СБОРНИК ЗАДАЧ МОСКОВСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

Настоящая книга представляет собой плод многолетней коллективной работы школьного математического кружка при МГУ, работы, активное участие в которой принимали многие студенты и преподаватели Московского Университета, а также школьники — участники кружка. Установление авторства отдельных задач потребовало бы в настоящий момент совершенно непосильной исследовательской работы.

Составитель и редактор считают, однако, своим долгом выразить благодарность следующим лицам, принявшим участие в составлении решений и указаний, а иногда и в выяснении смысла «темных» задач подготовительных сборников: Г. М. Адельсону-Вельскому, В. Л. Арлазарову, В. И. Арнольду, Д. Н. Бернштейну, И. Н. Бернштейну, Л. Н. Вассерштейну, А. М. Габриэлову, А. М. Леонтовичу, С. В. Казакову, А. А. Кириллову, О. А. Котию, Ю. И. Манину, З. А. Скопецу, Е. И. Славутину, Г. В. Смирновой, А. Л. Тоому, Д. Б. Фуксу, А. Х. Хованскому, М. В. Шейнбергу.

В Г. Болтянский. А. А. Леман

ОГЛАВЛЕНИЕ

ШКОЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК ПРИ МГУ И МОСКОВСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ*

Каждую весну в течение уже многих лет по Москве расклеиваются афиши, призывающие школьников посетить не театр или концертный зал, а скромные, строгие аудитории Московского Университета. Здесь, в этих аудиториях, умолкают звонкие детские голоса и в наступающей торжественной тишине начинается конкурс юных математиков — Московская математическая олимпиада.

Для всех учащихся, интересующихся математикой, олимпиада — это большой праздник. Работники механико-математического факультета МГУ буквально с ног сбиваются, отвечая на многочисленные вопросы волнующихся школьников и иногда не менее взволнованных учителей:

— Когда читаются лекции для участников олимпиады?

— Будут ли консультации?

— Могут ли в олимпиаде участвовать неотличники?

— Где можно достать тренировочные задачи и сколько их необходимо решить?

— Будет ли разрешено участие в олимпиаде школьнику, который учится только еще в VI классе?

— Можно ли приносить с собой учебники?

Поток вопросов, многие из которых могут поставить в тупик и дюжину академиков, нескончаем.

Подготовительные задачи, задачи самой олимпиады, а также факты, сообщаемые на консультациях и лекциях, представляют собой ценнейший материал, своеобразный математический фольклор, творцами которого являются студенты, аспиранты, профессора и преподаватели механико-математического факультета МГУ. Студенты-энтузиасты буквально прохода не дают старшекурсникам и преподавателям, предлагая свои задачи, яростно критикуя

---

*) В основу настоящего изложения положена статья, написанная авторами по заказу издательства «Volk und Wissen» (Берлин, ГДР).

чужие и требуя придумывать все новые и новые. Иногда эти обсуждения настолько горячи, что дрожат своды мехматских коридоров; иногда же обсуждающие задачу шепчутся, заговорщически озираясь по сторонам, — это означает, что речь идет о задаче, которая может (!) попасть на какой-либо тур олимпиады. Нередко в результате обсуждения задачи настолько преображаются, что автор первоначального варианта не узнает собственное детище. Подготовительные задачи и задачи олимпиады являются, таким образом, плодом коллективного творчества.

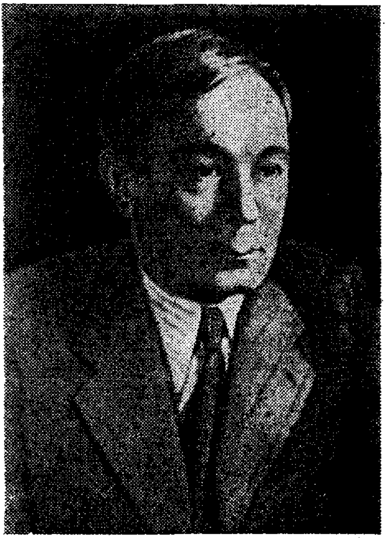
К сожалению, этот ценнейший фольклор в значительной степени теряется, и нередко бесследно. Достаточно сказать, что составители настоящего сборника подняли на ноги буквально всех старых деятелей олимпиад и тем не менее не смогли собрать все задачи всех олимпиад: мы опасаемся, что содержание задач I тура IV олимпиады навсегда останется секретом для человечества. Поэтому выход настоящей книги, содержащей задачный материал 27 Московских школьных математических олимпиад, мы считаем весьма важным событием в деле математического образования.

Книга, подготовка которой была приурочена к XXV олимпиаде, имеет отчасти и юбилейный характер. Двадцать пять олимпиад — достаточно круглое число, и в связи с этим возникает естественное желание оглянуться назад и подвести некоторые итоги.

Первая Московская математическая олимпиада

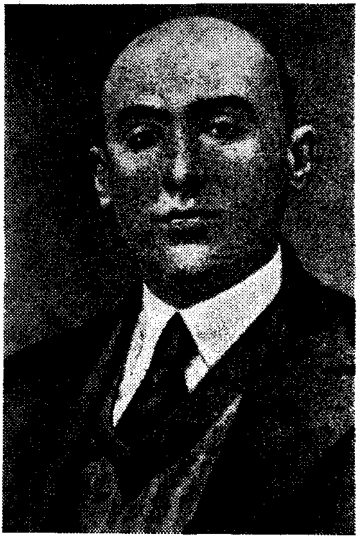
К середине 30-х годов многие советские ученые-математики пришли к мысли о необходимости сотрудничества со школой в деле подготовки математической смены. Будущего математика необходимо воспитывать с детства, и чем раньше — тем лучше. Никого не удивляет, что подготовка будущих балерины или музыканта начинается чаще всего в раннем детстве, с 6—8-летнего возраста. Объясняется это тем, что успешное овладение тонкостями балетного искусства или музыки в юношеском возрасте невозможно без специализированной подготовки в детстве, обеспечивающей развитие слуха и чувства ритма, гибкость суставов или подвижность пальцев и т. д. И каждый год, упущенный в детстве, впоследствии удается возместить лишь многими годами упорной работы.

Не следует думать, что в науке, и особенно в математике, дело обстоит как-либо иначе. Разумеется, подготовку будущего математика вовсе не обязательно (хотя вполне возможно) начинать с 6—8-летнего возраста. Однако перекладывать эту работу целиком на Университет тоже нецелесообразно. Здесь, так же как в балетном искусстве или музыке, годы, упущенные в детстве, трудно компенсировать впоследствии. Дело в том, что работа в области математики требует известной гибкости ума, умения абстрактно мыслить, требует определенной логической культуры, отсутствие которых к моменту поступления в Университет невозможно компенсировать даже упорной работой в студенческие годы. Разумеется, все эти данные (в совокупности составляющие то, что обычно называют «математическими способностями») могут развиться у подростка в период обучения в общеобразовательной школе без какой бы то ни было специализированной подготовки. Это — стихийный процесс появления математических самородков, конечно, имевший место во все времена и во всех странах. Например, известнейший индийский математик С. Рамануджан (1887—1920) воспитывался в атмосфере враждебности ко всему европейскому (и особенно английскому) и не получил в детстве по существу никакого математического образования.



Большим энтузиастом работы со школьниками является член-корреспондент АН СССР, профессор Б. Н. Делоне. В 1934 году он возглавлял оргкомитет самой первой в нашей стране школьной математической олимпиады (в Ленинграде)

Однако в 30-х годах стало ясно, что этот процесс стихийного формирования ученых не может удовлетворять все возрастающие потребности страны в квалифицированных математиках. Правда, всеобщее среднее образование позволяет надеяться на то, что одаренные,



Член-корреспондент АН СССР, профессор Л. Г. Шнирельман был одним из главных инициаторов создания городского школьного математического кружка.

способные дети будут замечены школьным учителем, поддержка которого создаст стимулы для углубленной дополнительной работы. Однако эти надежды не всегда оправдываются. Ведь круглые пятерки по всем математическим предметам — весьма маловыразительный критерий, в котором отражаются не только (а иногда и не столько!) математические способности, но и внимательность, аккуратность в работе, прилежание и даже хороший почерк. Напротив, скромные оценки по математическим предметам далеко не всегда свидетельствуют о математической неодаренности. Достаточно упомянуть о том, что видный советский математик, лауреат Ленинской премии, профессор М. М. Постников (да не обидится он на нас за разглашение этого секрета!) в школьные годы не ходил в числе первых математиков школы; в его дневнике, бывало, проглядывали и «двойки» по математическим дисциплинам. Но даже в тех случаях, когда учитель правильно подмечает математическую «искру» в своем ученике, он не всегда может помочь ему в подборе дополнительных задач и дополнительной литературы, помочь раздуть эту искру в большой огонь, освещающий дорогу в будущее.

Между тем математические дарования, подобно музыкальным, проявляются обычно довольно рано. Более того, при правильном развитии ученого-математика наиболее крупные открытия зачастую делаются в весьма молодом возрасте. Так например, убитый на дуэли в возрасте 20 лет французский математик Эварист Галуа (1811—1832) успел за свою короткую жизнь создать замечательную по глубине алгебраическую теорию, произведшую целый

Академик А. Н. Колмогоров всегда принимал активнейшее участие в работе школьного математического кружка и в организации Московских математических олимпиад.

переворот в последующем развитии математики. Девятнадцатилетний К. Ф. Гаусс (1777—1855) успел опубликовать свои классические исследования о построениях циркулем и линейкой, а через несколько лет подарил миру книгу «*Disquisitiones arithmeticae*», равных которой можно немного указать в истории математической науки! Закон двойственности, прославивший замечательного советского математика, академика Л. С. Понтрягина, был найден им еще в студенческие годы.

Эти обстоятельства делают необходимым участие ученых-математиков в работе со школьниками. Инициаторами такой работы выступили в Ленинграде член-корреспондент АН СССР, профессор Б. Н. Делоне и профессор В. А. Тартаковский, а в Москве — член-корреспондент АН СССР, профессор Л. Г. Шнирельман и профессор (ныне член-корреспондент АН СССР)

Академик П. С. Александров возглавлял оргкомитет 1-й Московской математической олимпиады (1935 год).

Л. А. Люстерник. Весной 1934 года в Ленинграде была проведена первая в Советском Союзе школьная математическая олимпиада. Одновременно по инициативе Л. А. Люстерника начала выходить серия математических книг, предназначенных специально для школьников («Популярная библиотека по математике»). С осени 1934 года в Москве, в Институте математики АН СССР, начали регулярно читаться лекции по математике для учащихся старших классов. Но, несмотря на то что к чтению лекций привлекались крупнейшие советские математики, посещались эти лекции довольно слабо — достаточно эффективные формы работы со школьниками не были еще найдены!

В этих условиях Правление Московского Математического Общества подхватило инициативу ленинградцев и приняло решение о проведении 1-й Московской школьной математической олимпиады. К этому мероприятию математики отнеслись с большим воодушевлением. Достаточно сказать, что почти все профессора-математики МГУ вошли в оргкомитет олимпиады (А. Н. Колмогоров, Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, В. Ф. Каган, С. Л. Соболев, С. А. Яновская и другие); председателем оргкомитета был президент Московского Математического Общества, член-корреспондент АН СССР (ныне академик) П. С. Александров.

В олимпиаде приняло участие 314 школьников, что считалось тогда большим успехом. Во втором, заключительном, туре олимпиады приняло участие 120 человек, из которых трое (Игорь Зверев, Коля Коробов и Аня Мышкис) получили первые премии и пять школьников получили вторые премии. В качестве премий победителям были вручены небольшие математические библиотечки. Кроме того, 44 школьника получили почетные отзывы. Олимпиада закончилась увлекательной совместной поездкой участников олимпиады и членов оргкомитета за город.

Доктор физико-математических наук, профессор Н. М. Коробов. В 1935 году он участвовал в I-й Московской математической олимпиаде и завоевал первую премию.

Лекции по математике для школьников

Говорить о дальнейшей истории московских математических олимпиад невозможно в отрыве от истории школьного математического кружка при Московском Университете. Успех I Математической Олимпиады способствовал полной перестройке всей работы со способными школьниками. Еще до олимпиады несколько студентов-математиков Университета вели математические кружки в школах Москвы. После проведения олимпиады было решено перенести эту работу в Университет и объединить ее с лекциями, читавшимися ранее в Математическом институте АН СССР. Так возник Школьный математический кружок при МГУ. Его организаторами были Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман и доцент МГУ (ныне член-корреспондент АН СССР) И. М. Гельфанд. Наряду с ними в работе кружка активно участвовали многие студенты, среди которых можно упомянуть погибшего во время Великой Отечественной войны Марка Глезермана (председатель бюро кружка в 1935/36 году) и Павла Папуша (председатель бюро кружка в 1936/37 году).

С самого начала работа кружка проводилась в двух направлениях: чтение лекций и заседания секций кружка. Два раза в месяц, по выходным дням, профессора и преподаватели Университета читали лекции по математике для школьников. На лекции приходили десятки, а впоследствии — сотни школьников Москвы. Состав слушателей лекций был довольно непостоянным. В связи с этим каждая лекция представляла собой, как правило, самостоятельное целое. Редко две лекции служили продолжением одна другой. Официально было принято, что лекция продолжается два часа (с десятиминутным перерывом). Однако за соблюдением этого регламента никто не следил — все определялось интересом слушателей и темпераментом лектора. Например, Б. Н. Делоне, весьма часто и с большим успехом выступавший перед школьниками, никогда не читал лекций, продолжавшихся менее трех часов; иногда его лекции длились 4 часа и более — и, надо сказать, школьники слушали с большим интересом и вниманием! Первоначально лекции были рассчитаны на учащихся VIII—X классов. Начиная с 1940 года одновременно проводились по две лекции — одна для учащихся VII—VIII классов и вторая для старшеклассников.

Тематика лекций была весьма разнообразной. Приведем здесь, для примера, несколько десятков названий лекций, прочитанных в разные годы работы кружка:

Л. Г. Шнирельман, Многомерная геометрия;
Л. А. Люстерник, Выпуклые фигуры;
И. М. Гельфанд, Основные понятия теории множеств;
Б. Н. Делоне, Вывод семи кристаллических систем;
А. Н. Колмогоров, Основная теорема алгебры;
С. Л. Соболев, Что такое математическая физика?;
П. С. Александров, Трансфинитные числа;
С. А. Яновская, Что значит решить задачу?;
Я. С. Дубнов, Ошибки в геометрических доказательствах;
И. А. Кибель, Математические методы предсказания погоды;
Л. Г. Шнирельман, Теория групп и ее приложение к решению уравнений 3-й степени;
В. В. Голубев, Почему летает самолет?;
А. Я. Хинчин, Цепные дроби;
А. И. Маркушевич, Разностные уравнения
А. О. Гельфонд, Простые числа;
Л. А. Люстерник, Геодезические линии;
Б. Н. Делоне, Геометрическое решение неопределенных уравнений;
И. М. Гельфанд, Принцип Дирихле;
А. Н. Колмогоров, Арифметика вычетов и ее приложение в технике;
Н. Н. Бухгольц, Механика движения;
Я. С. Дубнов, Аксиомы геометрии;
Г. М. Шапиро, Основные понятия современной алгебры;

Л. С. Понтрягин, Что такое топология?;
И. Р. Шафаревич, Решение уравнений в радикалах;
А. Г. Курош, Что такое алгебра?;
Н. А. Глаголев, Построения с помощью одной линейки;
А. А. Ляпунов, Думающие машины;
А. И. Маркушевич, Площади и логарифмы;
Е. Б. Дынкин, Автоматы и нервные сети;
А. С. Кронрод, Что такое программирование?;
А. И. Узков, Построения с помощью циркуля и линейки;
В. А. Ефремович, Неевклидова геометрия;
Б. В. Гнеденко, Как наука изучает случайные явления;
Н. К. Бари, Арифметика бесконечного;
Г. Е. Шилов, О производной;
Р. Л. Добрушин, Математические методы лингвистики;
В. Г. Болтянский, Непрерывные дроби и музыкальная гамма;
И. М. Яглом, Как измерить информацию?;
Е. М. Ландис, Что такое длина кривой?;
А. М. Яглом, Недесятичные системы счисления и их применения;
О. А. Олейник, Теорема Хелли;
В. А. Успенский, Приложения механики к математике.

Приведенный список (разумеется, далеко не полный: за многие годы работы кружка было прочитано несколько сотен лекций для школьников) показывает, насколько разнообразной была тематика лекций. В некоторых из них (особенно предназначавшихся для старшеклассников) излагались в популярной форме серьезные математические результаты, иногда — научные достижения самых последних лет. Можно сказать, что школьный математический кружок при МГУ способствовал значительному переосмыслению термина «элементарная математика» (если под этим понимать все то богатство математических знаний, которое может быть сделано полностью доступным пониманию школьников). Так, например, в 1937 году в своей лекции «Основная теорема алгебры» академик А. Н. Колмогоров изложил по существу полное доказательство теоремы о существовании комплексного корня у всякого алгебраического уравнения. Это доказательство (получившее в школьном кружке наименование «Дама с собачкой») впоследствии точно в такой же форме было опубликовано в книге Р. Куранта и Г. Роббинса [62]*. В том же году Л. Г. Шнирельман в лекции «Теория групп и ее приложение к решению уравнений третьей степени» довел теоретико-групповые соображения, вос-

*) Цифры в квадратных скобках указывают на номер книги в списке литературы, помещенном на стр. 47 — 50.

ходящие по существу к Галуа, до получения явной формулы решения уравнения третьей степени. В лекции Б. Н. Делоне «Геометрия цепных дробей», прочитанной в 1947 году, не только доказывалась довольно тонкая теорема о наилучших рациональных приближениях иррациональных чисел, но и излагались весьма изысканные результаты Гурвица об иррациональностях, наихудшим образом приближающихся рациональными числами. Академик С. Л. Соболев в своей лекции «Что такое математическая физика?» (1940 г.) с большим мастерством довел изложение (на уровне, доступном пониманию школьников!) до классификации уравнений в частных производных второго порядка с указанием качественных различий в поведении их решений.

Иногда лекции сопровождались задачами, предлагавшимися на дом или решавшимися на месте. Особенно много задач предлагал своим слушателям И. М. Гельфанд. Школьники, знакомые с его манерой чтения, зачастую предпочитали садиться подальше от лектора, чтобы не быть вызванными к доске для решения задачи. Интересно строил свои лекции Я. С. Дубнов. Иногда он читал цикл из двух лекций, причем на первой лекции слушателям предлагались несколько задач, составляющих единое целое, а на второй лекции (через две недели) проводилась беседа с обсуждением найденных школьниками решений. Читая лекцию об арифметике вычетов и алгебрах Буля, А. Н. Колмогоров нарисовал изображенную на рис. I схему, позволяющую расположить у двери и над кроватью два переключателя, каждым из которых можно гасить или зажигать лампочку в комнате независимо от положения второго переключателя. Заканчивая первый час лекции, он предложил придумать во время перерыва

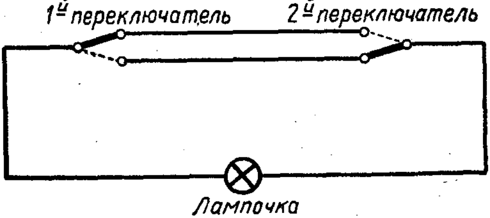


Рис. I.

схему, позволяющую гасить или зажигать свет из n мест комнаты.

Нередко лекторы, готовясь к встрече со школьниками, находили новые элегантные доказательства известных теорем, получали новые обобщения ранее известных фактов и даже делали маленькие математические открытия. К сожалению, девять десятых этого ценнейшего материала кануло в Лету, и нам, старым кружковцам, очень грустно об этом думать. У нас в памяти сохранились воспоминания о ряде замечательных лекций А. Н. Колмогорова, Б. Н. Делоне, И. М. Гельфанда и других; однако текст этих лекций (и даже достаточно полное представление об их содержании и методических особенностях) сейчас, по-видимому, восстановить невозможно.

В 1950 году Гостехиздат (переименованный впоследствии в «Физматгиз» и вошедший в настоящее время в издательство «Наука») начал издавать специальную серию книг «Популярные лекции по математике». Большинство книг этой серии возникло при обработке лекций, прочитанных в школьном математическом кружке при МГУ (см., в частности, книги [8], [9], [11], [19], [22], [35], [38]). Другие лекции были опубликованы в сборниках «Математическое просвещение». Из них мы упомянем: лекцию Б. И. Сегала «Непрерывные дроби», прочитанную 18 апреля 1935 года для участников I Московской математической олимпиады (см. [48], вып. 7, стр. 46—67), лекцию Е. М. Ландиса «О длине кривой» ([49], вып. 1, стр. 33—44), лекцию Р. Л. Добрушина «Математические методы в лингвистике» ([49], вып. 6, стр. 37—60), лекцию И. М. Яглома «Комплексные числа и их применения в геометрии» ([49], вып. 6, стр. 61—106) и др.

Ниже мы приведем краткое содержание еще нескольких неопубликованных лекций, прочитанных в школьном математическом кружке при МГУ.

Принцип Дирихле

(Лекция И. М. Гельфанда для учащихся IX—XI классов)

В начале лекции формулировалась следующая задача: *На длинной прямолинейной дороге с равными интервалами вырыты небольшие поперечные канавки; расстояние между центрами каждых двух соседних канавок равно* $\sqrt{2}$ *метров* (рис. II). *Доказать, что какими бы узенькими эти канавки ни были сделаны, человек, шагающий по до-*

роге и имеющий длину шага 1 м, рано или поздно попадет в одну из канавок.

Доказательство этого утверждения вытекает из так называемого **п р и н ц и п а Д и р и х л е**, который в шуточной форме может быть

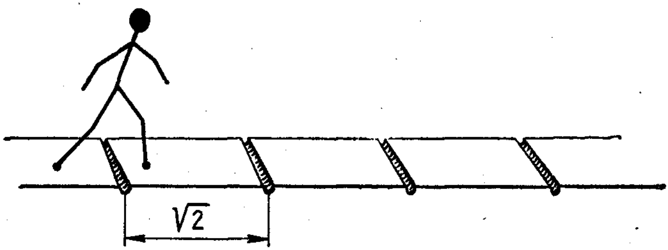


Рис II

изложен так: *невозможно разместить семь зайцев в пяти клетках, если в каждую клетку разрешается посадить не более одного зайца.* В самом деле, представим себе, что мы можем «намотать» дорогу на барабан, длина окружности которого равна $\sqrt{2}$ метров (рис. III). Тогда все канавки на этом барабане совместятся, а каждый шаг человека будет изображаться на окружности дугой длины 1 *м.* Будем последовательно отмечать на окружности след человека после первого, второго, третьего и т. д. шагов. Нам надо доказать, что хотя бы один

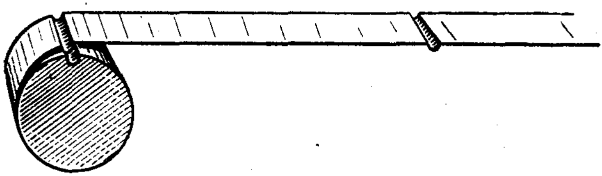


Рис. III.

из этих следов попадет внутрь заданной на окружности дуги, изображающей канавку, какой бы малой ни была длина h этой дуги. Нетрудно понять, что если нам удастся найти такие k и l, для которых следы k-го и $(k+l)$-го шагов удалены друг от друга (на окружности) менее чем на h, то требуемое утверждение докажется легко. Ведь еще после l шагов новый след (т. е. $(k+2l)$-й) опять сдвинется на расстояние, меньшее h (рис. IV), затем мы рассмотрим следующие l шагов и т. д. Ясно теперь, что, сделав несколько раз по l шагов, мы

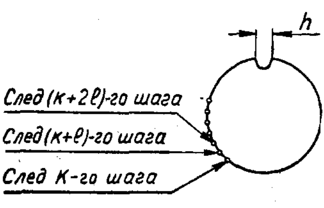


Рис. IV.

неминуемо обнаружим след, попавший в канавку (потому что, перемещаясь на одно и то же расстояние, меньшее h, нельзя «перешагнуть» канавку ширины h). Итак, нужно найти два следа, находящиеся на окружности на расстоянии, меньшем h. Вот здесь-то и помогают зайцы. Действительно, разделим окружность на дуги, каждая из которых имеет длину $< h$; эти дуги мы назовем «клетками». Пусть их имеется p штук. Если мы возьмем число следов, большее, чем p (заметим, что никакие два следа не совпадают в силу иррациональности числа $\sqrt{2}$), то по принципу Дирихле, хотя бы в одну из «клеток» попадет более одного следа («зайца»). Расстояние между двумя следами, попавшими в одну клетку, меньше h; этим наше утверждение и доказано.

В качестве второго примера, относящегося к тому же кругу идей, рассмотрим следующую задачу. *Доказать, что существует степень двойки, начинающаяся (в десятичной записи) тремя девятками:*

$$2^n = 999\ldots$$

Другими словами, требуется установить существование таких целых чисел n и k, что

$$999 \cdot 10^k \leqslant 2^n < 10^{k+3},$$

или, что то же самое,

$$k + \lg 999 \leqslant n \lg 2 < k + 3.$$

Нетрудно усмотреть глубокую аналогию между этой задачей и предыдущей. Различие лишь в том, что здесь длина «шага» равна $\lg 2$, а расстояние между каждыми двумя соседними «канавками» (имеющими ширину $3 - \lg 999$) равно 1. Вообще, *если число p не является степенью десятки, то среди чисел p, p^2, p^3, p^4, ... найдутся такие, которые в десятичной записи начинаются с любой наперед заданной комбинации цифр.*

Дальнейшее развитие тех же соображений приводит к установлению ряда интересных теорем алгебры и геометрии. Перечислим некоторые из них.

Если l — луч, исходящий из начала координат и наклоненный к оси абсцисс под таким углом α, что $\operatorname{tg}\alpha$ — иррациональное число, то этот луч не встретит при своем продолжении ни одной точки с целыми координатами, но будет подходить сколь угодно близко к некоторым из таких точек.

Существует такое натуральное число n, что $\sin n < 0{,}000\,000\,001$.

Если числа α и β несоизмеримы с π и между собой, то сумма $\sin n\alpha + \sin n\beta$ при некоторых n будет принимать значения, как угодно близкие к 2 (хотя значение 2 эта сумма ни при каком n не принимает).

Если радиусы окружностей F и G несоизмеримы, то при качении окружности F по неподвижной окружности G любая точка катящейся окружности описывает кривую (эпициклоиду, рис. V), *«острия» которой располагаются на окруж-*

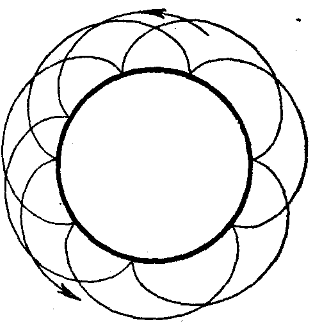


Рис. V.

ности G всюду плотно (т. е. на любой дуге окружности G найдутся «острия» этой кривой).

Среди других разбиравшихся вопросов упомянем о некоторых арифметических особенностях мантисс логарифмов, о поведении геодезических на поверхности баранки (на торе) с евклидовой метрикой (в частности, возможность всюду плотной обмотки тора такой геодезической) и т. п.

Лекция заканчивалась рассмотрением некоторых количественных оценок, связанных с принципом Дирихле. Например, в задаче о человеке, шагающем по дороге с канавками, постановка задачи заменялась следующей: к а к ч а с т о шагающий человек будет ступать в канавку?

Неопределенные уравнения второй степени

(Лекция Б. Н. Делоне для учащихся IX—X классов)

Лекция начинается коротким рассказом о неопределенных уравнениях второй степени с двумя неизвестными. Наиболее интересным среди них является у р а в н е н и е П е л л я:

$$x^2 - \Delta \cdot y^2 = 1, \qquad (*)$$

где Δ — целое число, не являющееся точным квадратом.

Т е о р е м а. *Уравнение (*) имеет бесконечно много целочисленных решений.*

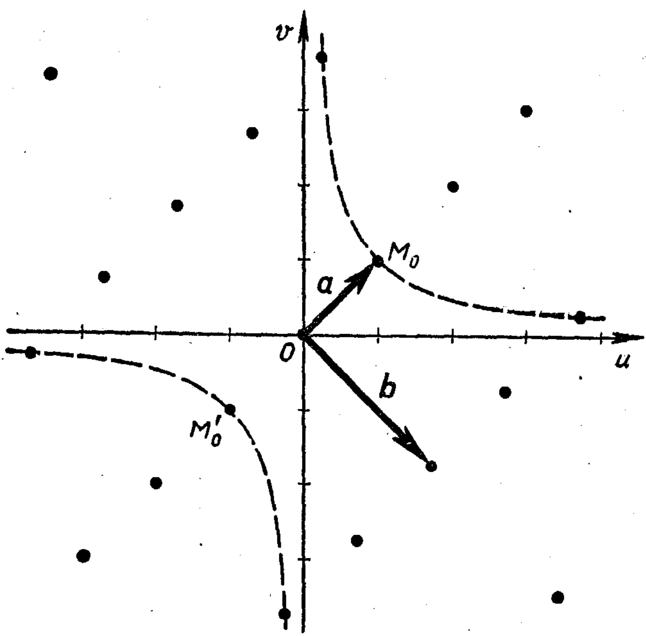


Рис. VI.

Для доказательства строится прямоугольная система координат u, v, и в ней рассматриваются векторы $a = \{1;\ 1\}, b = \{\sqrt{\Delta}, -\sqrt{\Delta}\}$. Все точки M, для которых $\overline{OM} = xa + yb$, где x, y — целые числа, образуют «решетку» (рис. VI), тесно связанную со свойствами уравнения (*). Если M — одна из точек решетки, то, как легко видеть, точка M имеет (в системе u, v) координаты $u = x + y\sqrt{\Delta}$, $v = x - y\sqrt{\Delta}$, и потому $uv = x^2 - \Delta \cdot y^2$. Таким образом, уравнение (*) принимает вид $uv = 1$, и мы приходим к следующей задаче: *доказать, что на гиперболе $uv = 1$ расположено бесконечно много точек решетки* (эта гипербола изображена на рис. VI пунктиром).

Одна точка, лежащая на гиперболе, непосредственно видна: это точка M_0 с координатами $u = v = 1$. Симметричная точка M_0' ($u = v = -1$) также лежит на гиперболе. Допустим, что, кроме этих двух точек, мы нашли еще одну точку решетки $M_1(u_1,\ v_1)$, также лежащую на гиперболе (так что $u_1 v_1 = 1$). Рассмотрим преобразование φ плоскости, переводящее произвольную точку A (u, v) в точку $A' = \varphi(A)$ с координатами $u' = uu_1$, $v' = vv_1$. Нетрудно видеть, что гиперболу $uv = 1$ это преобразование φ переводит снова в эту же гиперболу (т. е. гипербола при этом преобразовании смещается по себе; поэтому преобразование φ называется *гиперболическим поворотом*). В самом деле, $u'v' = uu_1 \cdot vv_1 = uv \cdot u_1v_1 = uv = 1$. Далее, легко проверить, что *гиперболический поворот φ переводит точки решетки снова в точки решетки*. Действительно, так как M_1 — точка решетки, то $u_1 = x_1 + y_1\sqrt{\Delta}$, $v_1 = x_1 - y_1\sqrt{\Delta}$, где x_1, y_1 — целые. Если, далее, $M = (u,\ v) = (x + y\sqrt{\Delta},\ x - y\sqrt{\Delta})$ — еще одна точка решетки (x и y — целые), то

$$u' = uu_1 = (x + y\sqrt{\Delta})(x_1 + y_1\sqrt{\Delta}) = $$
$$= (xx_1 + yy_1\Delta) + (xy_1 + x_1y)\sqrt{\Delta} = X + Y\sqrt{\Delta},$$
$$v' = vv_1 = (x - y\sqrt{\Delta})(x_1 - y_1\sqrt{\Delta}) =$$
$$= (xx_1 + yy_1\Delta) - (xy_1 + x_1x)\sqrt{\Delta} = X - Y\sqrt{\Delta},$$

т. е. точка $M' = \varphi(M)$, имеющая координаты u', v', также принадлежит решетке.

Точку M_0 (1, 1) гиперболический поворот φ переводит в точку M_1 (u_1, v_1), а точку M_1 — в некоторую новую точку $M_2 = \varphi(M_1)$ решетки, лежащую на гиперболе. Точка M_2 переходит при гиперболическом повороте φ в точку решетки $M_3 = \varphi(M_2)$, снова лежащую на гиперболе, и т. д. *Обратный* поворот φ^{-1} [переводящий точку $(u,\ v)$ в точку с координатами $u' = \dfrac{u}{u_1}$, $v' = \dfrac{v}{v_1}$] переводит точку M_0 в точку $M_{-1} = \varphi^{-1}(M_0)$, точку M_{-1} — в точку $M_{-2} = \varphi^{-1}(M_{-1})$, и т. д. Мы получаем бесконечное множество точек решетки:

$$\ldots,\ M_{-2},\ M_{-1},\ M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots, \qquad (**)$$

лежащих на гиперболе и переходящих друг в друга при гиперболическом повороте φ (ср. в этом сборнике задачу **115** на стр. 61).

Итак, достаточно найти на гиперболе хотя бы одну точку M_1, отличную от точек M_0 и M_0'. (Заметим, что если за M_1 взять б л и ж а й ш у ю к M_0 точку решетки, лежащую на гиперболе, то, как нетрудно доказать, кроме точек (**), на гиперболе $uv = 1$ не будет никаких других точек решетки.)

Для нахождения еще одной точки решетки, лежащей на гиперболе, поступим следующим образом. Отрезок, соединяющий точку

$u=1, v=1$ с точкой $u=1$, $v=-1$, будем перемещать вправо, вдоль оси u, пока он не «наткнется» на какую-либо точку N' решетки. Если координаты точки N' мы обозначим через u', v', то $|u'| < 1$, и прямоугольник Π' с вершинами в точках $(\pm u', \pm v')$ содержит только три точки решетки: начало координат O, точку N' и симметричную ей (относительно O) точку. Теперь мы будем перемещать вдоль оси u правую сторону прямоугольника, пока не «наткнемся» на новую точку решетки N'' (u'', v''). Мы рассмотрим прямоугольник Π'' с вершинами в точках

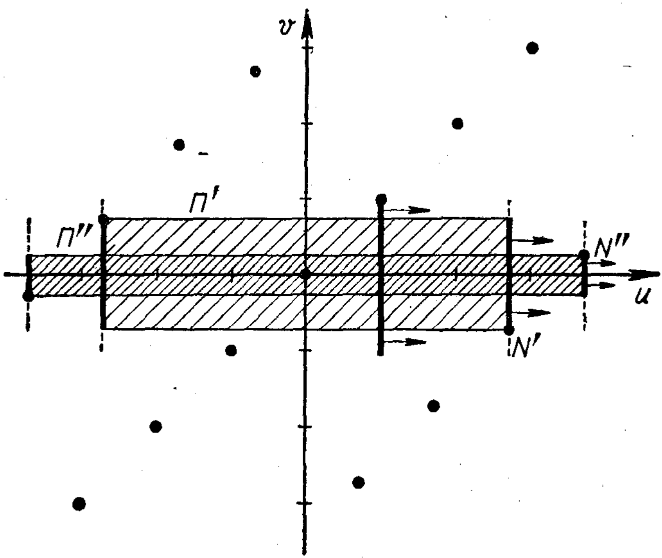


Рис. VII.

$(\pm u'', \pm v'')$, затем будем смещать вдоль оси u его правую сторону, и т. д. (рис. VII). Изящное рассуждение, восходящее к известному немецкому математику Герману Минковскому, позволяет установить, что площади прямоугольников Π', Π'', . . . (которые все являются целыми числами) ограничены. Поэтому среди них найдется бесконечно много прямоугольников с одинаковой площадью. Из этого, используя некоторые свойства решеток, удается вывести существование среди точек N', N'', . . . таких двух точек, что гиперболический поворот, переводящий одну из них в другую, переводит решетку в себя. Следовательно, точку M_0 он переводит в отличную от нее точку решетки, лежащую на гиперболе $uv = 1$.

Лекция заканчивается указанием (без вывода) связей между решениями уравнения Пелля (или точками решетки) и наилучшими рациональными приближениями числа $\sqrt{\Delta}$.

Недесятичные системы счисления

(Лекция А. М. Яглома для учащихся VII—VIII классов)

В начале первого часа лектор предлагает желающим сыграть с ним на доске в следующую игру (игра «н и м»): *на доске с тремя рядами полей стоят три шашки* (рис. VIII). *Каждый играющий своим ходом передвигает одну (любую) шашку на произвольное число полей вправо. Выигравшим считается тот, кто сделает последний ход.*

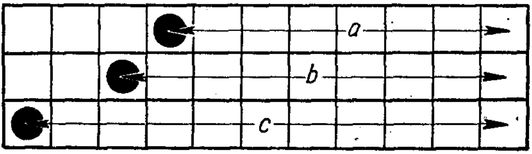


Рис. VIII.

Лектор заранее запасся списком выигрышных позиций; используя это, он без труда выигрывает ряд партий, играющихся на классной доске с помощью мела и тряпки (при шумном сочувствии аудитории играющим школьникам). Этот эксперимент убеждает слушателей в наличии выигрышных и проигрышных позиций; лектор подводит школьников к мысли об этом, играя в эту игру на небольшой по размеру доске.

Дается представление о недесятичных системах счисления (с примерами перехода из одной системы в другую и примерами действий). Затем, с использованием двоичной системы счисления обсуждаются выигрышные и проигрышные позиции; выводится правило: позиция (a, b, c) является проигрышной, если при записи чисел a, b и c в двоичной системе счисления все суммы «цифр» трех чисел («цифры» в двоичной системе счисления равны 0 или 1), отвечающих одному и тому же разряду, являются четными.

Второй час лекции начинается с аналогичной игры (игра «ц з я н ь ш и ц з ы»), с тем отличием, что *рядов полей на доске два* (рис. IX) *и каждым ходом играющий либо продвигает на произвольное число полей одну шашку, либо продвигает на одно и то же (произвольное) число полей обе шашки сразу.* И здесь лектор, имеющий таблицу выигрышных позиций, легко выигрывает у школьников После этого начинается составление таблицы проигрышных позиций.

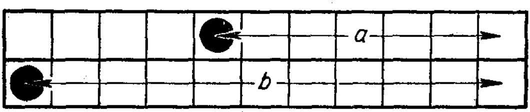


Рис IX.

Указывается, что «система счисления» — это способ записи чисел с помощью некоторого «базиса» $u_1, u_2, \ldots u_k, \ldots$:

$$N = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \ldots, \qquad (*)$$

где базис может и отличаться от последовательности степеней фиксированного числа q. Например, если в качестве базиса взяты факториалы, т. е. числа

$$1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ 720,\ \ldots \qquad (u_{k+1} = (k+1)\,u_k),$$

то любое число N записывается в виде (*), где k-я цифра a_k не превосходит k:

$$1000 = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 24 + 2 \cdot 120 + 1 \cdot 720 = «121220».$$

Другим примером может служить «фибоначчиевская» система счисления, в которой базис имеет вид

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \ldots \qquad (u_{k+2} = u_{k+1} + u_k).$$

В этой системе счисления каждая цифра равна 0 или 1, причем две единицы ие могут стоять рядом:

$$100 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 13 + 0 \cdot 21 + 0 \cdot 34 + \\ + 0 \cdot 55 + 1 \cdot 89 = «1000010100».$$

Лекция заканчивается разбором игры «цзяньшицзы» с точки зрения «фибоначчиевской» системы счисления. Доказывается, что пара (a, b), где $a < b$, является проигрышной, если число a оканчивается в «фибоначчиевской» системе четным числом нулей, а число b получается из a приписыванием еще одного нуля в конце.

Секции школьного математического кружка при МГУ

Кроме лекций в МГУ, регулярно проводились заседания секций школьного математического кружка. Секциями руководили, как правило, студенты старших курсов и аспиранты механико-математического факультета МГУ. Приятным исключением явились две секции кружка, работавшие в 1936/37 учебном году под руководством члена-корреспондента АН СССР Л. Г. Шнирельмана (эта секция занималась *геометрическими методами теории чисел*) и профессора (ныне академика) А. Н. Колмогорова (секция *качественной геометрии*). В первые годы работы кружка основной формой занятия секции был доклад одного из школьников (подготовленный, разумеется, под наблюдением руководителя секции). Доклады, считавшиеся наиболее удачными, выносились даже на воскресные занятия (пленумы) кружка.

Постепенно выяснилось, что доклады школьников являются малоэффективной формой занятий кружка. Ведь для того чтобы сделать хороший доклад, недостаточно полностью понять все то, что сказано в отрывке математического текста, указанном руководителем секции. Хорошо сделанный доклад должен заинтересовать слушателей и заста-

На этом снимке, сделанном в 1940 г., изображена группа руководителей и победителей VI олимпиады. Председателем оргкомитета был тогда академик Л. С. Понтрягин (второй слева в нижнем ряду). Над ним вы видите члена-корреспондента АН СССР, профессора Л. А. Люстерника — одного из организаторов и самых активных деятелей школьного математического кружка и олимпиад. В центре фотографии — один из самых популярных руководителей кружка Д. О. Шклярский (получил первую премию на II олимпиаде); за ним — члены оргкомитета Я. И. Хургин (II-я премия III-ей олимпиады), А. С. Кронрод (I-я премия IV олимпиады) и член-корреспондент АН СССР, профессор А. А. Ляпунов. Во втором ряду — члены оргкомитета и руководители кружков А. М. Яглом (I-я премия IV олимпиады), П. Н. Папуш, И. М. Яглом (I-я премия IV-й олимпиады), Р. С. Гутер, Л. И. Копейкина (I-я премия V-й олимпиады). В первом ряду и в правой части снимка — школьники, получившие первые премии на VI-й олимпиаде: В. Болтянский, С. Яблонский, Н. Цветкова, Е. Либерман, М. Бонгард.

