УДК 517.927.21, 517.518.82

С.А. Марзан
Беларусь, Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

Разработан алгоритм приближенного решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто порядка $\alpha > 1$, основанный на применении модифицированного апроксимационно-итеративного метода В.К. Дзядыка, и позволяющий без применения операции интегрирования получить почти такие же результаты, какие дает метод последовательных приближений. С использованием свойств дробных интегралов и производных Римана–Лиувилля в пространстве непрерывных функций получена оценка точного и приближенного решений рассматриваемой задачи.

Пусть $I_{a+}^{\alpha} g$ и $D_{a+}^{\alpha} y$ - дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси:

$$(I_{a+}^{\alpha} g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \tag{1}$$

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-n+\alpha}}, \quad n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1, \tag{2}$$

($[\mathrm{Re}(\alpha)]$ - целая часть $\mathrm{Re}(\alpha)$) [1, §2.2, 2.4]. Обозначим через ${}^{c}D_{a+}^{\alpha} y$ модифицированную дробную производную, определяемую формулой

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right]\right)(x) \ (\alpha \in C,\ \mathrm{Re}(\alpha) > 0), \tag{3}$$

$n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ при $\alpha \notin N = \{1,2,\ldots\}$, $n = \alpha$ при $\alpha \in N$.

Если $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \le n$ $(n \in N)$ и $y(x) \in C^n[a,b]$ – функция, n раз непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$, то при $\alpha \in N$ производная ${}^{c}D_{a+}^{\alpha} y$ совпадает с обычной производной:

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \left(D^n y\right)(x) \quad \left(n \in N; D = \frac{d}{dx}\right),$$

а при $n-1 < \alpha < n$ оператор ${}^{c}D_{a+}^{\alpha}$ представляется в виде композиции оператора дробного интегрирования $I_{a+}^{n-\alpha}$ и оператора дифференцирования D^n:

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=\left(I_{a+}^{n-\alpha}D^{n}y\right)(x)\left(n-1<\alpha<n,\, n\in N;\, D=\frac{d}{dx}\right). \tag{4}$$

Конструкция (4) введена итальянским механиком Капуто [2] в связи с решением задач вискоэластичности ([2]–[3]), и поэтому выражения (3) и (4) называют дробными производными Капуто порядка $\alpha \in C$.

Краевые задачи для так называемых дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция входит под знаком дробной производной, изучались многими авторами; см. исторические сведения и обзор методов и результатов в [1, §§ 42–43] и обзорной статье [4]. Интерес к таким проблемам вызван их приложениями в задачах физики, механики и других прикладных наук ([5]–[6]).

Настоящая работа посвящена приближенному решению задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто порядка $\alpha > 1$:

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=f[x,y],\ y^{(j)}(a)=b_{j},\ b_{j}\in C\ \ (j=0,1,\ldots,n-1), \tag{5}$$

где $n=[\alpha]+1$ при $\alpha \notin N$, $n=\alpha$ при $\alpha \in N$, посредством приближенного решения равносильного ей [7] интегрального уравнения Вольтерра

$$y(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{b_{j}}{j!}(x-a)^{j}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{f[t,y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\,. \tag{6}$$

Положив

$$y_{0}(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{b_{j}}{j!}(x-a)^{j},$$

$$y_{m}(x)=y_{0}(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{f[t,y_{m-1}(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\ \ (m=1,2,...), \tag{7}$$

и используя метод последовательных приближений, можно показать, что если функция $f[x,y]:[a,b]\times R\to R$ удовлетворяет условию липшицевости относительно второй переменной

$$\left|f[x,y]-f[x,y_{1}\right|\le L\left|y-y_{1}\right|, \tag{8}$$

а также условиям

$$\max_{(x,y)\in[a,b]\times\overline{R}}\left|f[x,y]\right|=M<\infty,\ L\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}<1, \tag{9}$$

то каждая из функций $y_{m}(x)\ \ (m=0,1,\ldots)$, определяемая равенством (7), приближает решение $y(x)$ задачи Коши (5) так, что имеет место неравенство

$$|y(x)-y_m(x)|\le\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{m+1}\frac{ML^m}{1-L\dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}}. \qquad (10)$$

Неравенство (10) показывает, что функции $y_m(x)$ достаточно быстро сходятся к искомому решению $y(x)$ задачи Коши (5). Вместе с тем, из-за содержащейся в процессе вычисления функций $y_m(x)$ операции интегрирования итеративный процесс (7) на практике, как правило, очень трудно использовать для эффективного построения функций $y_m(x)$. В настоящей работе будет изложен алгоритм, построенный на основании апроксимационно-итеративного метода В.К. Дзядыка [8, с. 98–120], который позволит, в частности без применения операции интегрирования, получить почти такие же результаты, какие дает метод последовательных приближений.

