_{n\eta}x^*+x^*-A_\eta g_n(A_\eta)x^*-x^*+g_n(A_\eta)y_\delta=-G_{n\eta}x^*+g_n(A_\eta)(y_\delta-A_\eta x^*).$$

Следовательно,

$$x_{n(\delta,\eta)}-x^*=-G_{n\eta}x^*+g_n(A_\eta)(y_\delta-A_\eta x^*).\tag{10}$$

Отсюда,

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)}-A_\eta x^*=-A_\eta G_{n\eta}x^*+A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta-A_\eta g_n(A_\eta)A_\eta x^*;$$
$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)}=A_\eta x^*-A_\eta G_{n\eta}x^*+A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta-A_\eta g_n(A_\eta)A_\eta x^*;$$
$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)}-y_\delta=-A_\eta G_{n\eta}x^*-y_\delta+(E-A_\eta g_n(A_\eta))A_\eta x^*+A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta=-A_\eta G_{n\eta}x^*+G_{n\eta}A_\eta x^*-$$
$$(E-A_\eta g_n(A_\eta))y_\delta=-A_\eta G_{n\eta}x^*+G_{n\eta}A_\eta x^*-G_{n\eta}y_\delta=-A_\eta G_{n\eta}x^*-G_{n\eta}(y_\delta-A_\eta x^*).$$

Итак,

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)}-y_\delta=-A_\eta G_{n\eta}x^*-G_{n\eta}(y_\delta-A_\eta x^*).\tag{11}$$

Покажем, что $\left\|G_{n\eta}x^*\right\|\to 0$ при $n\to\infty,\ \eta\to 0.$ В силу (7) имеем $\left\|G_{n\eta}\right\|=\left\|E-A_\eta g_n(A_\eta)\right\|\le\gamma_0,$ $(n>0,0<\eta\le\eta_0).$ Для элементов вида $u=A\omega,$ образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, на основании (8) имеем

$$\left\|G_{n\eta}u\right\|=\left\|G_{n\eta}A\omega\right\|\le\left\|G_{n\eta}(A-A_\eta)\omega\right\|+\left\|G_{n\eta}A_\eta\omega\right\|\le\left(\gamma_0\eta+\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\right)\|\omega\|\le(\gamma_0\eta+\gamma_1 n^{-1})\|\omega\|\to 0,$$

при $n\to\infty,\eta\to 0.$ Итак,

$$\left\|G_{n\eta}x^*\right\| \to 0,\ n\to\infty,\ \eta\to 0. \tag{12}$$

Покажем, что

$$\left\|g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\right\| \le \gamma n(\delta + \left\|x^*\right\|\eta). \tag{13}$$

По условию (5)

$$\left\|g_n(A_\eta)\right\| \le \sup_{0\le\lambda\le M}\left|g_n(\lambda)\right| \le \gamma n,\ \text{а}\ \left\|y_\delta - A_\eta x^*\right\| \le \left\|y_\delta - y\right\| + \left\|y - A_\eta x^*\right\| =$$

$\left\|y_\delta - y\right\| + \left\|Ax^* - A_\eta x^*\right\| \le \delta + \left\|(A - A_\eta)x^*\right\| \le \delta + \left\|x^*\right\|\eta,$ поэтому $\left\|g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\right\| \le \gamma n(\delta + \left\|x^*\right\|\eta).$

В силу леммы 1

$$\sigma_{n\eta} = n\left\|A_\eta G_{n\eta}x^*\right\| \to 0,\ n\to\infty,\ \eta\to 0. \tag{14}$$

Применим правило останова (4), тогда $\left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| \le b(\delta + \left\|x^*\right\|\eta),\ b > 1$ и из (7) и (11) получим

$$\left\|A_\eta G_{m\eta}x^*\right\| \le (b+1)(\delta + \left\|x^*\right\|\eta). \tag{15}$$

Действительно, из (11)

$$\left\|A_\eta G_{m\eta}x^*\right\| \le \left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| + \left\|G_{m\eta}(y_\delta - A_\eta x^*)\right\| \le b(\delta + \left\|x^*\right\|\eta) + (\delta + \left\|x^*\right\|\eta) = (b+1)(\delta + \left\|x^*\right\|\eta).$$