вить их задуматься над услышанным; в нем должны быть выпукло преподнесены подлежащие рассмотрению задачи, должны быть оттенены основные идеи, привлекающиеся для их решения, ярко обрисованы красивые, оригинальные места доказательств и т. д. Хороший лектор должен не только знать и понимать материал, но и обладать достаточной громкостью голоса, известными методическими (и даже артистическими!) навыками, должен уметь убедить слушателей в справедливости фактов, полностью доказать которые он не в состоянии из-за недостаточности времени и подготовки слушателей (иногда — что греха таить — для этого приходится умело обмануть слушателей, и в этом — одно из отличий устной лекции от изложения в книге), и т. д. Кроме того, известно, что хорошую лекцию на какую-нибудь тему редко может прочесть человек, познания которого в данном вопросе ограничиваются материалом лекции. Поэтому доклад школьника не может не только заменить, но и приблизиться по качеству к рассказу опытного руководителя. Большинство докладов школьников на секциях кружка и пленуме оказались мало заинтересовывающими и скучными для всех участников кружка (кроме, быть может, самого докладчика).

Решительная перестройка работы секций кружка связана с именем студента МГУ Додика Шклярского, талантливого математика и блестящего преподавателя, руководившего работой кружков в 1938—1941 годах. Доклады школьников на секциях Шклярского были почти полностью отменены. Вместо этого руководитель сам читал на каждом заседании небольшую лекцию, как правило, содержащую законченный рассказ о небольшой математической теории. Иногда рассказ руководителя продолжался в течение двух-трех заседаний секции. Не надо думать, что этим Шклярский убивал инициативу и творческое развитие слушателей-школьников. На каждом заседании секции, после лекции руководителя, значительная часть времени отводилась для рассказа школьников о решенных ими задачах. Часть задач, предложенных на дом или для решения тут же на заседании, иллюстрировала предшествовавший рассказ руководителя; другие же задачи были не связаны с этим рассказом, а некоторые являлись темами своеобразных миниатюрных научно-исследовательских работ. Иногда трудная теорема расчленялась на ряд задач, последовательно предлагавшихся участникам. Естественно, что среди предложенных задач встречались и такие, решить которые удавалось лишь немногим школьникам, а отдельные задачи ожидали своего решения (хотя бы одним участником кружка!) недели и даже месяцы. Предлагались иногда даже такие задачи, решение которых заранее не было известно руководителю.

Приведем два примера. Первый пример интересен тем, что задача, элементарное решение которой не было известно руководителю, в течение нескольких лет предлагалась для решения участникам секции Шклярского. Наконец, упорство руководителя было вознаграждено:

в 1940 году ученица X класса Лида Копейкина (ныне доцент Московского университета Лидия Ивановна Головина) нашла элементарное решение.

Вот эта задача:

Доказать, что ортоцентры (точки пересечения высот) четырех треугольников, образованных при пересечении четырех прямых, лежат на одной прямой (предполагается, что никакие две прямые не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке; рис. X*)

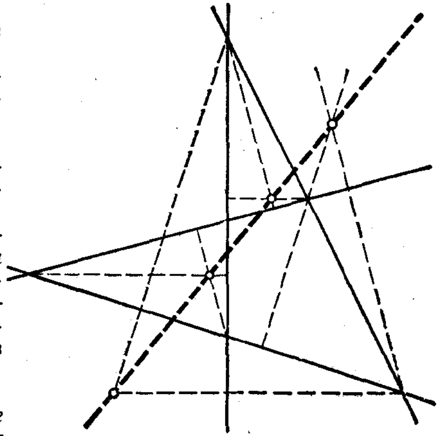


Рис. X.

Второй пример:

Доказать, что если две биссектрисы треугольника равны между собой, то треугольник — равнобедренный.

Решение этой задачи нетрудно получить, используя формулу, выражающую длину биссектрисы через длины трех сторон треугольника. Шклярский поставил задачу найти «чисто геометрическое» доказательство. Таких доказательств было найдено два; одно предложила в 1939 году та же Лида Копейкина, второе нашел в 1940 году ученик VIII класса Володя Болтянский. Вот эти доказательства.

1. Пусть в треугольнике ABC биссектрисы AN и BP равны между собой. Проведем через точки N и P прямые, параллельные основанию AB, и пусть M, Q — точки пересечения этих прямых с другими боковыми сторонами (рис. XI). Мы докажем, что отрезки MN и PQ совпадают. Допустим противное; пусть, для определенности, отрезок MN расположен ближе к основанию AB, чем PQ, так что $MN > PQ$. Из очевидных соотношений $\angle PBQ = \angle PBA = \angle BPQ$ вытекает, что треугольник BPQ — равнобедренный: $PQ = QB$. Аналогично, $AM = MN$. Итак, $\triangle PQB$ и $\triangle AMN$ — два равнобедренных треугольника с равными основаниями AN и BP. Так как боковые стороны треугольника PQB меньше, чем в треугольнике AMN, то $\angle PQB > \angle AMN$ и, значит, $\angle QBP < \angle MAN$. Отсюда мы заключаем, что $\angle CBA < \angle CAB$, так что в трапеции $AMNB$ имеет место соотношение $AM < BN$. Но тогда $MN = AM < BN < BQ = PQ$ вопреки соотношению $MN > PQ$. Полученное противоречие показывает, что отрезки MN и PQ совпадают

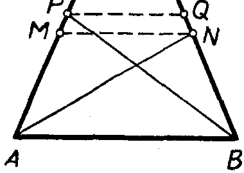


Рис. XI.

*) Решение этой задачи имеется, например, во 2-й части книги [41].

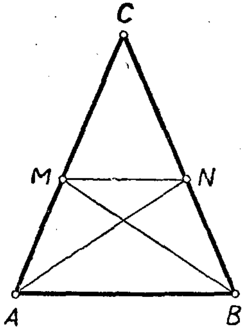


Рис. XII.

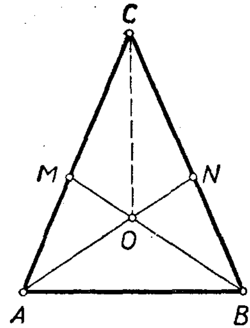


Рис. XIII.

(рис. XII). Таким образом, $AM = MN = NB$, т. е. трапеция $AMNB$ — равнобочная, и потому $\angle A = \angle B$.

2. Пусть в треугольнике ABC биссектрисы AN и BM равны между собой. Обозначим через O их точку пересечения; тогда CO — биссектриса угла C (рис. XIII). Мы рассмотрим треугольники CAN и CBM. У них общий угол C, общая биссектриса CO этого угла и равные основания $AN = BM$. Остается доказать следующий признак равенства треугольников: *если в треугольниках ACN и $BC'M$ равны основания ($AN = BM$), углы при вершинах ($\angle C = \angle C'$) и биссектрисы этих углов ($CO = C'O'$,* рис. XIV), *то эти треугольники равны.* Для доказательства расположим эти треугольники так, чтобы их основания совпали, оба треугольника располагались по одну сторону от их общего основания, а обе вершины C, C' располагались по одну сторону от перпендикуляра DF, проведенного через середину основания (рис. XV). Так как $\angle C = \angle C'$, то описанная окружность треугольника ACN пройдет и через точку C'. Далее, обе биссектрисы CO, $C'O'$ пройдут через середину D дуги $\smile AN$. Допустим теперь, что точки C и C' не совпадают — пусть, для определенности, $\smile DC < \smile DC'$. Тогда хорды DC

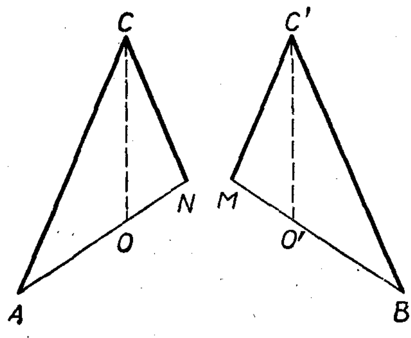


Рис. XIV.

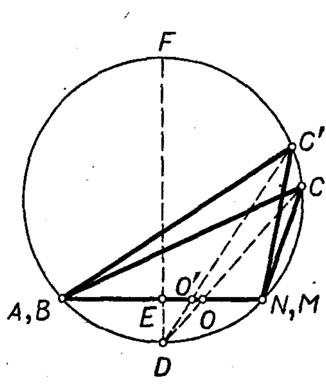


Рис. XV.

и DC' связаны неравенством $DC < DC'$. Кроме того, $\angle FDC > \angle FDC'$, так что точка O дальше отстоит от основания перпендикуляра DE, чем O', и потому $DO > DO'$. Но из соотношений $DC < DC'$, $DO > DO'$ вытекает $CO < C'O'$, что противоречит условию. Таким образом, точки C и C' совпадают, т. е. $\triangle ACN = \triangle BC'M$, и потому $AC = BC$.

Наличие задач разной трудности позволяло руководителю вовлечь в активную работу практически всех участников секции. Большое количество предлагавшихся задач (многие из которых были очень трудны) само собой создавало атмосферу творческого соревнования. Рассказать у доски придуманное решение задачи считалось большой честью и доставляло удовольствие учащимся. К рассказу своего решения слушатели тщательно готовились. Нередко Шклярский еще раз повторял рассказанное школьником решение. Этим достигались сразу два результата: слушатели лучше усваивали решение задачи, а автор решения получал наглядный урок методики преподавания. Участникам кружка, наиболее удачно и продуманно излагавшим свои решения, Шклярский иногда поручал провести под его руководством отдельное занятие кружка (впрочем, такие случаи были очень редки). В результате слушатели не только узнавали новые факты, приобретали навыки в решении задач, но и учились выступать перед аудиторией.

Изменение содержания работы кружка повлекло за собой и изменение организационных форм. В секциях Шклярского появились «младшие руководители» — студенты I—II курсов, помогавшие руководителю секции в подборе и проверке задач. В тех случаях, когда часть занятия кружка посвящалась решению задач на месте, младшие руководители ходили между столиками, за которыми сидели учащиеся, отвечая на вопросы участников секции и наблюдая за их успехами; им предоставлялось также право выбора того из участников кружка, которому поручался рассказ найденного решения у доски. К концу года младшие руководители все чаще самостоятельно проводили занятия, готовясь на будущий год стать руководителями других секций кружка.

Достоинства новой системы работы были проверены прямым экспериментом. В 1937/38 учебном году Шклярский проводил в своей секции занятия по описанной выше системе, в то время как остальные секции работали постаринке, главным образом ограничиваясь докладами школьников. Результат превзошел все ожидания: на

Доктор физико-математических наук, профессор Е. Б. Дынкин был руководителем одной из самых лучших секций математического кружка при МГУ.

IV олимпиаде (1938 год) участники секции Шклярского унесли половину всех премий (12 из 24), в том числе все 4 первые премии! Этот результат объясняется как большой эффективностью методики Шклярского, так и тем, что многие кружковцы, заинтересованные новой формой работы, «перебегали» из других секций к Шклярскому. Итоги IV олимпиады произвели на руководителей секций такое ошеломляющее впечатление, что уже со следующего учебного года практически все секции восприняли новый опыт. В числе последователей Шклярского отметим таких замечательных руководителей секций, как А. С. Кронрод, Е. Б. Дынкин, и воспитанных на традициях кружка В. И. Арнольда, А. А. Кириллова и др.

С тех пор форма работы кружка, найденная Шклярским, стала безраздельно господствующей. Ежегодно объявляются несколько различных секций. Некоторые из них называются секциями «общего типа»; кроме того, работают и специализированные секции: алгебры, геометрии, теории чисел, механики и даже секции с еще более узкой тематикой (например, теории множеств, конечного суммирования, решения уравнений высших степеней и т. д.). За последние годы приобрели популярность секции теории вероятностей, вычислительных методов, программирования, «конечной» математики и др. Кроме того, секции разделяются и по классам. Секции общего типа (нередко, по инициативе Шклярского, называемые также секциями «математических этюдов») обязательно объявляются отдельно для учащихся каждого класса начиная с VII (иногда бывают секции общего типа для учащихся двух смежных классов, например VIII и IX).

Доктора физико-математических наук В. И. Арнольд и А. А. Кириллов получили первые премии на XIX Московской математической олимпиаде, а впоследствии были активными деятелями кружка и олимпиад.

Специализированные секции чаще всего рассчитаны на учащихся старших классов, но иногда такие ограничения и не указываются. Например, в 1940/41 учебном году в секции теории множеств, регулярно работавшей в течение всего года, было всего три слушателя: двое учащихся выпускного, X класса и шестиклассник Юлик Шрейдер, работавший в кружке наиболее успешно (ныне известный советский математик Юлий Анатольевич Шрейдер, автор ряда книг и статей). Бывали годы, когда работали до 15 различных секций, охватывавших 200—300 школьников.

В отличие от воскресных лекций секции в своей работе ориентируются на более или менее постоянный состав участников. Это позволяет строить занятия таким образом, что каждое из них в какой-то мере использует материал предшествующих занятий. При этом за год удается сообщить учащимся много материала. К концу года число участников секции обычно значительно сокращается (примерно вдвое), так как часть школьников не выдерживает довольно напряженной работы в кружке. Впрочем, перед самой олимпиадой наплыв школьников в секции кружка заметно увеличивается. По-видимому, будущие участники олимпиады рассчитывают, посетив два-три занятия кружка (или прослушав одну-две лекции), улучшить свои шансы на олимпиаде. Это вполне понятно, но вряд ли оправдано. Регулярное участие в кружке и постоянное посещение воскресных лекций, безусловно, повышают математическую культуру учащегося и в конечном итоге помогают решению задач олимпиады; однако прослушивание одной-двух лекций не может явиться ключом к успеху на олимпиаде.

Давид Оскарович Шклярский погиб в 1942 году в партизанском отряде, сражавшемся с немецко-фашистскими захватчиками в тылу врага. На фронтах Великой Отечественной войны погибли и многие другие руководители школьного математического кружка при МГУ: один из создателей кружка, М. Глезерман, замечательный математик Михаил Бебутов, молодые способные математики Альфред Герчиков, Владимир Волынский, Виктор Джемс-Леви и другие. Но традиции кружка, выработанные еще в предвоенные годы, живы до сих пор. Среди этих традиций есть довольно смешные и наивные: например, участники кружка всегда называют руководителя только по имени (даже если его зовут Кика!), а руководитель называет участников по фамилии. Традиционной является и «смелость» руководителей в выборе тематики рассказа на секции; нередко руководитель секции разъяснял школьникам тонкие вопросы современной математики, связанные с темой его дипломной работы или диссертации! В свое время Додик Шклярский удивил других руководителей, излагая школьникам с полными доказательствами знаменитую теорему Абеля о неразрешимости уравнения 5-й степени в радикалах. Впрочем, сейчас этим уже никого не удивишь: если преподаватель университета оказывается поставленным в тупик вопросами первокурсника, относящимися к гомологической алгебре, то он сразу догадывается, из чьей секции кружка пришел в университет этот студент. Одному из авторов настоящего обзора привелось как-то одновременно вести семинар для студентов I курса МГУ по теории выпуклых фигур и секцию школьного кружка, посвященную тем же вопросам. Как курьез отметим, что некоторые «тонкости», опускавшиеся в студенческом семинаре, во всех подробностях разбирались на занятиях со школьниками.

Работа кружка обычно начинается в октябре одной-двумя лекциями видных профессоров-математиков, после которых в одной из самых больших аудиторий университетского здания на Моховой улице (ныне проспект Маркса) производится запись в секции. Каждый руководитель секции в течение 5—10 минут кратко рассказывает о том, чем секция будет заниматься. По традиции, школьникам можно обещать все что угодно, кроме, однако, гарантирования победы на олимпиаде. Нередко руководитель будущей секции начинал свое выступление словами: «На нашей секции мы будем заниматься всем тем, о чем уже рассказывали ранее выступавшие руководители, и, кроме того, мы...». Впрочем, традицией является и выполнение этих обещаний. Число участников секции (в зависимости от класса, характера секции и агитационного мастерства руководителя) колеблется весьма значительно — от 2—3 участников до ста и более. Если на первое занятие секции приходит слишком много желающих, то по традиции первые два-три занятия намеренно делаются трудными (но не скучными!), чтобы «разгрузить» секцию (за счет перехода части участников в другие секции) и сделать ее более работоспособной. Наиболее удачным представляется нам состав секции от 15 до 30 участников (при наличии 1—3 младших руководителей).

Мы уже говорили о том, что много интереснейших материалов кружковой работы (увы!) безвозвратно потеряно. Однако многое и сохранилось. Отметим, в частности, что из десяти книг серии «Библиотека математического кружка» восемь возникли в результате обработки материалов работы секций школьного математического кружка при МГУ. Первые три книги этой серии «Избранные задачи и теоремы элементарной математики» [41] содержат в основном некоторые задачи, в течение ряда лет предлагавшиеся на секциях кружка и на первых четырнадцати олимпиадах. В числе авторов этих трех книг первым указан Д. О. Шклярский, формально не участвовавший в подготовке издания, но всей своей деятельностью содействовавший появлению этих книг. Отметим также превосходную книгу Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского [44], довольно точно воспроизводящую содержание и стиль работы одной из секций «общего типа».

Секции «общего типа» часто довольно сильно отличались одна от другой. В некоторых из них почти все время отводилось на решение задач, так что рассказ руководителя касался главным образом содержания задач и попутного разъяснения интересных методов решения. В других секциях на каждом занятии излагалась отдельная тема, не связанная с предыдущими лекциями руководителя. Это — секции собственно «этюдного» типа, обычно вдохновлявшиеся известной книжкой Г. Радемахера и О. Теплица [47]. Хорошей иллюстрацией занятий таких секций могут служить две яркие заметки В. И. Арнольда ([49], вып. 2, стр. 241—245; вып. 3, стр. 241—250), подробно описывающие два занятия одной из секций кружка на темы «Вариация кривой» и «Гармонические функции».

Наконец, довольно обычными являлись и такие секции «общего типа», в которых отдельные темы занимали несколько занятий, так что вся работа секции распадалась на ряд циклов. Именно такой стиль работы отражен в указанной выше книге Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского. Секции такого рода являлись переходными к «тематическим» секциям, все занятия которых были направлены на изучение сравнительно узкого круга вопросов или идей.

Приведем в качестве примера взятые из разных лет работы кружка примеры программ отдельных циклов, а также программу одной из специализированных секций.

Цикл «Геометрические вероятности»

Задача о встрече: двое условились встретиться в определенном месте, причем каждый приходит в указанное место между 10 и 11 часами и ждет ровно 15 минут; какова вероятность их встречи? Основная геометрическая идея: вероятность определяется площадью или объемом фигуры, образованной в пространстве событий точками, соответствующими благоприятным событиям.

Задачи о составлении треугольника из трех отрезков. (Всевозможные видоизменения следующей основной задачи: палка наугад распилена на три части; какова вероятность, что из этих частей составится треугольник?)

Задача Бюффона о бросании иглы и экспериментальное определение числа π. Бросание замкнутой выпуклой кривой на бумагу, разграфленную параллельными линиями; вероятность пересечения кривой с линией. Теорема Барбье о длине кривых постоянной ширины (в качестве следствия).

«Площадь» (мера) множества прямых, пересекающих данную дугу Теорема Крофтона и основные идеи интегральной геометрии.

Цикл «Геометрические задачи на максимум и минимум»

Метод спрямления в применении к решению задач о вписанных многоугольниках минимального периметра. (Типичная задача: найти точку, сумма расстояний которой от вершин треугольника минимальна.)

Изопериметрическая задача для n-угольников ($n = 3, 4$ и общий случай). Вписанные в окружность многоугольники наибольшего периметра; описанные многоугольники наименьшего периметра.

Изопериметрическая задача для произвольных линий. Четырехшарнирный метод Штейнера и его критика. Проблема существования решения задачи на минимум или максимум. Теорема Бляшке о существовании сходящейся подпоследовательности выпуклых фигур. Обоснование метода Штейнера. Другие примеры применения теоремы Бляшке.

Вариационные методы нахождения максимальных и минимальных фигур. (Типичная задача: через точку внутри угла провести прямую, отсекающую треугольник наименьшей площади; решение этой задачи методом «геометрического дифференцирования».)

Секция алгебры

(она имела подзаголовок «Расширение понятия о числе»).

Натуральные числа — основной «строительный материал» для дальнейших построений Цитата из Л. Кронекера: «Натуральные числа создал господь бог; все остальное — дело рук человеческих». Смысл этой цитаты.

Вопрос о разрешимости уравнений $x + a = b$; вычитание. Расширение множества чисел, делающее вычитание всегда выполнимым. Целые числа — материал для достаточно содержательных построений; теория чисел. Примеры теоретико-числовых задач.

Вопрос о разрешимости уравнений $ax + b = 0$; рациональные числа. Число как результат измерения; числовая ось. Возможность ограничиться рациональными числами в задачах измерения геометрических и физических величин.

Вопрос о решении квадратных уравнений Неразрешимость уравнения $x^2 - 2 = 0$. Разрешимость линейных уравнений — существование точек пересечения оси x с прямыми $ax + b = y$ (с рациональными коэффициентами); отсутствие (при имеющемся запасе чисел) точки пересечения оси x с параболой $y = x^2 - 2$. Квадратные радикалы. Разрешимость всех квадратных уравнений с вещественными корнями (существование точек пересечения оси x с параболами $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — числа из имеющегося у нас запаса).

Построение точки $x = \sqrt{2}$ (диагональ единичного квадрата). Отрезки, которые можно построить циркулем и линейкой. Доказательство неразрешимости задачи удвоения куба — парабола $y = x^3 - 2$ «проскакивает между известными точками оси x». Дальнейшее расширение запаса чисел; вещественные радикалы произвольного порядка.

Вопрос о решении кубических уравнений. Доказательство того, что кубическая парабола $y = x^3 - 4x - 2$ «проскакивает между точками оси x» (неприводимый случай решения кубического уравнения). Необходимость пополнения запаса чисел.

Снова вопрос о решении квадратных уравнений. Комплексные числа. Геометрические интерпретации комплексных чисел — комплексные числа как точки плоскости; комплексные числа как операторы поворотного растяжения. Формула Муавра и задачи на комплексные числа.

Снова вопрос о решении кубических уравнений; формула Кардано. Еще одно расширение множества (вещественных!) чисел — комбинации комплексных радикалов. Вопрос о решении уравнений 4-й степени.

Уравнение 5-й степени. Доказательство того, что парабола $y = x^5 - 4x - 2$ «проскальзывает между известными точками оси x». Необходимость нового расширения множества чисел. Всевозможные корни всевозможных алгебраических уравнений.

Другой подход к «числам» — бесконечные десятичные дроби. Новое расширение множества чисел — доказательство того, что число $0,110001000000000000000001000 0\ldots \left(= \sum_{n=1}^{\infty} (10^{-n!})\right)$ не является корнем никакого алгебраического уравнения.

Иное расширение понятия числа — кватернионы как операторы поворотного растяжения в плоскости и в пространстве. Геометрическая теория кватернионов. Кватернионы и векторы; операции векторной алгебры в пространстве; задачи. Теорема Фробениуса.

Еще одно расширение понятия о числе — комплексные числа на плоскости. Дуальные числа и двойные числа. Геометрическая интерпретация дуальных чисел (как направленных прямых плоскости). Геометрические приложения дуальных чисел. Понятие о теореме Гурвица и ее обобщениях.

[Разумеется, и в случае этой, сугубо «теоретической» направленности работы кружка довольно много материала оставлялось для самостоятельных упражнений участников секции.]

В заключение следует остановиться на вопросе о влиянии кружков и олимпиад друг на друга. Основным здесь является следующий вопрос, который часто задают учителя и школьники: имеет ли школьник, не занимавшийся в кружке, сколько-нибудь серьезные шансы оказаться победителем олимпиады? На этот вопрос может быть только один ответ: да, безусловно имеет. Среди победителей олимпиад всегда встречалось немало школьников, ранее не являвшихся «кружковцами». Многие из участников и победителей олимпиады на следующий год приходят в кружок, а затем участвуют в олимпиадах уже как «кружковцы». Разумеется, систематическая работа в кружке, приобретенные в нем математическая культура и навыки решения задач оказываются очень полезными для участия в олимпиаде.

Конечно, руководители секций очень «болеют» за своих учеников и гордятся их успехами на олимпиаде. Секции даже соревнуются между собой, сравнивая успехи своих участников. Надолго запоминаются «рекорды» секций, подобные достижению секции Шклярского на IV олимпиаде или достижению секции Е. Б. Дынкина, участиики которой получили на IX олимпиаде три первые премии. (Все три призера, Ф. И. Карпелевич, В. А. Успенский, А. А. Юшкевич — ные известные советские математики.)

Московские математические олимпиады

Если кружок привлекает к систематической работе 200—300 московских школьииков, то число участников олимпиады значительно больше. Бывали годы, когда на 1-й тур олимпиады приходило до 2000 участников (а в текущем, 1964 году число участников превзошло 4000!). Внешняя форма проведения олимпиады почти не изменилась со времени 1-й олимпиады, происходившей в 1935 году. Олимпиада проводится в два тура, по воскресеньям в конце марта — начале апреля. 1-й тур является отборочным. На нем каждому из участников предлагаются 4—6 сравнительно несложных задач, причем участники уведомляются о том, что решение двух из этих задач вполне достаточно для прохождения во 2-й тур. Через неделю после 1-го тура олимпиады производится разбор предложенных задач с указанием различных решений и типичных ошибок и объявляются результаты тура. Еще через неделю происходит 2-й тур, на который приглашаются все успешно прошедшие первый тур (обычно 30—50% участников первого тура). Впрочем, особые «строгости» допуска ко 2-му туру не соблюдаются: в отдельных случаях школьники, «провалившиеся» на 1-м туре, допускаются, по их желанию, к участию во 2-м туре. Задачи 2-го тура уже значительно сложнее задач 1-го тура. Для решения задач как 1-го, так и 2-го тура учащимся отводится 4—5 часов. Наконец, через неделю после 2-го тура проводится заключительное заседание, обставляемое с особой торжественностью. Для разбора задач на нем привлекаются крупнейшие московские математики. Почти традиционным является участие в разборе задач академика А. Н. Колмогорова. После разбора задач все участники приглашаются в большой зал, где председатель оргкомитета приветствует победителей, затем выступают ученые и представители общественности МГУ. Наконец, под громкие аплодисменты победители один за другим выходят к столу президиума и получают грамоты и премии. Как и на первой олимпиаде, премии представляют собой математические библиотечки,

Одним из организаторов школьного математического кружка при МГУ является член-корреспондент АН СССР, профессор И. М. Гельфанд. На этом снимке он приветствует победителей XVII олимпиады.

иногда настолько большие, что увенчанному премией победителю бывает нелегко пожать протянутую ему руку председателя. Многие книги имеют дарственные надписи авторов. По традиции сначала вручаются премии учащимся младших классов, а потом — более старшим школьникам.

Основное изменение в форме проведения олимпиады заключается в том, что начиная с VI олимпиады (1940 г.) учащиеся разделялись на два потока: отдельно соревновались учащиеся VII—VIII классов и отдельно — старшеклассники. Начиная с XV олимпиады (1952 г.) соревнование проводится по каждому классу в отдельности. По существу же предлагаемых задач олимпиады изменились за прошедшие десятилетия весьма значительно — задачи 2-го тура I олимпиады бесспорно легче задач даже 1-го тура последних олимпиад. Среди задач олимпиады неоднократно встречались и очень трудные; тем не менее почти всегда каждая задача получала хотя бы одно решение. Московские математики утверждают в шутку, что единственная надежда получить доказательство знаменитой великой теоремы Ферма, над которой математики бьются

Увенчанному премией победителю подчас нелегко пожать руку председателя оргкомитета! Первую премию получает Сережа Гельфанд (1958 год).

несколько столетий, — предложить эту проблему в качестве одной из задач школьной математической олимпиады.

За последние годы чаще всего присуждаются 4—6 первых премий (по разным классам), вдвое большее число вторых премий и втрое большее число третьих премий. Кроме того, выдается несколько десятков похвальных отзывов. Число премий никогда заранее не предопределяется и от одной олимпиады до другой может колебаться. Бывали случаи, когда старшеклассники не получали ни одной первой премии, иногда число первых премий было больше числа вторых премий и т. д.

Нередко бывает, что уверенные в своих силах школьники изъявляют желание участвовать в олимпиаде не по своему классу, а по старшему. Таким желаниям по традиции не препятствуют. Так, вместе с семиклассниками неоднократно участвовали в соревновании и ученики шестого класса. В 1959 году ученик VI класса Дима Каждан получил на олимпиаде 2-ю премию по восьмым классам; в том же году единственная 1-я премия по десятым классам была присуждена девятикласснику Саше Мутылину, приехавшему для участия в олимпиаде из Киева.

Остановимся еще на ряде вопросов, связанных с работой оргкомитета олимпиады. Огромная работа по подготовке и проведению олимпиады целиком проводится «за закрытыми дверями» и скрыта от взоров непосвященных. Учащиеся и учителя даже не подозревают, сколько сил вкладывают студенты-энтузиасты в это большое дело. Председателем оргкомитета традиционно является один из профессоров университета (см. приведенную таблицу); членами оргкомитета — в основном, руководители секций кружка, студенты и аспиранты.

Работа оргкомитета начинается составлением сборника подготовительных задач. Первый такой сборник был выпущен уже в 1935 году. В этих сборниках за годы проведения олимпиад было опубликовано несколько сотен задач, значительная часть которых в настоящей книге впервые предлагается вниманию широкого круга читателей. Дело в том, что сборники даже в последние годы издавались тиражом всего 2—4 тысячи экземпляров, причем они не поступали в книжные магазины, а довольно случайным образом распространялись на консультациях между учителями и учащимися. Кроме того, по традиции в каждом следующем сборнике большинство задач обновлялось. Более или менее полные комплекты подготовительных сборников задач за все годы сохранились лишь у нескольких энтузиастов школьного математического кружка и московских математических олимпиад.

Несмотря на то что на всех секциях кружка предлагалось много разнообразных задач, составление сборника подготовительных задач всегда было делом весьма сложным. Помимо традиционного требования новизны, на задачи, печатающиеся в подготовительном сборнике, накладывалось еще одно существенное условие: эти задачи не должны были походить на (не известные заранее!) задачи будущей олимпиады. Иначе говоря, члены оргкомитета должны были подобрать несколько десятков задач для подготовительного сборника и, кроме того, около 40 задач для олимпиады, причем все эти задачи должны были иметь различный характер. Ясно, что вся эта большая работа была бы не под силу нескольким членам оргкомитета (обычно 10—12 человек), если бы не помощь многих десятков студентов, аспирантов и преподавателей университета, всегда с большой готовностью откликавшихся на призыв оргкомитета.

Составление подготовительного сборника являлось первым этапом подбора задач для олимпиады. Уже в процессе

Номер олимпиады	Год	Председатель оргкомитета
I	1935	П. С. Александров
II	1936	Н. А. Глаголев
III	1937	А. Г. Курош
IV	1938	А. Н. Колмогоров
V	1939	Л. А. Люстерник
VI	1940	Л. С. Понтрягин
VII	1941	А. О. Гельфонд
VIII	1945*	И. М. Гельфанд
IX	1946	С. А. Гальперн
X	1947	И. Г. Петровский
XI	1948	В. В. Немыцкий
XII	1949	А. И. Маркушевич
XIII	1950	М. А. Крейнес
XIV	1951	Б. Н. Делоне
XV	1952	Д. Е. Меньшов
XVI	1953	П. К. Рашевский
XVII	1954	Г. Е. Шилов
XVIII	1955	С. В. Бахвалов
XIX	1956	Е. Б. Дынкин
XX	1957	О. А. Олейник
XXI	1958	В. Г. Болтянский
XXII	1959	Е. М. Ландис
XXIII	1960	И. Р. Шафаревич
XXIV	1961	В. А. Ефремович
XXV	1962	Н. В. Ефимов
XXVI	1963	А. Н. Колмогоров
XXVII	1964	И. Р. Шафаревич

*) В годы Великой Отечественной войны московские математики провели несколько олимпиад в Ашхабаде и Казани.

составления сборника некоторые задачи «засекречивались»; при этом все близкие к ним по идее задачи безжалостно изгонялись из подготовительного сборника. Те же соображения конспирации заставляли полностью отстранять от предолимпиадских консультаций не только всех членов оргкомитета, но и студентов, предложивших задачи, сохраняемые для олимпиады. Разумеется, это не было актом недоверия к студентам: опасность, которую старались предупредить, заключалась не в том, что студенты проболтаются или сознательно сообщат задачи знакомым школьникам, а в том, что они могли машинально сообщить задачи и идеи, родственные темам засекреченных задач. Укажем также, что учителя московских школ, тесно связанные с участниками будущей олимпиады, никогда не привлекались к составлению задач для сборников и для олимпиады.

При всей огромной помощи окружающих составление и отбор задач самой олимпиады представляет собой одну из самых трудных частей работы оргкомитета. Этому посвящается целый ряд заседаний, затягивающихся нередко на много часов. Члены оргкомитета спорят до хрипоты, задачи на глазах меняются до неузнаваемости; иногда две-три, казалось бы, совершенно разные задачи объединяются в одну, идейно более сложную, иногда же, напротив, одна задача распадается на две-три.

Большое огорчение причиняют ежегодно встречающиеся случаи, когда замечательная, по общему мнению, задача с восторгом передается студентами друг другу — и, когда она доходит до оргкомитета, оказывается, что ее знают слишком много лиц. Несмотря на полное доверие к студентам, в таких случаях задача не может пойти на олимпиаду. Скрепя сердце, приходится включать задачу в состав подготовительного сборника. Примерами могут служить задачи **23** (стр. 113) или **80** (стр. 120), не включенные в состав задач олимпиады лишь потому, что придумавшие их студенты не смогли удержаться от искушения рассказать красивую задачу товарищам. Когда с задачами для олимпиады бывает особенно «туго», разрешается одну и ту же задачу (или родственные задачи) предлагать параллельно учащимся разных классов. Примеры этого читатель обнаружит в приводимом в этой книге списке задач олимпиад.

Помимо требований яркости, идейной содержательности и безусловной новизны, предъявляемых к каждой отдельной задаче олимпиады, весьма серьезные требования предъявляются ко всему ансамблю задач в целом. Задачи должны быть достаточно разнообразными как по форме, так и по лежащим в основе их решения идеям. Естественно, что из наиболее удачных задач, отобранных для олимпиады, более легкие предлагаются для 1-го тура, а более сложные сохраняются для 2-го.

Ясно, что составление новых оригинальных и интересных задач из года в год становится все более трудным делом. Возможно, этим отчасти объясняется тот факт, что трудность задач олимпиады неуклонно возрастает.

По мере приближения 1-го тура задачный ажиотаж все более увеличивается. Нередко окончательный список задач оказывается утвержденным лишь за 1—2 дня до тура. Наконец, задачи составлены, мехматские машинистки под строгим надзором сразу нескольких членов оргкомитета перепечатывают задачи, которые тут же заклеиваются в конверты, скрепленные большими сургучными печатями. Затем все это богатство (включая отобранные у всех членов оргкомитета черновики) торжественно заключается в сейф.

Наступает момент торжественного открытия олимпиады. Еще накануне члены оргкомитета проводят сложную научно-исследовательскую работу по статистике русских фамилий. Дело в том, что каждый год администрация университета выделяет для олимпиады много аудиторий, которые, однако, не одинаковы по размерам. Здесь и помогает статистика, руководствуясь которой члены оргкомитета распределяют аудитории, указывая первые буквы фамилий тех школьников, которые в этих аудиториях будут решать задачи. Заранее изготовляются аккуратные таблички, например:

X кл.	VII кл.	IX кл.
А — В	П, У	С — Щ, Э, Ю, Я

и т. д., которые к моменту прихода школьников в университет уже висят на дверях аудиторий. На одной из аудиторий по традиции вывешивается особенно аккуратно выписанная табличка Ы — это комната членов оргкомитета, которые не опасаются, что их потревожат школьники, поскольку фамилий, начинающихся на букву Ы, не бывает. Здесь перед началом олимпиады проходит инструктаж всех студентов и аспирантов, обслуживающих олимпиаду, здесь же решаются возникающие вопросы и т. д. Это — штаб олимпиады.

После краткого напутственного слова председателя оргкомитета школьники расходятся по указанным аудиториям, и там проводящие олимпиаду студенты взламывают печати на конвертах с задачами и переписывают условия задач на доске. Олимпиада началась.

Олимпиаду обслуживают до сотни дежурных-студентов, которые помогают разойтись по аудиториям, сидят в аудиториях (отвечая, если нужно, на вопросы в заранее предусмотренном оргкомитетом объеме), следят за тем, чтобы коридоры и туалетные комнаты не превращались в дискуссионные клубы участников олимпиады.

Завершается первый день олимпиады общим собранием руководителей в комнате $\boxed{\text{Ы}}$, где собранные работы распределяются между студентами для проверки. Проверка работ составляет самую ответственную часть работы оргкомитета. Проверяющие работы студенты разбиваются на отдельные группы («кусты»), в каждой из которых назначается ответственный. После обсуждения результатов проверки по «кустам» состоится общее собрание оргкомитета, на котором окончательно фиксируются результаты 1-го тура. Оценка работ производится по сложной системе, количество баллов в которой трудно установить. Вот типичные оценки, которые проставляются отдельно по каждой задаче:

0 — задача не решалась;
— — задача не решена или решена неправильно;
—? — решение неверно и содержит очень грубые ошибки;
$\underset{\cdot}{-}$ (или ε) — задача не решена, но в черновиках или чистовой работе обнаруживаются некоторые разумные соображения;
$\mp$ — задача полностью не решена, но подход к решению правилен;
$\pm$ — задача решена не полностью;
$(\underline{+})$ — задача решена; решение содержит мелкие пропуски или дефекты;
$+$ — задача полностью решена;
! — решение задачи содержит неожиданные (иногда даже заранее непредвиденные оргкомитетом) яркие идеи.

Иногда используются и другие оценки (например $^1/_2$). Следует отметить, что оценка (!) еще не свидетельствует о решении задачи; например, часто ставятся оценки —!, ε!, ∓! и т. д. Однако даже оценка —! сильно увеличивает шансы участника на прохождение во 2-й тур или получение премии.

Совершенно аналогично проводятся 2-й тур олимпиады и обсуждение его результатов, завершающееся присуждением премий. Однако, если обсуждение результатов 1-го тура проходит довольно быстро и имеет относительно академический характер, то ко 2-му туру страсти накаляются, заседание длится до ночи (иногда и переносится на следующий день), а стены комнаты $\boxed{\text{Ы}}$ содрогаются от эмоций членов оргкомитета. Ведь на олимпиаде (в отличие, скажем, от школьной контрольной работы) учитывается не только количество решенных задач, но и общая математическая одаренность учащегося — вещь довольно деликатная, которую одни члены оргкомитета видят в одном, а другие — совершенно в другом.

При обсуждении результатов 1-го тура основное заключается в том, чтобы отсеять участников, совершенно не подготовленных (не обязательно по причине слабых знаний, но, возможно, по причине недостаточной математической культуры или отсутствия тренировки), не утеряв при этом никого из способных школьников. Поэтому отбор участников для второго тура проводится достаточно либерально. Более того, нередко члены оргкомитета, хорошо знакомые по кружку с математическими данными некоторых школьников, на свою ответственность ставят вопрос о допуске их во 2-й тур, несмотря на сплошные минусы в работе 1-го тура. Бывает также, что тот или иной член оргкомитета заявляет, что в определенной работе он усматривает способность математически мыслить, и потому просит допустить ее автора (не решившего, быть может, ни одной задачи) на 2-й тур. В таких случаях положительное мнение даже одного члена оргкомитета обычно считается достаточным основанием для допуска ко 2-му туру. Достаточным основанием считается иногда и просьба «провалившегося» в 1-м туре школьника.

Гораздо более сложное положение создается при обсуждении работ 2-го тура. Каждую сколько-нибудь интересную работу 2-го тура читают обязательно несколько членов оргкомитета; работы, выдвигаемые на премии или на похвальный отзыв, а также все спорные работы, как правило, читают все члены оргкомитета. При присуждении премий учитывается все: правильность решения, четкость математической мысли, оригинальность решения, законченность и полнота проведенного исследования, характер изложения «тонких» мест и т. д. Однако почерк и аккуратность расположения материала, а также внешнее оформление работы никогда не учитываются. Особенно большое значение придается нестандартным рассуждениям, неожиданным решениям, своеобразному толкованию условия задачи. Ясно, что разнообразие предъявленных к работам требований делает оценку каждого отдельного члена оргкомитета довольно субъективной и лишь коллективный характер процедуры присуждения премий обеспечивает правильность и объективность окончательного решения.

Стремление к объективности и высокая сознательность членов оргкомитета приводили иногда к прямым курьезам. Укажем только один случай. На XXI олимпиаде проверяющие представили к первой премии работу десятиклассника Миши Хазена, решившего четыре задачи из пяти (на 2-м туре). К несчастью, сестра Миши, студентка Лида Хазен являлась членом оргкомитета. Она авторитетно заявила, что Миша знал решение одной из пяти задач еще до олимпиады (хотя решил ее сам), что он вообще не собирается поступать на мехмат и поэтому никакой 1-й премии ему давать нельзя. Долго члены оргкомитета убеждали Лиду в том, что включение известной задачи в состав задач олимпиады — вина оргкомитета, а не Миши, что «случайное» родство Миши с одним из членов оргкомитета, благодаря чему известно, что он знал и чего не знал, не должно ставить его в более жесткие условия по сравнению с другими, что вопрос о поступлении в университет не должен учитываться, что, вообще, мы обсуждаем работу, а не ее автора и т. п. Ничего не помогало. Бедная девушка чуть не расплакалась и только демократическая процедура голосования (вероятно, через час-полтора после начала дебатов!) заставила Лиду смириться.

Бывали случаи, когда первую премию (!) получали учащиеся, не решившие полностью ни одной задачи. Например, на IX олимпиаде 1-я премия была присуждена ученику X класса Эрику Балашу. Все отведенное для проведения олимпиады время Эрик потратил на решение одной задачи:

Дан ряд чисел

$$0,\ 1, 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots,$$

в котором каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Найдется ли среди первых 100000001 *членов этого ряда число, оканчивающееся четырьмя нулями?*

Члены оргкомитета предполагали, что школьники будут решать эту задачу с помощью сравнительно несложных соображений, связанных с так называемым «принципом Дирихле» (см. стр. 14). Совсем по-другому подошел к этой задаче Балаш. Он поставил своей целью дать полное исследование, т. е. указать номера всех тех членов ряда, которые оканчиваются четырьмя нулями. Для этого он развил целое арифметическое исследование, которое не сумел (или не успел) довести до конца. Эрик правильно указал, что первым оканчивающимся четырьмя нулями является член с номером 7501, и указал закон повторяемости таких членов в дальнейшем. Решение получило оценку $\pm$! и, несмотря на то, что Балаш к решению остальных задач и не приступал, он получил I-ю премию. (Сейчас Э. Балаш — аспирант Московского пединститута имени В. И. Ленина.)