Представим уравнение (6) в виде

$$y(x)=g(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f[t,y(t)]K(x,t)dt \quad (\alpha>1), \qquad (11)$$

где

$$g(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{b_j}{j!}(x-a)^j,$$

$$K(x,t)=(x-t)^{\alpha-1}.$$

Далее будем использовать стандартные интерполяционные многочлены Лагранжа $L_n(f;x)$, полученные в результате отображения с отрезка $[-1,1]$ на отрезок $[a,b]$ стандартного интерполяционного многочлена $L_n^*(f;x)$, построенного по узлам

$$\xi_j^{(l)}=-\cos\frac{j\pi}{l} \quad (j=0,...,l;\ l\in N),$$

[9, ст. 399]. Это отображение осуществляется формулой

$$t=a+\frac{(b-a)(1+\xi)}{2},$$

и поэтому $L_n(f;x)$ – интерполяционный многочлен, построенный по узлам

$$t_j^{(l)}=a+\frac{(b-a)(1+\xi_j^{(l)})}{2} \quad (j=0,...,l). \qquad (12)$$

Известно, что имеет место соотношение [8, с. 111]

$$\|L_n\|=\|L_n^*\|. \qquad (13)$$

Поскольку узлы $\xi_j^{(l)}=-\cos\dfrac{j\pi}{l}$ $(j=0,...,l)$ служат корнями многочлена

$$\overset{0}{U}_{l+1}(x) = (1-x^2)U_{l-1}(x) = \sqrt{1-x^2}\,\sin l \arccos x\,,$$

где $U_{l-1}(x)$ – полином Чебышева 2-го рода степени $l-1$ [8, (I.1.27)], то фундаментальные многочлены $l_j^{*(l)}(\xi)$ могут быть представлены по формуле [8, (I.3.20)]

$$l_j^{*(l)}(\xi) = l_j^{*(l)}(l;\xi) = \frac{\overset{0}{U}_{l+1}(\xi)}{(\xi-\xi_j^{(l)})\overset{0}{U}{}'_{l+1}(\xi_j^{(l)})} =$$

$$= \frac{\varepsilon_j}{l}\left[1-(-1)^{l-j}T_l(\xi) + 2\sum_{\nu=1}^{l}(-1)^{\nu}\frac{\cos j\nu\pi}{l}T_\nu(\xi)\right], \tag{14}$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon_l = \dfrac{1}{2}$ и $\varepsilon_j = 1$ для любого $j = 1,2,\ldots.l-1$ и $T_\nu(\xi)$ – полином Чебышева первого рода.

Отправляясь от этих фундаментальных многочленов, построим при фиксированных натуральных l и m, матрицу чисел

$$a_{ij}^{(l,m)} = \int_{-1}^{\xi_i^{(l)}} l_j^{*(l)}(\xi)d\xi \quad (i = 0,\ldots,l;\; j = 0,\ldots,m)\,,$$

явные выражения для которых будут получены ниже.

Обозначим через A интегральный оператор в правой части уравнения (11):

$$(Ay)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f[t,y(t)]K(x,t)dt\,. \tag{15}$$

Будем считать, что $K(x,t) \equiv 0$ при $x \le t$, и определим оператор (интерполяционный многочлен) $\widetilde{A}$ формулой

$$(\widetilde{A}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=0}^{l}\int_a^{t_i^{(l)}}\sum_{j=0}^{m} f\left[t_j^{(m)}, y\left(t_j^{(m)}\right)\right]K\left(t_i^{(l)}, t_j^{(m)}\right)l_j^{(m)}dt\cdot l_i^{(l)}(x)\,. \tag{16}$$

Здесь узлы $t_i^{(l)}$ и $t_j^{(m)}$ определяются по формуле (12), а $l_i^{(l)}(x)$ и $l_i^{(m)}(x)$ – фундаментальные многочлены Лагранжа по узлам $t_i^{(l)}$ и $t_i^{(m)}$ соответственно.