Для $\forall n < m$ $\left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| > \varepsilon,$ потому

$$\left\|A_\eta G_{n\eta}x^*\right\| \ge \left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| - \left\|G_{n\eta}(y_\delta - A_\eta x^*)\right\| \ge (b-1)(\delta + \left\|x^*\right\|\eta).$$

Следовательно, для $\forall n < m$

$$\left\|A_\eta G_{n\eta}x^*\right\| \ge (b-1)(\delta + \left\|x^*\right\|\eta). \quad (16)$$

Из (16) и (14) при $n = m-1$ $\dfrac{\sigma_{m-1,\eta}}{m-1} = \left\|A_\eta G_{m-1,\eta}x^*\right\| \ge (b-1)(\delta + \left\|x^*\right\|\eta)$ или $(m-1)(\delta + \left\|x^*\right\|\eta) \le \dfrac{\sigma_{m-1,\eta}}{b-1} \to_{\sigma_{m\eta}\to 0,\, m\to\infty,\, \eta\to 0}$ (так как из (14) $\sigma_{m\eta}\to 0, m\to\infty, \eta\to 0$). Если при этом $m(\delta,\eta)\to\infty$ при $\delta\to 0, \eta\to 0,$ то, используя (10), (12) и (13), получим

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|G_{m\eta}x^*\right\| + \left\|g_m(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\right\| \le \left\|G_{m\eta}x^*\right\| + \gamma m(\delta,\eta)(\delta + \left\|x^*\right\|\eta) \to 0,\ m\to\infty,\ \delta\to 0,\ \eta\to 0,$$

т. е. что $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*.$

Если же для некоторых δ_n и η_n последовательность $m(\delta_n,\eta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n,\eta_n)} \to x^*, \delta_n\to 0, \eta_n\to 0.$ Действительно, из (15) выполняется

$$\left\|A_{\eta_n}G_{m\eta_n}x^*\right\| \le (b+1)(\delta_n + \left\|x^*\right\|\eta_n) \to 0,\ \delta_n\to 0,\ \eta_n\to 0.$$

Следовательно, имеем $A_{\eta_n}G_{m\eta_n}x^* \to 0, \delta_n\to 0, \eta_n\to 0$ и по лемме 2 получаем, что при $\delta_n\to 0, \eta_n\to 0$ выполняется $G_{m\eta_n}x^* \to 0.$ Отсюда $\left\|x_{m(\delta_n,\eta_n)} - x^*\right\| \le \left\|G_{m\eta_n}x^*\right\| + \gamma m(\delta_n,\eta_n)\ (\delta_n + \left\|x^*\right\|\eta_n) \to 0,\ \delta_n\to 0,$ $\eta_n\to 0.$ Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Если* $x^* = A^s z, s > 0, \left\|z\right\| \le \rho,$ *то справедливы оценки* $m \le 1 + \dfrac{s+1}{k\alpha e}\dfrac{\rho^{1/(s+1)}}{[(b-1)(\delta + \left\|x^*\right\|\eta) - c_s\gamma_1\eta\rho]^{1/(s+1)}};$

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)}-x^*\right\|\le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+[c_s\gamma_1\eta\rho+(b+1)(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}+$$
$$k\alpha\left\{1+\frac{s+1}{k\alpha e}\frac{\rho^{1/(s+1)}}{[(b-1)(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)-c_s\gamma_1\eta\rho]^{1/(s+1)}}\right\}(\delta+\left\|x^*\right\|\eta). \qquad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим заново элемент $\left\|A_\eta G_{m-1,\eta}x^*\right\|$. В силу (6) и леммы 1 [2, с. 91] $\left\|A_\eta G_{m-1,\eta}x^*\right\|=\left\|A_\eta G_{m-1,\eta}A^s z\right\|\le\left\|A_\eta G_{m-1,\eta}(A^s-A_\eta^s)z\right\|+\left\|A_\eta^{s+1}G_{m-1,\eta}z\right\|\le(\beta_{m-1,s}\eta+\gamma_{s+1}(m-1)^{-(s+1)})\rho$, где $\beta_{m-1,s}=c_s\sup\limits_{0\le\lambda\le M}\lambda(1-\lambda g_{m-1}(\lambda))\le[k(m-1)\alpha e]^{-1}c_s=c_s\gamma_1(m-1)^{-1}$, $\beta_{m-1,s}\to 0$, $m\to\infty$. Сопоставляя это с (16), получим $(b-1)(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)\le(\beta_{m-1,s}\eta+\gamma_{s+1}(m-1)^{-(s+1)})\rho$. Отсюда $\gamma_{s+1}(m-1)^{-(s+1)}\rho\ge(b-1)\times(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)-\beta_{m-1,s}\eta\rho$, тогда $(m-1)^{(s+1)}\le\dfrac{\gamma_{s+1}\rho}{[(b-1)(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)-\beta_{m-1,s}\eta\rho]}$, и $m\le 1+\dfrac{s+1}{k\alpha e}\times\left[\dfrac{\rho}{(b-1)(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)-\beta_{m-1,s}\eta\rho}\right]^{1/(s+1)}$.