Не менее поучительным является случай, произошедший на VIII олимпиаде. На 2-м туре учащимся VII—VIII классов была предложена следующая задача:

Вершины A, B и C треугольника ABC соединены с точками A_1, B_1, C_1, расположенными на противоположных сторонах (но не в вершинах, рис. XVI*). Доказать, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 не лежат на одной прямой.*

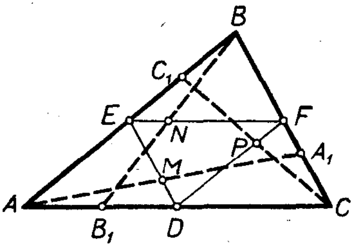


Рис. XVI.

Члены оргкомитета считали эту задачу сравнительно нетрудной. В самом деле, середины M, N, P указанных отрезков принадлежат средним линиям DE, EF, FD треугольника ABC и притом не совпадают с вершинами треугольника DEF. Остюда и вытекает требуемое утверждение: ведь никакая прямая, не проходящая через вершины треугольника, не может пересекать все три его стороны (а не их продолжения).

Последнее обстоятельство, по мнению членов оргкомитета, следовало считать очевидным. Однако, участник олимпиады, восьмиклассник Юлик Добрушин (ныне известный советский математик, доктор физико-математических наук Роланд Львович Добрушин), дописав решение до этого места, добавил: «Я долго пытался доказать, что прямая не может пересекать все три стороны треугольника во внутренних точках, но не смог этого сделать, так как с ужасом понял, что я не знаю, что такое прямая!» За это чистосердечное признание в «неумении» решить задачу Добрушин и был увенчан первой премией. Члены оргкомитета, вероятно, лучше чем он сам, понимали смысл его последней фразы: ведь в современной геометрии ответ на вопрос, что такое прямая, дается лишь перечислением ее свойств, среди которых обычно фигурирует свойство, равносильное невозможности пересечь все три стороны треугольника.

Примеров такого рода было очень много. Отметим еще, что редко встречались школьники, которым удавалось решить на олимпиаде все задачи 2-го тура. Иногда оргкомитет даже запрещал школьникам браться за все задачи, рекомендуя им тем самым работать более сосредоточенно и не разбрасываться. Впрочем, это запрещение не всегда помогало: победитель VII, VIII, IX и X олимпиад Леша Филиппов (ныне доцент МГУ, Алексей Федорович Филиппов) на одной из олимпиад решил — вопреки запрету — все задачи 2-го тура и затем тоненько перечеркнул аккуратно написанное решение одной из задач, чтобы к нему «не придирались», но при этом, чтобы все можно было прочесть! Систематически решали на олимпиадах все задачи второго тура школьники Саша Вентцель и Иосиф Берштейн (сейчас Александр Дмитриевич Вентцель — известный математик, предподаватель МГУ; Иосиф Бернштейн — студент мехмата МГУ).

Слово к школьнику.

Эта книга в основном посвящена московским математическим олимпиадам. Каждая олимпиада — это состязание (в данном случае в решении трудных математических задач). Как и на всяком состязании, здесь бывают победители, но большинство участников не получает призов. Однако в отличие от рыцарских турниров на математических олимпиадах не бывает побежденных: выигрывают все.

В самом деле, ты школьник VII (может быть VIII или IX) класса, ранее не участвовавший в математических олимпиадах. В школе ты привык решать довольно стандартные задачи, бесспорно полезные, но очень далекие от переднего края современной математической науки; слышал, конечно, о выдающихся ученых и их открытиях, но о том, что собой представляет современное математическое творчество, ясного представления у тебя нет. И вот, ты пришел на олимпиаду. Задачи, которые тебе предложили, совершенно не похожи на привычные школьные задачи. Их новизна и неожиданность в значительной степени связана с тем, что они одухотворены свежими идеями современной математики, и каждая из них — это маленькая научная работа. Уже само содержание этих задач открывает перед тобой новые горизонты. Даже если ты не добьешься успехов и не решишь ни одной задачи,— знакомство с их решениями (услышанными от товарищей или на разборе задач) принесет много пользы. И если задачи олимпиады и их решения заинтересовали тебя, то, даже в случае неуспеха на олимпиаде, тебе есть прямой смысл подумать о том, не является ли математика твоим призванием и будущей специальностью. Ведь каждый год на Московской математической олимпиаде выдается всего 20—30 премий по всем классам; если добавить сюда и школьников, получивших похвальные отзывы, то это число увеличится до 50—80. Между тем на механико-математический факультет одного только Московского государственного университета сейчас ежегодно принимается свыше 400 студентов. Ясно, что среди них, решивших сделать математику своей будущей специальностью, многие не участвовали, а многие и «провалились» на олимпиадах.

Говоря языком, привычным для математиков, успех на олимпиаде, как правило, является достаточным условием для возможности в дальнейшем работать в области математики, но это достаточное условие отнюдь не является необходимым. Мы знаем видных математиков, в свое время не добившихся никакого успеха на олимпиаде. Ведь на олимпиаде могут помешать и ограниченность времени, и напряженная атмосфера соревнования, и многое другое из того, что в дальнейшей работе будет отсутствовать

Одним словом, не получение премии или отзыва, а проявившийся интерес к задачам олимпиады и их решениям — вот тот критерий, которым ты должен руководствоваться. И если такой интерес проявился, приходи на занятия кружка, приходи учиться на мехмат.

Но если успех на олимпиаде совсем не является необходимым условием для возможности успешной работы в области математики, то есть одно условие, совершенно необходимое. Для того чтобы успешно заниматься математикой, нужно желание много, очень много работать. Никакие, даже самые выдающиеся способности не могут заменить систематической упорной работы. Каждый результат, каждая «теорема», найденная специалистом-математиком,— это сотни и даже тысячи (!) часов работы. Математик работает не только за столом учреждения — он работает и дома, и нередко на прогулке; случается, что нужные мысли приходят в голову во время киносеанса или даже во сне. Творческая работа специалиста-математика — это упорный и нелегкий повседневный труд, но это в то же время и огромное счастье.

И если ты подумываешь о том, чтобы стать математиком, начинай вырабатывать упорство и трудолюбие уже сейчас, читая эту книгу. Ко всем задачам подготовительного сборника приведены в конце книги указания или ответы, а многие задачи олимпиады снабжены подробными решениями. Не спеши заглядывать в них! Не жалей потратить несколько часов или даже дней на одну задачу, и лишь если упорные раздумья не приводят к цели, загляни в ответ или решение.

Желаем тебе успехов.

В. Г. Болтянский
И. М. Яглом.

ЛИТЕРАТУРА

Серия «Популярные лекции по математике»

1. А. И. Маркушевич, Возвратные последовательности Гостехиздат, 1951.
2. И. П. Натансон, Простейшие задачи на максимум и минимум, изд. 2, Гостехиздат, 1952.
3. И. С. Соминский, Метод математической индукции, изд. 4, Гостехиздат, 1952.
4. А. И. Маркушевич, Замечательные кривые, Гостехиздат, 1952.
5. П. П. Коровкин Неравенства, Гостехиздат, 1952.
6. Н. Н. Воробьев, Числа Фибоначчи, Гостехиздат, 1951
7. А. Г. Курош. Алгебраические уравнения произвольных степеней, Гостехиздат, 1951.
8. А. О. Гельфонд, Решение уравнений в целых числах, изд. 2, Гостехиздат, 1957.
9. А. И. Маркушевич. Площади и логарифмы, Гостехиздат, 1952.
10. А. С. Смогоржевский, Метод координат. Гостехиздат, 1952.
11. Я. С. Дубнов, Ошибки в геометрических доказательствах. изд. 3, Физматгиз. 1961
12. И. П. Натансон, Суммирование бесконечно малых величин, изд. 2, Гостехиздат, 1956
13. А. И. Маркушевич, Комплексные числа и конформные отображения, изд. 2, Физматгиз, 1960
14. А. И. Фетисов, О доказательствах в геометрии, Гостехиздат, 1953.
15. И. Р. Шафаревич, О решении уравнений высших степеней, Гостехиздат, 1953.
16. В. Г. Шерватов, Гиперболические функции, изд. 2, Физматгиз, 1958.
17. В. Г. Болтянский, Что такое дифференцирование?, изд. 2, Физматгиз, 1960.
18. Г. М. Миракьян, Прямой круговой цилиндр, Гостехиздат, 1955.
19. Л. А. Люстерник, Кратчайшие линии, Гостехиздат, 1955.
20. А. М. Лопшиц, Вычисление площадей ориентированных фигур, Гостехиздат, 1956.
21. Л. И. Головина и И. М. Яглом, Индукция в геометрии, изд. 2, Физматгиз, 1961.
22. В. Г. Болтянский, Равновеликие и равносоставленные фигуры, Гостехиздат, 1957.
23. А. С. Смогоржевский, О геометрии Лобачевского. Гостехиздат, 1957.
24. Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков, Конфигурационные теоремы, Гостехиздат, 1957.
25. А. С. Смогоржевский, Линейка в геометрических построениях, Гостехиздат. 1957. [Изд. 2, Физматгиз, 1960 — уже вне серии.]
26. А. Б. Трахтенброт, Алгоритмы и машинное решение задач, Гостехиздат, 1957.

27. В. А. Успенский, Некоторые приложения механики к математике, Физматгиз, 1958.
28. Н. А. Архангельский и Б. И. Зайцев, Автоматические цифровые машины, Физматгиз, 1958.
29. А. Н. Костовский, Геометрические построения одним циркулем, Физматгиз, 1959.
30. Г. Е. Шилов, Как строить графики, Физматгиз, 1959.
31. А. Г. Дорфман, Оптика конических сечений, Физматгиз, 1959.
32. Е. С. Вентцель, Элементы теории игр, Физматгиз, 1959.
33. А. С. Барсов, Что такое линейное программирование?, Физматгиз, 1959.
34. Б. Е. Маргулис, Системы линейных уравнений, Физматгиз, 1960.
35. Н. Я. Виленкин, Метод последовательных приближений, Физматгиз, 1961.
36. В. Г. Болтянский, Огибающая, Физматгиз, 1961.
37. Г. Е. Шилов, Простая гамма, Физматгиз, 1963.
38. Ю. А. Шрейдер, Что такое расстояние?, Физматгиз, 1963.
39. Н. Н. Воробьев, Признаки делимости, Физматгиз, 1963.
40. С. В. Фомин, Системы счисления, изд. «Наука», 1964.

Серия «Библиотека математического кружка»

41. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. I, Арифметика и алгебра, изд. 3, Физматгиз, 1959; ч. II, Геометрия (планиметрия), Гостехиздат, 1952; ч. III, Геометрия (стереометрия), Гостехиздат, 1954.
42. И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, Гостехиздат, 1951.
43. А. М. Яглом и И. М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении, Гостехиздат, 1954.
44. Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, Математические беседы, Гостехиздат, 1952.
45. И. М. Яглом, Геометрические преобразования, т. I, Гостехиздат, 1955; т. II, Гостехиздат, 1959.
46. М. Б. Балк, Геометрические приложения понятия о центре тяжести, Физматгиз, 1956.
47. Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, Физматгиз, 1962.

Сборники «Математическое просвещение».

48. Старая серия: вып. 1—14, ОНТИ, 1935—1938.
49. Новая серия: вып. 1—6, Гостехиздат — Физматгиз, 1957—1961.

Учебники по геометрии, алгебре и тригонометрии

50. Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. I, Учпедгиз, 1957; ч. II, Учпедгиз, 1958.
51. Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. I, Гостехиздат, 1948; ч. II, Гостехиздат, 1949.
52. Д. И. Фаддеев и И. С. Соминский, Алгебра, Физматгиз, 1963.

53. И. С. Соминский, Алгебра (дополнительные главы), Физматгиз, 1963.
54. А. Ф. Бермант и Л. А. Люстерник, Тригонометрия, Гостехиздат, 1947.
55. В. Г. Болтянский и И. М. Яглом, Преобразования; векторы, изд. «Просвещение», 1964.

Задачники по геометрии и алгебре

56. И. И. Александров, Сборник геометрических задач на построение, Учпедгиз, 1950.
57. Б. Н. Делоне и О. К. Житомирский, Задачник по геометрии, Физматгиз, 1959.
58. О. К. Житомирский, Проективная геометрия в задачах, Гостехиздат, 1954.
59. В. А. Кречмар. Задачник по алгебре, изд. «Наука», 1964.
60. М. Попруженко, Сборник геометрических задач (планиметрия), изд. 5, Учпедгиз, 1939.
61. З. А. Скопец и В. А. Жаров, Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия), Учпедгиз, 1962.

Энциклопедические изложения математики, рассчитанные на начинающих

62. Р. Курант и Г. Роббинс, Что такое математика?, Гостехиздат, 1947.
63. Ф. Клейн, Элементарная математика с точки зрения высшей, т. I (арифметика, алгебра, анализ), ОНТИ, 1935; т. II (геометрия), ГТТИ, 1934.
64. Энциклопедия элементарной математики,
т. I, Арифметика, Гостехиздат, 1951;
т. II, Алгебра, Гостехиздат, 1951;
т. III, Функции и пределы, Гостехиздат, 1957;
т. IV, Геометрия (ч. 1), Физматгиз, 1963.

Книги по кибернетике и современным идеям математики

65. Э. Беркли, Символическая логика и разумные машины, Изд-во иностр. лит., 1961.
66. Дж. Т. Калбертсон, Математика и логика цифровых устройств, изд. «Просвещение», 1964.
67. Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон, Введение в конечную математику, Изд-во иностр. лит., 1963.
68. А. М. Яглом и И. М. Яглом, Вероятность и информация, Физматгиз, 1960.
69. Сборник «О некоторых вопросах современной математики и кибернетики», изд. «Просвещение», 1965.

Книги по разным вопросам

70. И. Б. Абельсон, Рождение логарифмов, Гостехиздат, 1948.
71. И. Б. Абельсон, Максимум и минимум, ОНТИ, 1936.
72. Г. Н. Берман, Циклоида, Гостехиздат, 1948.
73. Г. Н. Берман, Число и наука о нем, Гостехиздат, 1948.

74. Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, Гостехиздат, 1952.
75. Б. В. Гнеденко и А. Я. Хинчин, Элементарное введение в теорию вероятностей, изд. «Наука», 1964.
76. И. С. Градштейн, Прямая и обратная теоремы, Гостехиздат, 1951.
77. С. И. Зетель, Новая геометрия треугольника, Учпедгиз, 1962.
78. В. Ф. Каган, Очерки по геометрии, изд. МГУ, 1963.
79. Д. А. Крыжановский, Изопериметры, изд. 2, Физматгиз, 1962.
80. А. Лебег, Об измерении величин, Учпедгиз, 1960.
81. В. Литцман, Старое и новое о круге, Физматгиз, 1960.
82. В. Литцман, Теорема Пифагора, Физматгиз, 1960.
83. В. Литцман, Где ошибка?, Физматгиз, 1962.
84. В. Литцман, Веселое и занимательное о числах и фигурах, Физматгиз, 1963.
85. Л. А. Люстерник, Выпуклые фигуры и многогранники, Гостехиздат, 1956.
86. Л. Я. Окунев, Комбинаторные задачи на шахматной доске, ОНТИ, 1935.
87. Д. Пойа, Математика и правдоподобные рассуждения, Изд-во иностр. лит., 1957.
88. М. М. Постников, Магические квадраты, Физматгиз, 1963.
89. В. Серпинский, Пифагоровы треугольники, Учпедгиз, 1959.
90. В. Серпинский, Что мы знаем и чего не знаем о простых числах, Физматгиз, 1963.
91. В. Серпинский, 100 простых, но одновременно трудных вопросов по арифметике, Учпедгиз, 1961.
92. А. Я. Хинчин, Три жемчужины теории чисел, Гостехиздат, 1948.
93. А. Я. Хинчин, Цепные дроби, Гостехиздат, 1949.
94. А. Я. Хинчин, Великая теорема Ферма, ОНТИ, 1934.
95. Цюльке, Геометрические построения на ограниченном куске плоскости, ОНТИ, 1935.
96. Л. Г. Шнирельман, Простые числа, Гостехиздат, 1940.
97. Г. Штейнгауз, Математический калейдоскоп, Гостехиздат, 1949.
98. Г. Штейнгауз, Сто задач, Физматгиз, 1959.
99. Я. Штейнер, Геометрические построения, выполняемые с помощью линейки и неподвижного круга, Учпедгиз, 1939.
100. И. М. Яглом, Комплексные числа, Физматгиз, 1963.

ЧАСТЬ I

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

В задачах раздела **А** приняты следующие обозначения:

$[x]$ — «целая часть x» — наибольшее целое число, не превосходящее x; так, например,

$$[5] = 5,\ [1{,}5] = 1,\ [^3/_4] = 0,\ [-1{,}5] = -2 \text{ и т. д.}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \text{ (читается: «}n\text{-факториал»; } n \text{ — натуральное число).}$$

По определению, $1! = 0! = 1$;

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot 2n;$$

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1).$$

В § 4 имеются в виду действительные решения систем уравнений.

В задачах §§ 8, 9, если не оговорено противное, предполагается десятичная запись чисел. Вообще, о различных системах счисления см. т. I «Энциклопедии элементарной математики».

Задачи §§ 5 и 6 раздела **Б** (геометрия) должны быть решены, как обычно, с помощью циркуля и линейки — кроме задач «с ограниченными средствами». О том, какие построения можно производить различными инструментами (односторонней линейкой, угольником и т. п.), см. т. IV «Энциклопедии элементарной математики».

В разделах **А** и **Б** задачи каждого параграфа распределены по классам обучения, а внутри каждого класса — в порядке возрастания их трудности.

Однако учащиеся младших классов могут не ограничивать свои интересы одними только «своими» задачами; старшеклассникам же просто *рекомендуется* порешать задачи, данные для учащихся младших классов.

А. АЛГЕБРА

§ 1. Доказательство тождеств

Доказать тождества:

VII — X классы

1. $$\left[\frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c}\right]=\left[\frac{a}{bc}\right].$$

VIII — X классы

2. $$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

3. $$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{5}-3+2\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}+3-2\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}.$$

X класс

4. $$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x}=1+\log_a b.$$

5. $$\frac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ=1.$$

6. $$C_n^{m-1}+2C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+2}^{m+1}.$$

§ 2. Суммирование конечных последовательностей

Доказать тождества:

VIII — X классы

7. $$\left[\frac{n}{k}\right]+\left[\frac{n+1}{k}\right]+\ldots+\left[\frac{n+k-1}{k}\right]=n.$$

X класс

8. $$\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\ldots+\frac{1}{\log_n x}=\frac{1}{\log_{n!} x}.$$

9. $$\frac{1}{\log_x 2\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\log_x 8}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\log_x 2^n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\log_x 2}\right)^2.$$

10. $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}=$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

11. $\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}+\right.$

$\left.+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}\right)+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\right.$

$\left.+\ldots+\frac{1}{2}+1\right)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}.$

12. $\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots+$

$+\frac{\cos 2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}.$

13. $\sin\frac{\pi}{2m+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2m+1}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{m\pi}{2m+1}=$

$=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}.$

14. $C_m^0-\frac{1}{3}C_m^1+\frac{1}{5}C_m^2-\ldots+$

$+(-1)^m\frac{1}{2m+1}C_m^m=\frac{m!\,2^m}{(2m+1)!!}.$

15. $\operatorname{arcctg}3+\operatorname{arcctg}5+\ldots+$

$+\operatorname{arcctg}(2n+1)=\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+$

$+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n}-n\operatorname{arctg}1.$

16. $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n.$

Вычислить суммы:

VII — X классы

17. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$

18. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+$

$+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$

19. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$

20. $\frac{0}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}.$

21. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!.$

X класс

22. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+$
$+\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)^2.$

23. $n!+\frac{(n+1)!}{1}+\frac{(n+2)!}{2!}+\ldots+$
$+\frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}.$

24. $a+(a+d)q+(a+2d)q^2+\ldots+$
$+(a+nd)q^n.$

25. $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n.$

26. $nx+(n-1)x^2+\ldots+2x^{n-1}+x^n.$

27. $1\cdot 2^n+2\cdot 2^{n-1}+\ldots+n\cdot 2+(n+1).$

28. $1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ \ldots\ 1}_{n\text{ единиц}}.$

29. $1\cdot 2\cdot 2^n+2\cdot 3\cdot 2^{n-1}+\ldots+$
$+n(n+1)2+(n+1)\ (n+2).$

30. $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi.$

31. $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi.$

32. $\sin\varphi+2\sin 2\varphi+\ldots+n\sin n\varphi.$

33. $1+C_n^1\cos\varphi+C_n^2\cos 2\varphi+\ldots+C_n^n\cos n\varphi.$

34. $C_n^0C_m^k+C_n^1C_m^{k-1}+\ldots+C_n^kC_m^0.$

§ 3. Доказательство неравенств

Доказать неравенства:

VII — X классы

35. $ad+bc\leqslant ab$, если $a,\ b,\ c,\ d>0$, $c+d\leqslant a,\ c+d\leqslant b$.

36. $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz.$

37. $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}$, если $x+y+z=1$.

38. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$, если $ab>0$.

39. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1.$

40. $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n-1} < n.$

41. $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}.$

42. $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}.$

VIII — X классы

43. $-1 \leqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant 1$, если $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 1.$

44. $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geqslant 2^n$, если $a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

45. $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$, если $a + b \geqslant 1$.

X класс

46. $|\log_a b| + |\log_b a| \geqslant 2.$

47. $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_\pi 2} > 2.$

48. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) < 3.$

49. $2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$

50. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} < 2$; здесь $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$, $k = 3, 4, \ldots$.

51. $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} < 2.$

52. $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, где $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

53. $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$, где $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$

54. $\frac{1 + a + a^2 + \ldots + a^{2n}}{a + a^2 + \ldots + a^{2n-1}} \geqslant \frac{n+1}{n}$, если $a > 0$.

55. $\operatorname{tg} \alpha_1 < \dfrac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n$,

если $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$.

56. $2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot \ldots \cdot (2n)! \geqslant ((n+1)!)^n$.

57. $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \geqslant 1 + \operatorname{ctg} \varphi$, если $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

58. $\left| \dfrac{\cos k\alpha \cos l\beta - \cos l\alpha \cos k\beta}{\cos \alpha - \cos \beta} \right| \leqslant |k^2 - l^2|$;

k, l — целые числа, $\alpha \neq \pm \beta + 2n\pi$.

59. $(n!)^2 > n^n$ при $n > 2$.

60. $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$, если $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,

a, b, p, $q > 0$; числа p и q рациональны.

61. $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

62. $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!$

63. $(3n)! > n^{3n}$.

64. $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \leqslant$

$\leqslant 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \ldots + \frac{s^n}{n!}$, где $s =$

$= a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

§ 4. Решение уравнений и систем уравнений

Решить уравнения:

IX — X классы

65. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}\right)$.

66. $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) = b^4$.

67. $\left(\sqrt{\sqrt{x^2 - 8x + 9} + \sqrt{x^2 - 8x + 7}}\right)^x +$

$+ \left(\sqrt{\sqrt{x^2 - 8x + 9} - \sqrt{x^2 - 8x + 7}}\right)^x =$

$= 2^{1 + \frac{x}{4}}$.

X класс

68. $9^x - 6^x = 4^{x+\frac{1}{2}}$.

69. $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$. (Найти все действительные решения.)

70. $|z| - z = 1 + 2i$.

71. $\sin ax - \cos bx = 2$.

72. $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = (\operatorname{ctg} x)^{\cos x}$.

Решить системы уравнений:

VII — X классы

73. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = a, \\ \dfrac{xz}{x+z} = b, \quad (abc \neq 0.) \\ \dfrac{yz}{y+z} = c. \end{cases}$

74. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_4 + 2x_5 - x_6 = 1, \\ -x_5 + 2x_6 = 1. \end{cases}$

75. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{98} + x_{99} + x_{100} = 0, \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0, \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$

76. $\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} = 0, \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + 100x_{100} = 0, \\ x_1 + 2^2 x_2 + \ldots + 100^2 x_{100} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + 2^{100} x_2 + \ldots + 100^{100} x_{100} = 0. \end{cases}$

77. $\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 + |x-1|. \end{cases}$

IX — X классы

78. $\begin{cases} x(y+z)=5, \\ y(x+z)=10, \\ z(x+y)=13. \end{cases}$

79. $\begin{cases} x+y-z=7, \\ x^2+y^2-z^2=37, \\ x^3+y^3-z^3=1. \end{cases}$

80. $\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y), \\ x^3+y^3=7(x+y). \end{cases}$

81. $\begin{cases} x^2+3xy=54, \\ xy+4y^2=115. \end{cases}$

82. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=133, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$

83. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{xy}{x+y}=a+\dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{xy}{x-y}=c+\dfrac{1}{c}. \end{cases}$

84. а) $\begin{cases} x^2-yz=a, \\ y^2-xz=b, \\ z^2-yx=c. \end{cases}$ б) $\begin{cases} u+v=a, \\ ux+vy=b, \\ ux^2+vy^2=c, \\ ux^3+vy^3=d. \end{cases}$

X класс

85. $\begin{cases} xy=a^2, \\ (\lg x)^2+(\lg y)^2=\dfrac{5}{2}(\lg a^2)^2. \end{cases}$

86. $\begin{cases} \sin x+\sin y=\sin\alpha, \\ \sin 2x+\sin 2y=\sin 2\alpha. \end{cases}$

Решить в целых числах уравнения:

VII — X классы

87. $xy=x+y$.

88. $1!+2!+\ldots+x!=y^2$.

89. $2^{\frac{x-y}{y}}-\dfrac{3}{2}y=1$.

90. $pq+pr+qr-pqr=2 \quad (p,\ q,\ r>0)$.

VIII — X классы

91. $1!+2!+\ldots+x!=y^z$.

92. $\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}$.

X класс

93. $3^x-2^y=1$.

§ 5. Исследование уравнений, систем уравнений и неравенств

VIII — X классы

94. a, b, c, d — положительные числа. Если система

$$\left.\begin{array}{r} ax-by<0, \\ -cx+dy<0, \\ x>0, \\ y>0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

имеет решение, то выполняется условие

$$ad-bc<0. \qquad (2)$$

Обратно, если выполняется условие (2), то система (1) имеет решение. Доказать.

IX — X классы

95. Решить неравенство $|\sin x|>|\cos x|$.

96. Доказать, что уравнение

$$(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\ldots+(a_nx-b_n)^2=0$$

не может иметь двух различных действительных решений, если только $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\neq 0$.

97. Доказать, что если уравнение вида $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ имеет корень m, то оно имеет корень $\frac{1}{m}$.

98. Доказать, что уравнение $x^3-px+1=0$ при p целом и большем 2 не имеет рациональных корней.

99. Доказать, что если p и q нечетные, то уравнение $x^{10}+px^7+q=0$ не имеет целых решений.

100. При каких натуральных a и b корни уравнения $x^2-abx+a+b=0$ целые?

101. Доказать, что если уравнение $ax^2+bxy+cy^2=z^2$ (a, b, c — целые) имеет ненулевое целочисленное

решение, то оно имеет бесконечное множество попарно не пропорциональных целочисленных решений.

102. Определить a так, чтобы один из корней уравнения

$$x^2-\frac{15}{4}x+a=0$$

был квадратом другого.

103. p_0, p_1, p_2 — положительные числа, удовлетворяющие условию $p_0+p_1+p_2=1$. Если уравнение

$$p_0+p_1x+p_2x^2=x \tag{1}$$

имеет корень x_0, удовлетворяющий условию

$$0<x_0<1, \tag{2}$$

то выполняется неравенство

$$p_1+2p_2>1. \tag{3}$$

Обратно, если выполняется условие (3), то уравнение (1) имеет корень x_0, удовлетворяющий условию (2). Доказать.

104. Найти уравнение с целыми коэффициентами, имеющее корень $x_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

105. Даны два уравнения:

а) $x^2-ax+1=0$, $x^2-x+a=0$.

Определить все значения коэффициента a, при которых эти уравнения имеют хотя бы один общий корень.

б) Определить a так, чтобы уравнения $x^2+x+a=0$, $x^2+ax+1=0$ имели общий корень.

106. Каждое из чисел x_1, x_2, ..., x_7 может принимать два значения 0 и 1 независимо от других. Существуют ли такие числа a_{ij}, каждое из которых должно быть равно нулю или единице, чтобы при любых целых неотрицательных b_1, b_2, ..., b_5 система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{17}x_7=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{27}x_7=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{51}x_1+a_{52}x_2+\ldots+a_{57}x_7=b_5 \end{cases}$$

имела не более одного решения?

X класс

107. Сколько решений имеет уравнение $\lg x = \sin x$?

108. Доказать, что не существует таких целых чисел x, y, z, что $x^k + y^k = z^k$, если $z>0$, $0<x<k$, $0< y<k$, k — целое положительное.

109. Доказать, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых положительных числах, если $n>2$ и

$$z<1+\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}.$$

110. Если x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 - 6x + 1 = 0$, то $x_1^n + x_2^n$ при любом целом значении n является целым числом и никогда не делится на 5. Доказать.

111. При решении квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ округлили свободный член q на 0,00001. Оценить, насколько может измениться ответ.

112. Дано уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = N$, где N — целое положительное число. Доказать, что число различных его решений в целых неотрицательных числах равно C_{N+n-1}^{n-1}.

113. Доказать, что при всех действительных v уравнение $(2v^2 - 2v + 1)z^3 + (v^2 - v + 3)z^2 + 3(v^2 - v + 1)z + (v + 2) = 0$ имеет корни z_1, z_2, z_3 с отрицательной действительной частью.

114. Доказать, что если n — нечетное число, большее, чем 2, то все корни уравнения

$$\cos \pi x = \frac{1}{n}$$

иррациональны.

115. Доказать, что любая пара целых чисел x, y, удовлетворяющая одному из уравнений $x + y\sqrt{5} = (9 + 4\sqrt{5})^n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, удовлетворяет также уравнению $x^2 - 5y^2 = 1$, и обратно.

§ 6. Многочлены

VII — X классы

116. Многочлен $a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^4 + a_8y^4 + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}x^3y$ не является произведением двух многочленов, одного от x, другого от y, если ни один из его коэффициентов не равен нулю. Доказать.

117. а) Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении:

$$(1-3x+2x^2)^{743}\cdot(1+3x-2x^2)^{744}.$$

б) Доказать, что если у каждого из данных многочленов сумма коэффициентов равна 1, то и у многочлена, являющегося произведением двух данных многочленов, сумма коэффициентов равна 1.

X класс

118. Доказать, что многочлен

$$(x-a)^2(x-b)^2+1,$$

где a и b — целые числа, нельзя разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

119. Доказать, что если имеет место тождество

$$x^m+x^{m-1}+\ldots+x+1\equiv$$
$$\equiv(x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_k)(x^l+b_1x^{l-1}+\ldots+b_l)$$

и коэффициенты многочленов в правой части — неотрицательные числа, то каждый из этих коэффициентов равен либо нулю, либо единице.

120. Доказать, что при простом p многочлен

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$$

не разлагается в произведение многочленов с неотрицательными коэффициентами.

121. Многочлен с действительными коэффициентами

$$ax^2+bx+c,\ a>0$$

имеет чисто мнимый корень. Доказать, что его можно представить в виде

$$(Ax+B)^2+(Cx+D)^2,$$

где A, B, C, D — действительные числа.

122. Найти целое число a, при котором многочлен

$$(x-a)(x-10)+1$$

разлагается в произведение $(x+b)(x+c)$ двух множителей с целыми b и c.

123. Полином $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ $(a_na_0\neq 0)$ имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Какие корни имеют полиномы:

а) $a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\ldots+(-1)^na_n$?

б) $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$?

124. Доказать, что корни многочлена

$$nx^n - 1 - x - x^2 - \dots - x^{n-1}$$

по абсолютной величине не превосходят единицы.

125. Доказать, что все рациональные корни многочлена

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

с целыми коэффициентами — целые числа (теорема Гаусса).

126. Докажите, что многочлен $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ при всех действительных значениях x положителен.

127. Если многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0$ при всех действительных значениях x положителен, то он представляется в виде суммы квадратов двух многочленов. Доказать.

128. При каких значениях a и b многочлен $x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$ обращается в точный квадрат?

129. Найти остаток от деления

$$x^{1959} - 1 \text{ на } (x^2 + 1)(x^2 + x + 1).$$

130. Пусть $P(x)$ — многочлен, дающий при делении на $x - a$ остаток A, при делении на $x - b$ остаток B, при делении на $x - c$ остаток C. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x - a)(x - b)(x - c)$. (Числа a, b, c попарно различны.)

131. Определить число a так, чтобы многочлен $x^n - ax^{n-1} + ax - 1$ делился на $(x - 1)^2$.

132. $a_1, a_2, \dots, a_n$; $b_1, b_2, \dots, b_m$ — целые числа. Если известно, что

$$A = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0} \equiv$$

$$\equiv \frac{a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \dots + a_1\frac{1}{x} + a_0}{b_m\left(\frac{1}{x}\right)^m + b_{m-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-1} + \dots + b_1\frac{1}{x} + b_0},$$

то можно подобрать такие целые числа $c_1, c_2, \dots, c_k$, $d_1, d_2, \dots, d_l$, чтобы имело место тождество

$$A \equiv \frac{c_kz^k + c_{k-1}z^{k-1} + \dots + c_1z + c_0}{d_lz^l + d_{l-1}z^{l-1} + \dots + d_1z + d_0},$$

где $z = x + \frac{1}{x}$. Доказать.

133. Доказать, что если отличные от нуля многочлены $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ удовлетворяют соотношению $P^4(z) + Q^4(z) = R^4(z)$ (при всех x), то эти многочлены являются константами.

134. Какое наибольшее число членов (после приведения подобных) может содержать многочлен 100-й степени от трех переменных x, y, z?

135. Доказать, что для любого p существует такой многочлен степени p с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, что его значения при всех целых значениях аргумента делятся на p. Доказать, что при простом p не существует многочлена меньшей степени с тем же свойством.

Примечание. Во второй части задачи требование простоты существенно. Например, многочлен пятой степени $x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + x$ при всех целых x делится на 6.

136. Доказать, что если все коэффициенты в разложении бинома $(a + b)^n$ нечетны, то $n = 2^s - 1$, и обратно.

137. Многочлен $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ равен $(x^{1958} + x^{1957} + 2)^{1959}$. Чему равно выражение $a_0 - \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + a_3 - \frac{a_4}{2} - \frac{a_5}{2} + a_6 - \ldots$?

138. Найти многочлен $x^2 + px + q$, максимум абсолютной величины которого на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ был бы наименьшим.

139. а) Доказать, что выражение

$$T_n(x) = \frac{1}{2^n}\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n\right]$$

после раскрытия скобок и приведения подобных окажется многочленом n-й степени от x со старшим коэффициентом 1. (Он называется n-м полиномом Чебышева.)

б) Докажите, что $T_n(x)$ имеет n действительных корней.

в) Докажите, что все действительные корни многочлена $T_n(x)$ заключены между -1 и 1.

г) Докажите, что имеет место тождество:

$$T_n(x) - x\,T_{n-1}(x) + \frac{1}{4}\,T_{n-2}(x) \equiv 0.$$

д) Докажите, что между двумя последовательными корнями $T_n(x)$ лежит один корень $T_{n-1}(x)$.

§ 7. Прогрессии

X класс

140. Даны арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Обе прогрессии составлены из положительных чисел, причем выполняются соотношения: $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$.

Доказать, что $b_k \geqslant a_k$ при $k > 2$.

141. Можно ли из чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ выбрать бесконечную геометрическую прогрессию, сумма которой равна $\frac{1}{5}$? Равна $\frac{1}{7}$?

142. Три простых числа, большие 10, образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что разность прогрессии делится на 6.

143. В арифметической прогрессии сумма m ее первых членов равна сумме n первых членов ($m \neq n$). Доказать, что сумма ее первых $m + n$ членов равна 0.

144. Если числа a^2, b^2, c^2 различны и образуют арифметическую прогрессию, то числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ тоже образуют арифметическую прогрессию. Доказать.

145. Члены бесконечной арифметической прогрессии — целые числа. Доказать, что суммы их цифр не образуют арифметической прогрессии, как бы мы их ни переставляли.

146. Доказать равенство:

$$\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{S_{2n} - S_n}{S_{3n} - S_{2n}},$$

где через S_k обозначена сумма k первых членов геометрической прогрессии.

147. Для того чтобы числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образовывали арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы равенство

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \ldots + \frac{1}{x_{k-1} x_k} = \frac{k-1}{x_1 x_k}$$

выполнялось при любом целом $k > 2$. Доказать.

148. Каждый член последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n$ равен остатку от деления на p соответствующего члена геометрической прогрессии. Найти такое наименьшее натуральное число m, что $a_k = a_{k-m}$ для любого $k \geqslant m$.

149. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — геометрическая прогрессия. Зная

$$S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

и

$$S_2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n},$$

найти

$$P = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

150. Если числа $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ составляют арифметическую прогрессию с отличной от нуля разностью, то числа

$$MN^{a_1}, MN^{a_2}, \ldots, MN^{a_k}, \ldots$$

могут дать (при надлежащем выборе чисел M и N) любую наперед заданную геометрическую прогрессию с положительным знаменателем. Доказать.

151. Для любой геометрической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_n, \ldots$ с положительными членами и возрастающей арифметической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ можно так подобрать основание системы логарифмов α, чтобы выполнялись соотношения:

$$b_1 - \log_\alpha a_1 = b_2 - \log_\alpha a_2 = \ldots = b_n - \log_\alpha a_n.$$

Доказать.

152. Даны n бесконечных (в обе стороны) целочисленных арифметических прогрессий, каждые две из которых имеют общий член. Доказать, что все прогрессии имеют общий член.

§ 8. Делимость чисел*

VII — X классы

153. Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ сократима (a и b — целые числа). Сократима ли дробь $\frac{a-b}{a+b}$? Если да, то верно ли обратное утверждение?

*) При решении задач этого параграфа часто бывают полезны следующие соотношения:

$$a^n - b^n = (a-b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$$

(справедливо при любом n),

$$a^n + b^n = (a+b)\,(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + (-1)^{n-1}b^{n-1})$$

(справедливо при нечетном n).

В справедливости этих соотношений можно убедиться непосредственной проверкой.

154. Если число имеет нечетное число делителей (включая 1 и само число), то оно — точный квадрат. Доказать.

155. Если p и q — простые числа, большие трех, то $p^2 - q^2$ делится на 24. Доказать.

156. Остаток от деления простого числа на 30 — тоже простое число. Доказать.

157. p и $8p^2 + 1$ — простые числа. Найти p.

158. p, $p + 10$, $p + 14$ — простые числа. Определить p (найти все решения задачи и доказать, что других нет).

159. Будет ли число $4p + 1$ простым, если известно, что числа p и $2p + 1$ простые и $p > 3$?

160. Доказать, что наименьшее число N, взаимно простое с каждым из чисел 1, 2, ..., n, есть число простое.

161. Если a, $a + d$, $a + 2d$, ..., $a + (n - 1)d$ взаимно просты с n, то d и n не взаимно просты. Доказать.

162. Доказать, что сумма n последовательных нечетных натуральных чисел при $n > 1$ является составным числом.

163. Доказать, что для любого n найдется такое x, что число $nx + 1$ составное.

164. Даны три целых числа K, M, N, причем K и M — взаимно простые. Доказать, что найдется такое целое число x, что $Mx + N$ делится на K.

165. Доказать, что $7^{7^{7^{7^{7^{7^7}}}}} - 7^{7^{7^{7^7}}}$ делится на 10.

166. Доказать, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.

167. Доказать, что $11^{10} - 1$ делится на 100.

168. Доказать, что $11^{10^{1961}} - 1$ делится на 10^{1962}.

169. а) На какую цифру кончается число 777^{777}?

б) Найти две последние цифры числа $14^{14^{14}}$.

170. Зная, что $13\,717\,421 = 761^2 + 7 \cdot 1370^2 = 439^2 + 7 \cdot 1390^2$, разложите 13 717 421 на множители.

171. а) Сколько различных делителей имеет число

$$2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5?$$

б) Пусть p_1, p_2, ..., p_k — различные простые числа, а a_1, a_2, ..., a_k — натуральные числа. Доказать, что число $n = p_1^{a_1}, p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ имеет $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_k + 1)$ различных делителей (считая 1 и n).

172. Если $a + b + c$ делится на 6, то $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 6 (a, b, c — целые числа). Доказать.

173. a и b — целые числа. Доказать, что число $a^2 + b^2$ делится на 441, если известно, что оно делится на 21.

174. Доказать, что при всех n число $3^{2n+3}+40n-27$ делится на 64.

175. Найти общий наибольший делитель всех чисел вида $7^{n+2}+8^{2n+1}$ при n целом и неотрицательном.

176. Доказать, что число $5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}$ при $n \geqslant 0$ делится на 19.

177. Если целое число $p \geqslant 1$, то $4^{2p}-3^{2p}-7$ делится на 84. Доказать.

178. Доказать, что n^5-5n^3+4n при всяком целом $n>2$ делится на 120.

179. Доказать, что при $n \geqslant 0$ число $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133.

180. Докажите, что для любого целого числа n сумма $1^{2k+1}+2^{2k+1}+3^{2k+1}+\ldots+(2n)^{2k+1}$ делится на $2n+1$; $k = 0, 1, 2, \ldots$.

181. Доказать, что ни при каком целом n выражение n^2+3n+5 не делится на 121.

182. Доказать, что $1^t+2^t+\ldots+9^t-3(1^t+6^t+8^t)$ делится на 18 при всех натуральных t.

183. Найти наименьшее целое число, начинающееся цифрой 7, и такое, что если переставить эту цифру в конец, то число уменьшится впятеро.

184. Найти наименьшее число, в 4 раза меньшее своего обращенного (т. е. состоящего из тех же цифр, но записанных в обратном порядке).

185. Если для любого целого числа, имеющего нечетное число знаков, составить обращенное и из большего из этих двух чисел вычесть меньшее, то полученная разность будет делиться на 99. Доказать.

186. Доказать, что все числа ряда 10001, 100010001, 1000100010001, ... — составные.