Построим при помощи итерационного процесса по ν функции $\widetilde{y}_\nu(x)$ вида

$$\widetilde{y}_0 = g(x),\; \widetilde{y}_\nu = g(x) + \widetilde{A}\widetilde{y}_{\nu-1}, \quad \nu = 1,2,\ldots \tag{17}$$

Лемма 1. *Функции $\widetilde{y}_\nu(x)$ являются алгебраическими многочленами вида*

$$\tilde{y}_0(x)=g(x),\ \tilde{y}_\nu(x)=g(x)+\frac{b-a}{2\Gamma(\alpha)}\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{m}a_{ij}^{(l,m)}f\left[t_j^{(m)},\tilde{y}_{\nu-1}\left(t_j^{(m)}\right)\right]K\left(x_i^{(l)},t_j^{(m)}\right)l_i^{(l)}(x)\ ,\qquad(18)$$

где $l_i^{(l)}$, $l_j^{(m)}$ *– фундаментальные многочлены Лагранжа по узлам* $t_i^{(l)}$ *и* $t_i^{(m)}$ *соответственно.*

Доказательство. При $\nu=0$ утверждение леммы вытекает из (17) и (13).

Осуществляя замену

$$t=a+\frac{b-a}{2}(\xi+1)\,,$$

и введя обозначение $l_j^{(m)}(t):=l_j^{*(m)}\left[-1+\frac{2}{b-a}(t-a)\right]$, имеем:

$$\int_a^{t_i^{(l)}}l_j^{(m)}(t)dt=\int_a^{t_i^{(l)}}l_j^{*(m)}\left[-1+\frac{2}{b-a}(t-a)\right]dt=$$

$$=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{\xi_i^{(l)}}l_j^{*(m)}(\xi)d\xi=\frac{b-a}{2}a_{ij}^{(l,m)},\quad i=0,...,l,\ j=0,...,m.\qquad(19)$$

Лемма доказана.

Следующее утверждение устанавливает явный вид чисел $a_{ij}^{(l,m)}$.

Лемма 2. *Пусть* $l,m\in N$, $i=0,\dots,l$, $j=0,\dots,m$. *Тогда*

$$a_{ij}^{(l,m)}=\frac{\varepsilon_j}{m}\left\{1-C_i^{(l)}+\frac{1}{2}C_j^{(m)}\left(1-C_{2i}^{(l)}\right)+\sum_{\nu=2}^{m}\varepsilon_\nu C_{j\nu}^{(m)}\left[\frac{C_{(\nu-1)i}^{(l)}}{\nu-1}-\frac{C_{(\nu+1)i}^{(l)}}{\nu+1}-\frac{2}{\nu^2-1}\right]\right\},$$

где $\varepsilon_0=\varepsilon_m=\frac{1}{2}$, $\varepsilon_\nu=1$ *при* $\nu=1,\dots,m-1$ *и* $C_k^{(s)}=\cos\frac{k\pi}{s}$.

Доказательство. Учитывая (18) и тот факт, что при каждом $\nu=2,3,\dots$ имеет место равенство [8, с. 105]

$$\int_0^x T_\nu(\xi)d\xi=\int_{\arccos x}^{\frac{\pi}{2}}\cos\nu s\sin s ds=\frac{1}{2}\left\{\frac{T_{\nu+1}(x)}{\nu+1}-\frac{T_{\nu-1}(x)}{\nu-1}\right\}+c_\nu,\ c_\nu=const,$$

получаем:

$$a_{ij}^{(l,m)}=\int_{-1}^{\xi_i^{(l)}}l_j^{*(m)}(\xi)d\xi=\frac{\varepsilon_j}{m}\left\{\xi-\xi^2\cos\frac{j\pi}{m}+\sum_{\nu=2}^{m}(-1)^\nu\frac{\cos j\pi\nu}{m}\left(\frac{T_{\nu+1}(\xi)}{\nu+1}-\frac{T_{\nu-1}(\xi)}{\nu-1}\right)-\right.$$

$$-\frac{(-1)^{m-j}}{2}\left[\frac{T_{m+1}(\xi)}{m+1}-\frac{T_{m-1}(\xi)}{m-1}\right]\Bigg\}\Bigg|_{-1}^{\xi_i^{(l)}}=\left\{1-\cos\frac{i\pi}{l}-\cos\frac{j\pi}{m}\left(\cos^2\frac{i\pi}{l}-1\right)+\right.$$