Поскольку $\beta_{m-1,s}=c_s\gamma_1\dfrac{1}{m-1}\le c_s\gamma_1$ (так как при $(b-1)(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)-$), то $(b-1)(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)-\beta_{m-1,s}\eta\rho\ge$ $(b-1)(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)-c_s\gamma_1\eta\rho$, и, значит, получим следующую оценку для m: $m\le 1+\dfrac{s+1}{k\alpha e}\dfrac{\rho^{1/(s+1)}}{[(b-1)(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)-c_s\gamma_1\eta\rho]^{1/(s+1)}}$.

Из (10) и (13) имеем $\left\|G_{m\eta}x^*\right\|=\left\|G_{m\eta}A^s z\right\|\le\left\|G_{m\eta}(A^s-A_\eta^s)z\right\|+\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|$. По [2, с. 91, лемма 1.1] $\left\|G_{m\eta}(A^s-A_\eta^s)z\right\|\le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho$, где $c_s=\mathrm{const}$, ($0<c_s\le 2$ для $0<s\le 1$), что дает в оценку $\left\|x_{m(\delta,\eta)}-x^*\right\|$ вклад $O(\delta+\eta)^{s/(s+1)}$ [2, с. 111]. Норму $\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|$ оценим с помощью неравенства моментов [2, с. 91, лемма 1.1] и (15):

$$\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|=\left\|A_\eta^s G_{m\eta}z\right\|=\left\|A_\eta^{s+1}G_{m\eta}z\right\|^{s/(s+1)}\left\|G_{m\eta}z\right\|^{1/(s+1)}\le\left\|A_\eta G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|^{s/(s+1)}\left\|z\right\|^{1/(s+1)}\le\Big(\left\|A_\eta G_{m\eta}(A_\eta^s-A^s)z\right\|+$$
$$\left\|A_\eta G_{m\eta}A^s z\right\|\Big)^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}\le\left[\beta_{ms}\eta\rho+(b+1)(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}.$$

Тогда

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)}-x^*\right\|\le\left\|G_{m\eta}x^*\right\|+\left\|g_m(A_\eta)(y_\delta-A_\eta x^*)\right\|\le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+\left[\beta_{ms}\eta\rho+(b+1)\times\right.$$
$$\left.(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}+\gamma m(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)\le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+\left[c_s\gamma_1\eta\rho+(b+1)(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}+$$
$$k\alpha\left\{1+\frac{s+1}{k\alpha e}\frac{\rho^{1/(s+1)}}{[(b-1)(\delta+\left\|x^*\right\|\eta)-c_s\gamma_1\eta\rho)]^{1/(s+1)}}\right\}(\delta+\left\|x^*\right\|\eta).$$

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 1. *Порядок оценки* (*17*) *есть* $O((\delta+\eta)^{s/(s+1)})$ *и, как следует из [2], он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

З а м е ч а н и е 2. *Хотя формулировка теоремы 2 даётся с указанием степени истокопредставимости s и истокопредставляющего элемента z, на практике их значение не потребуются, так как они не содержатся в правиле останова* (*4*).