187. Докажите, что для любого числа n существует такое N, что числа $N+1$, $N+2$, ..., $N+n$ — все составные.

188. Пусть a, b, x_0 — любые натуральные числа. Доказать, что в последовательности: x_0, $x_1 = ax_0+b$, $x_2 = ax_1+b$, ... — не все числа простые.

189. Найти наименьшее число, дающее остатки: 1 — при делении на 2, 2 — при делении на 3, 3 — при делении на 4, 4 — при делении на 5, 5 — при делении на 6.

б) Найти наименьшее число, которое при делении на n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+m$ дает соответственно остатки r, $r+1$, ..., $r+m$.

190. Пусть имеется шестизначное число N. Доказать, что если разность между числами, составленными из трех первых его цифр и из трех последних цифр (в порядке их следования), делится на 7, то и само число делится на 7.

191. Даны три целых числа, являющиеся точными квадратами. Если сумма этих трех чисел делится на 9, то из них можно выбрать два, разность которых также делится на 9. Доказать.

192. Доказать, что сумма квадратов трех целых чисел не может при делении на 8 дать в остатке 7.

193. В какой степени все числа (кроме чисел, кратных 7) при делении на 7 дают в остатке 1?

194. Доказать, что если необходимый и достаточный признак делимости, выражающийся через свойства цифр числа, не зависит от порядка цифр, то это — признак делимости на 3 или на 9.

195. Вывести признак делимости на 11.

196. a и b — натуральные числа. Наименьшее положительное число d вида $ax+by$, где x и y — целые числа, равно наибольшему общему делителю чисел a и b. Доказать.

197. Доказать, что если $(m-1)!+1$ делится на m, то m — простое число.

198. Число p — простое. Сколько существует натуральных чисел, взаимно простых с числом p^3 и меньших, чем p^3?

199. Доказать, что показатель, с которым данное простое число p входит в разложение на простые множители числа $n!$, равен

$$\sigma = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \ldots .$$

200. Найти число двоек в разложении на множители числа $(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot 2n$.

201. Доказать, что $n!$ не делится на 2^n.

202. Доказать, что $(n!)^{(n-1)!}$ является делителем числа $(n!)!$.

203. Доказать, что $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ — целое число, делящееся нацело на $n+1$.

204. Доказать, что если p — простое число, большее трех, и $n=\frac{2^{2p}-1}{3}$, то 2^n-2 делится на n.

205. а) $2^p - 1$ и $2^q - 1$ взаимно просты тогда и только тогда, когда p и q взаимно просты. Доказать.

б) Доказать, что любые два числа из ряда $2^2 + 1$, $2^{2^2} + 1$, ..., $2^{2^n} + 1$ являются взаимно простыми.

206. Доказать, что если p простое и a не делится на p, то $a^{p-1} - 1$ делится на p (малая теорема Ферма).

207. Доказать, что, каково бы ни было натуральное число N, существует число, записываемое единицами и нулями, которое делится на N.

208. Существует такое число n, что n-значное число, записываемое одними единицами, делится на 173. Доказать.

209. Пусть k — натуральное число, не делящееся на 3. Доказать, что для любого $m \geqslant 9k$ существует число A, записывающееся с помощью m единиц и некоторого количества нулей, которое делится на $\underbrace{111\ldots11}_{k \text{ цифр}}$.

210. Число A, записывающееся с помощью L единиц и нескольких нулей, делится на $\underbrace{111\ldots11}_{k \text{ цифр}}$, где $k \geqslant 9$. Доказать, что либо $L = k$, либо $L \geqslant k + 9$.

211. Доказать, что существует число, делящееся на 7, которое записывается с помощью одних только единиц и нулей, причем количество единиц 1961, нулей 2^{1961}, последняя цифра — единица.

212. Делится ли 81-значное число, составленное из одних единиц, на 81?

213. Если p — простое число, не равное 3, то число, записываемое p единицами, не делится на p. Если p — простое число, отличное от 2, от 3 и от 5, то число, записываемое $p - 1$ единицей, делится на p. Доказать.

214. Найти такие натуральные числа a и b, меньшие 10, что остаток от деления числа $111111 \cdot a$ на $1111 \cdot b$, на 1000 больше остатка от деления $11111 \cdot a$ на $111 \cdot b$.

215. Найти все такие тройки чисел a, b, c, отличных от 1, что произведение любых двух чисел тройки, сложенное с единицей, делится на третье число.

216. Доказать, что сумма $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ при нечетном k делится на $1 + 2 + \ldots + n$.

X класс

217. Делится ли на 7 число C_{1000}^{500}?

218. Какое число надо прибавить к выражению $(n^2 - 1)^{1000} \cdot (n - 1)^{1001}$, чтобы оно делилось на n?

219. Существует ли такое положительное n, что числа

$$\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ цифр}}\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ цифр}}\underbrace{55\ldots5}_{n \text{ цифр}}\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ цифр}},$$

$$\underbrace{11\ldots11}_{n+1}\underbrace{99\ldots99}_{n+1}\underbrace{55\ldots55}_{n+1}\underbrace{99\ldots99}_{n+1}$$

делятся на 1959?

220. Для любого простого p разность

$$\underbrace{11\ldots1}_{p \text{ цифр}}\underbrace{22\ldots2}_{p \text{ цифр}}\underbrace{33\ldots3}_{p \text{ цифр}}\ldots\underbrace{88\ldots8}_{p \text{ цифр}}\underbrace{99\ldots9}_{p \text{ цифр}}-123456789$$

делится на p. Доказать.

221. Доказать, что для любого $n > 2$ разность

$$C_{2n}^{2n-1} - C_{2n-1}^{2n-2} \text{ делится на } 2^{2n}.$$

222. Доказать, что для любых целых p, k, l, где $k > l$ и p — простое число, разность $C_{pk}^{pl} - C_k^l$ делится на p.

223. Доказать, что если m и n взаимно просты, то число $(m+n-1)!$ делится на произведение $m!\,n!$

224. Доказать, что $2^{(3^n)} + 1$ делится на 3^{n+1}.

225. Существует ли такое целое p, что число $\frac{n!}{2^{n-p}}$ является целым при любом натуральном n?

§ 9. Задачи с целыми числами

VII — X классы

226. Числа от 1 до 1000 выписаны подряд по кругу. Начиная с первого, вычеркивается каждое 15-е число (1, 16, 31, ...), причем при повторных оборотах зачеркнутые числа считаются снова. Сколько чисел останутся незачеркнутыми?

227. Докажите, что любое целое число рублей, большее семи, можно уплатить без сдачи денежными билетами достоинством 3 и 5 рублей.

228. Сколькими способами 2^n можно разложить в сумму четырех квадратов натуральных чисел?

229. Пронумеруем подряд все простые числа, начиная с 5. Докажите, что каждое простое число будет больше своего утроенного номера.

230. Известно, что сумма нескольких последовательных натуральных чисел равна 1000. Найти все такие последовательности.

231. Что больше: 200! или 100^{200}?

232. Все числа от единицы до 10 000 000 выписаны подряд. Каких чисел больше: тех, в написании которых встречается хоть один раз единица, или тех, в которых единица не встречается?

233. Какие целые числа при зачеркивании последней цифры уменьшаются в целое число раз?

234. Одна из цифр многозначного числа — нуль. При вычеркивании этого нуля число уменьшается в девять раз.

а) На каком месте стоит этот нуль?

б) Найти все такие числа.

235. В какой системе счисления 75 делится на 7?

236. К какому трехзначному числу достаточно приписать 3 цифры слева, чтобы получить его квадрат?

237. Число является полным квадратом и оканчивается на 5. Доказать, что его третья справа цифра — четная.

238. Всеми возможными способами расставить цифры на свободные места (вместо звездочек) в следующем равенстве:

$$*00** = (***)^2$$

239. Доказать, что n-значное число при $n>1$ всегда больше произведения своих цифр.

240. Найти все двузначные числа, каждое из которых больше числа, написанного теми же цифрами в обратном порядке, на точный квадрат.

241. Найти двузначное число, равное сумме квадрата числа единиц и числа десятков.

242. Найти такое число N, что N^6 составлено из цифр 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9.

243. Найти шестизначное число, которое при умножении на 2, 3, 4, 5, 6 дает числа, написанные теми же цифрами, что и само число, но в другом порядке.

244. Найти 12 целых положительных чисел, сумма которых равна их произведению. Указать все решения.

245. Дано трехзначное число, у которого первая и последняя цифры разнятся не менее, чем на 2. Составляется разность этого числа и числа обращенного (см. задачу **184**). К результату прибавляется число, ему обращенное. Доказать, что полученная сумма равна 1089.

246. Показать, что числа 49, 4489, 444 889, 44 448 889, получающиеся каждое путем вписывания в середину предыдущего числа 48, являются точными квадратами.

247. Восемь целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_8$ подчинены условию: $0<a_1<a_2<\ldots<a_8<16$. Доказать, что всегда существует такое число k, что из данных восьми чисел можно выбрать не менее трех пар, связанных соотношением: $a_i - a_j = k$.

248. Доказать, что

$$\frac{m}{3}+\frac{m^2}{2}+\frac{m^3}{6}$$

является целым числом при любом целом m.

249. Найти все двузначные числа, которые делятся на произведение своих цифр.

250. Доказать, что квадрат целого числа не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами, отличными от нуля. Какими тремя цифрами может оканчиваться целое число, квадрат которого оканчивается тремя одинаковыми цифрами, отличными от нуля?

251. Обозначим через $n?$ произведение всех простых чисел, меньших n. Доказать, что $n?>n$ при $n>4$.

252. Докажите, что число $\underbrace{100\ldots00}_{49\text{ цифр}}\underbrace{50\ldots01}_{99\text{ цифр}}$ не является кубом никакого целого числа.

253. Некоторое число является точным квадратом. Доказать, что сумма его цифр либо делится на 9, либо при делении на 3 дает в остатке 1.

254. Известно, что $[n\alpha]+[n\beta]=[n(\alpha+\beta)]$ при всех натуральных n. Доказать, что α или β — целое число.

255. Доказать, что $\sqrt{10}\,[(1+\sqrt{10})^{100}-(1-\sqrt{10})^{100}]$ — целое число.

256. Доказать, что не существует таких целых положительных чисел x и y, что $x^3+3=4y(y+1)$.

257. Даны четыре целых положительных числа a_1, a_2, a_3, a_4. По ним составляются четыре новых числа $b_1 = |a_1-a_2|$, $b_2=|a_2-a_3|$, $b_3=|a_3-a_4|$, $b_4=|a_4-a_1|$. С числами b_1, b_2, b_3, b_4 поступают таким же образом и т. д. Доказать, что на некотором конечном шаге все разности обратятся в 0.

258. Целые числа от 1 до 1956 выписаны подряд: 123456 ... 1956. Умножим первую цифру на 2, прибавим к ней вторую; полученное число опять умножим на 2 и прибавим третью цифру и т. д.; наконец, прибавим последнюю цифру. С полученным числом проделаем то же самое, с результатом — опять и т. д., пока не получим однозначное число. Чему будет равно это число?

259. Среди последовательных пар цифр числа 11 001 находятся все двузначные числа, записываемые единицами и нулями: (11, 10, 00, 01). Для каждого n построить аналогичное число, т. е. такое, среди групп последовательных n цифр которого встречаются все n-значные числа, записываемые единицами и нулями. Какое наименьшее число знаков может иметь это число?

260. Доказать, что всякое число можно единственным способом записать в виде:

$$a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \ldots + a_n \cdot n! \quad (0 \leqslant a_i \leqslant i).$$

261. Если число делится на 99, то сумма его цифр не меньше 18. Доказать.

262. В 100-значном числе все цифры, кроме одной,— пятерки. Доказать, что оно не является полным квадратом. То же самое доказать для 1959-значного числа.

263. Из 979 различных целых положительных чисел, не превосходящих 1955, можно выбрать 3 таких, что сумма двух из них равна третьему. Доказать.

264. Разность между суммами кубов n первых четных и n первых нечетных чисел равна 2240. Найти n.

265. Найти все такие натуральные числа n, чтобы всякое составное число k, взаимно простое с n и меньшее его, являлось квадратом целого числа.

266. Найти наименьшую совокупность таких чисел, что для любого k $(1 \leqslant k \leqslant N)$ можно так выбрать несколько чисел из этой совокупности, что их сумма равна k (N — данное число).

267. Доказать, что для любого n существует сколь угодно большое число, представимое в виде суммы двух квадратов ровно n различными способами.

268. Все двузначные числа, не оканчивающиеся нулем, выписывают одно за другим так, что каждое следующее число начинается с последней цифры предыдущего. Из многозначных чисел, которые таким образом можно получить, выбирают наименьшее и наибольшее. Найти их сумму.

269. а) Найти частное от деления числа

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$$

(n двоек) на 2.

б) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots, a_n$ — положительные числа. Что больше:

$$1+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_m}}}} \quad \text{или} \quad 1+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}?$$

270. Треугольником Паскаля называется числовой треугольник

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\quad 1 \\ 1\quad 2\quad 1 \\ 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\ 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot, \end{array}$$

в котором по краям стоят единицы, а каждое число внутри равно сумме двух стоящих над ним в ближайшей строке сверху. Сколько чисел, не делящихся на p, стоит в первых p^n строках? (p — данное простое число, n — любое натуральное число).

271. Найти правильную дробь, превышающую $\frac{1}{3}$, зная, что от увеличения ее числителя на некоторое число и умножения знаменателя на то же число величина дроби не меняется.

272. Найти первые три цифры числа

$$\frac{0{,}1234\ldots5051}{0{,}51504948\ldots321}.$$

273. Доказать, что при любых знаках чисел a_{ij} (каждое из которых отлично от нуля) среди чисел

$$a_{11}a_{22}a_{33},\ a_{12}a_{23}a_{31},\ a_{13}a_{21}a_{32},$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31},\ -a_{12}a_{21}a_{33},\ -a_{11}a_{23}a_{32}$$

имеется хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное.

IX—X классы

274. Найти три натуральных числа, из попарных произведений которых можно образовать арифметическую прогрессию.

§ 10. Разные задачи

VII—X классы

275. Доказать, что для любого целого n число $(\sqrt{2}-1)^n$ представимо в виде разности $\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$, где m — целое.

276. а) Будет ли дробь 0,1234567891011121314 ..., которая получится, если выписать после нуля подряд все целые числа, периодической?

б) Дано число, выраженное десятичной дробью 0,1000000001 ... (единицы стоят на первом, десятом, сотом, тысячном, десятитысячном и т. д. местах после запятой; остальные цифры — нули). Доказать:

1° что эта дробь — непериодическая;

2° что квадрат этого числа — тоже непериодическая дробь.

277. Дана возрастающая последовательность целых чисел:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n.$$

Рассматриваются всевозможные дроби вида $\frac{a_i - a_j}{i-j}$, где a_i и a_j — числа из данной последовательности и $i > j$.

Доказать, что произведение всех таких дробей — натуральное число.

278. Найти общий вид чисел x, обладающих тем свойством, что число $\frac{1}{x}$, записанное в виде десятичной дроби, изображается начиная с первой значащей цифры теми же цифрами и в том же порядке, что и x.

279. Целые числа $1 \leqslant n_1 < \ldots < n_k$ обладают тем свойством, что если $i < j$, то десятичная запись числа n_j не начинается с десятичной записи числа n_i (например, если n_i равно 13, то n_j не может равняться 135). Доказать, что

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\ldots+\frac{1}{n_k}\leqslant 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{9}.$$

280. Если $\frac{a}{b}$ — правильная дробь, то она может быть представлена в виде:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1q_2}+\frac{1}{q_1q_2q_3}+\ldots+\frac{1}{q_1q_2\ldots q_n},$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — целые и положительные числа, причем $q_1\leqslant q_2\leqslant\ldots\leqslant q_n$. Доказать.

281. а) Доказать, что для любого положительного числа N можно найти такое натуральное число n, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>N.$$

б) Рассмотрим все целые числа, в написании которых не участвует цифра 9. Доказать, что сумма обратных величин любого количества таких чисел (без повторений) не больше 28.

282. Доказать, что сумма

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$$

ни при каком n не может быть целым числом.

IX—X классы

283. Освободиться от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$,

б) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}}$.

284. Все положительные рациональные числа являются членами последовательности

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \ldots,$$

в которой из двух чисел раньше идет то, у которого меньше сумма числителя и знаменателя, а если суммы равны, — то, у которого меньший знаменатель. На месте с каким номером стоит число $\frac{p}{q}$?

285. Докажите, что если a, b, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ рациональны, то $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ тоже рациональны.

286. Доказать, что несократимая дробь $\frac{a}{b}$ будет чистой периодической тогда и только тогда, когда b взаимно просто с 10.

287. а) Доказать, что число $\sqrt[3]{2}$ не может быть представлено в виде $p+q\sqrt{r}$, где p, q, r — рациональные числа, $r>0$.

б) Доказать, что выражение $1+\sqrt{3}$ не может быть представлено в виде суммы квадратов чисел вида $a+b\sqrt{3}$, где a и b — рациональные числа.

288. Найти все такие натуральные числа a, b, c, что

$$\sqrt{a+\frac{b}{c}}=a\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

289. Если среднее арифметическое n первых цифр числа $\sqrt{2}-1$ заключено между $4\frac{1}{3}$ и $4\frac{2}{3}$, то это же верно и для числа $2-\sqrt{2}$. Доказать.

290. Доказать, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррационально.

291. Доказать, что если сумму простых дробей

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$$

(n — целое число) обратить в десятичную дробь, то полученная дробь будет смешанной периодической.

292. Всякое рациональное число $\frac{p}{q}$ единственным образом представляется в виде

$$\frac{p}{q}=x_1+\frac{x_2}{2!}+\frac{x_3}{3!}+\ldots+\frac{x_n}{n!},$$

где $0\leqslant x_k<k$ при $k>1$. Доказать.

293. Доказать, что для любого числа a $(0\leqslant a\leqslant 1)$ и любого N найдутся такие целые m, n $(0<n,\ 0\leqslant m\leqslant n\leqslant N)$, что $|an-m|<\frac{1}{N}$.

X класс

294. Не существует такого m, чтобы среди чисел

$$C_m^0,\ C_m^1,\ \ldots,\ C_m^m$$

было поровну четных и нечетных. Доказать.

295. Рассмотрим три числа:

$$a = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots + C_n^{3k} + \dots,$$
$$b = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots + C_n^{3k+1} + \dots,$$
$$c = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots + C_n^{3k+2} + \dots .$$

Доказать, что два из них равны между собой, а третье отличается от них на единицу.

IX — X классы

296. Доказать, что если

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad n = 0,\ 1,\ 2\ \dots,$$

то

$$\frac{a_n - \sqrt{a_0 b_0}}{a_n + \sqrt{a_0 b_0}} = \left(\frac{a_0 - \sqrt{a_0 b_0}}{a_0 + \sqrt{a_0 b_0}}\right)^{2^n}$$

(числа a_0 и b_0 положительны).

297. Доказать, что если

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = p^2, \quad b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = q^2,$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = pq,$$

то

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{q_n}{b_n} = \frac{p}{q}.$$

298. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — положительные целые числа, причем $a_1 < a_2 < \dots < a_n \leqslant 2n$. Докажите, что если наименьшее общее кратное любых двух из этих чисел больше $2n$, то $a_1 > \frac{2n}{3}$.

X класс

299. Доказать, что $a^{14} + \frac{1}{a^{14}} = -1$, если $a^2 + a + 1 = 0$.

300. Последовательность $r_1, r_2, \dots$ составлена по закону:

$$r_1 = 1; \quad r_{n+1} = \frac{r_n + \frac{2}{r_n}}{2}.$$

Представим r_k в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$. Доказать, что при всех $k \geqslant 2$ справедливы неравенства

$$0 < \frac{p}{q} - \sqrt{2} < \frac{1}{2\sqrt{2}q^2}.$$

301. Что больше: $\sin(\cos x)$ или $\cos(\sin x)$?

302. Пусть a и b — два положительных числа, $a<b$. Строим по этим числам две последовательности:

$$a_0=a,\ a_1=\sqrt{a_0 b_0},\ a_2=\sqrt{a_1 b_1},\ \dots,\ a_n=\sqrt{a_{n-1} b_{n-1}};$$

$$b_0=b,\ b_1=\frac{a_0+b_0}{2},\quad b_2=\frac{a_1+b_1}{2},\ \dots,\ b_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}.$$

Доказать, что

$$a<a_1<a_2<\dots<a_n<\dots<b_n<\dots<b_2<b_1<b$$

и что обе последовательности имеют один и тот же предел.

303. Даны несоизмеримые числа λ_1 и λ_2. Доказать, что как бы мы ни выбрали круг, лежащий внутри квадрата: $\{|x|<1,\ |y|<1\}$, найдется такое число t, что точка с координатами $x=\sin\lambda_1 t,\ y=\sin\lambda_2 t$ лежит в этом круге.

304. Доказать, что всякая функция $f(x)$ может быть представлена и притом однозначно в виде суммы четной и нечетной функций.

305. Через точки прямой AB проводятся прямые l под некоторым углом к этой прямой, причем $|\operatorname{ctg}\alpha_M-\operatorname{ctg}\alpha_N|<MN$ (где M и N — любые точки прямой AB, α_M и α_N — углы наклона в этих точках). Доказать, что все точки пересечения прямых удалены от прямой AB больше, чем на 1.

306. Известно, что

$$\cos\alpha+\cos\beta=a,$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=b,\ a^2+b^2\neq 0.$$

Найти $\cos(\alpha+\beta)$.

307. Дано:

$$a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+\dots+a_n\cos\alpha_n=0,$$

$$a_1\cos(\alpha_1+1)+a_2\cos(\alpha_2+1)+\dots+a_n\cos(\alpha_n+1)=0.$$

Доказать, что тогда при любом β имеет место равенство:

$$a_1\cos(\alpha_1+\beta)+a_2\cos(\alpha_2+\beta)+\dots+a_n\cos(\alpha_n+\beta)=0.$$

308. Вычислить $\cos\frac{2\pi}{17}$, не применяя таблиц.

309. Если

$$x+y=u+v;\ x^2+y^2=u^2+v^2,$$

то

$$x^n+y^n=u^n+v^n.$$

Доказать.

310. Доказать, что при нечетном n из равенства

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

следует

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}.$$

311. Доказать, что если $z+\frac{1}{z}=2\cos\alpha$, то $z^n+\frac{1}{z^n}=$ $=2\cos n\alpha$.

312. Пусть A, B и C — точки на комплексной плоскости, изображающие комплексные числа α, β, γ; a, b и c — положительные числа, удовлетворяющие условию $a+b+$ $+c=1$. Доказать, что точка M, изображающая комплексное число $a\alpha+b\beta+c\gamma$, лежит внутри треугольника ABC.

313. Найти непрерывную функцию $f(x)$, обладающую следующими свойствами:

$$f(xy)=f(x)\cdot f(y);\; f(x+y)=f(x)+f(y);\; f(x)\neq 0.$$

314. Доказать, что $\cos\alpha x+\cos x$ — непериодическая функция от x, если α иррационально.

315. Доказать, что функция $\frac{x}{\sin x}$ является строго возрастающей при $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ (т. е. что при возрастании x значения этой функции увеличиваются).

316. $\sin\varphi=\frac{3}{5}$. Доказать, что $\sin 25\varphi$ равняется некоторой несократимой дроби $\frac{p}{5^{25}}$.

317. Найти сумму p-х степеней корней уравнения $x^n-1=0$.

318. Доказать, что существуют такие действительные ξ_0, ξ_1 ..., ξ_n, что, каковы бы ни были действительные числа a_1, a_2, ..., a_n, найдется такое $k=0, 1, \ldots, n$, что неравенство

$$|(x+i\xi_k)^n+a_1(x+i\xi_k)^{n-1}+\ldots+a_n|\geqslant 1$$

будет справедливо при всех действительных x.

319. Доказать, что при нечетном n величины

$$\arcsin\frac{1}{n},\ \arcsin\frac{2}{n},\ \ldots,\ \arcsin\frac{n-1}{n}$$

несоизмеримы с π.

VII—X классы

320. а) Доказать, что если сумма двух чисел постоянна, то их произведение принимает наибольшее значение, когда сомножители равны.

б) Доказать, что если произведение двух чисел постоянно, то их сумма принимает наименьшее значение, когда сомножители равны.

321. Найти наибольшее значение выражений:

а) $\frac{x}{a+bx^2}$,

б) $\frac{x}{a+bx+cx^2}$,

где a, b и c — положительные числа.

IX—X классы

322. Пусть u, v, w — положительные числа, не превышающие $\frac{7}{16}$, причем $u+v+w=1$. Найти наибольшее и наименьшее возможные значения выражения: $(1+u)(1+v)(1+w)$.

323. Найти наименьшую величину выражения

$$\sqrt{x_1^2+(1-x_2)^2}+\sqrt{x_2^2+(1-x_3)^2}+\ldots+\sqrt{x_{2n}^2+(1-x_1)^2}.$$

X класс

324. Найти наибольшее значение выражения $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ при $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

325. Найти наибольшую и наименьшую величину выражений:

а) $a\cos x+b\sin x$;

б) $a\cos^2 x+2b\sin x\cos x+c\sin^2 x$,

где a, b, c положительны.

326. Какое наибольшее значение может принимать $|z|$, если известно, что комплексное число z удовлетворяет условию $\left|z+\frac{1}{z}\right|=1$?

Б. ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Задачи на вычисление

VII—X классы

1. Найти радиус окружности, касающейся трех попарно касающихся (внешним образом) кругов, имеющих радиусы 1, 2 и 3, и заключающей эти круги внутри себя.

VIII—X классы

2. В прямоугольном треугольнике проводится высота на гипотенузу. Из ее основания опускаются перпендикуляры на другие стороны. В получившихся треугольниках проделывается то же построение и т. д.— всего 1956 раз. В каждый из треугольников, на которые разбился исходный, вписывается круг. Найти сумму площадей этих кругов.

3. Дан треугольник ABC. Построим треугольник, стороны которого касаются вневписанных окружностей данного треугольника. Зная углы исходного треугольника, найти углы построенного.

4. BD — биссектриса треугольника ABC, $AD = a$, $DC = b$. Из середины отрезка BD восставлен перпендикуляр до пересечения в точке M с продолжением AC. Вычислить отрезок MD.

5. Из вершины треугольника проведены высота, медиана и биссектриса. Оказалось, что эти прямые разделили угол при вершине на 4 равные части. Найти углы треугольника.

6. Диагонали описанного около окружности четырехугольника равны 1 и взаимно перпендикулярны, а один из углов равен 60°. Найти стороны.

X класс

7. В окружность вписан правильный n-угольник $P_1P_2...P_n$. P — произвольная точка окружности. Найти $PP_1^2 + PP_2^2 + ... + PP_n^2$.

8. Найти все прямоугольные треугольники, длины сторон которых составляют: а) арифметическую прогрессию, б) геометрическую прогрессию.

9. В прямоугольном треугольнике биссектриса и медиана, проведенные из вершины прямого угла, разделили противолежащую сторону на части, составляющие арифметическую прогрессию. Найти отношение катетов этого треугольника.

§ 2. Отыскание точечных множеств*

VII—X классы

10. Найти множества: а) середин равных хорд данной окружности, б) середин хорд, проходящих через данную точку внутри окружности.

*) Во всех задачах, где требуется найти множество точек, удовлетворяющих некоторому условию, имеется при этом в виду, что необходимо найти множество **всех** таких точек.

11. Найти множество точек, из которых данный треугольник виден под данным углом.

12. На отрезке AB выбирается произвольная точка M. Квадраты $AMDE$ и $MBGH$ лежат по одну сторону от прямой AB. Найти множество середин отрезков OO_1, где O и O_1 — центры квадратов; доказать, что прямые AH и EG пересекаются в точке N пересечения окружностей, описанных около квадратов; доказать, что все прямые MN проходят через одну точку.

13. Найти множество точек, а) сумма, б) разность расстояний от которых до двух пересекающихся прямых равна постоянной величине.

14. Даны два непараллельных отрезка AB и CD. Найти множество точек M, для которых сумма площадей треугольников MAB и MCD равна данной величине.

15. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Найти внутри него множество таких точек O, что площади четырехугольников $OBCD$ и $OBAD$ равны.

VIII—X классы

16. На плоскости заданы 2 точки. Найти множество точек, расстояния которых до заданных точек относятся как $m:n$.

17. Дан отрезок AB. Доказать, что множество точек X, для которых $AX - BX = l$, не содержит отрезка прямой ($l \neq 0$, $l \neq AB$).

18. Найти множество точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек A и B постоянна.

19. Две прямые l_1 и l_2 равномерно и с одинаковой угловой скоростью вращаются вокруг точек O_1 и O_2, лежащих на них (соответственно). Найти множество точек их пересечения, если они вращаются в одну сторону.

20. O_1 и O_2 — данные окружности, AM и AN — касательные, проведенные к этим окружностям из точки A. Найти множество точек A, для которых $AM = AN$.

21. Прямой угол вращается вокруг своей вершины M, лежащей внутри данной окружности с центром O. Найти множество середин хорд, концами которых являются точки пересечения сторон угла с окружностью.

22. Рассмотрим площадь треугольника, вершинами которого являются основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки O данного треугольника ABC на его стороны. Доказать, что множеством точек O, для которых эта площадь постоянна и равна σ, являются окружности, концентричные с окружностью, описанной около

треугольника ABC (точнее, части этих окружностей, лежащие внутри треугольника).

23. Дана окружность, касающаяся прямой l в точке A. Из точки M проведены касательные к этой окружности до пересечения с l в точках B и C. Найти множество таких точек M, что $BA \mathbin{\dot{-}} CA = d$, где d — отрезок заданной длины.

24. Четыре точки: A, B, C и D лежат на одной прямой. Найти множество точек касания двух касающихся окружностей, проходящих: одна — через A и B, другая — через C и D.

25. К окружности с центром O проведены из точки A две касательные: AB и AC. В произвольной точке M окружности проводим третью касательную; D и E — точки ее пересечения с прямыми AB и AC. Найти множество центров окружностей, описанных вокруг треугольников DOE.

26. Даны три точки A,B и C, лежащие на одной прямой. Проведем окружности равных радиусов: через точки A и B и через точки B и C. Эти две окружности имеют, кроме B, еще одну общую точку M. Найти множество точек M.

27. Через точку касания A двух окружностей проведены две взаимно перпендикулярные хорды: в одной окружности — AB, в другой — AC. Найти множество середин гипотенуз треугольников ABC и множество оснований высот, опущенных на гипотенузу, если хорда AB подвижна.

X класс

28. Найти множество точек в пространстве, равноудаленных от вершин данного треугольника.

29. Найти множество точек, сумма расстояний которых до двух данных плоскостей равна k.

30. Вдоль двух скрещивающихся прямых откладывают от данных точек A и B отрезки AA' и BB' так, чтобы $AA' = BB'$. Найти множество середин отрезков $A'B'$.

31. Дана плоскость π и точка M этой плоскости. Найти множество таких точек N, что отношение расстояния от N до π к расстоянию от N до M равно заданному числу.

32. Трехгранный угол O пересекается плоскостью по треугольнику ABC. Найти множество центров тяжести треугольников ABC, если вершины A и B закреплены.

33. Найти множество центров сечений шара плоскостями, проходящими через данную точку.

§ 3. Задачи на доказательство

I. Прямые и многоугольники

VIII—X классы

34. Параллелограмм разбит на 4 части прямыми, параллельными сторонам и проходящими через точку на диагонали. Доказать, что части разбиения, расположенные по разные стороны от диагонали, равновелики.

35. Точка, лежащая внутри параллелограмма, соединена со всеми его вершинами. Доказать, что суммы площадей противолежащих треугольников, на которые разбивается параллелограмм, равны.

36. Доказать, что при пересечении биссектрис внутренних углов параллелограмма получается прямоугольник, диагонали которого равны разности смежных сторон параллелограмма.

37. В произвольный треугольник ABC вписан треугольник KLM (точки K, L, M лежат на сторонах AB, BC, AC соответственно). Доказать, что площадь хотя бы одного из треугольников KLB, LMC и KMA не больше площади треугольника KLM.

38. На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABFH$ и $BCDK$. Доказать, что продолжение медианы BE треугольника ABC является высотой в треугольнике BFK.

39. Прямая, соединяющая основания высот AD и BE треугольника ABC, перпендикулярна к радиусу OC описанного круга (O — центр круга). Доказать.

40. Дан выпуклый четырехугольник. Доказать, что у него существуют такие три соседние вершины A, B, C, что у параллелограмма $ABCD$ вершина D лежит внутри четырехугольника или на его границе.

41. Доказать, что ограниченная фигура не может иметь два центра симметрии.

42. Доказать, что у любого несамопересекающегося (быть может, невыпуклого) n-угольника сумма внутренних углов равна $2d\,(n-2)$.

43. Внутри равностороннего треугольника ABC взята точка M. Доказать, что сумма расстояний от точки M до сторон треугольника не зависит от положения точки.

44. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BA взята точка M. Доказать, что сумма расстояний от точки M до боковых сторон треугольника не зависит от положения точки.

45. Дан правильный треугольник ABC и точка внутри него; M, P и Q — проекции этой точки на высоты AD, BE и CF соответственно. Доказать, что величина $AM + BP + CQ$ не зависит от выбора точки.

46. Доказать, что во всяком треугольнике сумма трех его медиан меньше периметра и больше полупериметра.

47. Доказать, что только в прямоугольном треугольнике середины высот лежат на одной прямой.

48. Доказать, что прямые, соединяющие основания высот треугольника, ограничивают новый треугольник, в котором эти высоты являются биссектрисами.

49. Через точку пересечения биссектрис внутренних углов при основании треугольника проведена прямая, параллельная основанию. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами, равен сумме отрезков боковых сторон, заключенных между этой прямой и основанием.

50. Если середины сторон четырехугольника принять за вершины нового, то получится параллелограмм. Доказать. При каких условиях он будет прямоугольником? Ромбом? Квадратом?

51. Доказать, что если в трапеции хотя бы одна диагональ в точке пересечения с другой делится пополам, то эта трапеция — параллелограмм.

52. Доказать, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция.

53. На сторонах правильного треугольника ABC построены во внешнюю сторону равные треугольники ADB, BEC, CFA так, что $AD = BE = CF$, $\angle D = \angle E = \angle F > 60°$. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри многоугольника $ADBECF$, до всех его сторон (или до их продолжений) не зависит от положения точки.

54. На сторонах AB, BC и CA прямоугольного треугольника ABC (B — вершина прямого угла) построены вне его квадраты, центры которых суть точки c, a, b (соответственно).

Доказать, что 1) Aa равно и перпендикулярно bc, Cc равно и перпендикулярно ab, Bb равно и перпендикулярно ac, 2) отрезки Aa, Bb, Cc пересекаются в одной точке.

55. Доказать, что треугольник равнобедренный, если у него равны: а) две медианы, б) две высоты, в) две биссектрисы.

56. На сторонах произвольного треугольника, как на основаниях, построены во внешнюю сторону равносторонние треугольники. Доказать, что их центры являются вершинами некоторого равностороннего треугольника.

57. Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник; CD, DE, EA, AB, BC — стороны, противоположные вершинам A, B, C, D и E (соответственно); M — произвольная точка внутри пятиугольника. Доказать, что из прямых MA, MB, MC, MD и ME одна, три или пять (но не две и не четыре) пересекают во внутренних точках стороны, противоположные вершинам, через которые они проходят.

58. В трапеции сумма углов при основании равна 90°. Доказать, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности.

59. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты произвольно точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$; на стороне BC — точки $N_1, N_2, \ldots, N_n$; на стороне CD — точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и на стороне DA — точки $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. Ни одна из взятых точек не совпадает ни с какой вершиной четырехугольника $ABCD$. Доказать, что найдется точка K, лежащая внутри всех четырехугольников $M_1N_1P_1Q_1$, $M_2N_2P_2Q_2$, $\ldots$, $M_nN_nP_nQ_n$.

60. Даны три равных приложенных друг к другу квадрата: $ABCD$, $DCEF$, $FEPQ$. Доказать, что

$$\angle CAD + \angle EAF + \angle PAQ = 90^\circ.$$

61. Доказать, что если около треугольника описать окружность и из произвольной ее точки опустить перпендикуляры на стороны треугольника или на их продолжения, то основания этих перпендикуляров будут лежать на одной прямой («прямая Симпсона»).

62. Внутри квадрата $ABCD$ расположен квадрат $A'B'C'D'$. Доказать, что середины отрезков AA', BB', CC', DD' являются вершинами квадрата.

63. Дан треугольник ABC. С центром в точке A проводим окружность, касающуюся BC в точке D. Из точек B и C проводим касательные к этой окружности: BP, CQ (точки P и Q — точки касания). Прямая PQ пересекает AB и AC в точках B' и C'. Доказать, что B' и C' — основания высот треугольника ABC.

64. Выпуклый четырехугольник с площадью, большей $\frac{1}{2}$, заключен в квадрат со стороной 1. Доказать, что найдется отрезок с концами на границе четырехугольника, параллельный данной стороне квадрата и длины больше $\frac{1}{2}$.

65. В круг радиуса r вписан остроугольный треугольник. Доказать, что его периметр не меньше, чем $4r$.

66. Окружность O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Перпендикуляр, восставленный в точке D к стороне BC, пересекает окружность в точке M. Прямая AM пересекает сторону BC в точке E. Доказать, что $DE = |AB - AC|$.

67. Дан выпуклый многоугольник и внутри него — произвольная точка. Из этой точки опущены перпендикуляры на все стороны многоугольника. Доказать, что основание по крайней мере одного из этих перпендикуляров лежит на само́й соответствующей стороне, а не на ее продолжении.

68. Доказать, что в многоугольнике, все углы которого равны, сумма перпендикуляров, опущенных из любой внутренней точки O на стороны многоугольника или на их продолжения, одна и та же для всех точек O.

69. Пусть O — точка, лежащая внутри треугольника ABC. Доказать, что тогда по крайней мере один из углов OAB, OBC, OCA не больше $30°$.

70. Доказать, что не существует треугольника со сторонами длины 3, 4, 4 и медианой на одну из больших сторон длины 3.

71. Дан треугольник с такими сторонами a, b, c, что $a^2 + b^2 = 5c^2$. Доказать, что медианы к сторонам a и b взаимно перпендикулярны.

72. Доказать, что если выпуклый четырехугольник имеет ось симметрии, то либо около него можно описать окружность, либо в него можно вписать окружность.

73. Доказать, что прямая, соединяющая середины диагоналей четырехугольника, описанного около круга, проходит через центр этого круга.

74. Доказать, что если при пересечении сторон четырехугольника с окружностью образуются четыре равные хорды, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны.

IX—X классы

75. Дан треугольник ABC. На его сторонах во внешнюю сторону построены подобные между собой треугольники: AC_1B, BA_1C, CB_1A, причем так, что $\angle AC_1B = \angle BA_1C = \angle CB_1A$ и $\angle C_1AB = \angle A_1BC = \angle B_1CA$. Доказать, что центры тяжести треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

76. На плоскости даны 4 точки A, B, C, D, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника. Доказать, что точки пересечения медиан треугольников ABC, ABD, ACD, BCD являются вершинами четырехугольника, подобного данному.

77. На плоскости дан правильный n-угольник $A_1A_2...A_n$ и некоторая точка B. Доказать, что из отрезков A_1B, A_2B, ..., A_nB всегда можно сложить какой-нибудь n-угольник.

78. Если в выпуклом четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность. Доказать.

79. Доказать, что если существует многоугольник, сторонами которого являются данные отрезки a, b, c, ..., q, то существует многоугольник с теми же сторонами, вокруг которого можно описать окружность.

80. а) Дан четырехугольник $ABCD$, описанный около окружности. A_1 — центр окружности, описанной около треугольника BCD, B_1 — центр окружности, описанной около треугольника ACD, C_1 — центр окружности, описанной около треугольника ABD, и D_1 — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Доказать, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ описан около некоторой окружности,

б) Вне четырехугольника построены 4 вневписанных окружности с центрами O_1, O_2, O_3, O_4. Доказать, что около четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ можно описать окружность. (Окружность называется вневписанной, если она касается одной стороны и продолжения двух соседних с ней сторон.)

81. а) На сторонах выпуклого четырехугольника во внешнюю сторону строятся квадраты. Доказать, что их центры суть вершины четырехугольника с равными и перпендикулярными диагоналями.

б) На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$, как на основаниях, построены во внешнюю сторону квадраты, центры которых обозначены через M, N, P, Q.

Доказать, что середины диагоналей четырехугольников $MNPQ$ и $ABCD$ образуют квадрат.

82. На сторонах квадрата $ABCD$ взяты четыре такие точки M, N, P, Q (M на AB, N на BC, P на CD, Q на DA), что $AM = BN = CP = DQ$. Доказать, что круг, центр которого находится в точке пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, а диаметр равен половине диагонали этого квадрата, целиком расположен в квадрате $MNPQ$.

83. Дана окружность радиуса 1 и несколько точек на плоскости: A_1, A_2, ..., A_n. Доказать, что на окружности найдется такая точка M, что $MA_1 + \ldots + MA_n \geqslant 1$.

84. Если a, b, c — стороны треугольника, то

$$\frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{abc} \leqslant 1.$$

Доказать.

85. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF и точки E, D, F соединены. Доказать, что

$$\frac{p}{P} = \frac{r}{R},$$

где p — периметр треугольника EDF, P — периметр треугольника ABC, r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, R — радиус описанной около треугольника ABC окружности.

86. Во всяком прямоугольном треугольнике имеет место неравенство:

$$0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5,$$

где r — радиус вписанной окружности, а h — высота, опущенная на гипотенузу. Доказать.

87. Дан остроугольный треугольник ABC. Обозначим через ρ_1, ρ_2, ρ_3 расстояния от центра описанной окружности данного треугольника до его сторон. Через r и R обозначим (соответственно) радиусы вписанной и описанной окружностей. Доказать, что всегда справедлива формула

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r + R.$$

88. Обозначим через O окружность, описанную около некоторого треугольника T, а через O' — его вписанную окружность. Треугольник T' вписан в окружность O так, что две его стороны касаются окружности O'. Доказать, что его третья сторона также касается окружности O'.

89. Если около четырехугольника со сторонами a, b, c, d можно описать окружность и можно также вписать в него окружность, то площадь четырехугольника равна $S = \sqrt{abcd}$. Доказать.