$$+\sum_{v=2}^{m}(-1)^{v}\frac{\cos jv\pi}{m}\left[\frac{\cos\left[(v+1)\left(1-\frac{i}{\pi}\right)\pi\right]}{v+1}-\frac{\cos\left[(v-1)\left(1-\frac{i}{\pi}\right)\pi\right]}{v-1}-\right.$$

$$\left.-(-1)^{v+1}\left(\frac{1}{v+1}-\frac{1}{v-1}\right)\right]-\frac{(-1)^{m-j}}{2}\left[\frac{\cos\left[(m+1)\left(1-\frac{i}{l}\right)\pi\right]}{m+1}-\frac{\cos\left[(m-1)\left(1-\frac{i}{l}\right)\pi\right]}{m-1}+\right.$$

$$\left.\left.+(-1)^{m}\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m-1}\right)\right]\right\}=\frac{\varepsilon_j}{m}\left\{1-\cos\frac{i\pi}{l}-\cos\frac{j\pi}{m}\left(\cos^2\frac{i\pi}{l}-1\right)-\right.$$

$$-\sum_{v=2}^{m}\cos\frac{jv\pi}{m}\left[\frac{\cos\frac{(v+1)i\pi}{l}}{v+1}-\frac{\cos\frac{(v-1)i\pi}{l}}{v-1}+\frac{2}{v^2-1}\right]-\frac{(-1)^{j}}{2}\left[\frac{\cos\frac{(m-1)i\pi}{l}}{m-1}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\cos\frac{(m+1)i\pi}{l}}{m+1}-\frac{2}{m^2-1}\right]\right\}=\frac{\varepsilon_j}{m}\left\{1-\cos\frac{i\pi}{l}-\frac{1}{2}\cos\frac{j\pi}{m}\left(1-\cos\frac{2i\pi}{l}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{v=2}^{m}\varepsilon_v\cos\frac{j\pi v}{m}\left[\frac{\cos\frac{(v-1)i\pi}{l}}{v-1}-\frac{\cos\frac{(v+1)i\pi}{l}}{v+1}-\frac{2}{v^2-1}\right]\right\}.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $W^r = W^r C[a,b]$ $(r>1)$ класс функций $F(x)$, заданных на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси R и представимых интегралом

$$F(x)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_a^x (x-t)^{r-1}h(t)dt,\ \max_{a\le x\le b}|h(t)|=\mu<\infty. \tag{20}$$

Оценим модуль непрерывности функции $F(x)\in W^r$.

$$\left|F(x+\delta)-F(x)\right|=\frac{1}{\Gamma(r)}\left|\int\limits_a^{a+\delta}\frac{h(t)dt}{(x+\delta-t)^{1-r}}-\int\limits_a^{x}\frac{h(t)dt}{(x-t)^{1-r}}\right|\le$$

$$\le\frac{\|h(t)\|_C}{\Gamma(r)}\left(\int\limits_a^x\left|(x+\delta-t)^{r-1}-(x-t)^{r-1}\right|dt+\int\limits_x^{x+\delta}(x+\delta-t)^{r-1}dt\right)\le$$

$$\le\frac{\mu}{\Gamma(r)}\left(\delta(b-a+\delta)^{r-1}\right). \qquad (21)$$

В силу неравенства Лебега для интерполяционных операторов, прямой теоремы Джексона для алгебраических многочленов [10], с учетом неравенства (21), получим:

$$\sup_{F\in W^r}\left|F(x)-L_m(F;x)\right|\le\frac{\mu\left(\ln m+\pi\right)(b-a)^r}{\Gamma(r)(m+1)}\left(1+\frac{\pi}{2(m+1)}\right)^{r-1}, \qquad (22)$$

где $L_m(F;x)$ – интерполяционный полином Лагранжа функции $F(x)$, построенный по узлам (12).

Для $\alpha>1,\ r>1$ и $l,m\in N$ обозначим:

$$\delta_{lm}=S(l,\alpha)+\left(\frac{2}{\pi}\ln l+1\right)S(m,r), \qquad (23)$$

$$S(m,r)=\frac{r\left(\ln m+\pi\right)}{m+1}\left(1+\frac{\pi}{2(m+1)}\right)^{r-1}. \qquad (24)$$

Теорема. Пусть $\alpha>1$, $K_H=\{y\in R,|y|<H\}$ $(H>0)$, функция $f[t,y]:[a,b]\times K_H\to R$ удовлетворяет условиям (8), (9) и такая, что при любых фиксированных $x\in[a,b]$, $y\in K_H$ и некоторых $r>1$, $\mu>0$

$$f[t,y](x-t)^{\alpha-1}\in W^rC[a,b]. \qquad (25)$$

Пусть

$$q=\frac{L(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}<1, \qquad (26)$$

где L определяется условием (8), и для некоторого $\varepsilon>0$

$$\max\left\{\frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(1+\varepsilon),\frac{\mu(b-a)^{r+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)}\right\}\le H, \qquad (27)$$

где M определяется условием (9).