4. Случай несамосопряжённой задачи. В случае несамосопряжённой задачи итерационный метод (3) примет вид

$$x_{n(\delta,\eta)}=(E-\alpha A_\eta^*A_\eta)^k x_{(n-1)(\delta,\eta)}+(A_\eta^*A_\eta)^{-1}[E-(E-\alpha A_\eta^*A_\eta)^k]A_\eta^*y_\delta,\ x_{0(\delta,\eta)}=0,\ k\in N. \qquad (18)$$

Нетрудно показать, что метод (18) с правилом останова (4) сходится и получить оценку для момента останова и оценку погрешности метода (18). Справедливы

Л е м м а 3. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathfrak{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \le \eta, \|A_\eta\|^2 \le M$ *и выполнено условие* (*6*) *с* $s_0 > 1/2$. *Тогда* $n^{1/2}\|A_\eta K_{n\eta} v\| \to 0$ *при* $n \to \infty, \eta \to 0$, $\forall v \in R(A^*)$, *где* $K_{n\eta} = E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)$. *Если* $s_0 > 1$, *то* $n\|A_\eta^* A_\eta K_{n\eta} v\| \to 0$ *при* $n \to \infty, \eta \to 0, \forall v \in R(A^*)$.

Л е м м а 4. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathfrak{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \le \eta, \|A_\eta\|^2 \le M$ *и выполнены условия* (*6*), (*8*). *Если для некоторого* $v_0 \in R(A^*)$, $n_p \le \bar{n} = \text{const}$ *и* $\eta_p \to 0$ *имеем* $A_{\eta_p} K_{n_p \eta_p} v_0 \to 0$ *или* $A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} K_{n_p \eta_p} v_0 \to 0$ *при* $p \to 0$, *то* $K_{n_p \eta_p} v_0 \to 0$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathfrak{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \le \eta, \|A_\eta\|^2 \le M$, $(0 < \eta \le \eta_0)$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, *и выполнены условия* (*6*), (*7*) *с* $s_0 > 1/2$, $\gamma_0 = 1$. *Пусть параметр* $m(\delta, \eta)$ *выбран по правилу* (*4*). *Тогда* $(\delta + \eta)^2 m(\delta, \eta) \to 0$, $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Если* $x^* = |A|^s z$, $s > 0$, $\|z\| \le \rho$, $|A| = (A^* A)^{1/2}$, *то справедливы оценки* $m \le 1 + \dfrac{s+1}{2k\alpha e}\left[\dfrac{\rho}{(b-1)(\delta + \|x^*\|\eta) - c_s \gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{2/(s+1)}$;

$$\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\| \le c_s(1 + |\ln\eta|)\eta^{\min(1,s)} + \left[c_s\gamma_{1/2}\eta\rho + (b+1)(\delta + \|x^*\|\eta)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} +$$

$$\left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2}\left\{1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)(\delta + \|x^*\|\eta) - c_s\gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{2/(s+1)}\right\}^{1/2}(\delta + \|x^*\|\eta). \tag{19}$$

Доказательство лемм 3–4, теорем 3–4 аналогично доказательству подобных лемм и теорем из раздела 3.

З а м е ч а н и е 3. *Порядок оценки* (*19*) *есть* $O((\delta + \eta)^{s/(s+1)})$ *и, как следует из [2], он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

З а м е ч а н и е 4. *Знание порядка* $s > 0$ *и истокопредставляющего элемента* z, *используемое в теореме 4, на практике не потребуется. При останове по невязке автоматически делается нужное число итераций для получения оптимального по порядку решения.*

Литература

1. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
2. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. М., 1986.
3. *Емелин И. В., Красносельский М. А.* // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244, № 4. С. 805–808.
4. *Емелин И. В., Красносельский М. А.* // Автоматика и телемеханика. 1978. № 12. С. 59–63.
5. *Бакушинский А. Б.* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 3. С. 672–677.
6. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М., 1994.
7. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М., 2004.
8. *Матысик О. В.* // Докл. НАН Беларуси. 2005. Т. 49, № 3. С. 38–43.
9. *Матысик О. В., Савчук В. Ф.* // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 1. С. 10–15.
10. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., 1965.

O. V. MATYSIK

matysik@brsu.brest.by

A POSTERIORI CHOICE OF THE REGULARIZATION PARAMETER IN THE EXPLICIT ITERATION METHOD FOR SOLUTION OF LINEAR EQUATIONS WITH AN APPROXIMATE OPERATOR

Summary

An explicit iteration method for solution of first-kind operator equations with non-negative self-conjugated and non-self-conjugated bounded operator in the Hilbert space is proposed. Convergence of the method is proved in the case of an a posteriori choice of a number of iterations in the usual norm of the Hilbert space, supposing that not only the right hand-side of the equation, but also the operator has errors. Estimates of an error and a posteriori moment of stop are obtained.