90. Прямая l пересекает стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно в точках E и F. Пусть G — точка пересечения прямой l с диагональю AC. Доказать, что

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}.$$

91. Доказать, что в треугольнике биссектриса делит пополам угол между высотой и радиусом описанного круга, проведенным в ту же вершину.

92. Сумма квадратов расстояний от вершин правильного n-угольника до любой прямой, проходящей через его центр, не зависит от выбора прямой. Доказать.

93. Доказать, что в любом треугольнике:

а) основания медиан, высот и середины отрезков высот от вершин до ортоцентра (точки пересечения высот) лежат на одной окружности (эта окружность называется *окружностью девяти точек*);

б) радиус окружности девяти точек равен половине радиуса описанной окружности;

в) окружность девяти точек касается вписанной и трех вневписанных окружностей.

94. Дана окружность, на ней точки $A_1, A_2, \ldots, A_n, M$. Через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обозначим расстояния от M до сторон $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$. Пусть $B_1 B_2 \ldots B_n$ — описанный около окружности n-угольник, стороны которого касаются окружности в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — расстояния от точки M до сторон этого многоугольника. Доказать, что $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$.

95. Для любой точки O, лежащей внутри правильного n-угольника, найдутся такие две его вершины A и B, что

$$180° \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant \angle AOB \leqslant 180°.$$

Доказать.

X класс

96. Доказать, что основания биссектрис внешних углов треугольника лежат на одной прямой.

97. Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что радиус вписанной окружности равен $\frac{1}{3}$ одной из высот.

О п р е д е л е н и е. Говорят, что два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ имеют ц е н т р п е р с п е к т и в ы, если AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, и о с ь п е р с п е к т и в ы, если точки пересечения продолжений сторон AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 лежат на одной прямой.

98. а) Доказать, что если два треугольника имеют центр перспективы, то они имеют ось перспективы.

б) Доказать, что если два треугольника имеют ось перспективы, то они имеют центр перспективы.

§ 4. Задачи на доказательство

II. Окружности

VIII—X классы

99. В круге диаметра d проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD. Доказать, что $AC^2 + BD^2 = d^2$.

100. В окружность вписан правильный треугольник ABC. Дуги AB и BC разделены пополам точками E и D. Доказать, что отрезок ED делится сторонами треугольника на три равные части.

101. Пусть M — середина дуги AB в данной окружности, MC — произвольная хорда, пересекающая отрезок AB в точке D. Построим окружность, касающуюся хорды AB в точке D и проходящую через точку C. Доказать, что эта окружность касается данной и перпендикулярна окружности с центром в точке M радиуса MA (см. задачу 176).

102. Дана окружность O и точки P и Q вне ее. Проведем через точку P секущую PAB и построим окружность, проходящую через точки A, B и Q. Доказать, что все такие окружности проходят, кроме Q, еще через одну точку.

103. Из произвольной точки круглого биллиарда пущен шар. Доказать, что внутри биллиарда найдется такая окружность, что траектория шара ни разу ее не пересечет.

(П р и м е ч а н и е: шар отражается от стенки биллиарда так, что угол падения равен углу отражения, где углами падения и отражения называются острые углы, образованные траекторией шара с радиусом, проведенным из центра биллиарда в точку отражения.)

104. В заданном круге проведены две параллельные, но неравные по длине хорды AA' и BB'. Пусть C — точка пересечения прямых AB и $A'B'$, а D — точка пересечения касательных к окружности, проведенных из точек A и A'. Доказать, что $CD \perp AA'$.

105. Три данные окружности O_1, O_2 и O_3 попарно пересекаются: O_1 и O_2 в точках A и B, O_2 и O_3 — в точках C и D и, наконец, O_3 и O_1 — в точках E и F. Доказать, что прямые AB, CD и EF пересекаются в одной точке.

106. В данной окружности проведены два радиуса OA и OC, образующие острый угол ($\angle COA < 90°$). На радиусе OA, как на диаметре, построена новая окружность, которая пересекает отрезок OC в точке B. Доказать, что длины дуг AB и AC равны.

107. Дана окружность с центром в точке O и две касательные l_1 и l_2 к ней. Проводится произвольная третья касательная l_3, которая пересекает прямые l_1 и l_2 в точках A и B. Доказать, что величина угла AOB не зависит от выбора касательной l_3.

108. К двум окружностям O_1 и O_2 проведены общие внешние касательные AB и CD (точки A и C — на окружности O_1, точки B и D — на окружности O_2) и общая внутренняя касательная MN, пересекающая прямые AB и CD в точках P и Q. Доказать, что $MP = NQ$.

109. Дана окружность, в ней хорда с серединой в точке M и точки A и B, лежащие на окружности по одну сторону от хорды. Прямые AM и BM пересекают окружность в точках C и D. Доказать, что прямые AD и BC отсекают на данной хорде отрезок NP с серединой в точке M.

110. В окружности с центром O проведены два перпендикулярных диаметра AB и CD. Вне окружности взята произвольная точка M. Из этой точки к окружности проведены касательные MP и MQ. Прямые MP, MA, MB, MQ пересекают прямую CD в точках E, F, K, H (соответственно). Доказать, что $EF = HK$.

111. Четыре пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Доказать, что все четыре окружности, описанные около них, пересекаются в одной точке.

112. A_1B_1 и A_2B_2 — диаметры окружности C_1 и хорды окружностей C_2 и C_3 соответственно. C_2 и C_3 делят круг C_1 на четыре криволинейных треугольника. Доказать, что сумма углов каждого из них больше $180°$ (см. задачу **176**).

113. Дуги трех окружностей образуют криволинейный треугольник, сумма углов которого равна $2d$. Доказать, что эти окружности пересекаются в одной точке (см. задачу **176**).

114. Даны две окружности радиуса $r = 1$, причем расстояние между их центрами также равно 1. На первой окружности выбрана точка A, на второй окружности — точки B_1, B_2, симметричные относительно линии центров. Доказать, что

$$AB_1^2 + AB_2^2 \geqslant 2$$

§ 5. Задачи на построение

I. Многоугольники; построения с ограниченными возможностями

VII—X классы

115. Дан угол и точка M внутри него. Провести через M прямую так, чтобы отрезок, отсекаемый на ней сторонами угла, делился в точке M пополам.

116. На необитаемом острове пират зарыл клад, руководствуясь следующими построениями. Пусть A, B — два камня, C_1, C_2, C_3 — три пальмы. Построим точку A_1 так: $A_1C_1 = AC_1$, $\angle AC_1A_1 = 90°$, и точку B_1 так: $B_1C_1 = BC_1$, $\angle BC_1B_1 = 90°$.

Построим точку пересечения отрезков A_1B и AB_1 и обозначим ее P_1.

Точки P_2 и P_3 строятся так же, как P_1, только с использованием соответственно пальм C_2 и C_3. В центре окружности, проведенной через P_1, P_2 и P_3 и был зарыт клад. Когда пират вернулся на остров, пальмы снесло штормом. Но все же он сумел найти клад. Как?

117. Построить пятиугольник по серединам его сторон.

118. В данном выпуклом четырехугольнике $ABCD$ найти такую точку O, что площади треугольников OAB, OBC, OCD и ODA равны.

119. У борта прямоугольного биллиарда стоит шар. Построить направление, по которому надо его толкнуть, чтобы он, отразившись от трех бортов, попал в начальную точку.

120. Стороны AB и BC треугольника ABC пересечь прямой так, чтобы точки пересечения D и E (соответственно) удовлетворяли условию $BD = DE = EC$.

VIII—X классы

121. Построить треугольник по центру тяжести и серединам двух его средних линий.

122. Построить равносторонний треугольник с вершиной в данной точке, две другие вершины которого лежат соответственно на двух данных окружностях.

123. Построить треугольник по двум сторонам, если угол против большей стороны втрое больше угла против меньшей.

124. Построить треугольник по центру тяжести, центру описанного круга и одной из вершин.

125. Построить равнобедренный треугольник по высоте и медиане, проведенным к боковой стороне.

126. Построить треугольник по центрам вневписанных окружностей.

127. Построить треугольник по точкам пересечения его высот с описанной окружностью.

128. Построить треугольник по центрам вписанного, описанного и вневписанного кругов.

129. Даны три прямые l_1, l_2, l_3, пересекающиеся в точке A, и точка B на прямой l_1. Построить такой треугольник с вершиной в точке B, чтобы данные прямые являлись для него:

а) высотами,

б) медианами,

в) биссектрисами.

130. В треугольнике ABC обозначим: через a, b, c стороны, противолежащие углам A, B, C (соответственно), через h_a, h_b, h_c и μ_a, μ_b, μ_c — высоты и медианы (соответственно) этих сторон, через β_a, β_b, β_c — биссектрисы углов A, B, C (соответственно).

Построить треугольник по следующим данным:

а) $a,\ b+c,\ A$;	е) $a,\ b-c,\ B$;	л) $\mu_a,\ \mu_b,\ C$;
б) $a,\ b+c,\ B$;	ж) $a,\ b-c,\ B+C$;	м) $a,\ b,\ \mu_c$;
в) $a,\ b+c,\ B+C$;	з) $a,\ b-c,\ B-C$;	н) $a,\ \mu_b,\ \mu_c$;
г) $a,\ b+c,\ B-C$;	и) $h_a,\ \beta_a,\ \mu_a$;	о) $a,\ b,\ \mu_a$;
д) $a,\ b-c,\ A$;	к) $a,\ b,\ \beta_c$;	п) $\mu_a,\ \mu_b,\ \mu_c$.

131. Провести на плоскости прямую так, чтобы она отстояла на равных расстояниях от трех заданных точек.

132. Через данную точку, лежащую в плоскости треугольника, провести прямую, делящую его площадь пополам.

133. Разрезать треугольник прямой линией на 2 части, равные по периметру и по площади.

134. Построить четырехугольник по двум сторонам, сходящимся в одной вершине, и двум углам, прилежащим к ним, так, чтобы в него можно было вписать окружность.

135. Построить четырехугольник по диагоналям, углу α между ними и

а) двум сторонам,

б) двум углам,

в) стороне и углу.

136. Построить четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам, если известно, что диагональ AC делит угол DAB пополам.

137. Построить трапецию по двум диагоналям и двум боковым сторонам.

138. Заданы прямые $l_1, l_2, \ldots, l_n$, перпендикулярные к сторонам многоугольника и проходящие через их середины. Построить многоугольник.

139. Пересечь трапецию прямой, параллельной основаниям так, чтобы ее отрезок внутри трапеции делился диагоналями на три равные части.

140. Дан выпуклый многоугольник. Построить другой с тем же периметром, но большей площади.

141. Дан угол MON и точки A и B. Найти на стороне OM такую точку X, чтобы треугольник XYZ, где Y и Z — точки пересечения прямых XA и XB с ON, был равнобедренным. ($XY = XZ$.)

142. Построить квадрат, если дана его вершина и две точки, лежащие на сторонах, не проходящих через эту вершину, или на их продолжениях.

143. Два маяка A и B видны с корабля под заданным углом α. Когда корабль прошел по заданному направлению данное расстояние, те же маяки стали видны под другим углом β. Зная положение маяков A и B, найти начальное положение корабля.

IX—X классы

144. Вписать в остроугольный треугольник ABC треугольник, стороны которого были бы перпендикулярны сторонам данного. Доказать, что искомых треугольников два и что шесть вершин их лежат на одной окружности.

145. а) Построить прямоугольник с данной стороной так, чтобы две его вершины лежали на данной прямой, а две другие — на данной окружности. Найти все способы построения.

б) Построить квадрат так, чтобы две его вершины лежали на данной прямой, а две другие — на данной окружности.

146. Дана прямая CD и две точки A и B, не лежащие на ней. Найти на прямой такую точку M, что $2\angle AMC = \angle BMD$.

147. Вписать квадрат в данный сегмент так, чтобы одна его сторона лежала на хорде.

148. В данный треугольник вписать прямоугольник с диагональю данной длины.

149. Вписать в сегмент правильный треугольник так, чтобы одна из сторон была перпендикулярна основанию сегмента.

150. Около равностороннего треугольника описать квадрат так, чтобы обе фигуры имели общую вершину.

151. Даны три луча, выходящие из одной точки. Провести такую прямую, проходящую через заданную точку, чтобы отрезки, отсекаемые на ней лучами, относились, как 2 : 3.

152. Даны четыре точки. Провести через них четыре прямые так, чтобы они образовали четырехугольник, подобный данному.

153. Вокруг данной окружности описать треугольник ABC с данной стороной AB и данным углом B так, чтобы вершина A лежала на данной прямой.

154. Вписать в данный параллелограмм треугольник, подобный данному (на каждой стороне параллелограмма должна находиться хотя бы одна вершина треугольника). Сколькими способами это можно сделать?

155. Даны три прямые, не пересекающиеся в одной точке. Построить треугольник, для которого эти прямые являются биссектрисами внешних углов. При каком расположении заданных прямых задача имеет решение?

156. Вписать в данную окружность n-угольник, стороны которого проходили бы через n данных точек.

157. Восстановить n-угольник по центрам правильных p-угольников, построенных на его сторонах. Исследовать возможность и единственность такого восстановления.

158. В треугольник вписать две касающиеся друг друга окружности равного радиуса так, чтобы каждая из них касалась двух сторон треугольника.

X класс

159. В плоскости даны три прямые, пересекающиеся в одной точке, и три точки. Построить треугольник, вершины которого лежали бы на данных прямых, а стороны проходили бы через данные точки.

Построения с ограниченными возможностями

VII — X классы

160. Построить биссектрису угла, вершина которого недоступна.

161. Построить медиану треугольника, вершина которого недоступна.

162. Разделить циркулем и линейкой угол в 54° на три равные части.

163. Удвоить и разделить пополам отрезок при помощи одного циркуля.

VIII — X классы

164. Пользуясь одним циркулем, разделить данный отрезок на n равных частей.

165. Даны две параллельные прямые. С помощью односторонней линейки провести через данную точку прямую, параллельную этим прямым.

166. Пользуясь только двусторонней линейкой:

а) разделить угол пополам,

б) восставить перпендикуляр к данной прямой,

в) опустить из данной точки перпендикуляр на данную прямую.

167. Пользуясь двусторонней линейкой, разделить данный отрезок:

а) на две части,

б) на n частей.

(Длина отрезка больше ширины линейки.)

168. Дан круг и его центр. С помощью линейки разделить данный отрезок пополам.

169. Через данную точку M провести прямую в недоступную точку пересечения двух данных прямых с помощью одной линейки.

170. Даны окружность и точка, не лежащая на ней. Опустить перпендикуляр из этой точки на диаметр или его продолжение с помощью одной линейки.

§ 6. Задачи на построение

II. Окружности

VIII — X классы

171. Построить три попарно касающиеся друг друга окружности с центрами в трех данных точках.

172. Через точку внутри круга провести хорду так, чтобы она разделилась в этой точке в данном отношении.

173. На дуге AB данной окружности найти такую точку M, чтобы отношение отрезков $AM : BM$ было заданным.

174. Из точки, взятой вне данного круга, провести секущую, внешняя часть которой равнялась бы внутренней. Когда решение возможно?

175. В круге проведены два радиуса. Как провести хорду, чтобы она делилась этими радиусами на три равные части?

176. Даны прямая l, точка M на ней, окружность O и угол α. Построить окружность, касающуюся прямой l в точке M и пересекающую окружность O под углом, равным α. (Углом, под которым пересекаются две окружности, называется угол между касательными к ним в точке пересечения.)

177. Вписать в данный треугольник три окружности, каждая из которых касалась бы двух сторон треугольника и двух других окружностей.

178. Даны две пересекающиеся окружности. Через точку их пересечения провести прямую так, чтобы образовавшиеся хорды:

а) были равны,

б) имели данную сумму,

в) имели данную разность.

179. На плоскости даны: угол ABC, произвольная прямая l и точка O. Обозначим через X и Y точки пересечения окружности с центром в точке O со сторонами AB и BC угла ABC (соответственно). Построить такую окружность с центром в точке O, чтобы прямые XY и l были параллельны.

180. Дан треугольник ABC. Найти такую точку X, чтобы существовала окружность, вписанная в четырехугольник $ABCX$, и окружность, описанная около него.

181. Даны три концентрические окружности. Провести секущую так, чтобы ее отрезки, заключенные между двумя бо́льшими окружностями, были равны отрезкам, заключенным между средней и меньшей окружностями.

182. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных прямых.

183. Построить окружность, касающуюся данной окружности и двух данных прямых.

184. Построить окружность, касательную к трем данным окружностям (задача Аполлония).

§ 7. Прямые и плоскости в пространстве

X класс

185. Если несколько прямых в пространстве обладают тем свойством, что любые две из них пересекаются, то или все они проходят через одну точку, или же все лежат в одной плоскости. Доказать.

186. В пространстве даны точки A, B, C, D, причем

$$AB \perp CD, \ AC \perp BD.$$

Доказать, что $AD \perp BC$.

187. Даны три скрещивающиеся прямые. Для каждых двух из них построим общий перпендикуляр. Для каждых двух из полученных прямых снова построим общий перпендикуляр. Доказать, что последние три прямые совпадают с исходными.

188. Доказать, что если луч образует равные углы с тремя непараллельными лучами, лежащими в одной плоскости, то он перпендикулярен этой плоскости.

189. В пространстве взяты четыре точки A, B, C, D. Верно ли, что если проекции четырехугольника $ABCD$ на две не параллельные между собой плоскости являются параллелограммами, то этот четырехугольник и сам является параллелограммом?

190. Сколько имеется плоскостей, равноудаленных от четырех точек, не лежащих в одной плоскости?

191. Доказать, что сумма углов пространственного четырехугольника меньше 360°.

192. Луч света отражается от трех взаимно перпендикулярных плоских зеркал по закону: угол падения равен углу отражения. Доказать, что в результате его направление изменится на противоположное.

193. Найти все прямые в пространстве, проходящие через данную точку M на данном расстоянии d от данной прямой.

194. Построить отрезок, имеющий данную длину, параллельный данной плоскости, с концами на двух данных скрещивающихся прямых.

195. Ортогональные проекции пространственной линии на две пересекающиеся плоскости являются прямыми линиями. Можно ли утверждать, что данная линия — прямая?

196. Доказать, что если у выпуклого трехгранного угла все двугранные углы острые, то и все плоские углы острые.

197. Дан двугранный угол и прямая, проходящая через его ребро. Провести через нее плоскость π так, чтобы эта прямая была биссектрисой угла, полученного при сечении данного двугранного угла плоскостью π.

198. Замкнутая пространственная ломаная составлена из соединенных шарнирно звеньев, длину которых можно изменять*. Если ломаную нельзя так продеформировать, чтобы она превратилась в несамопересекающийся плоский многоугольник, то она называется заузленной.

Какое наименьшее число звеньев может иметь заузленная ломаная?

199. Пространственным правильным n-угольником называется замкнутая ломаная линия в пространстве, состоящая из n равных звеньев, и такая, что углы между соседними звеньями равны между собой. Доказать, что

а) все вершины правильного пространственного пятиугольника лежат в одной плоскости,

б) при $n \geqslant 2$ существует правильный пространственный $2n$-угольник, не лежащий в одной плоскости,

в) при $n \geqslant 4$ существует правильный пространственный $(2n-1)$-угольник, не лежащий в одной плоскости.

200. Построить пространственный шестиугольник, у которого все диагонали равны.

201. Доказать, что не существует такого пространственного восьмиугольника, у которого все диагонали равны.

---

*) При этом запрещается изменять количество звеньев ломаной (что можно было бы сделать, изменив длину какого-нибудь звена до нуля).

X класс

202. Существует ли многогранник, все сечения которого — треугольники?

203. Какое наибольшее число сторон может иметь многоугольник, получающийся в сечении октаэдра плоскостью?

204. Какие правильные многоугольники могут получаться при пересечении куба плоскостью?

205. Не существует выпуклого многогранника, имеющего 7 ребер. Доказать.

206. Доказать, что для любого $k>7$ существует многогранник, имеющий k ребер.

207. Доказать, что если все диагонали параллелепипеда равны, то он прямоугольный.

208. Доказать, что не существует многогранника, у которого каждая грань имеет более пяти сторон.

209. Доказать, что сумма плоских углов выпуклого многогранника равна $4d\ (n-2)$, где n — число его вершин.

210. Шесть биссекторных плоскостей треугольной пирамиды пересекаются в одной точке. Доказать. (Биссекторной плоскостью называется плоскость, делящая двугранный угол пополам.)

211. Дан шестигранник, все грани которого — четырехугольники, а все трехгранные углы равны или симметричны данному трехгранному углу. Доказать, что этот шестигранник — прямоугольный параллелепипед.

212. Найти расстояние между двумя скрещивающимися ребрами правильного тетраэдра с ребром 1.

213. Все ребра одной пирамиды соответственно меньше ребер другой. Можно ли утверждать, что объем первой из них тоже меньше объема второй?

214. Доказать, что периметры фигур, получающихся при пересечении правильного тетраэдра плоскостями, параллельными двум противоположным ребрам тетраэдра, равны между собой.

215. Доказать, что площадь всякого треугольника, получающегося при пересечении произвольного тетраэдра плоскостью, будет меньше площади по крайней мере одной из граней тетраэдра.

216. Доказать, что всякая плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равновеликие части.

217. Данный выпуклый четырехгранный угол пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

218. Доказать «пространственную теорему Пифагора»: в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ квадрат площади сечения $A'BD$ в 8 раз меньше суммы квадратов площадей граней.

219. Доказать, что сумма квадратов расстояний от вершин куба до любой прямой, проходящей через его центр, не зависит от выбора прямой.

220. Имеются две концентрические окружности. Вокруг меньшей из них описан многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$, целиком находящийся внутри большей окружности. Из общего центра на каждую из сторон $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$ опускаем перпендикуляры и продолжаем их до пересечения с большей окружностью в точках $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Соединяем точку B_1 с A_1 и A_2, B_2 — с A_2 и A_3 и т. д., B_n — с A_n и A_1. При каких условиях многоугольник $A_1B_1A_2B_2 \ldots A_nB_n$ является разверткой пирамиды с основанием $A_1A_2 \ldots A_n$?

221. В тетраэдре $OABC$ все плоские углы при вершине O прямые, $OA = a$, $OB = b$, $OC = a + b$. Доказать, что сумма плоских углов при вершине C равна 90°.

222. Объем правильной треугольной пирамиды с боковым ребром длины 1 равен $\frac{1}{6}$. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

223. Существует ли многогранник, все грани которого являются параллелограммами и попарно параллельны, но который, однако, не является призмой?

224. Даны три параллелепипеда. Провести плоскость так, чтобы она разделила каждый параллелепипед на две равновеликие части. В каком случае задача имеет неограниченное число решений?

225. Доказать, что для объема треугольной пирамиды справедлива формула

$$V = \frac{abc}{3}\sqrt{\sin p \cdot \sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)},$$

где a, b, c — длины боковых ребер, α, β, γ — величины углов между ними, $2p = \alpha + \beta + \gamma$.

226. Пусть α, β, γ — плоские углы трехгранного угла. Доказать, что справедливо неравенство $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha < \frac{4}{3}\pi^2$.

227. Доказать, что каждый тетраэдр можно пересечь ровно тремя плоскостями так, чтобы в пересечении каждой из них с тетраэдром получился ромб. Доказать также, что

а) если получившиеся три ромба подобны, то у тетраэдра все грани равны;

б) если эти ромбы суть квадраты, то тетраэдр — правильный.

228. Две треугольные пирамиды равны или симметричны, если их соответствующие ребра равны. Доказать.

229. Дан тетраэдр $ABCD$. На его ребрах AB, AC и AD отмечаются такие точки M, P, Q, что $AB = nAM$, $AC = (n+1)AP$, $AD = (n+2)AQ$. Плоскость, проведенная через M, P, Q, обозначается P_n. Доказать, что все плоскости P_1, P_2, ..., P_n проходят через одну прямую.

230. Дан трехгранный угол Q. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы его можно было так разрезать плоскостью, что из полученных кусков снова можно сложить угол Q, приложив их другим способом. (Секущая плоскость пересекает угол Q по треугольнику.)

231. Доказать, что если все грани выпуклого многогранника центрально-симметричны, то и он сам центрально-симметричен.

§ 9. Поверхности и тела вращения

X класс

232. Определить расстояние от центра грани правильного тетраэдра до другой его грани, зная радиус вписанного шара.

233. Доказать, что если все ребра тетраэдра касаются одного шара, то суммы всех пар противоположных ребер одинаковы.

234. Доказать, что если противоположные ребра тетраэдра попарно равны, то вписанные в тетраэдр и описанный вокруг него шары концентричны.

235. Через точку сферы проведено несколько лежащих на ней окружностей. Доказать, что касательные к ним в этой точке лежат в одной плоскости.

236. Сколько касательных сфер можно провести к четырем взаимно пересекающимся плоскостям, из которых никакие три не проходят через одну и ту же прямую?

237. Сколько существует сфер, касающихся трех данных плоскостей и данной сферы?

238. Считая, что Земля имеет форму шара радиуса R, а искусственный спутник обращается вокруг Земли по круговой орбите на высоте h над поверхностью Земли, определить, на какой угол ниже горизонта должно опуститься Солнце, чтобы наблюдение спутника, освещенного Солнцем, было в данной точке земной поверхности невозможно (даже при самом благоприятном положении спутника и его орбиты относительно места наблюдения).

239. На окружности верхнего основания цилиндра, объем которого равен V, взята точка A. BC — диаметр нижнего основания, точки A и B лежат на одной образующей. MN — диаметр нижнего основания, перпендикулярный BC. Доказать, что объем, ограниченный поверхностью цилиндра и плоскостью, проходящей через точки A, M, N, заключен между $\frac{1}{4}V$ и $\frac{1}{6}V$.

240. Доказать, что ограниченное выпуклое тело, имеющее две оси вращения, — шар. (Осью вращения тела называется прямая, после поворота вокруг которой на любой угол тело совмещается само с собой.)

241. Любое сечение тела плоскостью — круг. Доказать, что это тело — шар.

242. Доказать, что если A — телесный угол и α, β, γ — двугранные углы данного трехгранного угла, измеренные в радианах, то $\alpha+\beta+\gamma-A=\pi$.

243. Доказать, что разность между суммой телесных углов двугранных углов тетраэдра и суммой телесных углов его трехгранных углов равна 4π.

244. Выпуклая ломаная длины d вращается вокруг прямой, проходящей через ее концы. Доказать, что площадь поверхности полученного тела вращения меньше $\frac{\pi d^2}{2}$.

§ 10. Задачи на наибольшее и наименьшее значения

VIII—X классы

245. Дан угол MON и две точки A и B. Найти такие точки C и D на прямых OM и ON соответственно, чтобы ломаная $ACDB$ имела наименьшую возможную длину.

246. В треугольнике ABC биссектрисы пересекаются в точке O и $AC>AB>BC$. Как кратчайшим путем, выйдя из точки O, обойти все вершины треугольника и вернуться в исходную точку?

247. Найти круг наименьшего радиуса, содержащий три данные точки.

248. Дан треугольник и две точки внутри него. Как кратчайшим путем пройти из одной точки в другую, побывав на каждой стороне треугольника?

249. Найти на данной прямой l точку так, чтобы разность расстояний от нее до двух заданных точек A и B была

а) наименьшей,

б) наибольшей.

250. Через точку внутри угла провести прямую так, чтобы отрезок ее между сторонами угла имел наименьшую возможную длину.

251. В данный угол вписать треугольник наименьшего периметра так, чтобы одна из его вершин находилась в данной точке внутри угла.

252. В произвольном треугольнике найти точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.

253. Четыре деревни расположены в вершинах квадрата. Как надо провести сеть дорог, соединяющих все деревни друг с другом, чтобы она имела наименьшую возможную длину? (При этом одна дорога может соединять и более двух деревень.)

254. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы ее часть, заключенная внутри кругов, была

а) наибольшей,

б) наименьшей.

255. Внутри квадрата дана точка O. Всякая прямая, проходящая через O, разрезает квадрат на две части. Провести прямую через точку O так, чтобы разность площадей этих двух частей была наибольшей.

256. На прямой l лежит отрезок MN. Найти на прямой p, лежащей с l в одной плоскости, точку, из которой MN виден под наибольшим углом.

257. Даны три концентрические окружности радиусов $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$. Найти на каждой окружности по такой точке, чтобы образованный ими треугольник имел наибольшую площадь.

258. Построить треугольник с наименьшим периметром, если даны:

а) две вершины A и B и прямая, на которой лежит третья вершина,

б) вершина A и прямые, на которых лежат вершины B и C,

в) три прямые, на которых лежат вершины A, B и C.

259. Если в круге отмечены три точки A, B, C, то для любой его точки M из расстояний MA, MB, MC можно выбрать наименьшее — обозначим его через ρ_M. После этого из всех точек круга можно выбрать ту, для которой величина ρ_M максимальна (т. е. из всех чисел ρ_M надо выбрать наибольшее — обозначим его через ρ). Понятно, что число ρ зависит только от выбора точек A, B, C. Требуется так выбрать точки A, B и C, чтобы величина ρ была наименьшей из возможных.

IX—X классы

260. Из всех треугольников, вписанных в данную окружность, найти тот, который имеет наибольшую сумму квадратов сторон.

261. Внутри круга дана точка. Требуется провести через нее две взаимно перпендикулярные хорды так, чтобы сумма их длин была наибольшей.

262. Внутри треугольника ABC найти такую точку O, чтобы сумма $AO^2 + BO^2 + CO^2$ была наименьшей.

263. Поместить в правильный шестиугольник квадрат наибольшей площади.

264. Доказать, что сумма расстояний точки M от вершин правильного шестиугольника достигает наименьшей величины, когда M совпадает с центром шестиугольника. То же доказать в случае правильного пятиугольника.

265. Доказать, что из всех четырехугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

X класс

266. Какую наибольшую боковую поверхность может иметь прямоугольный параллелепипед, диагональ которого равна a?

267. В прямом круговом конусе образующая равна 3, а высота — $\sqrt{3}$. Найти максимальное (по площади) сечение, проходящее через вершину конуса.

268. Даны трехгранный угол Q и внутри него точка O. Найти плоскость, проходящую через точку O и отсекающую от Q тетраэдр наименьшего объема.

§ 11. Разные задачи

VIII—X классы

269. Могут ли быть в выпуклом многоугольнике три параллельные стороны?

270. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость:

а) n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке?

б) n окружностей?

в) два выпуклых многоугольника?

271. Доказать, что два прямоугольника разбивают плоскость не более чем на 10 частей.

272. Покрыть плоскость не равными и не подобными попарно прямоугольными треугольниками, стороны которых больше 1. (Плоскость должна быть покрыта полностью и без перекрытий.)

273. Доказать, что любыми равными треугольниками, четырехугольниками, центрально-симметричными шестиугольниками можно покрыть всю плоскость с соблюдением требований, указанных в предыдущей задаче.

274. В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали. На сколько частей разобьется n-угольник, если известно, что никакие три диагонали не пересекаются в одной точке (кроме, быть может, вершин)?

275. C_1, C_2, C_3 — окружности. C_1 и C_2 перпендикулярны к C_3 (см. задачу **176**) и пересекаются друг с другом. Могут ли обе точки их пересечения лежать внутри C_3?

276. На окружности даны n точек: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. При повороте на некоторый угол $\alpha < 360°$ точка A_1 переходит в A_2, A_2 переходит в A_3, A_3 — в A_4 и т. д. Верно ли, что эти точки делят окружность на равные части?

277. Концы отрезка AB соединены ломаной. Доказать, что на ней найдутся две точки, лежащие на равных расстояниях от прямой AB, расстояние между которыми равно $\frac{AB}{2}$.

278. В ромб вписан прямоугольник. Обязательно ли его стороны параллельны диагоналям ромба?

279. В ромб, не являющийся квадратом, вписан квадрат. Верно ли, что его стороны параллельны диагоналям ромба?

280. Доказать, что диаметр многоугольника не изменится, если его заменить наименьшим (по периметру) выпуклым многоугольником, содержащим данный (см. задачу **33** раздела **В**).

281. Два плоских зеркала образуют угол α. Направим на одно из них луч, параллельный биссектрисе угла. Отразившись, он попадет на другую стенку, потом снова на первую и т. д. Если угол α велик, то луч, отразившись несколько раз, уйдет в бесконечность. Как мал должен быть $\angle\alpha$, чтобы этого не произошло?

282. Отрезок AB имеет длину 1. Окружим его многоугольником так, чтобы, двигая AB по плоскости и не вылезая при этом его концами за пределы многоугольника, мы смогли бы поменять местами концы A и B, т. е. повернуть отрезок на 180°. Какое наименьшее значение может иметь при этом площадь многоугольника?

283. Доказать, что если выпуклый многоугольник можно разрезать на центрально-симметричные многоугольники, то он сам центрально-симметричен.

X класс

284. Существует ли правильный многоугольник, одна диагональ которого равна сумме двух других?

285. Равны ли два треугольника, если они имеют по три равных угла и по две равные стороны?

286. Многоугольник M имеет n сторон. Будем рассматривать такие треугольники, вписанные в M, что описанная окружность каждого из этих треугольников целиком расположена в многоугольнике M. Каково может быть наибольшее число этих треугольников?

287. Сколько раз может обертываться вокруг окружности контур описанного многоугольника?

288. На какое наибольшее число частей могут делить пространство

а) два куба,

б) куб и сфера,

в) два выпуклых многогранника?

289. Дан куб с ребром 1 и внутри него такая ломаная, что каждая плоскость, параллельная какой-либо грани куба, пересекает ломаную не более чем в одной точке.

Доказать, что длина ломаной меньше 3 и что для любого $\alpha<3$ можно построить ломаную длины $l>\alpha$, обладающую вышеуказанным свойством.

В. СМЕШАННЫЙ ОТДЕЛ

Задачи комбинаторные, логические, задачи на клетчатой бумаге и другие задачи

Все задачи этого раздела, кроме перечисленных ниже, предназначаются учащимся VII—X классов. Исключение составляют:

задачи **16**, **23**, **26**, **27**, **32**, **33**, **78**, **81**, предназначенные для VIII—X классов,

задачи **15**, **19**, **20**, **21**, **50**, **52**, **57**, **59**, **60**, **62**, **65**, **67** — для X класса

Внутри раздела задачи расположены группами, объединенными общей тематикой, а внутри групп — в порядке нарастающей сложности.

1. Доказать, что 77 телефонов нельзя соединить между собой так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятнадцатью другими.

2. Можно ли выложить в цепь, следуя правилам игры, все 28 костей домино так, чтобы на одном конце оказалась шестерка, а на другом — пятерка?

3. Каждый из людей, когда-либо живших на Земле, сделал определенное число рукопожатий. Доказать, что число людей, сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

4. Доказать, что не существует многогранника, у которого каждая грань имеет нечетное число сторон и число всех граней нечетно.

5. Линия называется уникурсальной, если ее можно начертить одним росчерком пера, т. е. не отрывая пера от бумаги и не проходя два раза один и тот же ее участок. Доказать, что линия уникурсальна тогда и только тогда, когда число тех ее узлов, из которых выходит нечетное число кривых, не превосходит двух.

6. На плоскости проведено n окружностей. Доказать, что каждый из кусков, на которые при этом разбилась плоскость, можно закрасить в один из двух цветов — в черный или в белый, притом так, что любые два соседних куска (граничащие по дуге окружности) будут окрашены в разные цвета.

7. Треножником будем называть фигуру, состоящую из трех лучей, исходящих из одной точки. На плоскости расположены несколько треножников, причем так, что никакие два луча, принадлежащие различным треножникам, не лежат на одной прямой. Доказать, что области, на которые плоскость разбивается этими треножниками, можно раскрасить в три краски таким образом, что любые две области, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета.

8. Найти девять попарно различных квадратов, из которых можно сложить прямоугольник.

9. Разрезать квадрат прямолинейными разрезами так, чтобы из полученных частей можно было сложить три равных квадрата.

10. Доказать, что любые n квадратов можно разрезать так, чтобы из полученных частей сложить 1 квадрат.

11. Доказать, что из конечного числа попарно различных кубиков нельзя сложить кирпич.

12. Разрежьте плиту размером $8 \times 8 \times 27$ на четыре части и сложите из них куб.

13. Доказать, что из конечного числа попарно различных равносторонних треугольников нельзя сложить выпуклую фигуру.

14. Разрезать произвольный треугольник на три части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник.

15. Какие выпуклые многогранники можно сложить из правильных тетраэдров?

16. Разрезать треугольник на четыре части и сложить из них два треугольника, подобных первоначальному.

17. Доказать, что выпуклый центрально-симметричный многоугольник можно разрезать на параллелограммы. Найти наименьшее число параллелограммов для тысячеугольника.

18. Можно ли разрезать выпуклый 17-угольник на 14 треугольников?

19. На окружности радиуса 1 от произвольной точки откладываются в одну сторону друг за другом дуги длины 1. Пусть A_1, A_2, ..., A_n — последовательные концы откладываемых дуг. Доказать, что для любой произвольно малой дуги этой окружности найдется точка A_k, лежащая внутри этой дуги.

20. Существует ли такое множество точек на окружности, которое при повороте окружности на 1 радиан «прячется в себя», т. е. переходит в свою часть?

21. По бесконечной шахматной доске с полями в виде квадратов со стороной 1 прыгает блоха, перемещаясь за каждый прыжок на α вправо и на β вверх. Доказать, что если α, β и $\frac{\alpha}{\beta}$ иррациональны, то блоха обязательно когда-нибудь попадет на черное поле.

22. Из города A в город B ведут две дороги, не имеющие самопересечений. Из A одновременно выехали по этим дорогам две машины, связанные веревкой длиной 20 *м*, и, не порвав веревки, приехали одновременно в B. После этого из A в B по одной дороге и из B в A по другой одновременно выехали два воза круглой формы радиуса 11 *м*. Докажите, что возы не смогут прибыть к своей цели, не столкнувшись.

23. Географическая карта разрезана параллельными прямыми на квадратные куски 20 *км* $\times$ 20 *км*. Доказать, что любой маршрут длины 310 *км* помещается не более чем на 36 квадратах.

24. Четыре узла клетчатой бумаги образуют квадрат, (со сторонами, параллельными линиям сетки), на каждой стороне которого помещается n клеток ($n>1$).

Доказать, что существует ломаная из $2n$ звеньев, проходящая через все узлы этого квадрата, включая также узлы, лежащие на его сторонах.

25. На клетчатой бумаге нарисован параллелограмм с вершинами в узлах сетки. Доказать, что если внутри него и на сторонах нет других узлов сетки (такой параллелограмм называется основным), то его площадь равна площади клетки.

26. Существует ли прямоугольный треугольник с целыми сторонами, который может быть положен на клетчатую бумагу так, чтобы вершины попали в узлы, и ни одна из сторон не совпадала с линиями бумаги?

27. Доказать, что не существует правильного многоугольника, отличного от квадрата и имеющего вершины в узлах клетчатой бумаги.

28. Доказать, что для всякого выпуклого многоугольника, нарисованного на клетчатой бумаге, с вершинами в узлах сетки, справедлива формула: $S = n + \frac{m}{2} - 1$, где S — площадь многоугольника, n — число узлов сетки внутри многоугольника, m — число узлов сетки на контуре многоугольника.

29. Дано двенадцать монет, из них одна фальшивая. Определить тремя взвешиваниями на весах с коромыслом фальшивую монету, если неизвестно, легче она или тяжелее других.

30. Из восьмидесяти золотых монет одна фальшивая (более легкая). Как отделить фальшивую монету посред-

ством четырех взвешиваний на весах с двумя чашечками без гирь?

31. Огород имеет форму квадрата со стороной 10. В некоторой точке огорода имеется колодец. Доказать, что общая длина труб, ответвляющихся от колодца и уложенных так, чтобы расстояние от любой точки огорода до ближайшей трубы было не больше 1, не меньше 48.

32. Лесом называется множество цилиндрических деревьев, радиуса 60 *см*, растущих внутри квадрата, со стороной 1 *км*. Лес называется густым, если всякий прямолинейный путь длиной 100 *м* имеет общую точку хотя бы с одним деревом. Доказать, что в густом лесу не меньше 7430 деревьев.

33. Диаметром фигуры называется наибольшее расстояние между двумя ее точками. Требуется найти такое число k, что любую плоскую фигуру диаметра d можно разбить на k частей меньшего диаметра, но существует фигура диаметра d, которую нельзя разбить на $k-1$ частей меньшего диаметра.

34. Доказать, что через всякие n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, проходит замкнутая и не пересекающая самой себя ломаная с вершинами в данных точках (и только в этих точках).

35. На плоскости имеется замкнутая конечнозвенная ломаная линия. Прямая l имеет с ней ровно 1961 общую точку. Доказать, что существует прямая l', не проходящая ни по одному звену ломаной и имеющая с ней более чем 1961 общую точку.

36. Треугольник разбит на несколько треугольников; при этом выполняются следующие условия:

1°. Два треугольника разбиения либо совсем не имеют общих точек, либо имеют одну общую вершину, либо имеют одну общую сторону (целиком).

2°. Сторона исходного треугольника может служить стороной только для одного треугольника разбиения.

Доказать, что число треугольников разбиения нечетно.

37. Докажите, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно незнакомых друг с другом, либо трое попарно знакомых.

38. Имеется отрезок, к которому восставлено n перпендикуляров длины 1. На отрезке и на перпендикулярах отмечено несколько точек, причем среди них нет ни одного основания перпендикуляра. Доказать, что если на любом пути, соединяющем концы перпендикуляров, есть хотя бы одна отмеченная точка, то отмеченных точек не меньше чем $n - 1$.

39. Найти такие цифры, которые при подстановке их вместо букв в выражение:

$$\begin{array}{r} \mathrm{f\,o\,r\,t\,y} \\ +\quad \mathrm{t\,e\,n} \\ \mathrm{t\,e\,n} \\ \hline \mathrm{s\,i\,x\,t\,y} \end{array}$$

давали тождество (различным буквам соответствуют различные цифры).

40. Имелось семь листов бумаги. Некоторые из них разрезали на семь частей. Некоторые из полученных кусков снова разрезали на семь частей и т. д. Когда потом подсчитали общее число получившихся листов бумаги (разного размера), то оказалось, что их 1961. Докажите, что подсчет был произведен неправильно.

41. Шахматист для тренировки играет не менее одной партии в день; при этом, чтобы не переутомиться, он играет не более 12 партий в неделю (календарную).