Последовательность многочленов $\tilde{y}_\nu(x)$, определяемых условием (18), приближает решение $y(x)$ задачи Коши (5) таким образом, что при всех натуральных l и m, таких, что $\delta_{mn} < \varepsilon$, выполняется неравенство:

$$\|y(x) - \tilde{y}_\nu(x)\|_C \le D\frac{q^\nu + \delta_{lm}(1-q^\nu)}{1-q},$$

где

$$D = \max\left\{\frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)};\frac{\mu(b-a)^{r+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)}\right\}.$$

Доказательство. Пусть $C_H[a,b] = \left\{y(x) \in C[a,b], \|y(x)\|_C \le H\right\}$. В силу (15) и (16) для любой функции $y(x) \in C_H[a,b]$, имеем:

$$\left|(Ay)(x) - (\tilde{A}y)(x)\right| = \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f[t,y(t)]K(x,t)dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=0}^{l}\int_a^{t_i^{(l)}}\sum_{j=0}^{m} f\left[t_j^{(m)}, y\left(t_j^{(m)}\right)\right]K\left(t_i^{(l)}, t_j^{(m)}\right)l_j^{(m)}(t)dt \cdot l_i^{(l)}(x)\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f[t,y(t)]K(x,t)dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=0}^{l}\int_a^{t_i^{(l)}} f[t,y(t)]K\left(t_i^{l}, t\right)dt \cdot l_i^{(l)}(x)\right| +$$

$$+ \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=0}^{l}\int_a^{t_i^{(l)}} f[t,y(t)]K\left(t_i^{(l)}, t\right)dt \cdot l_i^{(l)}(x) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=0}^{l}\int_a^{t_i^{(l)}}\sum_{j=0}^{m} f\left[t_j^{(m)}, y\left(t_j^{(m)}\right)\right]K\left(t_i^{(l)}, t_j^{(m)}\right)l_j^{(m)}(t)dt \cdot l_i^{(l)}(x)\right| = I_1 + I_2. \qquad (28)$$

Обозначим через $L_l(F;x)$ интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по узлам (12), функции $F(x)$, определяемой равенством

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t,y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt.$$

Используя обозначение (24) и неравенство (22), имеем:

$$I_1 = \left|F(x) - L_l(F,x)\right| \le \frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}S(l,\alpha). \qquad (29)$$

Далее, используя (25), (22) и (24), находим:

$$I_2 \le \frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)} \|L_l\|_C \max_{0\le i\le l, a\le t\le b} \left| f[t, y(t)]K\left(t_i^{(l)}, t\right) - L_m(f\cdot K, t) \right| \le$$

$$\le \frac{(b-a)\|L_l\|_C}{\Gamma(\alpha)} \frac{\mu(b-a)^r}{\Gamma(r+1)} S(m,r) \le \frac{(b-a)^{r+1}\mu}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)} \left(\frac{2}{\pi}\ln l + 1\right) S(m,r). \qquad (30)$$

Подставляя (29) и (30) в (28), получаем:

$$\left\|(Ay)(x) - (\tilde{A}y)(x)\right\|_C \le \frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} S(l,\alpha) + \frac{(b-a)^{r+1}\mu}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)} \left(\frac{2}{\pi}\ln l + 1\right) S(m,r). \qquad (31)$$

Докажем, что A – сжимающий оператор. В силу свойств дробных интегралов Римана–Лиувилля имеем:

$$\left\|(Ay_1)(t) - (Ay_2)(t)\right\|_C = \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y_1(t)] - f[t, y_2(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right\| \le \frac{L(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|y_1(x) - y_2(x)\|_C.$$

С учетом (26) заключаем, что A – сжимающий оператор.