Доказать, что можно найти несколько последовательных дней, в течение которых шахматист сыграет ровно 20 партий.

42. Для того чтобы отгадать целое число, заключенное между 1 и 1000, можно задавать вопросы. На вопросы можно отвечать только «да» и «нет». В какое наименьшее число вопросов можно наверняка отгадать задуманное число?

43. Двое играют в такую игру: один задумывает число, лежащее между единицей и тысячей (включительно), а другой угадывает его, задавая первому вопросы вида: «Содержится ли это число среди таких-то?» (например: среди чисел от 1 до 500 включительно?; среди четных чисел?; среди чисел от 1 до 200?; от 550 до 600 или от 955 до 957?). Первый имеет право дать один неправильный ответ. Доказать, что второй может угадать число за:

а) 21 вопрос,

б) 14 вопросов.

44. Игра состоит в следующем. Имеется прямоугольный стол и достаточно большое количество одинаковых монет. Двое играющих кладут по очереди по одной монете на свободные места стола до тех пор, пока это возможно.

Играющий, положивший на стол монету последним, выигрывает. Как должен играть начинающий первым, чтобы выиграть?

45. На клетчатой бумаге играют двое: A и B. Одним ходом можно соединить две соседние вершины, находящиеся на расстоянии 1. Доказать, что, если первый ход сделал A, то:

а) B может помешать A образовать из своих линий какой-нибудь замкнутый многоугольник.

б) B может помешать A соединить своими линиями две наперед заданные точки, находящиеся на расстоянии, большем 1.

46. Жители города Правдин всегда говорят правду, жители соседнего города Кривдин всегда обманывают. Однажды приезжий встретил трех местных жителей A, B, C, среди которых были один житель Правдина и два жителя Кривдина. «Откуда вы?» — спросил приезжий у A. Житель A ответил что-то очень тихо, так что приезжий не расслышал ответа. «Что он мне ответил?» — спросил приезжий, обращаясь к B и C. «Он ответил, что он житель Кривдина». Можете ли вы на основании этого разговора установить, где проживают A, B и C?

47. Известно, что жители города A всегда говорят правду, жители города B всегда лгут, а жители города C на один из двух заданных подряд вопросов отвечают правду, а на другой — ложь и что жители всех трех городов бывают в гостях друг у друга. Какие четыре вопроса должен задать путешественник первому встречному, чтобы наверняка определить, где он находится и с кем разговаривает?

48. По кругу выписаны p плюсов и q минусов. Пусть a — число пар рядом стоящих плюсов, а b — число пар рядом стоящих минусов.

Доказать, что $|a-b|=|p-q|$.

49. На окружности взято несколько точек: одни из них обозначаем буквой A, остальные — буквой B. На каждой из дуг, на которые окружность делится взятыми точками, ставим некоторое число: если обе концевые точки дуги обозначены буквами A, то ставим число 2; если обе концевые точки обозначены буквами B, то ставим $\frac{1}{2}$; если же концевые точки дуги обозначены разными буквами, то ставим число 1. Доказать, что произведение всех поставленных чисел равно 2^{a-b}, где a — число точек, обозначенных буквой A, b — число точек, обозначенных буквой B (причем семиклассники могут считать, что $a>b$).

50. Натуральные числа от 1 до n располагаются на окружности. Это называется n-цепочкой. Рассмотрим k_n таких n-цепочек, что два числа, соседние в одной из них, не являются соседними ни в какой другой. Какое наибольшее значение может принимать отношение $\frac{k_n}{n-1}$?

51. а) Рассматриваются всевозможные наборы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, состоящие из нулей и единиц. Доказать, что никакому уравнению вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, где $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \neq 0$ не могут удовлетворять более чем 2^{n-1} таких наборов.

б) Набор $(x_1, \ldots, x_k)$, состоящий из нулей и единиц, называется правильным, если он содержит не меньше двух единиц. Пусть N — число правильных наборов, для которых $a_1x_1 + \ldots + a_kx_k = 0$, M — число остальных правильных наборов. Доказать, что при $k \geqslant 3$ справедливо неравенство $M \geqslant N$.

52. Строится последовательность строк: 1-я строка: x, y; 2-я строка: x, y, y, x — и далее каждая строка получается заменой x на (x, y) и y на (y, x). Потом вся система нумеруется слева направо и сверху вниз последовательными членами некоторой арифметической прогрессии (т. е. нумеруются сперва числа первой строки слева направо первыми двумя членами прогрессии, затем — числа второй строки слева направо третьим, четвертым и т. д. членами прогрессии и т. д.).

Доказать, что в n-й строке сумма k-х степеней номеров при всех x равна сумме k-х степеней номеров при всех y, если $0 \leqslant k \leqslant n$.

53. Горизонтали шахматной доски обозначаются, как обычно, цифрами от 1 до 8, а вертикали — буквами от a до h. Пусть теперь a, b, c, d, e, f, g, h — произвольные числа. Напишем на каждом поле доски произведение чисел, соответствующих горизонтали и вертикали этого поля, например на поле $e7$ — число $e \cdot 7$. Расставим на поле 8 ладей так, чтобы они не били друг друга; они закроют 8 чисел. Чему равно произведение закрытых чисел?

54. На участке клетчатой бумаги квадратной формы в N^2 клеток выбраны два поля, A и B, находящиеся рядом друг с другом (по горизонтали). На левое поле A поставлена фишка. Ее можно передвигать на одно поле по одному из трех направлений: вверх, вправо и по диагонали через нижний левый угол. Доказать, что независимо от N невозможно обойти всю доску, побывав на каждом поле ровно по одному разу и прийти на поле B.

55. Пятьдесят из клеток обыкновенной шахматной доски пронумерованы целыми числами: 1, 2, 3, ..., 49, 50. На доске стоят 50 шашек, которые также перенумерованы. Каждая шашка стоит или на пустом поле, или на поле с номером, который может совпадать или не совпадать с номером шашки. На одном поле стоит не более одной шашки. За один ход можно одну шашку переставить на любое свободное место. Доказать, что для того чтобы все шашки поставить на свои места, потребуется не больше 75 ходов.

56. Доказать, что шахматную доску с $4k+1$ вертикалями и $4k+1$ горизонталями можно обойти ходом коня, побывав на каждом поле ровно по одному разу.

57. На клетчатой бумаге в узлах сетки отмечено две точки. Сколькими способами можно пройти из одной точки в другую, если двигаться по линиям сетки и притом самыми короткими по длине путями?

58. Сколькими способами можно раскрасить n красками окружность, разделенную на p частей (p — простое)?

Способы, совпадающие при повороте окружности вокруг центра, считаются одинаковыми.

59. На двух параллельных прямых дано по n точек. Сколькими способами можно соединить их ломаной, имеющей вершины только в этих точках? (Данные точки могут лежать и на сторонах ломаной.)

60. Оргкомитет олимпиады состоит из 11 человек. Материалы олимпиады хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф и сколькими ключами следует снабдить каждого члена оргкомитета, чтобы доступ в сейф был возможен, когда соберутся любые 6 членов оргкомитета, и не был возможен, если соберется меньше шести членов?

61. На окружности взято n точек, против части из которых поставлен знак «плюс», против остальных — «минус». Доказать, что существует не более $\left[\frac{3n+4}{2}\right]$ хорд, соединяющих точки с разными знаками и не пересекающихся внутри окружности.

62. В турнире принимают участие n шахматистов различной силы. Считая, что более сильный игрок всегда выигрывает у более слабого, придумать такой порядок игр, при котором расположение шахматистов по их силе выяснится не более чем через $k(n+1)$ партий, где k — наибольшее целое число, удовлетворяющее условию $2^k \leqslant n$.

63. Сколько существует различных шестигранных игральных костей? Две кости считаются различными, если одну из них нельзя поставить на место другой так, чтобы числа на соответствующих гранях были равны.

64. На автобусном маршруте, действующем в одном направлении, 14 остановок. Имеется 91 различный образец билетов в зависимости от того, откуда и куда едет пассажир. Пассажиры входят и выходят, но одновременно едет не более 25 человек. Какое максимальное число сортов билетов может быть выдано кондуктором за один рейс?

65. Сколько существует перестановок из n чисел $1, 2, 3, \ldots, n$, в которых ни одно число k не стоит на k-ом месте; $k = 1, 2, \ldots, n$?

66. Сколькими способами можно соединить $2n$ точек, лежащих на окружности, n непересекающимися хордами?

67. На листе клетчатой бумаги размером $n \times n$ клеток расставлены числа $1, 2, 3, \ldots, n^2$ по одному в каждой клетке, так, что числа, стоящие на каждой вертикали и горизонтали, образуют арифметическую прогрессию.

Найти число всех таких расположений.

68. У человека на голове не более 300 000 волос. Доказать, что в Москве живут хотя бы 10 человек, у которых число волос одинаково (население Москвы — около 6 млн. человек).

69. Дано $2n+1$ предметов. Доказать, что из них можно выбрать нечетное число предметов столькими же способами, сколькими четное.

70. В ящике лежат 70 шаров, из них 20 красных, 20 зеленых, 20 желтых, остальные белые и черные. Какое наименьшее число шаров надо вынуть, чтобы наверняка вытащить 10 шаров какого-нибудь одного цвета?

71. Имеется sn шаров n различных цветов, шаров каждого цвета — одинаковое число. Доказать, что как бы они ни были разложены в n ящиках по s штук в ящике, всегда можно вынуть из каждого ящика по одному шару так, что будут представлены все цвета.

72. Доказать, что монетами в 2 и 5 копеек можно разменять 1 рубль бо́льшим числом способов, чем монетами в 3 и 5 копеек.

73. Сколькими способами можно разменять 20 копеек на монеты достоинством в 5,2 и 1 копейку?

74. Имеется кусок цепи из 60 звеньев. Каждое звено весит 1 *г*. Какое наименьшее число звеньев надо расковать, чтобы из полученных кусков цепи можно было составить все веса от 1 до 60 *г*?

75. Доказать, что с помощью стандартного набора разновесов: 1 *мг*, 2 *мг*, 2 *мг*, 5 *мг*, 10 *мг*, 20 *мг*, 20 *мг*, 50 *мг*, 100 *мг*, 200 *мг*, 200 *мг*, 500 *мг*, 1 *г*, 2 *г* и т. д.— можно составить любой вес, выражаемый целым числом миллиграммов.

76. Доказать, что, имея на руках 100 денежных знаков двух различных достоинств, можно купить некоторое целое число 101-рублевых вещей без сдачи.

77. На консультации было 20 школьников и разбиралось 20 задач. Оказалось, что каждый из школьников решил две задачи и каждую задачу решили два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решенных им задач и все задачи были разобраны.

78. Плоскость целиком покрыта 43 полуплоскостями. Доказать, что из них можно выбрать три так, чтобы они также целиком покрывали эту плоскость.

79. Отрезок длины 1 полностью покрыт 43 отрезками. Доказать, что из них можно выбрать непересекающиеся между собой отрезки, сумма длин которых не меньше $\frac{1}{2}$.

80. Доказать, что у любого дерева можно оборвать $\frac{8}{15}$ его листьев, оставив при этом не менее $\frac{7}{15}$ тени, которую давало дерево (тенью от ствола и веток пренебречь; число листьев можно считать делящимся на 15).

81. Полусферой называется одна из двух половин, на которые сфера разбивается большой окружностью; точки самой окружности, ограничивающей полусферу, также причисляются к этой полусфере. Доказать, что если 1958 полусфер покрывают всю сферу, то можно выбрать четыре из них, которые также покрывают всю сферу.

82. Даны две окружности, длина каждой из которых равна 1957 *см*. На одной из них отмечено 1957 точек, на другой — несколько дуг, сумма длин которых меньше 1. Доказать, что эти окружности можно так наложить друг на друга, что ни одна отмеченная точка не попадет ни на одну отмеченную дугу.

83. Каждая точка окружности обозначена по крайней мере одной из трех красок. Есть по крайней мере одна точка, обозначенная двумя красками. Доказать, что найдется дуга в 120°, концы которой будут обозначены одинаковой краской (и, может быть, еще другими красками).

84. Сколько раз в сутки стрелки часов образуют между собой прямые углы?

85. Стрелки часов закреплены, а циферблат можно поворачивать. Доказать, что циферблат можно повернуть так, чтобы часы показали первый час (и положение часовой стрелки соответствовало бы положению минутной).

86. В начале олимпиады, между 12 и 13 часами, школьник посмотрел на часы. Кончив работу между 17 и 18 часами, он заметил, что стрелки поменялись местами. Сколько времени было, когда он кончил?

87. Часы испорчены, но стрелки их движутся равномерно. На сколько часов они отстают или уходят вперед в сутки, если показывают верное время: 1 раз в сутки? 2 раза в сутки? 3 раза в сутки?

ЧАСТЬ II

ЗАДАЧИ МОСКОВСКИХ ОЛИМПИАД

Здесь собраны задачи, предлагавшиеся на математических олимпиадах в Москве (при МГУ) в 1935—1964 годах.

Некоторые из задач, предлагавшихся в 1952—1964 годах, снабжены решениями. Номера этих задач выделены полужирным шрифтом.

Необходимо отметить, что большинство задач первых 14 олимпиад (1935—1951 гг.) разобраны в выпусках «Библиотеки математического кружка» и в других изданиях (см. [41], [43], [46], [57] из списка литературы на стр. 47—50).

I олимпиада (1935 год)

1-й тур

1. Поезд проходит мимо наблюдателя в течение t_1 секунд, а мимо моста длиной l метров в течение t_2 секунд. Считается, что поезд проходит мимо моста, начиная с того момента, когда локомотив въезжает на мост, и кончая моментом, когда последний вагон покидает мост. Определить длину и скорость поезда.

2. Построить квадрат, три вершины которого лежали бы на трех данных параллельных прямых.

3. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды со сторонами основания a и плоскими углами при вершине, равными углам наклона боковых ребер к плоскости основания.

2-й тур

Серия А

1 Построить треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из одной вершины.

2. На поверхности куба найти точки, из которых диагональ видна под наименьшим углом.

Серия B

1. Сколько действительных решений имеет система:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1? \end{cases}$$

2. Решить систему:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 2b, \\ x^2y - xy^2 = b. \end{cases}$$

3. Вычислить сумму: $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3$.

Серия C

1. Сколькими способами можно раскрасить куб в шесть данных цветов, если любые две различные грани должны быть раскрашены разными красками? (Различными считаются те раскраски, которые не совмещаются при поворотах куба.)

2. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы трех целых положительных слагаемых?

3. Обозначим через $M\ (a,\ b,\ c,\ \ldots,\ k)$ общее наименьшее кратное, а через $D\ (a,\ b,\ c,\ \ldots,\ k)$ — наибольший общий делитель чисел $a,\ b,\ c,\ \ldots,\ k$.

Доказать:

а) $M(a,\ b) \cdot D(a,\ b) = ab$,

б) $\dfrac{M(a,\ b,\ c) \cdot D(a,\ b) \cdot D(b,\ c) \cdot D(a,\ c)}{D(a,\ b,\ c)} = abc.$

II олимпиада (1936 год)

2-й тур

1. Решить систему:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^5 + y^5 = b^5. \end{cases}$$

2. Дан угол, меньший 180°, и точка ρ вне его. Провести через ρ прямую так, чтобы треугольник, образованный

вершиной данного угла и точками пересечения его сторон с проведенной прямой, имел данный периметр.

3. Если x, y — целые числа, причем $x^2+y^2=z^2$ (z — целое), то xy делится на 12. Доказать.

4. Сколькими способами можно разложить миллион в произведение трех множителей?

III олимпиада (1937 год)

1-й тур

1. Решить систему:

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$$

2. Даны прямая и две точки A и B по одну сторону от нее. Найти на прямой такую точку M, чтобы сумма $MA+$ $+MB$ равнялась заданному отрезку.

3. По двум скрещивающимся прямым скользят два отрезка. Доказать, что объем тетраэдра с вершинами в концах этих отрезков не зависит от положения последних.

2-й тур

1. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Через каждые две из них провести окружность так, чтобы три проведенные окружности имели в точках пересечения взаимно перпендикулярные касательные.

2. В пространстве расположен правильный додекаэдр. Сколькими способами можно провести плоскость так, чтобы она высекла на додекаэдре правильный шестиугольник?

3. На сколько частей разделяют n-угольник его диагонали, если никакие три диагонали не пересекаются в одной точке?

IV олимпиада (1938 год)

2-й тур

1. В пространстве даны точки O_1, O_2, O_3 и точка A. Точка A симметрично отражается относительно точки O_1, полученная точка A_1 — относительно O_2, полученная точка A_2 — относительно O_3.

Получаем некоторую точку A_3, которую также последовательно отражаем относительно O_1, O_2, O_3. Доказать, что последняя полученная точка совпадает с A.

2. На сколько частей могут разделить пространство n плоскостей?

3. Построить треугольник по основанию, высоте и разности углов при основании.

4. Сколько существует целых чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

V олимпиада (1939 год)

1-й тур

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3xyz - x^3 - y^3 - z^3 = b^3, \\ x + y + z = 2b, \\ x^2 + y^2 - z^2 = b^2. \end{cases}$$

2. Доказать, что $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

3. Даны три точки A, B, C. Через точку A провести прямую так, чтобы сумма расстояний от точек B и C до этой прямой была равна заданному отрезку.

4. Решить уравнение $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$.

5. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

2-й тур

1. Разложить на целые рациональные множители выражение

$$a^{10} + a^5 + 1.$$

2. Даны два многочлена от переменной x с целыми коэффициентами. Произведение их есть многочлен с четными коэффициентами, не все из которых делятся на 4. Доказать, что в одном из многочленов все коэффициенты четные, а в другом — хоть один нечетный.

3. Даны две точки A и B и окружность. Найти на окружности точку X так, чтобы прямые AX и BX отсекли на окружности хорду CD, параллельную данной прямой MN.

4. Найти остаток от деления на 7 числа

$$10^{10} + 10^{(10^2)} + 10^{(10^3)} + \ldots + 10^{(10^{10})}.$$

5. Дана правильная пирамида. Из произвольной точки P ее основания восставлен перпендикуляр к плоскости основания. Доказать, что сумма отрезков от точки P до точек пересечения перпендикуляра с плоскостями граней пирамиды не зависит от выбора точки P на основании.

6. На какое самое большее число частей можно разбить пространство пятью сферами?

VI олимпиада (1940 год)

I-й тур

VII—VIII классы

1. Разложить на множители:

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3.$$

2. Пароход от Горького до Астрахани идет 5 суток, а от Астрахани до Горького — 7 суток. Сколько дней будут плыть по течению плоты от Горького до Астрахани?

3. Сколькими нулями оканчивается произведение всех целых чисел от 1 до 100 включительно?

4. Провести окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой и данной окружности. Сколько решений имеет задача?

IX—X классы

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) = 2b^5, \\ x + y = b. \end{cases}$$

2. Все целые числа начиная от единицы выписаны подряд. Таким образом, получается следующий ряд цифр: 123456789101112131415... . Определить, какая цифра стоит на 206788-м месте.

3. Построить окружность, равноудаленную от четырех точек плоскости. Сколько решений имеет задача?

4. В плоскости даны две прямые. Найти множество всех точек, разность расстояний которых от этих прямых равна заданному отрезку.

5. Факториалом числа n называется произведение всех целых чисел от единицы до n включительно. Найти все трехзначные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

2-й тур

VII—VIII классы

1. Найти четырехзначное число, являющееся точным квадратом, первые две цифры, а также последние две цифры которого одинаковы.

2. Точки A, B, C — вершины вписанного в окружность правильного треугольника. Точка D лежит на меньшей дуге AB. Доказать, что $AD + BD = DC$.

3. Данным четырехугольником неправильной формы настлать паркет, т. е. покрыть всю плоскость четырехугольниками, равными данному, без пропусков и перекрытий.

4. Сколько существует таких пар целых чисел x, y, заключенных между 1 и 1000, что $x^2 + y^2$ делится на 49?

IX—X классы

1. На бесконечном конусе, угол развертки которого равен α, взята точка. Из этой точки в обе стороны проводится линия так, что после развертки она превращается в отрезки прямых. Определить число ее самопересечений.

2. Что больше: 300! или 100^{300}?

3. Центр O описанной около треугольника ABC окружности отражается симметрично относительно каждой из сторон. По трем полученным точкам O_1, O_2, O_3 восстановить треугольник ABC, если все остальное стерто.

4. Доказать неравенство:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n$$

(a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n — положительные числа).

5. Сколько существует положительных целых чисел x, меньших 10 000, для которых $2^x - x^2$ делится на 7?

VII олимпиада (1941 год)

1-й тур

VII—VIII классы

1. Построить треугольник по высоте и медиане, выходящим из одной вершины, и радиусу описанного круга.

2. Дописать к 523 ... три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9.

3. Дан четырехугольник; A, B, C, D — последовательные середины его сторон, P, Q — середины диагоналей. Доказать, что треугольник BCP равен треугольнику ADQ.

4. Через точку P, лежащую вне окружности, проводятся всевозможные прямые, пересекающие эту окружность. Найти множество середин хорд, отсекаемых окружностью на этих прямых.

5. Доказать, что произведение четырех последовательных целых чисел в сумме с единицей дает полный квадрат.

IX—X классы

1. См. задачу № 2 для VII—VIII классов.

2. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Доказать, что их центры лежат в вершинах некоторого квадрата.

3. Доказать, что многочлен с целыми коэффициентами

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

принимающий при $x = 0$ и $x = 1$ нечетные значения, не имеет целых корней.

4. Построить треугольник ABC по точкам M и N — основаниям высот AM и BN — и прямой, на которой лежит сторона AB.

5. Решить уравнение:

$$|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x+2.$$

6. Сколько корней имеет уравнение

$$\sin x = \frac{x}{100}?$$

2-й тур

VII—VIII классы

1. Доказать, что из 5 попарно различных по величине квадратов нельзя сложить прямоугольник.

2. Дан треугольник ABC. Требуется разрезать его на наименьшее число частей так, чтобы, перевернув эти части на другую сторону, из них можно было сложить тот же треугольник ABC.

3. Дан треугольник ABC. Точка M, лежащая внутри него, движется параллельно стороне BC до пересечения со стороной CA, затем параллельно стороне AB до пересечения со стороной BC, затем параллельно стороне CA и т. д. Доказать, что через некоторое число таких шагов точка вернется в исходное положение, и найти это число.

4. Найти целое число a, при котором

$$(x-a)(x-10)+1$$

разлагается в произведение $(x+b)\cdot(x+c)$ двух множителей с целыми b и c.

5. Доказать, что квадрат любого простого числа $p>3$ при делении на 12 дает в остатке 1.

6. Построить треугольник ABC по трем точкам H_1, H_2, H_3, которые являются симметричными отражениями точки пересечения высот искомого треугольника относительно его сторон.

IX—X классы

1. Доказать, что из шести попарно различных по величине квадратов нельзя сложить прямоугольник.

2. Некоторое количество точек расположено на плоскости так, что каждые 3 из них можно заключить в круг радиуса $r=1$. Доказать, что тогда и все точки можно заключить в круг радиуса 1.

3. Найти такие отличные от нуля неравные между собой целые числа a, b, c, чтобы выражение

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1$$

разлагалось в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

4. Решить в целых числах уравнение

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

5. В пространстве даны две скрещивающиеся перпендикулярные прямые. Найти множество середин всех отрезков данной длины, концы которых лежат на этих прямых.

6. Построить прямоугольный треугольник по двум медианам, проведенным к катетам.

VIII олимпиада (1945 год)

1-й тур

VII—VIII классы

1. Разделить $a^{128} - b^{128}$ на $(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \cdot (a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16})(a^{32} + b^{32})(a^{64} + b^{64})$.

2. Доказать, что при любом целом положительном n сумма

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

больше $\frac{1}{2}$.

3. Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает полный квадрат. Найти все такие числа.

4. Доказать, что разносторонний треугольник нельзя разрезать на два равных треугольника.

5. К двум окружностям, касающимся извне, проведены общие внешние касательные и точки касания соединены между собой. Доказать, что в полученном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

IX—X *классы*

1. Разделить $a^{2^k} - b^{2^k}$ на

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \cdot \ldots \cdot (a^{2^{k-1}} + b^{2^{k-1}}).$$

2. Найти трехзначное число, всякая целая степень которого оканчивается на три цифры, составляющие исходное число (в том же порядке).

3. Система уравнений второго порядка

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет, вообще говоря, четыре решения. При каких значениях a число решений системы уменьшается до трех или до двух?

4. Прямоугольный треугольник ABC движется по плоскости так, что его вершины B и C скользят по сторонам данного прямого угла. Доказать, что множеством точек A является отрезок и найти его длину.

2-й тур

VII—VIII классы

1. Даны 6 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найти сумму всех четырехзначных четных чисел, которые можно написать этими цифрами (одна и та же цифра в числе может повторяться).

2. Из картона вырезали два равных многоугольника, совместили их и проткнули в некоторой точке булавкой. При повороте одного из многоугольников около этой «оси» на 25°30′ он снова совместился со вторым многоугольником. Каково наименьшее возможное число сторон таких многоугольников?

3. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления P соединена с вершиной B. Доказать, что прямая BP отсекает на диагонали AC часть AQ, которая равна $\frac{1}{n+1}$ части диагонали $\left(AQ = \frac{AC}{n+1}\right)$.

4. Вершины A, B, C треугольника ABC соединены отрезками с точками A_1, B_1, C_1, лежащими на противоположных сторонах треугольника. Доказать, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 не лежат на одной прямой

IX—X классы

1. Решить в целых числах уравнение

$$xy + 3x - 5y = -3$$

2. Некоторые из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны $+1$, остальные равны -1. Доказать, что

$$2\sin\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \ldots + \frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4} = a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + a_3\sqrt{2 + \ldots + a_n\sqrt{2}}}}.$$

В частности, при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, имеем:

$$2\sin\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{2+\sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}.$$

3. Окружность радиуса, равного высоте некоторого правильного треугольника, катится по стороне этого треугольника. Доказать, что дуга, высекаемая сторонами треугольника на окружности, все время равна $60°$.

IX олимпиада (1946 год)

1-й тур

VII—VIII классы

1. Какое наибольшее число острых углов может встретиться в выпуклом многоугольнике?

2. На прямой даны 3 точки A, B, C. На отрезке AB построен равносторонний треугольник ABC_1, на отрезке BC построен равносторонний треугольник BCA_1. Точка M — середина отрезка AA_1, точка N — середина отрезка CC_1. Доказать, что треугольник BMN — равносторонний. (Точка B лежит между точками A и C; точки A_1 и C_1 расположены по одну сторону от прямой AB.)

3. Найти четырехзначное число, которое при делении на 131 дает в остатке 112, а при делении на 132 дает в остатке 98.

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_4 + x_5 + x_6 = -3, \\ x_5 + x_6 + x_7 = -9, \\ x_6 + x_7 + x_8 = -6, \\ x_7 + x_8 + x_1 = -2, \\ x_8 + x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

5. Доказать, что в произведении

$$(1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{99}+x^{100})\,(1+x+x^2+ +\ldots+x^{99}+x^{100})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов не останется членов, содержащих x в нечетной степени.

IX—X классы

1. В пространстве даны две пересекающиеся плоскости α и β. На линии их пересечения дана точка A. Доказать, что из всех прямых, лежащих в плоскости α и проходящих через точку A, наибольший угол с плоскостью β образует та, которая перпендикулярна к линии пересечения плоскостей α и β.

2. Через точку A, лежащую внутри угла, проведена прямая, отсекающая от этого угла наименьший по площади треугольник. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный между сторонами угла, делится в точке A пополам.

3. Доказать, что n^2+3n+5 ни при каком целом числе n не делится на 121.

4. Доказать, что для любого натурального n справедливо соотношение: $\frac{(2n)!}{n!}=2^n\cdot(2n-1)!!$

5. Доказать, что если α и β — острые углы и $\alpha<\beta$, то $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}<\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}$.

2-й тур

VII—VIII классы

1. В шахматном турнире участвовали два ученика VII класса и некоторое число учеников VIII класса. Два семиклассника набрали вместе восемь очков, а все восьмиклассники набрали по одинаковому числу очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? (По условиям турнира любые два участника должны сыграть между собой одну партию. За проигрыш партии участнику записывается 0 очков, за выигрыш 1 очко, за ничью $\frac{1}{2}$ очка.)

2. Доказать, что выражение $x^5+3x^4y-5x^3y^2-15x^2y^3+ +4y^4x+12y^5$ не равно 33 ни при каких целых значениях x и y.

3. На сторонах угла AOB от вершины O отложены отрезки OA и OB, причем $OA > OB$. На отрезке OA взята точка M, на отрезке OB — точка N так, что $AM = BN = x$. Найти значение x, при котором отрезок MN имеет наименьшую длину.

4. Из тридцати пунктов A_1, A_2, ..., A_{30}, расположенных на прямой MN на равных расстояниях друг от друга, выходят тридцать прямых дорог. Эти дороги располагаются по одну сторону от прямой MN и образуют с нею следующие углы:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
α	60°	30°	15°	20°	155°	45°	10°	35°	140°	50°	125°	65°	85°	86°	80°
№	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
α	75°	78°	115°	95°	25°	28°	158°	30°	25°	5°	15°	160°	170°	20°	158°

Из всех тридцати пунктов выезжают одновременно тридцать автомобилей, едущих, никуда не сворачивая, по этим дорогам с одинаковой скоростью.

На каждом из перекрестков установлено по шлагбауму. Как только первая (по времени) машина проезжает перекресток, шлагбаум закрывается и преграждает путь всем следующим машинам, попадающим на этот перекресток. Какие из машин проедут все перекрестки на своем пути, а какие застрянут?

5. Автобусная сеть города устроена следующим образом:

1) с любой остановки на любую другую остановку можно попасть без пересадки;

2) для любой пары маршрутов найдется, и притом единственная, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

3) на каждом маршруте ровно три остановки.

Сколько автобусных маршрутов в городе?

IX—X классы

1. В шахматном турнире участвовали ученики IX и X классов. Десятиклассников было в десять раз больше, чем девятиклассников, и они набрали вместе в 4,5 раза

больше очков, чем все девятиклассники. Сколько очков набрали девятиклассники? Найти все решения (см. примечание к задаче № 1 для VII—VIII классов).

2. Дан ряд чисел

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89\ldots,$$

в котором каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Найдется ли среди 100 000 001 первых членов этого ряда число, оканчивающееся четырьмя нулями?

3. На сторонах PQ, QR, RP треугольника PQR отложены отрезки AB, CD, EF. Внутри треугольника задана точка S_0. Найти множество точек S, для которых сумма площадей треугольников SAB, SCD и SEF равна сумме площадей треугольников S_0AB, S_0CD, S_0EF. Рассмотреть особо случай, когда

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{CD}{QR}=\frac{EF}{RP}.$$

4. В городе 57 автобусных маршрутов. Известно, что:

1) с любой остановки на любую другую остановку можно попасть без пересадки;

2) для любой пары маршрутов найдется, и притом только одна, остановка, на которой можно пересесть с одного из маршрутов на другой;

3) на каждом маршруте не менее трех остановок.

Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов?

5. См. задачу № 4 для VII—VIII классов.

X олимпиада (1947 год)

1-й тур

VII—VIII классы

1. Найти остаток от деления многочлена

$$x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$$

на $x-1$.

2. Доказать, что из девяти последовательных чисел всегда можно выбрать одно число, взаимно простое с остальными.

3. Найти коэффициенты при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении:

$$(1+x^5+x^7)^{20}.$$

IX—X классы

1. Определить коэффициент, который будет стоять при x^2 после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении:

$$\underbrace{((\ldots(}_{k\text{ скобок}}x-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2$$

2. Доказать, что из 16 последовательных чисел всегда можно выбрать одно число, взаимно простое с остальными.

3. Сколько различных по величине или по положению квадратов, состоящих из целого числа клеток, можно начертить на шахматной доске в 64 клетки?

4. В каком из выражений

$$(1+x^2-x^3)^{1000} \text{ или } (1-x^2+x^3)^{1000}$$

будет стоять после раскрытия скобок и приведения подобных членов больший коэффициент при x^{20}?

2-й тур

VII—VIII классы

1. Некоторые из 20 металлических кубиков, одинаковых по размерам и внешнему виду, алюминиевые, остальные — дюралевые (более тяжелые). Как при помощи не более чем 11 взвешиваний на чашечных весах без гирь определить число дюралевых кубиков? (Предполагается, что все кубики могут быть алюминиевыми, но дюралевыми они все быть не могут.)

2. Сколько цифр имеет число 2^{100}?

3. На плоскости даны пять точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Доказать, что из этих точек можно выбрать четыре, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника.

4. Доказать, что никакой выпуклый 13-угольник нельзя разрезать на параллелограммы.

5. Из чисел 1, 2,...,200 выбрано 101 число. Доказать, что среди выбранных чисел найдется пара таких, что одно из них делится на другое.

IX—X классы

1. n проволочных треугольников расположены в пространстве так, что каждые два из них имеют общую вер-

шину и в каждой вершине сходится одно и то же число k треугольников. Найти все значения n и k, при которых такое расположение возможно.

2. В числовом треугольнике

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

каждое число равно сумме чисел, расположенных в предыдущей строке над этим числом и над его соседями справа и слева (если не все такие числа присутствуют, то они считаются равными нулю).

Доказать, что в каждой строке, начиная с третьей, найдется четное число.

3. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ расположен выпуклый четырехугольник $A_5A_6A_7A_8$, внутри которого взята точка A_9. Доказать, что если из девяти точек $A_1, A_2, \ldots, A_8, A_9$ никакие три не лежат на одной прямой, то из них можно выбрать пять точек, лежащих в вершинах выпуклого пятиугольника.

4. Из чисел 1,2,...,200 выбрали одно число, меньшее 16, и еще 99 чисел. Доказать, что среди выбранных чисел найдутся два таких, что одно из них делится на другое.

5. Доказать, что если четыре грани тетраэдра равновелики, то они равны между собой.

XI олимпиада (1948 год)

1-й тур

VII—VIII классы

1. Сумма обратных величин трех целых положительных чисел равна 1. Каковы эти числа? Найти все решения.

2. Найти все возможные расположения четырех точек на плоскости, при которых попарные расстояния между этими точками принимают только два значения: a и b. При каких значениях отношения $\frac{a}{b}$ такие расположения возможны?

3. На плоскости проведено n прямых линий. Доказать, что области, на которые эти прямые разбивают плоскость,

можно так закрасить двумя красками (каждая область закрашивается только одной краской), что никакие две соседние области (т. е. области, соприкасающиеся по отрезку прямой) не будут закрашены одной и той же краской.

IX—X классы

1. Если число $\frac{2^n-2}{n}$ — целое, то и число $\frac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1}$ — целое. Доказать.

2. Доказать без помощи таблиц, что

$$\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}>2.$$

3. Даны две треугольные пирамиды $ABCD$ и $A'BCD$ с общим основанием BCD, причем точка A' лежит внутри пирамиды $ABCD$. Доказать, что сумма плоских углов при вершине A' пирамиды $A'BCD$ больше суммы плоских углов при вершине A пирамиды $ABCD$.

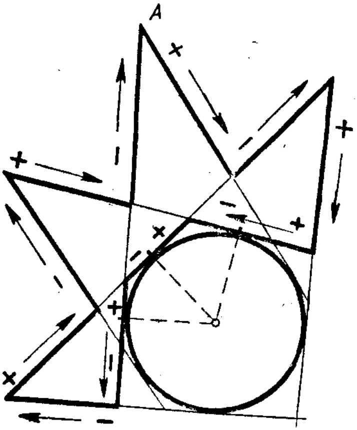


Рис. 1.

4. Даны окружность и точка A вне ее. Из этой точки мы совершаем путь по некоторой замкнутой ломаной, состоящей из отрезков прямых, касательных к окружности, и заканчиваем путь в точке A (рис. 1). Участки пути, по которым мы приближаемся к центру окружности, берем со знаком «плюс», остальные участки со знаком «минус» — по ним мы удаляемся от центра. Доказать, что алгебраическая сумма длин участков пути с указанными знаками равна нулю.

2-й тур

VII—VIII классы

1. Решить в натуральных числах уравнение $x^y = y^x$ $(x \neq y)$. Найти все решения.

2. Доказать, что в любом треугольнике имеет место

неравенство: $R \geqslant 2r$ (R и r — радиусы описанного и вписанного кругов соответственно), причем равенство $R = 2r$ имеет место только для правильного треугольника.

3. Может ли фигура иметь более одного, но конечное число центров симметрии?

IX—X классы

1. Найти все рациональные положительные решения уравнения

$$x^y = y^x \qquad (x \neq y).$$

2. Поместить в куб окружность наибольшего возможного радиуса.

3. Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство $|x| + |y| < 100$?

4. Каково наибольшее возможное число лучей в пространстве, выходящих из одной точки и образующих попарно тупые углы?

XII олимпиада (1949 год)

1-й тур

VII—VIII классы

1. Показать, что

$$27\,195^8 - 10\,887^8 + 10\,152^8$$

делится на 26 460 без остатка.

2. Доказать, что если плоский многоугольник имеет несколько осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

3. Доказать, что равенство $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ для целых чисел x, y, z возможно только при $x = y = z = 0$.

4. Дана плоская замкнутая ломаная периметра 1. Доказать, что можно начертить круг радиуса 1/4, покрывающий всю ломаную.

5. Доказать, что для любого треугольника отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей, делится описанной окружностью пополам

IX—X классы

1. Найти такие целые числа x, y, z, u, что

$$x^2+y^2+z^2+u^2=2xyzu.$$

2. Как расположены плоскости симметрии ограниченного тела, если оно имеет две различные оси вращения? (Осью вращения тела называется прямая, после поворота вокруг которой на любой угол тело совмещается само с собой.)

3. Найти действительные корни уравнения:

$$x^2+2ax+\frac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}\quad\left(0<a<\frac{1}{4}\right).$$

4. Имеется набор из $4n$ положительных чисел. Из любых четырех попарно различных чисел этого набора можно составить геометрическую прогрессию. Доказать, что в таком случае в наборе имеются по крайней мере n одинаковых чисел.

5. Доказать, что если у шестиугольника противоположные стороны параллельны и диагонали, соединяющие противоположные вершины, равны, то вокруг него можно описать окружность.

2-й тур

VII—VIII классы

1. Двенадцать полей расположены по кругу. На четырех соседних полях стоят четыре разноцветные фишки: красная, желтая, зеленая и синяя. Одним ходом можно передвинуть любую фишку с поля, на котором она стоит, через четыре поля на пятое, если оно свободно, в любом из двух возможных направлений. После нескольких ходов фишки стали опять на те же четыре поля. Как они могут при этом переставиться?

2. Даны 2 треугольника ABC и DEF и точка O. Берется любая точка X в треугольнике ABC и любая точка Y в треугольнике DEF, после чего треугольник OXY достраивается до параллелограмма $OXYZ$.

а) Доказать, что все полученные таким образом точки Z образуют многоугольник.

б) Сколько сторон он может иметь?

в) Доказать, что его периметр равен сумме периметров исходных треугольников.

3. Имеется тринадцать гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые двенадцать из них можно так разложить на две чашки весов, по шесть на каждую, что наступит равновесие. Доказать, что все гири имеют один и тот же вес.

4. В произвольном шестиугольнике середины сторон соединены через одну. Доказать, что точки пересечения медиан двух образовавшихся треугольников совпадают.

5. Если имеется сто любых целых чисел, то среди них всегда можно взять несколько (или может быть одно), так, что в сумме они дадут число, делящееся на 100. Доказать.

IX—X классы

1. См. задачу № 1 для VII—VIII классов.

2. См. задачу № 3 для VII—VIII классов.

3. В данный треугольник вписать центрально-симметричный многоугольник. Многоугольник считается вписанным в треугольник, если все его вершины лежат на сторонах этого треугольника.

4. Доказать, что числа вида 2^n при различных натуральных n могут начинаться на любую заранее заданную комбинацию цифр.

5. Доказать, что к квадрату нельзя приложить более восьми не налегающих друг на друга квадратов такого же размера.

XIII олимпиада (1950 год)

1-й тур

VII—VIII классы

1. Имеется шахматная доска с обычной раскраской (границы квадратов считаются окрашенными в черный цвет). Начертить на ней окружность наибольшего радиуса, целиком лежащую на черных полях, и доказать, что большей окружности того же рода начертить нельзя.

2. Имеется 555 гирь весом 1 *г*, 2 *г*, 3 *г*, 4 *г*, ..., 555 *г*. Разложить их на три равные по весу кучи.

3. Даны три окружности O_1, O_2, O_3, проходящие через одну точку O. Вторые точки пересечения O_1 с O_2, O_2 с O_3,

O_3 с O_1 обозначим соответственно через A_1, A_2, A_3. На O_1 берем произвольную точку B_1. Если B_1 не совпадает с A_1, то проводим через точки B_1 и A_1 прямую до второго пересечения с O_2 в точке B_2. Если B_2 не совпадает с A_2, то проводим через точки B_2 и A_2 прямую до второго пересечения с O_3 в точке B_3. Если B_3 не совпадает с A_3, то проводим через точки B_3 и A_3 прямую до второго пересечения с O_1 в точке B_4. Доказать, что точка B_4 совпадает с B_1.

4. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника; A, B, C — величины противоположных углов. Доказать, что

$$Aa + Bb + Cc \geqslant \frac{1}{2}(Ab + Ac + Ba + Bc + Ca + Cb).$$

5. Из пункта A в другие можно попасть двумя способами:

1) Выйти сразу и идти пешком.

2) Вызвать машину и, подождав ее определенное время, ехать на ней.

В каждом случае используется способ передвижения, требующий меньшего времени. При этом оказывается, что

если конечный пункт отстоит на	то понадобится на дорогу
1 *км*	10 *мин*
2 *км*	15 *мин*
3 *км*	$17\frac{1}{2}$ *мин*

Скорости пешехода и машины, а также время ожидания машины принимаются неизменными.

Сколько времени понадобится для достижения пункта, отстоящего от A на 6 *км*?

IX—X классы

1. Пусть A — произвольный угол, B и C — острые углы. Всегда ли существует такой угол x, что

$$\sin x = \frac{\sin B \cdot \sin C}{1 - \cos B \cos C \cos A}?$$

(Из «Воображаемой геометрии» Н. И. Лобачевского.)

2. Из двух треугольных пирамид с общим основанием одна лежит внутри другой. Может ли сумма ребер внутренней пирамиды быть больше суммы ребер внешней?

3. Имеется 81 гиря весом 1^2 *г*, 2^2 *г*, 3^2 *г*, ..., 81^2 *г*. Разложить их на три равные по весу кучи.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

5. Даны n окружностей: $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n$, проходящих через одну точку O. Вторые точки пересечения O_1 с O_2, O_2 с O_3, ..., O_n с O_1 обозначим соответственно через $A_1, A_2, \ldots, A_n$. На O_1 берем произвольную точку B_1. Если B_1 не совпадает с A_1, то проводим через A_1 и B_1 прямую до второго пересечения с O_2 в точке B_2. Если B_2 не совпадает с A_2, то проводим через A_2 и B_2 прямую до пересечения с O_3 в точке B_3, и так далее, пока не получим точку B_n на окружности O_n. Если при этом B_n не совпадает с A_n, то проведем через эти точки прямую до второго пересечения с O_1 в точке B_{n+1}. Доказать, что B_{n+1} совпадает с B_1.

З а м е ч а н и е: в случае совпадения каких-либо точек B_k и A_k, нужно через точку A_k проводить касательную к окружности O_k до пересечения с O_{k+1} в точке B_{k+1}. (Ср. с задачей № 3 для VII—VIII классов.)

2-й тур

VII—VIII классы

1. В выпуклом 13-угольнике проведены все диагонали. Они разбивают его на многоугольники. Возьмем среди них многоугольник с наибольшим числом сторон. Какое самое большое число сторон может он иметь?

2. Доказать, что

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

3. В треугольник вписана окружность, около которой описан квадрат, так что никакая сторона квадрата не параллельна никакой стороне треугольника. Доказать, что вне треугольника лежит меньше половины периметра квадрата.

4. На окружности расположены 20 точек. Эти точки

соединяются десятью хордами, не имеющими общих концов и не пересекающимися между собой. Сколькими способами это можно сделать?

IX—X классы

1. В выпуклом 1950-угольнике проведены все диагонали. Они разбивают его на многоугольники. Возьмем среди них многоугольник с самым большим числом сторон. Какое наибольшее число сторон может он иметь? (Ср. с задачей № 1 для *VII—VIII* классов.)

2. Числа 1, 2, 3, ..., 101 выписаны в ряд в каком-то порядке. Доказать, что из этого ряда всегда можно вычеркнуть 90 чисел так, что оставшиеся 11 будут расположены в порядке возрастания или убывания.

3. Около сферы описан пространственный четырехугольник. Доказать, что точки касания лежат в одной плоскости.

4. Можно ли провести в городе 10 автобусных маршрутов и установить на них остановки так, что для любых 8 маршрутов найдется остановка, не лежащая ни на одном из них, а любые 9 маршрутов проходят через все остановки?

XIV олимпиада (1951 год)

2-й тур

VII—VIII классы

1. Пусть $ABCD$ и $A'B'C'D'$ — два выпуклых четырехугольника с соответственно равными сторонами ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и т. д.). Доказать, что если $\angle A > \angle A'$, то $\angle B < \angle B'$, $\angle C > \angle C'$, $\angle D < \angle D'$.

2. На плоскости даны равнобочная трапеция $ABCD$ и точка P. Доказать, что из отрезков PA, PB, PC, PD можно построить четырехугольник.

3. Доказать, что сумма $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ при всех n есть полный квадрат.

4. Какими фигурами может быть центральная проекция треугольника (центр проекции не лежит в плоскости треугольника)?

IX—X классы

1. В n-угольную пирамиду вписана сфера. Доказать, что если совместить все боковые грани пирамиды с плоскостью основания (повернув их вокруг соответствующих ребер основания), то все точки касания этих граней со сферой сольются в одну точку H, а вершины граней расположатся на окружности с центром H.

2. Из всех выпуклых многоугольников, у которых одна сторона равна a и сумма внешних углов при вершинах, не прилегающих к этой стороне, равна 120°, найти многоугольник наибольшей площади.

3. Из всех ортогональных проекций правильного тетраэдра на различные плоскости найти проекцию наибольшей площади.

4. Окружность обладает тем свойством, что внутри нее можно двигать вписанный правильный треугольник так, чтобы каждая вершина треугольника двигалась по этой окружности и описывала ее целиком. Найти плоскую замкнутую несамопересекающуюся кривую с тем же свойством, отличную от окружности.

XV олимпиада (1952 год)

1-й тур

VII класс

1. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках L, M, N. Доказать, что треугольник LMN всегда остроугольный.

2. Доказать тождество: $(ax + by + cz)^2 + (bx + cy + az)^2 + (cx + ay + bz)^2 = (cx + by + az)^2 + (bx + ay + cz)^2 + (ax + cy + bz)^2$.

3. Если все грани параллелепипеда — равные между собой параллелограммы, то они являются ромбами.

4. См. задачу № 2 для VIII класса; вопрос: когда должен выйти из N пешеход C, чтобы A и B прибыли в N одновременно?

VIII класс

1. Докажите, что если ортоцентр делит все высоты треугольника в одном и том же отношении, то треугольник

равносторонний. (Ортоцентром называется точка пересечения высот.)

2. Два человека A и B должны попасть из пункта M в пункт N, расположенный в 15 *км* от M. Пешком они могут передвигаться со скоростью 6 *км/час.* Кроме того, в их распоряжении имеется велосипед, на котором можно ехать со скоростью 15 *км/час.* A и B отправляются в путь одновременно, причем A идет пешком, а B едет на велосипеде до встречи с пешеходом C, идущим из N в M. Дальше B передает C велосипед и продолжает путь пешком, а C едет на велосипеде до встречи с A, передает ему велосипед, на котором тот и приезжает в N. C идет пешком с той же скоростью, что A и B. Время, затраченное A и B на дорогу, считается от момента их отправления из M до момента прибытия последнего из них в N. Когда должен выйти из N пешеход C, чтобы это время было наименьшим?

IX класс

1. Дана геометрическая прогрессия, знаменатель которой — целое число (не равное 0 и —1). Доказать, что сумма двух или большего числа произвольно выбранных ее членов не может равняться никакому члену этой прогрессии.

2. Доказать, что если $|x| < 1$, $|y| < 1$, то $\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| < 1$.

3. Треугольник ABC разбит прямой BD на два треугольника. Доказать, что сумма радиусов окружностей, вписанных в $\triangle ABD$ и $\triangle DBC$, больше радиуса окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

4. Дана последовательность целых чисел, построенная следующим образом: a_1 — произвольное трехзначное число; a_2 — сумма квадратов его цифр; a_3 — сумма квадратов цифр числа a_2 и т. д.

Доказать, что в последовательности a_1, a_2, a_3, ... обязательно встретится либо 1, либо 4.

X класс

1. Найти соотношение между $\arcsin\cos\arcsin x$ и $\arccos\sin\arccos x$.

2. Доказать, что при целом $n \geqslant 2$ и $|x| < 1$ справедливо неравенство $2^n > (1-x)^n + (1+x)^n$.

3. В трехгранный угол с вершиной S вписана сфера с центром в точке O. Доказать, что плоскость, проходящая через три точки касания, перпендикулярна прямой OS.

4. Если при любом положительном p оба корня уравнения $ax^2 + bx + c + p = 0$ действительны и положительны, то коэффициент a равен нулю. Доказать.

2-й тур

VII класс

1. Решить систему пятнадцати уравнений с пятнадцатью неизвестными:

$$\begin{cases} 1 - x_1x_2 = 0, \\ 1 - x_2x_3 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 - x_{14}\,x_{15} = 0, \\ 1 - x_{15}x_1 = 0. \end{cases}$$

(Ср. задачу № 1 для IX класса.)

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено соотношение: $AB + CD = BC + AD$. Доказать, что окружность, вписанная в $\triangle ABC$, касается окружности, вписанной в $\triangle ACD$.

3. Доказать, что если квадрат числа начинается с 0,9 ... 99 (100 девяток), то и само число начинается с 0,9 ... 9 (не менее, чем 100 девяток).

4. Дан отрезок AB. Найти множество вершин C остроугольных треугольников ABC.

VIII класс

1. Вычислить с шестьюдесятью десятичными знаками

$$\sqrt{\underbrace{0{,}99\ldots9}_{60\ \text{девяток}}}.$$

(Ср. задачу № 3 для VII класса).

2. Из точки C проведены касательные CA и CB к окружности O.

Из произвольной точки N окружности опущены перпендикуляры ND, NE, NF (соответственно) на прямые AB, CA и CB. Доказать, что ND есть среднее пропорциональное между NE и NF.

3. Имеются семь жетонов с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Доказать, что ни одно семизначное число, составленное с помощью этих жетонов, не делится на другое.

4. 99 прямых разбивают плоскость на n частей. Найти все возможные значения n, меньшие 199.

IX класс

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1 - x_1x_2 = 0, \\ 1 - x_2x_3 = 0, \\ \dots\dots \\ 1 - x_{n-1}x_n = 0, \\ 1 - x_nx_1 = 0. \end{cases}$$

и исследовать решение.

2. Поместить в полый куб с ребром a три цилиндра диаметра $\frac{a}{2}$ и высоты a так, чтобы они не могли менять своего положения внутри куба.

3. См. задачу № 3 для VIII класса.

4. В равнобедренном треугольнике ABC угол ABC равен $20°$ и $BC = AB$. На сторонах AB и BC взяты соответственно точки P и Q, такие, что $\angle PAC = 50°$, $\angle QCA = 60°$. Доказать, что угол PQC равен $30°$.

5. 200 учеников выстроены прямоугольником по 10 человек в каждом поперечном ряду и по 20 человек в каждом продольном ряду. В каждом продольном ряду выбран самый высокий ученик (если таких несколько, то выбирается любой), а затем из отобранных 10 человек выбран самый низкий. С другой стороны, в каждом поперечном ряду выбран самый низкий ученик, а затем среди отобранных 20 человек выбран самый высокий. Какой из этих двух отобранных учеников окажется выше?

X класс

1. Доказать, что сумма

$$\cos 32x + a_{31} \cos 31x + \dots + a_2 \cos 2x + a_1 \cos x$$

принимает как положительные, так и отрицательные значения. (Здесь числа $a_1, a_2, \dots, a_{31}$ произвольны, но фиксированы, а величина x меняется.)

2. См. задачу № 2 для IX класса.

3. Доказать, что ни при каком целом a ни один многочлен вида $3x^{2n} + ax^n + 2$ не делится на многочлен $2x^{2m} + ax^m + 3$.

4. См. задачу № 4 для IX класса.

5. См. задачу № 5 для IX класса.

XVI олимпиада (1953 год)

1-й тур

VII класс

1. Доказать, что в трапеции сумма углов при большем основании меньше, чем при меньшем.

2. Найти наименьшее число, записываемое одними единицами, которое делилось бы на 33...33 (100 троек).

3. Разделить отрезок пополам с помощью угольника (с помощью угольника можно проводить прямые и восстанавливать перпендикуляры, опускать перпендикуляры нельзя).

4. При любом целом положительном n сумма $n^2 + 8n + 15$ не делится на $n + 4$. Доказать.

VIII класс

1. Три окружности попарно касаются друг друга. Через три точки касания проводим окружность. Доказать, что эта окружность перпендикулярна каждой из исходных. (Углом между двумя окружностями называется угол между касательными к ним в точке пересечения.)

2. Доказать неравенство:

$$\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}} > \frac{1}{4}$$

(в числителе n радикалов, в знаменателе на один меньше).

3. См. задачу № 2 для VII класса.

4. См. задачу № 3 для VII класса.

IX класс

1. Найти множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению $\sin(x+y)=0$.

2. AB и A_1B_1 — два скрещивающихся отрезка, O и O_1 — их середины. Доказать, что отрезок OO_1 меньше полусуммы отрезков AA_1 и BB_1.

3. Доказать, что многочлен $x^{200}\cdot y^{200}+1$ нельзя представить в виде произведения многочленов от одного только x и от одного только y, т. е. в виде $f(x)\cdot g(y)$.

4. A — вершина правильного звездчатого пятиугольника, угол при которой меньше развернутого. Ломаная $AA_1BB_1CC_1DD_1EE_1$ является его внешним контуром. Прямые AB и DE продолжены до пересечения в точке F. Доказать, что многоугольник $ABB_1CC_1DED_1$ равновелик четырехугольнику AD_1EF.

5. См. задачу № 2 для VIII класса.

X класс

1. См. задачу № 1 для IX класса.

2. Даны прямой круговой конус и точка A. Найти множество вершин конусов, равных данному, с осями, параллельными оси данного конуса, и содержащих внутри данную точку.

3. См. задачу № 3 для IX класса.

4. См. задачу № 4 для IX класса.

5. См. задачу № 5 для VIII класса.

2-й тур

VII класс

1. Доказать, что наибольший общий делитель суммы двух чисел и их наименьшего общего кратного равен наибольшему общему делителю самих чисел.

2. Около окружности описан четырехугольник. Его диагонали пересекаются в центре этой окружности. Доказать, что этот четырехугольник — ромб.

3. В плоскости расположено 11 зубчатых колес таким образом, что первое колесо сцеплено своими зубцами со вторым, второе — с третьим и т. д. Наконец, последнее, одиннадцатое, колесо сцеплено с первым. Могут ли вращаться колеса такой системы?

4. 1000 точек являются вершинами выпуклого тысячеугольника, внутри которого расположено еще 500 точек так, что никакие три из этих 1500 точек не лежат на одной прямой. Данный тысячеугольник разрезан на треугольники таким образом, что все указанные 1500 точек являются вершинами треугольников, и эти треугольники не имеют никаких других вершин. Сколько получится треугольников при таком разрезании?

5. Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 5. \end{cases}$$

VIII класс

1. a, b, c и d — длины последовательных сторон четырехугольника, S — его площадь. Доказать, что

$$S \leqslant \frac{1}{4}(a+c)\,(b+d).$$

2. 1953 цифры выписаны по кругу. Известно, что если читать эти цифры по часовой стрелке, начиная с некоторого определенного места, то полученное 1953-значное число делится на 27. Доказать, что если начать читать по часовой стрелке с любого другого места, то полученное число также будет делиться на 27.

3. На окружности даны точки A_1, A_2, A_3, ..., A_{16}. Построим все возможные выпуклые многоугольники, вершины которых находятся среди точек A_1, A_2, ..., A_{16}. Разобьем эти многоугольники на 2 группы. В первую группу будут входить все многоугольники, у которых A_1 является вершиной. Во вторую группу входят все многоугольники, у которых A_1 вершиной не является. В какой группе больше многоугольников?

4. В плоскости расположено n зубчатых колес таким образом, что первое колесо сцеплено своими зубцами со вторым, второе — с третьим и т. д. Наконец, последнее колесо сцеплено с первым. Могут ли вращаться колеса такой системы? (Ср. задачу № 3 для VII класса.)

5. Решить систему:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5+\ldots+2x_{100}=1, \\ x_1+3x_2+4x_3+4x_4+4x_5+\ldots+4x_{100}=2, \\ x_1+3x_2+5x_3+6x_4+6x_5+\ldots+6x_{100}=3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5+\ldots+199x_{100}=100. \end{cases}$$

IX класс

1. См. задачу № 2 для VIII класса.

2. В плоскости даны $\triangle A_1A_2A_3$ и прямая l вне его, образующая с продолжениями сторон треугольника A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 углы соответственно α_3, α_1, α_2. Через точки A_1, A_2, A_3 проводятся прямые, образующие с l соответственно углы $2d-\alpha_1$, $2d-\alpha_2$, $2d-\alpha_3$. Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке. (Все углы отсчитываются от прямой l в одном направлении.)

3. Даны уравнения:

$$ax^2+bx+c=0, \tag{1}$$

$$-ax^2+bx+c=0. \tag{2}$$

Доказать, что если x_1 и x_2 (соответственно) какие-либо корни уравнений (1) и (2), то найдется такой корень x_3 уравнения $\frac{a}{2}x^2+bx+c=0$, что либо $x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_2$, либо $x_1 \geqslant x_3 \geqslant x_2$.

4. Дан лист клетчатой бумаги размером 101×200 клеток. Начиная от какой-либо угловой клетки идем по диагонали и каждый раз, дойдя до границы, меняем направление движения по правилу отражения света. Попадем ли мы когда-нибудь в какую-либо угловую клетку?

5. Разрезать куб на три равные пирамиды.

X класс

1. Найти корни уравнения

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{n!}=0.$$

2. См. задачу № 2 для IX класса.

3. Пусть $x_0=10^9$, $x_n=\dfrac{x_{n-1}^2+2}{2x_{n-1}}$.

Доказать, что $0<x_{36}-\sqrt{2}<10^{-9}$.

4. См. задачу № 5 для IX класса.

5. На бесконечной шахматной доске стоит конь. Найти все клетки, куда он может попасть ровно за $2n$ ходов (см. примечание к задаче XXII, II, 8, 5).

XVII олимпиада (1954 год)

1-й тур

VII класс

1. Правильный звездчатый шестиугольник разрезать на 4 части так, чтобы из них можно было составить выпуклый многоугольник.

2. Даны два выпуклых многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$. Известно, что $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3, \dots$ $\dots, A_nA_1 = B_nB_1$ и $n - 3$ угла одного многоугольника равны соответственным углам другого. Будут ли эти многоугольники равны?

3. Определить четырехзначное число, если деление этого числа на однозначное производится по такой схеме:

```
****  | *
 *    |----
----    ***
 **
  *
----
  **
  **
  --
```

а деление этого же числа на другое однозначное производится по такой схеме:

```
****  | *
**    |----
--      ***
  **
  **
  --
```

4. Существуют ли целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению $m^2 + 1954 = n^2$?

5. Определить наибольшее значение отношения трехзначного числа к сумме его цифр.

VIII класс

1. Из квадрата размером 3×3 вырезать одну фигуру, которая представляет собой развертку полной поверхности куба, длина ребра которого равна 1.

2. Из произвольной внутренней точки O выпуклого n-угольника опущены перпендикуляры на стороны (или на их продолжения). На каждом перпендикуляре от точки O в направлении к соответствующей стороне построен вектор, длина которого равна половине длины этой стороны. Определить сумму построенных векторов.

3. См. задачу № 3 для VII класса.

4. Найти все решения системы уравнений

$$x\left(1-\frac{1}{2n}\right)+y\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)+z\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)=0,$$

где $n=1,\ 2,\ 3$.

5. См. задачу № 4 для VII класса.

IX класс

1. Доказать, что если $x_0^4+a_1x_0^3+a_2x_0^2+a_3x_0+a_4=0$ и $4x_0^3+3a_1x_0^2+2a_2x_0+a_3=0$, то многочлен $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ делится на $(x-x_0)^2$.

2. Дано число 1234567891011121314 15... 9899100. Вычеркнуть 100 цифр так, чтобы оставшееся число было наибольшим.

3. Дано 100 чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{100}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} a_1-3a_2+2a_3\geqslant 0,\\ a_2-3a_3+2a_4\geqslant 0,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ a_{99}-3a_{100}+2a_1\geqslant 0,\\ a_{100}-3a_1+2a_2\geqslant 0.\end{cases}$$

Доказать, что все эти числа равны между собой.

4. Дан треугольник ABC. Пусть $A_1,\ B_1,\ C_1$ — точки пересечения прямых $AS,\ BS,\ CS$ соответственно со сторонами $BC,\ AC,\ AB$ треугольника ABC. Доказать, что по крайней мере в одном из полученных четырехугольников $AB_1SC_1,\ C_1SA_1B,\ A_1SB_1C$ оба угла при C_1 и B_1, или C_1 и A_1, или A_1 и B_1 не острые (S — любая точка внутри $\triangle ABC$).

5. Существуют ли в пространстве такие 4 точки A, B, C, D, что

$$AB=CD=8\ \text{см},$$
$$AC=BD=10\ \text{см},$$
$$AD=BC=13\ \text{см}?$$

X класс

1. Найти все действительные решения уравнения

$$x^2 + 2x\sin(xy) + 1 = 0.$$

2. См. задачу № 2 для IX класса.

3. Дано 100 чисел a_1, a_2, ..., a_{100}, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} a_1 - 4a_2 + 3a_3 \geqslant 0, \\ a_2 - 4a_3 + 3a_4 \geqslant 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{99} - 4a_{100} + 3a_1 \geqslant 0, \\ a_{100} - 4a_1 + 3a_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Известно, что $a_1 = 1$. Найти a_2, a_3, ..., a_{100} (ср. задачу № 3 для IX класса).

4. См. задачу № 4 для IX класса.

5. См. задачу № 5 для IX класса.

2-й тур

VII класс

1. Дан лист клетчатой бумаги, каждый узел сетки которого обозначен некоторой буквой. Известно, что на любом отрезке, соединяющем два узла, обозначенных одной буквой и лежащих на одной линии, найдется по крайней мере один узел, обозначенный другой буквой. Какое наименьшее число различных букв требуется для этого?

2. Решить систему:

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 11x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 0, \\ 15x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 12x_4 - 3x_5 + x_6 + x_7 = 0, \\ 6x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + 17x_5 + x_6 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 - 16x_6 + 2x_7 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 19x_7 = 0. \end{cases}$$

3. Сколько осей симметрии может иметь семиугольник?

4. Дано число $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$

(произведе̂ние простых чисел). Пусть 1, 2, 3, 5, ..., N — все его делители, выписанные в порядке возрастания. Под рядом делителей выпишем ряд из 1 и —1 по следующему правилу: под 1 пишем +1, под числом, разлагающимся на четное число сомножителей, пишем +1, под остальными числами пишем —1.

Доказать, что сумма чисел построенного ряда равна нулю.

VIII класс

1. Из клетчатой бумаги вырезан квадрат 17×17. В каждой клетке квадрата написано одно из чисел, 1, 2, 3, ..., 70. Доказать, что существуют четыре различные клетки, центры которых A, B, C, D являются вершинами параллелограмма и сумма чисел, стоящих в клетках с центрами A и C равна сумме чисел, стоящих в клетках с центрами B и D ($AB \parallel CD$).

2. Даны четыре прямых m_1, m_2, m_3 и m_4, пересекающихся в одной точке O. Через произвольную точку A_1 прямой m_1 проводим прямую, параллельную m_4 до пересечения с прямой m_2 в точке A_2. Через A_2 проводим прямую, параллельную m_1, до пересечения с m_3 в точке A_3. Через A_3 проводим прямую, параллельную m_2 до пересечения с прямой m_4 в точке A_4. Через A_4 проводим прямую, параллельную m_3 до пересечения с m_1 в точке B.

Доказать, что $OB \leqslant \frac{OA_1}{2}$ (прямые занумерованы по часовой стрелке относительно точки O).

3. См. задачу № 2 для VII класса.

4. См. задачу № 3 для VII класса.

5. См. условие задачи № 4 для VII класса при $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$.

IX класс

1. На двух лучах l_1 и l_2, проходящих через точку O, отложены отрезки OA_1 и OB_1 на луче l_1 и OA_2 и OB_2 на луче l_2; известно, что

$$\frac{OA_1}{OA_2} \neq \frac{OB_1}{OB_2}.$$

Определить множество всех точек пересечения прямых AA_1 и BB_1 при вращении луча l_2 вокруг точки O (луч l_1 — неподвижен).

2. См. условие задачи № 2 для VIII класса. Доказать, что $OB \leqslant \frac{OA_1}{4}$.

3. Сто положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{100}^2 > 10000, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} < 300. \end{cases}$$

Доказать, что среди них найдутся три числа, сумма которых больше 100.

4. Если дана последовательность 15 чисел:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{15}, \tag{1}$$

то можно построить новую последовательность чисел:

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{15}, \tag{2}$$

где b_i равно количеству чисел последовательности (1), меньших a_i, $i = 1, 2, \ldots, 15$. Существует ли последовательность (1), для которой последовательность (2) выглядит так:

$$1, 0, 3, 6, 9, 4, 7, 2, 5, 8, 8, 5, 10, 13, 13?$$

5. Из точки A выходит 5 отрезков: AB_1, AB_2, AB_3, AB_4, AB_5. Из каждой точки B_i могут выходить еще 5 отрезков или ни одного отрезка и т. д., причем концы никаких двух отрезков построенной системы не совпадают. Может ли число свободных концов построенных отрезков равняться 1001? (Под свободным концом мы понимаем точку, из которой не выходит ни одного отрезка.)

X класс

1. Сколько плоскостей симметрии может иметь треугольная пирамида?

2. См. условие задачи № 2 для VIII класса. Доказать, что

$$OB \leqslant \frac{OA_1}{4}.$$

3. См. задачу № 3 для IX класса.

4. Известно, что модули всех корней уравнений:

$$x^2 + Ax + B = 0,$$
$$x^2 + Cx + D = 0,$$

меньше 1. Доказать, что модули корней уравнения

$$x^2+\frac{A+C}{2}x+\frac{B+D}{2}=0$$

также меньше 1.

5. Рассматриваются всевозможные десятизначные числа, записываемые при помощи цифр 1 и 2. Разбить их на два класса так, чтобы при сложении любых двух чисел одного класса получалось число, в написании которого содержится не менее двух троек.

XVIII олимпиада (1955 год)

I-й тур

VII класс

1. Числа 1, 2, ..., 49 расположены в квадратной таблице:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
.	.	.	.	.	.	.
43	44	45	46	47	48	49

Произвольное число из таблицы выписывается, после чего из таблицы вычеркиваются строка и столбец, содержащие это число. То же самое проделывается с оставшейся таблицей и т. д., всего 7 раз. Найти сумму выписанных чисел (ср. задачу № 1 для IX класса).

2. Дан прямоугольный треугольник ABC. Из вершины B прямого угла проведена медиана BD. Пусть K — точка касания стороны AD треугольника ABD с окружностью, вписанной в этот треугольник. Найти углы $\triangle ABC$, если K делит AD пополам.

3. Дан равносторонний $\triangle ABC$. На сторонах AB и BC взяты точки D и E так, что $AE = CD$. Найти множество точек пересечения отрезков AE и CD.

4. Существует ли такое целое n, что n^2+n+1 делится на 1955?

5. Найти все прямоугольники, которые можно разрезать на 13 равных квадратов.

VIII класс

1. Дано: $2^n = 10a + b$. Доказать, что если $n > 3$, то ab делится на 6. Здесь n, a, b — целые положительные числа, $b < 10$.

2. Дан четырехугольник $ABCD$. На стороне AB взята точка K, на стороне BC — точка L, на стороне CD — точка M и на стороне AD — точка N, так, что $KB = BL = a$, $MD = DN = b$. Пусть $KL \nparallel MN$. Найти множество всех точек пересечения прямых KL и MN при изменении a и b.

3. Квадратная таблица из 49 клеток заполнена числами от 1 до 7 так, что в каждом столбце и в каждой строке встречаются все эти числа. Если таблица симметрична относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, то на этой диагонали встречаются все эти числа. Доказать. (Ср. задачу № 1 для X класса.)

4. Какие выпуклые фигуры могут содержать прямую?

5. На окружности даны четыре точки A, B, C, D. Через каждую пару соседних точек проведена окружность. Вторые точки пересечения соседних окружностей обозначим через A_1, B_1, C_1, D_1 (некоторые из них могут совпадать с прежними). Доказать, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности.

IX класс

1. Числа $1, 2, \ldots, k^2$ расположены в квадратной таблице

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & \ldots, & k \\ k+1, & k+2, & \ldots, & 2k \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ (k-1)k+1, & (k-1)k+2, & \ldots, & k^2. \end{array}$$

Произвольное число выписывается, после чего из таблицы вычеркиватся строка и столбец, содержащие это число. То же самое проделывается с оставшейся таблицей из $(k-1)^2$ чисел и т. д. k раз. Найти сумму выписанных чисел.

2. Найти множество середин всех отрезков с концами на двух различных непересекающихся окружностях, лежащих одна вне другой.

3. Найти все действительные решения системы:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$$

4. p простых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_p$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию и $a_1 > p$. Доказать,

что если p — простое число, то разность прогрессии делится на p.

5. Дан $\triangle ABC$ и точка D внутри него, причем $AC - DA > 1$ и $BC - BD > 1$. Берется произвольная точка E внутри отрезка AB. Доказать, что $EC - ED > 1$.

X класс

1. Квадратная таблица в n^2 клеток заполнена числами от 1 до n^2 так, что в каждой строке и в каждом столбце встречаются все эти числа. Если n нечетно и таблица симметрична относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, то на этой диагонали встретятся все эти числа 1, 2, 3, ..., n. Доказать.

2. См. задачу № 3 для IX класса.

3. См. задачу № 5 для IX класса.

4. Дан трехгранный угол с вершиной O. Можно ли найти такое плоское сечение ABC, чтобы углы OAB, OBA, OCB, OAC, OCA, OBC были острыми?

2-й тур

VII класс

1. Решить в целых числах уравнение
$$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0.$$

2. Трехчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является точной четвертой степенью. Доказать, что тогда $a = b = 0$.

3. Дан $\triangle ABC$. Центры вневписанных окружностей O_1, O_2 и O_3 соединены прямыми. Доказать, что $\triangle O_1O_2O_3$ — остроугольный.

4. В турнире собираются принять участие 25 шахматистов. Все они играют в разную силу, и при встрече всегда побеждает сильнейший. Какое наименьшее число партий требуется, чтобы определить двух сильнейших игроков?

5. Разрезать прямоугольник на 18 прямоугольников так, чтобы никакие два соседних не образовывали прямоугольника.

VIII класс

1. Трехчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является точным квадратом. Доказать, что тогда $ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$.

2. Две окружности касаются друг друга внешним образом и третьей изнутри. Проводятся внешняя и внутренняя общие касательные к первым двум окружностям. Доказать, что внутренняя касательная делит пополам дугу, отсекаемую внешней касательной на третьей окружности.

3. Точка O лежит внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2 \dots A_n$ и соединена отрезками с его вершинами. Стороны n-угольника нумеруются числами от 1 до n, причем разные стороны нумеруются разными числами. То же самое делается с отрезками OA_1, OA_2, ..., OA_n.

а) Для $n = 9$ найти нумерацию, при которой сумма номеров сторон для всех треугольников A_1OA_2, A_2OA_3, ..., A_nOA_1 одинакова.

б) Доказать, что при $n = 10$ такой нумерации осуществить нельзя.

4. Неравенство

$$Aa(Bb + Cc) + Bb(Aa + Cc) + Cc(Aa + Bb) >$$
$$> \frac{1}{2}(ABc^2 + BCa^2 + CAb^2)$$

(где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ — данные числа) выполняется при всех $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$. Можно ли из отрезков a, b, c составить треугольник?

5. Найти все такие числа a, что все числа $[a]$, $[2a]$, ..., $[Na]$ различны между собой и все числа $\left[\frac{1}{a}\right]$, $\left[\frac{2}{a}\right]$, ..., $\left[\frac{N}{a}\right]$ также различны между собой.

IX класс

1. Дан треугольник ABC. На сторонах AB, BC, CA взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1 так, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{n}.$$

На сторонах A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взяты соответственно точки C_2, A_2, B_2 так, что

$$\frac{A_1C_2}{C_2B_1} = \frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{C_1B_2}{B_2A_1} = n.$$

Доказать, что $A_2C_2 \parallel AC$, $C_2B_2 \parallel CB$, $B_2A_2 \parallel BA$.

2. Расположить на прямой систему отрезков длины 1, не имеющих общих точек и общих концов так, чтобы любая бесконечная арифметическая прогрессия (с любой разностью и любым начальным членом) имела общую точку с некоторым отрезком системы.

3. Дано уравнение

$$x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \dots - a_{n-1}x - a_n = 0,$$

где $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, ..., $a_n \geqslant 0$. Доказать, что это уравнение не может иметь двух положительных корней.

4. См. задачу № 2 для VIII класса

5. Пять человек играют несколько партий в домино (двое на двое) так, что каждый играющий имеет каждого один раз партнером и два раза противником. Найти количество сыгранных партий и все способы распределения играющих.

X класс

1. Доказать, что, если $\frac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

с целыми коэффициентами, то $p - kq$ есть делитель числа $f(k)$ при любом целом k.

2. См. задачу 2 для IX класса.

3. На плоскости P стоит прямой круговой конус. Радиус основания его равен r, высота — h. На расстоянии H от плоскости и 1 от высоты конуса находится источник света. Какую часть окружности радиуса R, лежащей в плоскости P и концентрической с окружностью, лежащей в основании конуса, осветит этот источник?

4. Имеется 1955 точек. Какое максимальное число троек точек можно из них выбрать так, чтобы каждые две тройки имели одну общую точку?

5. Дан треугольник $A_0B_0C_0$. На его сторонах A_0B_0, B_0C_0, C_0A_0 взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1. На сторонах A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взяты соответственно точки C_2, A_2, B_2, и вообще, на сторонах A_nB_n, B_nC_n, C_nA_n треугольника $A_nB_nC_n$ берутся соответственно точки C_{n+1}, A_{n+1}, B_{n+1}. Известно, что

$$\frac{A_0B_1}{B_1C_0} = \frac{B_0C_1}{C_1A_0} = \frac{C_0A_1}{A_1B_0} = k; \qquad \frac{A_1B_2}{B_2C_1} = \frac{B_1C_2}{C_2A_1} = \frac{C_1A_2}{A_2B_1} = \frac{1}{k^2}$$

и вообще,

$$\frac{A_nB_{n+1}}{B_{n+1}C_n} = \frac{B_nC_{n+1}}{C_{n+1}A_n} = \frac{C_nA_{n+1}}{A_{n+1}B_n} = \begin{cases} k^{2^n} & \text{при четном } n, \\ \dfrac{1}{k^{2^n}} & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Доказать, что треугольник ABC, образованный прямыми A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1, содержится в треугольке $A_nB_nC_n$ при любом n.

XIX олимпиада (1956 год)

1-й тур

VII класс

1. Докажите, что не существует на плоскости таких четырех точек A, B, C, D, что все треугольники ABC, BCD, CDA, DAB — остроугольные.

2. Найти все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется при умножении числа на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3. Имеется замкнутая самопересекающаяся ломаная. Известно, что она пересекает каждое свое звено ровно один раз. Доказать, что число звеньев четно.

4. Найти все числа, на которые может быть сократима дробь $\frac{5l+6}{8l+7}$ при целом значении l.

5. Какое наименьшее число точек можно выбрать на окружности, имеющей длину 1956, так, чтобы для каждой из этих точек нашлась ровно одна выбранная точка на расстоянии 1 и ровно одна на расстоянии 2 (расстояния измеряются по окружности)?

VIII класс

1. На сторонах AB и CB треугольника ABC откладываются равные отрезки AD и CE произвольной длины. Найти множество середин отрезков DE.

2. В десятичной записи положительного числа a отброшены все десятичные знаки, начиная с третьего знака после запятой (т. е. взято приближение числа a с недостатком с точностью до 0,01). Полученное число делится на a и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Какие числа при этом могут получиться? (Указать все значения.)

3. На окружности длины 15 выбрано n точек, так что для каждой имеется ровно одна выбранная точка на расстоянии 1 и ровно одна на расстоянии 2 (расстояния измеряются по окружности). Доказать, что n делится на 10. (Ср. задачу № 5 для VII класса.)

4. Пусть a, b, c, d, l — целые числа. Докажите, что если дробь $\frac{al+b}{cl+d}$ сократима на число k, то $ad-bc$ делится на k.

5. На клетчатой бумаге написана таблица, причем в каждой клетке стоит число, равное среднему арифметическому четырех чисел, стоящих в соседних клетках. Из таблицы вырезан кусок. Доказать, что если некоторое число больше всех остальных на этом куске, то оно стоит с края.

IX класс

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ взят четырехугольник $KLMN$, образованный центрами тяжести треугольников ABC, BCD, DBA, CDA. Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, пересекаются в той же точке, что и прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $KLMN$.

2. В десятичной записи положительного числа a отброшены все десятичные знаки, начиная с четвертого знака после запятой (т. е. взято приближение числа a с недостатком с точностью до 0,001). Полученное число делится на a и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Какие числа при этом могут получиться? Указать все значения. (Ср. задачу № 2 для VIII класса.)

3. См. задачу № 5 для VIII класса.

4. Даны положительные числа h, s_1, s_2 и расположенный в пространстве треугольник ABC. Сколькими способами можно выбрать точку D так, чтобы в тетраэдре $ABCD$ высота, опущенная из вершины D, была равна h, а площади граней ACD и BCD равнялись соответственно s_1 и s_2. (Исследовать все возможные случаи.)

5. См. задачу № 4 для VIII класса.

X класс

1. В треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие вершины — на боковых сторонах треугольника. Доказать, что сторона квадрата меньше $2r$, но больше $r\sqrt{2}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

2. В десятичной записи положительного числа a отброшены все десятичные знаки, начиная с пятого знака после запятой (т. е. взято приближение числа a с недостатком с точностью до 0,0001). Полученное число делится на a и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Какие числа при этом могут получиться? Указать все значения. (Ср. задачу № 2 для VII класса и задачу № 2 для VIII класса.)

3. См. задачу № 4 для VIII класса.

4. Дана замкнутая пространственная ломаная $A_1A_2\ldots A_n$. Некоторая плоскость пересекает все ее звенья: A_1A_2 в точке B_1, A_2A_3 в точке B_2, ..., A_nA_1 в точке B_n. Доказать, что

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\ldots\cdot\frac{A_nB_n}{B_nA_1}=1.$$

5. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x_1-x_2=a, \\ x_3-x_4=b, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно положительное решение

$$x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0,\ x_4>0$$

тогда и только тогда, когда $|a|+|b|<1$.

2-й тур

VIII класс

1. Груз весом 13,5 *т* упакован в некоторое число невесомых ящиков. Вес каждого ящика с грузом не превосходит 350 *кг*. Доказать, что этот груз можно перевезти на 11 полуторатонках.

2. 64 неотрицательных числа, сумма которых равна 1956, расположены в форме квадратной таблицы по 8 чисел в каждой строке и в каждом столбце. Сумма чисел, стоящих на двух диагоналях, равна 112. Числа, расположенные симметрично относительно любой диагонали, равны. Доказать, что сумма чисел в любой строке меньше 518.

3. Все точки данного отрезка AB проектируются на всевозможные прямые, проходящие через данную точку O. Найти множество всех этих проекций.

4. 100 чисел, среди которых есть положительные и отрицательные, выписаны в ряд. Подчеркнуто, во-первых, каждое положительное число, во-вторых, каждое число, сумма которого со следующим положительна, и, в-третьих, каждое число, сумма которого с двумя следующими положительна. Может ли сумма всех подчеркнутых чисел оказаться отрицательной? Равной нулю?

5. В прямоугольнике площадью 5 кв. ед. расположены 9 прямоугольников, площадь каждого из которых равна единице. Доказать, что площадь общей части каких-нибудь двух прямоугольников больше или равна $^1/_9$.

IX класс

1. См. задачу № 1 для VIII класса.

2. В кубе, ребро которого равно 13, выбрано 1956 точек. Можно ли в этот куб поместить кубик с ребром 1 так, чтобы внутри него не было ни одной выбранной точки?

3. Взяли три числа: x, y, z. Абсолютные величины их попарных разностей обозначили через x_1, y_1, z_1. Тем же способом по числам x_1, y_1, z_1 построили числа x_2, y_2, z_2 и т. д. Оказалось, что при некотором n справедливы равенства: $x_n = x$, $y_n = y$, $z_n = z$. Зная, что $x = 1$, найти y и z.

4. Четырехугольник описан около окружности. Доказать, что прямые, соединяющие соседние точки касания, пересекаются на продолжении диагонали или параллельны ей.

5. На клетчатой бумаге выбраны три точки A, B, C, находящиеся в вершинах клеток. Доказать, что если треугольник ABC — остроугольный, то внутри или на сторонах его есть, по крайней мере, еще одна вершина клетки.

X класс

1. Подряд выписаны n чисел, среди которых есть положительные и отрицательные. Подчеркивается каждое положительное число, а также каждое число, сумма которого с несколькими непосредственно следующими за ним числами положительна. Доказать, что сумма всех подчеркнутых чисел положительна. (Ср. задачу № 4 для VIII класса.)

2. См. задачу № 5 для VIII класса.

3. См. задачу № 3 для IX класса.

4. Доказать, что если в треугольной пирамиде любые два трехгранные угла равны или симметричны, то все грани этой пирамиды равны.

5. На продолжениях сторон A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ правильного n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$ построить точки B_1, B_2, ..., B_n так, чтобы B_1B_2 было перпендикулярно A_1A_2, B_2B_3 перпендикулярно A_2A_3, ..., B_nB_1 перпендикулярно A_nA_1.

XX олимпиада (1957 год)

1-й тур

VII класс

1. Найти все равнобочные трапеции, которые разбиваются диагональю на 2 равнобедренных треугольника.

2. Известно, что $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d — данные целые числа) при любом целом x делится на 5. Доказать, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

3. Улитка ползет по столу с постоянной скоростью. Через каждые 15 минут она поворачивает на 90°, а в промежутках между поворотами ползет по прямой. Доказать, что она может вернуться в исходный пункт только через целое число часов.

4. Дана прямоугольная таблица, составленная из положительных чисел, причем произведение суммы чисел любого столбца на сумму чисел любой строки равно числу, стоящему на их пересечении. Доказать, что сумма всех чисел в таблице равна единице. (Ср. задачу № 4 для VIII класса.)

5. От A до B 999 *км*. Вдоль дороги стоят километровые столбы, на которых написаны расстояния до A и до B

$$\overline{\underline{0 \mid 999}}, \quad \overline{\underline{1 \mid 998}}, \quad \overline{\underline{2 \mid 997}}, \quad \ldots, \quad \overline{\underline{999 \mid 0}}.$$

Сколько среди них таких, на которых имеются только две различные цифры?

VIII класс

1. Найти множество четвертых вершин всех таких прямоугольников, три вершины которых лежат на двух данных концентрических окружностях (две вершины лежат на одной из окружностей, а третья — на другой), а стороны параллельны двум данным прямым.

2. См. задачу № 3 для VII класса.

3. Из всех параллелограммов данной площади найти тот, у которого наибольшая диагональ минимальна.

4. В прямоугольной таблице произведение суммы чисел любого столбца на сумму чисел любой строки равно числу, стоящему на их пересечении. Доказать, что сумма всех чисел в таблице равна единице или все числа равны нулю. (Ср. задачу № 4 для VII класса.)

5. Известно, что $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ (a, b, c, d, e — данные целые числа) при всех целых x делится на 7. Доказать, что все целые числа a, b, c, d, e делятся на 7. (Ср. задачу № 2 для VII класса.)