Из (31) следует оценка

$$\delta = \sup_{y\in C_H[a,b]} \left\|Ay - \tilde{A}y\right\|_C \le \frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} S(l,\alpha) + \frac{(b-a)^{r+1}\mu}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)} \left(\frac{2}{\pi}\ln l + 1\right) S(m,r). \qquad (32)$$

Используя (9) и (31), для любой $y(x) \in C_H[a,b]$ имеем:

$$\left\|\tilde{A}y\right\|_C \le \|Ay\|_C + \left\|\tilde{A}y - Ay\right\|_C \le \frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} S(l,\alpha) +$$

$$+ \frac{(b-a)^{r+1}\mu}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)} \left(\frac{2}{\pi}\ln l + 1\right) S(m,r) \le D(1+\delta_{lm}).$$

Отсюда в силу предположения (27) при всех l и m, удовлетворяющих условию $\delta_{lm} < \varepsilon$, получим неравенство $\left\|\tilde{A}y\right\|_C \le D(1+\varepsilon) \le H$, т.е. $\tilde{A}(C_H[a,b]) \subset C_H[a,b]$. Поэтому, с учетом [8, с. 113], (26) и (32) получаем:

$$\|y_\nu - \tilde{y}_\nu\|_C \le D\delta_{lm} \frac{1-q^\nu}{1-q}. \qquad (33)$$

Применяя (10) и (33), получим:

$$\|y - \tilde{y}_\nu\|_C \le \|y - y_\nu\|_C + \|y_\nu - \tilde{y}_\nu\|_C \le \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{Mq^\nu}{1-q} + D\delta_{lm} \frac{1-q^\nu}{1-q} \le D\frac{q^\nu + \delta_{lm}(1-q^\nu)}{1-q}.$$

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто

$$\left({}^{c}D_{0+}^{\frac{5}{2}}y\right)(x)=y^{2}(x)+\frac{105\sqrt{\pi}}{16}x-x^{7},\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0. \tag{34}$$

В результате применения рассмотренного выше итеративного метода получен полином, приближающий решение $y(x)=\sqrt{x^{7}}$ задачи типа Коши (34):

$$y_4(x)=8{,}90217\cdot10^{-8}x-0{,}000112757x^{2}+0{,}0691963x^{3}+4{,}11891x^{4}.$$

В табл. 1 приведены значения точного и приближенного решения, а также модули их разностей.

Таблица 1

Сравнение точного и приближённого решений

x	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01
$y(x)$	$3{,}57777\cdot10^{-9}$	$4{,}04772\cdot10^{-9}$	$1{,}67313\cdot10^{-8}$	$4{,}57947\cdot10^{-8}$	$\approx1\cdot10^{-7}$
$y_4(x)$	$3{,}46489\cdot10^{-9}$	$4{,}03498\cdot10^{-9}$	$1{,}67594\cdot10^{-8}$	$4{,}57953\cdot10^{-8}$	$\approx1\cdot10^{-7}$
$\lvert y(x)-y_4(x)\rvert$	$1{,}12816\cdot10^{-11}$	$1{,}27323\cdot10^{-11}$	$2{,}81094\cdot10^{-11}$	$6{,}38602\cdot10^{-13}$	$3{,}62857\cdot10^{-14}$

Список литературы

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost freguancy independent / M. Caputo // Geophis. J. R. Astr. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.
3. Caputo, M. Linear models of dissipation in an elastic solids / M. Caputo, F. Mcinardi // Riv. Nuovo Cimento. – 1971. – Vol. 1. – P. 161–196.
4. Kilbas, A.A. Differential equations of fractional order: methods, results and problems / A.A. Kilbas, J.J. Trujillo // Applicable Analysis. – 2001. – Vol. 78, № 1. – P. 153–192.
5. Gorenflo, R. Fractional calculus: integral and differential equation of fractional order. Fractals and Fractional calculus in continuum mechanics / R. Gorenflo, F. Mainardi // Viena: Springer. – 1997. – P. 223–276.
6. Oldham, K.B. The fractional calculus / K.B. Oldham, J. Spanier. – London : Acad. Press, 1974. – 234 p.
7. Килбас, А.А. Нелинейные дифференциальные уравнения с дробной производной Капуто в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций / А.А. Килбас, С.А. Марзан // Доклады академии наук. – 2004. – Т. 399, № 1. – С. 7–11.
8. Дзядык, В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – К.: Наук. думка, 1988. – 302 с.
9. Кудрявцев, Л.Д. Математический анализ. – М.: Высшая школа, 1970. – 420 с.
10. Даугавет, И.К. Введение в теорию приближения функций. – Л.: Изд. Ленингр. ун-та, 1977. – 184 с.