IX класс

1. См. задачу № 4 для VIII класса.

2. Решить уравнение $x^3 - [x] = 3$, где $[x]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее x.

3. В четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина диагонали AC, N — середина диагонали BD. Прямая, проходящая через точки M и N, пересекает стороны AB и CD в точках M' и N'. Доказать, что если $MM' = NN'$, то $AD \parallel BC$.

4. Школьник едет на олимпиаду на метро, платит рубль и получает сдачу. Доказать, что если он обратно поедет на трамвае, то он сможет уплатить за проезд без сдачи.

Примечание: до денежной реформы 1961 года проезд в метро стоил 50 коп., на трамвае — 30 коп. и в обращении находились монеты достоинством в 1, 2, 3, 5, 10, 15 и 20 коп.

5. Плоский многоугольник $AB...CD...E$ составлен из n твердых стержней, соединенных шарнирно. Доказать, что если $n > 4$, то его можно деформировать в треугольник.

X класс

1. При каких целых n число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323?

2. В пространстве построена замкнутая ломаная так, что все звенья имеют одинаковую длину и каждые три последовательные звена попарно перпендикулярны. Доказать, что число звеньев делится на 6. (Ср. задачу № 3 для VII класса.)

3. См. задачу № 3 для IX класса.

4. Школьник едет на кружок на трамвае, платит рубль и получает сдачу. Доказать, что на обратном пути он сможет уплатить за проезд в трамвае без сдачи (см. примечание к задаче № 4 для IX класса).

5. Плоский многоугольник $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ составлен из n твердых стержней, соединенных шарнирно. Можно ли его деформировать в треугольник? (Ср. задачу № 5 для IX класса.)

2-й тур

VII класс

1. Прямые OA и OB перпендикулярны. Найти множество концов M всех ломаных OM длины l, пересекающихся с каждой прямой, параллельной OA или OB, не более, чем в одной точке.

2. Радиолампа имеет 7 контактов, расположенных по кругу и включенных в штепсель, имеющий 7 отверстий. Можно ли так занумеровать контакты лампы и отверстия штепселя, чтобы при любом включении лампы хотя бы один контакт попал на свое место (т. е. в отверстие с тем же номером)?

3. В треугольнике известны две стороны a и b. Какой должна быть третья сторона, чтобы наибольший угол треугольника имел наименьшую величину?

4. В треугольник вписана окружность. Точки касания являются вершинами второго треугольника. В него вписана окружность, точки касания которой — вершины третьего треугольника. Он имеет те же углы, что и первоначальный треугольник. Найти эти углы.

5. Дана последовательность чисел 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... , в которой каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. В этой последовательности выбрано 8 идущих подряд чисел. Доказать, что их сумма не входит в последовательность.

VIII класс

1. В треугольнике известны две стороны a и b. Какой должна быть третья сторона, чтобы наименьший угол треугольника имел наибольшую величину? (Ср. с задачей № 3 для VII класса.)

2. Числа от 1 до 10^8 выписаны подряд, так что получается последовательность цифр: 1234567891011 ... 100000000. Доказать, что число всех цифр в этой последовательности равно числу всех нулей в последовательности 1, 2, 3, ..., 10^9.

3. Внутри равностороннего треугольника ABC находится точка O. Прямая OG, соединяющая O с центром тяжести G треугольника, пересекает стороны треугольника (или их продолжения) в точках A', B', C'. Доказать, что

$$\frac{A'O}{A'G} + \frac{B'O}{B'G} + \frac{C'O}{C'G} = 3.$$

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2x_1^2}{1+x_1^2} = x_2, \\ \dfrac{2x_2^2}{1+x_2^2} = x_3, \\ \dfrac{2x_3^2}{1+x_3^2} = x_1. \end{cases}$$

5. В неравносторонний треугольник вписана окружность. Точки касания являются вершинами нового треугольника. В него вписана окружность, точки касания которой — вершины третьего треугольника, в третий вписана третья окружность и т. д. Доказать, что в образовавшейся последовательности треугольников нет подобных.

IX класс

1. Два прямоугольника положены на плоскость так, что получилось восемь точек пересечения. Эти точки соединены через одну. Доказать, что площадь полученного четырехугольника не изменится при поступательном перемещении одного из прямоугольников.

2. Найти все действительные решения системы:

$$\begin{cases} 1 - x_1^2 = x_2, \\ 1 - x_2^2 = x_3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1 - x_{98}^2 = x_{99}, \\ 1 - x_{99}^2 = x_1. \end{cases}$$

3. Штепсельный разъем имеет 20 контактов расположенных по кругу на равных угловых расстояниях и занумерованных числами от 1 до 20 в произвольном порядке. Всегда ли можно так соединить разъем, чтобы ни один контакт не был замкнут (т. е. не попал на свое место)?

4. Разбить 1957 на 12 целых положительных слагаемых a_1, a_2, ..., a_{12} так, чтобы $a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_{12}!$ было минимально.

5. Три равные окружности касаются друг друга. Из произвольной точки четвертой окружности, касающейся внешним образом всех данных окружностей, проведены касательные к ним. Доказать, что сумма длин двух касательных равна длине третьей.

X класс

1. Дан четырехугольник $ABCD$. Вписать в него прямоугольник с заданными направлениями сторон.

2. Найти все действительные решения системы:

$$\begin{cases} 1 - x_1^2 = x_2, \\ 1 - x_2^2 = x_3. \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1 - x_{n-1}^2 = x_n, \\ 1 - x_n^2 = x_1 \end{cases}$$

(Ср. задачу № 2 для IX класса.)

3. Точка G — центр шара, вписанного в правильный тетраэдр $ABCD$. Прямая OG, соединяющая G с точкой O, лежащей внутри тетраэдра, пересекает плоскости граней в точках A', B', C', D'. Доказать, что

$$\frac{A'O}{A'G} + \frac{B'O}{B'G} + \frac{C'O}{C'G} + \frac{D'O}{D'G} = 4.$$

4. Доказать, что число всех цифр в последовательности 1, 2, 3, ..., 10^k равно числу всех нулей в последовательности 1, 2, 3, ..., 10^{k+1}. (Ср. задачу № 2 для VIII класса.)

5. Дано n целых чисел: $a_1 = 1$, a_2, ..., a_n, причем $a_i \leqslant a_{i+1} \leqslant 2a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ и сумма всех чисел четна. Можно ли эти числа разбить на две группы так, чтобы суммы чисел в этих группах были равны?

XXI олимпиада (1958 год)

1-й тур

VII класс

1. Имеется система уравнений:

$$\begin{cases} *x + *y + *z = 0, \\ *x + *y + *z = 0, \\ *x + *y + *z = 0. \end{cases}$$

Два человека поочередно вписывают вместо звездочек числа. Доказать, что начинающий всегда может добиться того, чтобы система имела нулевое решение.

2. В круге проведены два диаметра AB и CD. Доказать, что если M — произвольная точка окружности, а P и Q — ее проекции на диаметры AB и CD, то длина отрезка PQ не зависит от выбора точки M.

3. Сколько существует четырехзначных номеров (от 0001 до 9999), у которых сумма двух первых цифр равна сумме двух последних цифр?

4. На плоскости даны точки A и B. Построить такой квадрат, чтобы точки A и B лежали на его границе и сумма расстояний от точки A до вершин квадрата была наименьшей.

5. Дана следующая треугольная таблица чисел:

$$\begin{array}{c} 0\ 1\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 1957\quad 1958 \\ 1\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 3915 \\ \cdot\ \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

Каждое число (кроме чисел верхней строки) равно сумме двух ближайших чисел предыдущей строки. Доказать, что число, стоящее в самой нижней строке, делится на 1958.

VIII класс

1. Внутри треугольника ABC взята точка O. На лучах OA, OB, OC построены векторы единичной длины. Доказать, что сумма этих векторов имеет длину, меньшую единицы.

2. Доказать, что если уравнения с целыми коэффициентами

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0,$$
$$x^2 + p_2x + q_2 = 0$$

имеют общий не целый корень, то $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$.

3. На круглой поляне радиуса R растут три круглые сосны одинакового диаметра. Центры их стволов находятся на расстоянии $\frac{R}{2}$ от центра поляны в вершинах равностороннего треугольника. Два человека, выйдя одновременно из диаметрально противоположных точек поляны, обходят поляну по краю с одинаковой скоростью и в одном направлении и все время не видят друг друга. Увидят ли друг друга три человека, если они так же будут обходить поляну, выйдя из точек, находящихся в вершинах вписанного в поляну правильного треугольника?

4. Решить в целых положительных числах уравнение:

$$1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{1958}}}}=\cfrac{1}{x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{x_{1958}}}}}.$$

5. Проекции многоугольника на ось OX, биссектрису первого и третьего координатных углов, ось OY и биссектрису второго и четвертого координатных углов равны соответственно 4, $3\sqrt{2}$, 5, $4\sqrt{2}$.

Площадь многоугольника равна S. Доказать, что $S \leqslant 17{,}5$.

IX класс

1. Бесконечная плоская ломаная $A_0A_1 \ldots A_n \ldots$, все углы которой прямые, начинается в точке A_0 с координатами $x=0$, $y=1$ и обходит начало координат O по часовой стрелке. Первое звено ломаной имеет длину 2 и параллельно биссектрисе четвертого координатного угла. Каждое из следующих звеньев пересекает одну из координатных осей и имеет наименьшую возможную при этом целочисленную длину. Расстояние OA_n обозначается через r_n, сумма длин первых n звеньев ломаной — через S_n. Доказать, что найдется n, для которого $\frac{S_n}{r_n} > 1958$.

2. Какое наибольшее число осей симметрии может иметь пространственная фигура, состоящая из трех прямых, из которых никакие две не параллельны и не совпадают?

3. Решить в целых положительных числах уравнение:

$$1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{n}}}}=\cfrac{1}{x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{x_3+\ddots+\cfrac{1}{x_n}}}}.$$

(Ср. задачу № 4 для VIII класса.)

4. Отрезок длины 3^n разбивается на три равные части. Первая и третья из них называются отмеченными. Каждый из отмеченных отрезков разбивается на три равные части, из которых первая и третья снова называются отмеченными, и т. д. до тех пор, пока не получатся отрезки длины 1. Концы всех отмеченных отрезков называются отмеченными точками. Доказать, что для любого целого k можно найти две отмеченные точки, расстояние между которыми равно k $(1 \leqslant k \leqslant 3^n)$.

X класс

1. См. задачу № 5 для VIII класса. Доказать, что $S \geqslant 10$.

2. Доказать, что $1155^{1958}+34^{1958} \neq n^2$ ни для какого целого n.

3. См. задачу № 2 для IX класса.

4. На стол кладут правильный 100-угольник, в вершинах которого по порядку написаны числа 1, 2, ..., 100. Затем эти числа переписывают в порядке удаления от переднего края стола. Если вершины находятся на равном расстоянии от края, сначала выписывается левое число, затем правое. Выписаны всевозможные различные наборы чисел, соответствующие разным положениям 100-угольника. Вычислить сумму чисел, стоящих во всех этих наборах на тринадцатом месте слева.

5. Из четырех прямых на плоскости никакие две не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке. По каждой прямой с постоянной скоростью идет пешеход. Известно, что первый пешеход встречается со вторым, с третьим и с четвертым, а второй — с третьим и с четвертым. Доказать, что третий пешеход встречается с четвертым.

2-й тур

VII класс

1. Доказать, что на плоскости нельзя расположить больше четырех выпуклых многоугольников так, чтобы каждые два из них имели общую сторону.

2. Имеются два набора из $+1$ и -1, в каждом по 1958 чисел. Доказать, что за некоторое число шагов можно превратить 1-й набор во 2-й, если на каждом шаге разрешается одновременно изменить знак у любых 11 чисел первого набора. (Два набора считаются одинаковыми, если у них на одинаковых местах стоят одинаковые числа.)

3. Каждая грань куба заклеивается двумя равными прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой, один из которых — белый, другой — черный. Можно ли эти треугольники расположить так, чтобы при каждой вершине куба сумма белых углов была равна сумме черных углов?

4. Доказать, что если целое $n > 2$, то

$$(n!)^2 > n^n,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

5. Сторона клетки клетчатой бумаги равна 1. По линиям сетки построен прямоугольник со сторонами m, n. Можно ли в прямоугольнике провести по линиям сетки ломаную, которая ровно один раз проходила бы через каждый узел сетки, расположенный внутри или на границе прямоугольника? Если можно, то какова ее длина?

VIII класс

1. Из бумаги вырезан многоугольник. Через две точки его границы проводится прямая, по которой многоугольник перегибается. Доказать, что периметр многоугольника, получающегося после перегибания не больше периметра исходного многоугольника.

2. Доказать, что для любых чисел a_1 и a_2, таких, что $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, $a_1 + a_2 = 1$, можно найти такие числа b_1 и b_2, что $b_1 \geqslant 0$, $b_2 \geqslant 0$, $b_1 + b_2 = 1$ и

$$\left(\frac{5}{4} - a_1\right) b_1 + 3\left(\frac{5}{4} - a_2\right) b_2 > 1.$$

3. Внутри $\angle AOB$ взята точка C. Из нее опущены перпендикуляры: CD — на сторону OA, CE — на сторону OB. Из точек D и E опущены перпендикуляры: DN — на сторону OB; EM — на сторону OA. Доказать, что $OC \perp MN$.

4. Доказать, что если целое $n > 0$, то

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n < n^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

5. Обозначим через a наибольшее число непересекающихся кругов диаметра 1, центры которых лежат внутри многоугольника M, через b — наименьшее число кругов радиуса 1, которыми можно покрыть весь многоугольник M. Какое число больше, a или b?

IX класс

1. См. задачу № 1 для X класса.

2. Из точки O провести n лучей на плоскости так, чтобы сумма всех попарных углов между ними была наибольшей. (Рассматриваются только углы, не превышающие 180°.)

3. Игральная доска имеет форму ромба с углом 60°. Каждая сторона ромба разделена на 9 частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам и малой диагонали ромба, разбивающие доску на треугольные клетки. Если на некоторой клетке поставлена фишка, проведем через центр этой клетки три прямые, параллельные сторонам и малой диагонали ромба. Клетки, которые они пересекут, будут считаться побитыми фишкой. Каким наименьшим числом фишек можно побить все клетки доски?

4. Обозначим через a наименьшее число кругов радиуса 1, которыми можно полностью покрыть заданный многоугольник M, через b — наибольшее число непересекающихся кругов радиуса 1 с центрами внутри многоугольника M. Какое из чисел больше, a или b?

5. Между зажимами A и B включено несколько сопротивлений. Каждое сопротивление имеет входной и выходной зажимы. Какое наименьшее число сопротивлений необходимо иметь и какова должна быть схема их соединения, чтобы при порче любых 9 сопротивлений между зажимами A и B цепь осталась замкнутой, но не было короткого замыкания? (Порча сопротивления: короткое замыкание или обрыв.)

X класс

1. Решить в целых положительных числах уравнение:

$$x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}.$$

2. В многоугольнике существуют такие точки A и B, что любая соединяющая их ломаная, проходящая внутри или по границе многоугольника, имеет длину больше 1. Доказать, что периметр многоугольника больше 2.

3. В школе изучают $2n$ предметов. Все ученики учатся на «4» и «5». Никакие два ученика не учатся одинаково, ни про каких двух нельзя сказать, что один из них учится лучше другого. Доказать, что число учеников в школе не больше, чем C_{2n}^{n}.

Примечание. Мы считаем, что один ученик учится лучше другого, если у него по всем предметам оценки не хуже, чем у второго ученика, а по некоторым предметам — лучше.

4. Стороны параллелограмма равны a и b. Найти отношение объемов тел, полученных при вращении параллелограмма вокруг стороны a и вокруг стороны b.

5. На n карточках написаны с разных сторон числа: на 1-й: 0 и 1, на 2-й: 1 и 2, ..., на n-й: $n-1$ и n. Один человек берет из стопки несколько карточек и показывает второму одну сторону каждой из них. Затем берет из стопки еще одну карточку и тоже показывает одну сторону. Указать все случаи, в которых второй может определить число, написанное на обороте последней показанной ему карточки.

XXII олимпиада (1959 год)

1-й тур

VII класс

1. Пусть a и b — целые числа. Напишем число b справа от числа a. Если число a четное, то разделим его на 2, если оно нечетное, то сначала вычтем из него единицу, а потом разделим его на 2. Получившееся число a_1 напишем под числом a. Справа от числа a_1 напишем число $2b$. С числом a_1 проделаем ту же операцию, что и с числом a, и, получив число a_2, напишем его под числом a_1. Справа от числа a_2 запишем число $4b$. Получив аналогичным образом число a_3,

напишем справа от него число $8b$ и т. д. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не получим в левом столбце число 1. Доказать, что сумма тех чисел правого столбца, слева от которых стоят нечетные числа, равна произведению ab.

2. Доказать, что число $2^{2^{1959}}-1$ делится на 3.

3. Можно ли расположить все трехзначные числа, не оканчивающиеся нулями, в последовательность так, чтобы последняя цифра каждого числа была равна первой цифре следующего за ним?

4. Как должна двигаться ладья по шахматной доске, чтобы побывать на каждом поле по одному разу и сделать наименьшее число поворотов?

5. Дан квадрат со стороной 1. Найти множество всех точек, сумма расстояний от которых до сторон этого квадрата или их продолжений равна 4.

VIII класс

1. Даны две бочки бесконечно большой емкости. Можно ли, пользуясь двумя ковшами емкостью $2-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$, перелить из одной в другую ровно 1 литр?

2. Заметим, что если перевернуть лист, на котором написаны цифры, то цифры 0, 1, 8 не изменятся, 6 и 9 поменяются местами, остальные потеряют смысл. Сколько существует девятизначных чисел, которые при переворачивании листа не изменяются?

3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Середины сторон AB и CD обозначим соответственно через K и M, точку пересечения отрезков AM и DK — через O, точку пересечения отрезков BM и CK — через P. Доказать, что площадь четырехугольника $MOKP$ равна сумме площадей треугольников BPC и AOD.

4. См. задачу № 4 для VII класса.

5. Даны две непересекающиеся окружности с центрами в точках O_1 и O_2. Пусть a_1 и a_2 — внутренние касательные к этим окружностям, a_3 и a_4 — внешние касательные к ним. Пусть, далее, a_5 и a_6 — касательные к окружности с центром в O_1, проведенные из точки O_2, a_7, a_8 — касательные к окружности с центром в точке O_2, проведенные из точки O_1. Обозначим через O точку пересечения прямых a_1 и a_2. Доказать, что можно провести две ок-

ружности с центром в точке O так, чтобы первая касалась a_3 и a_4, вторая касалась a_5, a_6, a_7, a_8, причем радиус второй в два раза меньше радиуса первой.

IX класс

1. Имеется 1959 положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{1959}$, сумма которых равна 1. Рассматриваются всевозможные комбинации из 1000 чисел, причем комбинации считаются совпадающими, если они отличаются только порядком чисел. Для каждой комбинации рассматривается произведение входящих в нее чисел. Доказать, что сумма всех этих произведений меньше 1.

2. См. задачу № 2 для VIII класса.

3. Построить окружность, проходящую через две данные точки и отсекающую от данной окружности хорду данной длины.

4. Рассмотрим лист клетчатой бумаги со стороной клетки, равной 1. Пусть p_k — число всех непересекающихся ломаных длины k, начинающихся в точке O — некотором фиксированном узле сетки. (Все ломаные составлены из звеньев сетки.) Доказать, что для любого k справедливо неравенство $p_k \leqslant 2 \cdot 3^k$.

5. Доказать, что не существует тетраэдра, в котором каждое ребро являлось бы стороной плоского тупого угла.

X класс

1. Доказать, что не существует таких целых чисел x, y, z, что $x^k + y^k = z^k$ при условиях: $z > 0$, $0 < x < k$, $0 < y < k$, k — натуральное число.

2. См. задачу № 3 для VIII класса.

3. Существует ли тетраэдр, каждое ребро которого являлось бы стороной плоского тупого угла? (Ср. задачу № 5 для IX класса.)

4. В квадратную таблицу $N \times N$ записаны все целые числа от 1 до N^2 по следующему закону: 1 стоит на любом месте; 2 стоит в строке с номером, равным номеру столбца, содержащего 1; 3 стоит в строке с номером, равным номеру столбца, содержащего 2, и т. д. На сколько сумма чисел в строке, содержащей 1, отличается от суммы чисел в столбце, содержащем N^2?

5. Дана невозрастающая последовательность положительных чисел.

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots; \; a_1 = \frac{1}{2k},$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = 1.$$

Доказать, что найдутся k чисел, из которых самое маленькое больше половины самого большого.

2-й тур

VII класс

1. Имеется два набора чисел:

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n \text{ и } b_1 > b_2 > \ldots > b_n.$$

Доказать, что

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n > a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1.$$

2. Дан треугольник ABC. Найти такую точку, что если ее симметрично отразить от любой стороны треугольника, то полученная точка попадет на описанную окружность.

3. На какое целое число надо умножить 999 999 999, чтобы получить число, состоящее из одних единиц?

4. Доказать, что в любом шестизначном числе можно переставить цифры так, чтобы сумма первых трех цифр нового числа отличалась от суммы вторых трех цифр меньше, чем на 10.

5. Дано n чисел: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при этом $x_k = \pm 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Доказать, что если $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$, то n делится на 4.

VIII класс

1. См. задачу № 5 для VII класса.

2. Даны 12 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$, причем имеют место следующие неравенства:

$$\begin{cases} a_2(a_1 - a_2 + a_3) < 0, \\ a_3(a_2 - a_3 + a_4) < 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{11}(a_{10} - a_{11} + a_{12}) < 0. \end{cases}$$

Доказать, что среди этих чисел найдется по крайней мере 3 положительных и 3 отрицательных.

3. Дан треугольник ABC; O_1, O_2, O_3 — его вневписанные окружности. Для каждой пары из этих окружностей построим вторую общую внешнюю касательную (одна такая касательная уже проведена — это сторона треугольника ABC). Три построенные прямые образуют треугольник. Найти его углы, если углы треугольника ABC известны.

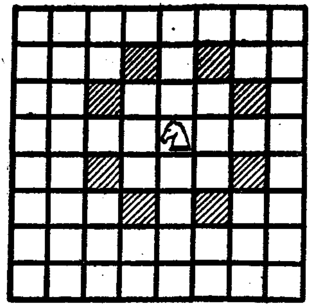


Рис. 2.

4. Даны два пересекающихся отрезка AB и CD длины 1. Доказать, что по крайней мере одна из сторон четырехугольника $ABCD$ не меньше $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

5. Доказать, что шахматную доску размером 4×4 нельзя обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле ровно один раз.

Примечание. Одним ходом конь может попасть с поля, на котором он стоит, на любое из восьми полей, заштрихованных на рисунке 2.

IX класс

1. Даны такие сто чисел x_1 x_2, ..., x_{100}, сумма которых равна 1, что каждая из абсолютных величин разностей $x_{k+1} - x_k$ меньше $\frac{1}{50}$. Доказать, что из этих 100 чисел можно выбрать 50 чисел так, чтобы их сумма отличалась от $\frac{1}{2}$ не больше, чем на $\frac{1}{100}$.

2. n отрезков длины 1 пересекаются в одной точке. Доказать, что хотя бы одна сторона $2n$-угольника, образованного их концами, не меньше стороны правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность диаметра 1.

3. Доказать, что не более одной вершины тетраэдра обладает тем свойством, что сумма любых двух плоских углов при этой вершине больше 180°.

4. Доказать, что существует бесконечно много чисел, не представимых в виде суммы трех кубов.

5. В углах шахматной доски размером 3×3 стоят кони: в верхних углах белые, а в нижних — черные.

Одним ходом разрешается переставить любого коня на любое свободное поле в соответствии с правилами шахмат (см. примечание к задаче № 5 для VIII класса). Мы хотим поставить белых коней в нижние углы доски, а черных коней — в верхние углы. Доказать, что для этого потребуется не меньше 16 ходов.

X класс

1. См. задачу № 4 для IX класса.

2. Пусть $ABCD$ — пространственный четырехугольник, точки K_1 и K_2 делят соответственно стороны AB и CD в отношении α, точки K_3 и K_4 делят соответственно стороны BC и AD в отношении β. Доказать, что отрезки K_1K_2 и K_3K_4 пересекаются.

3. Даны несколько пересекающихся кругов, занимающие на плоскости площадь, равную 1. Доказать, что из них можно выбрать некоторое количество попарно неперекрывающихся, чтобы их общая площадь была не менее $\frac{1}{9}$.

4. Даны n комплексных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, таких, что если их представлять себе как точки плоскости, то они являются вершинами выпуклого n-угольника. Доказать, что если комплексное число z обладает тем свойством, что

$$\frac{1}{z-c_1}+\frac{1}{z-c_2}+\ldots+\frac{1}{z-c_n}=0,$$

то точка плоскости, соответствующая z, лежит внутри этого n-угольника.

5. Два диска разного диаметра разделены на $2n$ равных секторов каждый, и каждый сектор выкрашен в белый или черный цвет таким образом, что на каждом диске оказалось n белых и n черных секторов. Если укрепить оба диска на одной оси, проходящей через их центры, то окажется, что окружность — край меньшего диска — окрашена дважды: изнутри и снаружи. При этом одни части окружности окрашены в разные цвета, а остальные — в один цвет с обеих сторон. Доказать, что можно так повернуть меньший диск, что части первого рода составят не меньше половины длины окружности.

XXIII олимпиада (1960 год)

1-й тур

VII класс

1. Указать все денежные суммы, выраженные целым числом рублей, которые могут быть представлены как четным, так и нечетным числом денежных билетов.

Примечание. Считать, что в обращении имеются билеты достоинством в 1, 2, 3, 5, 10, 25, 50 и 100 рублей.

2. Три равные окружности с центрами O_1, O_2, O_3 пересекаются в данной точке. A_1, A_2, A_3 — остальные точки пересечения. Доказать, что треугольники $O_1O_2O_3$ и $A_1A_2A_3$ равны.

3. В составлении 40 задач приняло участие 30 студентов со всех 5 курсов. Любые 2 однокурсника придумали одинаковое число задач. Любые два студента с разных курсов придумали разное число задач. Сколько человек придумало одну задачу?

4. M и N — точки пересечения двух окружностей с центрами O_1 и O_2. Прямая O_1M пересекает первую окружность в точке A_1, а вторую — в точке A_2. Прямая O_2M пересекает первую окружность в точке B_1, а вторую — в точке B_2. Доказать, что прямые A_1B_1, A_2B_2, MN пересекаются в одной точке.

5. Доказать, что число делителей числа n не превосходит $2\sqrt{n}$.

VIII класс

1. Доказать, что число, в десятичной записи которого имеется триста единиц, а остальные цифры — нули, не является точным квадратом.

2. В турнире каждый шахматист половину всех очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек принимало участие в турнире?

3. Через данную вершину A выпуклого четырехугольника $ABCD$ провести прямую, делящую его площадь пополам.

4. Даны отрезки AB, CD и точка O, причем никакие три из точек A, B, C, D, O не лежат на одной прямой.

Конец отрезка называется «отмеченным», если прямая, проходящая через него и точку O, не пересекает другого отрезка. Сколько может быть «отмеченных» концов?

5. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $p+n^{2k}$ ни при каких простых p и натуральных n и k.

IX класс

1. Доказать, что любая правильная дробь может быть представлена в виде (конечной) суммы обратных величин попарно различных целых чисел.

2. См. задачу № 5 для VIII класса.

3. Даны выпуклый многоугольник и точка O внутри него. Любая прямая, проходящая через точку O, делит площадь многоугольника пополам. Доказать, что многоугольник центрально-симметричный и O — центр симметрии.

4. Найти множество четвертых вершин прямоугольников, у которых две вершины лежат на данной окружности, а третья — в данной точке внутри окружности.

X класс

1. Два равных правильных треугольника расположены в пространстве в параллельных плоскостях P_1 и P_2, причем отрезок, соединяющий их центры, перпендикулярен плоскостям. Найти множество точек, являющихся серединами всех отрезков, соединяющих точки одного треугольника с точками другого треугольника.

2. Если числитель и знаменатель дроби $\frac{a^n+b^n}{a+b}$ делятся на n, то и сама дробь делится на n. Доказать.

3. См. задачу № 4 для IX класса.

4. В десятичной записи целого числа A все цифры, кроме первой и последней,— нули, первая и последняя — не нули, число цифр — не меньше трех. Доказать, что A не является точным квадратом.

5. Даны числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, причем для всех натуральных нечетных n имеет место равенство

$$a_1^n+a_2^n+\ldots+a_k^n=0.$$

Доказать, что те из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, которые не равны нулю, можно разбить на пары таким образом, чтобы два числа, входящих в одну и ту же пару, были бы равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку.

2-й тур

VII класс

1. Даны 4 точки: A, B, C, D. Найти такую точку O, что сумма расстояний от нее до данных точек минимальна.

2. Доказать, что из сторон произвольного четырехугольника можно сложить трапецию.

3. Доказать, что любой несамопересекающийся пятиугольник лежит по одну сторону от хотя бы одной своей стороны.

4. В каком-то году некоторое число ни в одном месяце не было воскресеньем. Определить это число.

VIII класс

1. Каково наибольшее n, при котором можно так расположить n точек на плоскости, чтобы каждые три из них служили вершинами прямоугольного треугольника?

2. Имеется бесконечная шахматная доска. Обозначим через (a, b) поле, расположенное на пересечении горизонтали с номером a и вертикали с номером b. Фишка с поля (a,b) может сделать ход на любое из восьми полей: $(a \pm m, b \pm n)$, $(a \pm n, b \pm m)$, где m, n — фиксированные числа, а знаки $(+)$ и $(-)$ комбинируются произвольно. Сделав x ходов, фишка вернулась на исходное поле. Доказать, что x четно.

3. См. задачу № 2 для VII класса.

4. Улитка ползет вперед (не поворачивая назад) с непостоянной скоростью. Несколько человек наблюдало за ней по очереди в течение 6 минут. Каждый начинал наблюдать раньше, чем кончал предыдущий, и наблюдал ровно 1 *мин*, причем каждый заметил, что за эту минуту улитка проползала ровно 1 *м*. Доказать, что за 6 *мин* улитка могла проползти самое большее 10 *м*.

5. Дан пятиугольник $ABCDE$, в котором $AB = BC = CD = DE$, $\angle B = \angle D = 90°$. Доказать, что пятиугольниками, равными данному, можно замостить плоскость (без щелей и перекрытий).

IX класс

1. Имеется m точек, некоторые из которых соединены отрезками так, что каждая соединена с l точками. Какие значения может принимать l?

2. Дан произвольный центрально-симметричный шестиугольник. На его сторонах, как на основаниях, построены во внешнюю сторону правильные треугольники. Доказать, что середины отрезков, соединяющих вершины соседних треугольников, являются вершинами правильного шестиугольника.

3. Доказать, что никакую прямоугольную шахматную доску шириной в 4 клетки нельзя обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле по одному разу и последним ходом вернувшись на исходную клетку (см. примечание к задаче XXII, II, 8, 5).

4. Найти множество центров всех прямоугольников, описанных около данного остроугольного треугольника.

5. В квадрате со стороной 100 расположено N кругов радиуса 1, причем всякий отрезок длины 10, целиком расположенный внутри квадрата, пересекает хотя бы один круг. Доказать, что $N \geqslant 400$.

X класс

1. Число A делится на 1, 2, 3, ..., 9. Доказать, что если $2A$ представлено в виде суммы натуральных чисел, меньших 10: $2A = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, то из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ можно выбрать часть, сумма которых равна A.

2. $6n$-значное число делится на 7. Последнюю цифру перенесли в начало. Доказать, что полученное число также делится на 7.

3. Собралось n человек. Некоторые из них знакомы между собой, причем каждые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а каждые два знакомых не имеют общих знакомых. Доказать, что каждый из присутствующих знаком с одинаковым числом человек.

4. См. задачу № 4 для IX класса.

5. Доказать, что число различных ломаных длины $2n$, стороны которых лежат на линиях клетчатой бумаги со стороной клетки, равной 1, равно C_{2n}^{n} (все ломаные начинаются в одном и том же узле сетки).

XXIV олимпиада (1961 год)

1-й тур

VII класс

1. Доказать, что если n — четное число, то числа 1, 2, 3, ..., n^2 можно таким образом расположить в квадратную таблицу $n \times n$, чтобы суммы чисел, стоящих в каждом столбце, были одинаковы.

2. Имеется трехзначное число $\overline{abc}$; возьмем число $\overline{cba}$ и вычтем из большего меньшее. Получим число $\overline{a_1b_1c_1}$, сделаем с ним то же самое и т. д. (случай $a_1 = 0$ допускается).

Доказать, что на каком-то шаге мы получим или число 495, или 0. (Здесь под $\overline{abc}$ понимается число, записываемое с помощью цифр a, b, c.)

3. Дан остроугольный треугольник $A_0B_0C_0$. Пусть точки A_1, B_1, C_1 — центры квадратов, построенных на сторонах B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0. С треугольником $A_1B_1C_1$ делаем то же самое, получаем треугольник $A_2B_2C_2$ и т. д. Доказать, что границы треугольников $A_nB_nC_n$ и $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ пересекаются ровно в 6 точках.

4. Имеется 100 точек на плоскости, причем расстояние между любыми двумя из них не превосходит 1, и если A, B, C — любые три точки из данных, то треугольник ABC тупоугольный. Доказать, что можно провести такую окружность радиуса $1/2$, что все данные точки окажутся внутри нее или на ней самой.

5. На шахматной доске выбраны две клетки одинакового цвета. Доказать, что ладья, начав с первой из этих клеток, может обойти все клетки по разу, а на второй выбранной клетке побывать два раза.

VIII класс

1. Даны треугольник ABC и точка O. Обозначим через M_1, M_2, M_3 центры тяжести треугольников OAB, OBC, OCA соответственно. Доказать, что площадь треугольника $M_1M_2M_3$ равна $1/9$ площади треугольника ABC.

2. Играют двое; один из них загадывает набор из целых однозначных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, как положительных, так и отрицательных. Второму разрешается спрашивать, чему равна сумма $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, где $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$—

любой набор чисел. Каково наименьшее число вопросов, за которое отгадывающий узнает задуманный набор?

3. См. задачу № 3 для VII класса.

4. Доказать, что ладья может обойти все клетки прямоугольной шахматной доски, побывав на каждой клетке ровно один раз, и вернуться в начальную клетку, если только число клеток на доске четно.

5. Набор чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется отрезком натурального ряда, если $a_2 = a_1 + 1$, $a_3 = a_1 + 2$, ..., $a_{k+1} = a_1 + k$. Два отрезка натурального ряда длины 1961 подписаны один под другим. Доказать, что можно так переставить числа в каждом из отрезков, что после сложения чисел, стоящих друг под другом, снова получится отрезок натурального ряда.

IX класс

1. См. задачу № 1 для VIII класса.

2. См. задачу № 2 для VIII класса.

3. Доказать, что можно так расположить числа от 1 до n^2 в таблицу $n \times n$, чтобы суммы чисел каждого столбца были равны. (Ср. задачу № 1 для VII класса.)

4. $4k$ человек ехали в автобусе без кондуктора. Известно, что ни у кого из пассажиров не было медных денег и монет крупнее 20 коп. Доказать, что если общее число монет в автобусе меньше $5k$, то пассажиры не смогут правильно расплатиться за проезд. Для числа монет $5k$ построить пример такого распределения денег, при котором возможен правильный расчет.

5. На плоскости дано N точек. Если A, B, C — любые три из них, то внутри треугольника ABC нет ни одной точки из данных. Доказать, что эти точки можно занумеровать так, что многоугольник $A_1 A_2 \ldots A_n$ будет выпуклым.

X класс

1. Дана последовательность чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$; $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Доказать, что u_{5k} делится на 5, при $k = 1, 2, 3, \ldots$.

2. На плоскости проведено несколько полос разной ширины. Никакие две из них не параллельны. Как нужно сдвинуть их параллельно самим себе, чтобы площадь их общей части была наибольшей?

3. k человек ехали в автобусе без кондуктора. Известно, что ни у кого из пассажиров не было медных денег и монет крупнее 20 коп. Известно, далее, что каждый пассажир уплатил за проезд и получил сдачу. Доказать, что наименьшее число монет, которое могло для этого потребоваться, равно $k + \left[\frac{k+3}{4}\right]$. (Ср. задачу 4 для IX класса.)

4. Окружность S и точка O лежат в одной плоскости, причем O находится вне окружности. Построим произвольную сферу, проходящую через окружность S, и опишем конус с вершиной в точке O, касающийся этой сферы. Найти множество центров всех окружностей, по которым конусы касаются сфер.

5. Известно, что $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$, где z_i — комплексные числа. Доказать, что среди этих чисел найдутся два таких числа, что разность их аргументов больше или равна $120°$.

2-й тур

VII класс

1. Стороны произвольного выпуклого многоугольника покрашены снаружи. Проводится несколько диагоналей многоугольника. Каждая из этих диагоналей тоже покрашена с одной стороны, т. е. с одной стороны отрезка проведена узкая цветная полоска. Доказать, что хотя бы один из многоугольников, на которые разбит диагоналями исходный многоугольник, весь покрашен снаружи. (Допускается, чтобы в вершине многоугольника окраска заходила внутрь.)

2. В квадрате $ABCD$ на стороне AB взята точка P, на стороне BC — точка Q, на стороне CD — точка R, на стороне AD — точка S; оказалось, что фигура $PQRS$ — прямоугольник. Доказать, что тогда прямоугольник $PQRS$ — либо квадрат, либо обладает тем свойством, что его стороны параллельны диагоналям квадрата.

3. Доказать, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел обязательно найдется такое, у которого сумма цифр делится на 11.

4. Дана таблица 4×4 клетки. Показать, что можно так расставить семь звездочек в клетках этой таблицы, что при вычеркивании любых двух строк и любых двух

столбцов этой таблицы в оставшихся клетках всегда была хотя бы одна звездочка. Доказать, что если звездочек меньше, чем семь, то всегда можно так вычеркнуть две строки и два столбца, что все оставшиеся клетки будут пустыми.

5. Доказать, что не существует целых чисел a, b, c, d удовлетворяющим равенствам:

$$\begin{aligned} abcd - a &= 1961, \\ abcd - b &= 961, \\ abcd - c &= 61, \\ abcd - d &= 1. \end{aligned}$$

VIII класс

1. Дана фигура, состоящая из 16 отрезков (рис. 3). Доказать, что нельзя провести ломаную, пересекающую каждый из отрезков ровно один раз. Ломаная может быть незамкнутой и самопересекающейся, но ее вершины не должны лежать на отрезках, а стороны — проходить через общие концы отрезков.

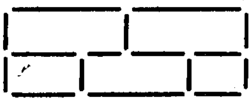


Рис. 3.

2. С центрами в вершинах прямоугольника построены четыре окружности с радиусами r_1, r_2, r_3, r_4, причем $r_1 + r_3 = r_2 + r_4 < d$, где d — диагональ прямоугольника. Проводятся две пары внешних касательных к окружностям 1, 3 и 2, 4. Доказать, что в четырехугольник, образованный этими четырьмя прямыми, можно вписать окружность.

3. См. задачу № 3 для VII класса.

4. См. задачу № 4 для VII класса.

5. Дана четверка чисел: a, b, c, d. Из нее получается новая: ab, bc, cd, da по следующему правилу: каждое число умножается на следующее, четвертое — на первое. Из новой четверки по этому же правилу получается третья и т. д. Доказать, что в полученной последовательности четверок никогда не встретится вновь четверка a, b, c, d, кроме случая, когда $a = b = c = d = 1$.

IX класс

1. Точки A и B движутся равномерно и с равными угловыми скоростями по окружностям O_1 и O_2 соответственно

(по часовой стрелке). Доказать, что вершина C правильного треугольника ABC также движется равномерно по некоторой окружности.

2. В клетки таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторого столбца или некоторой строки. Доказать, что, применяя несколько раз эту операцию, можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел, стоящих в любом столбце и в любой строке, неотрицательны.

3. n точек соединены отрезками так, что каждая точка соединена с любой другой некоторым путем и нет таких двух точек, которые соединялись бы двумя разными путями. Доказать, что общее число отрезков равно $n-1$.

4. a, b и p — любые числа. Доказать, что найдутся такие взаимно простые числа k, l, что $ak+bl$ делится на p.

5. Коля и Петя делят $2n+1$ орехов, $n \geqslant 2$, причем каждый хочет получить возможно больше. Предлагается три способа дележа (каждый проходит в три этапа).

1-й этап: Петя делит все орехи на две части; в каждой не меньше двух орехов.

2-й этап: Коля делит каждую часть снова на две, в каждой не меньше одного ореха.

(1-й и 2-й этапы общие для всех трех способов.)

3-й этап. При первом способе Коля берет наибольшую и наименьшую части.

При втором способе Коля берет себе обе средние части.

При третьем способе Коля берет либо большую и меньшую части, либо обе средние части, но за право выбора отдает Пете один орех.

Определить, какой способ самый выгодный для Коли и какой наименее выгоден для него.

X класс

1. Доказать, что для любых трех бесконечных последовательностей натуральных чисел:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots;$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots;$$
$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$$

найдутся такие номера p и q, что

$$a_p \geqslant a_q, \quad b_p \geqslant b_q, \quad c_p \geqslant c_q.$$

2. В прямоугольник со сторонами 20 и 25 бросают 120 квадратов со стороной 1. Доказать, что в прямоугольник можно поместить круг диаметра 1, не пересекающийся ни с одним из квадратов.

3. См. задачу № 2 для IX класса.

4. Расстояния от фиксированной точки P плоскости до двух вершин A, B равностороннего треугольника ABC равны: $AP = 2$, $BP = 3$. Определить, какое максимальное значение может иметь длина отрезка PC.

5. Дан произвольный набор из $+1$ и -1 длиной 2^k. Из него получается новый набор по следующему правилу: каждое число умножается на следующее за ним; последнее, 2^k-ое число умножается на первое. С новым набором из $+1$ и -1 проделывается то же самое и т. д.

Доказать, что в конце концов получится набор, состоящий из одних единиц.

XXV олимпиада (1962 год)

1-й тур

VII класс

1. Дана прямая l, перпендикулярная отрезку AB и пересекающая его. Для любой точки M прямой l строится такая точка N, что $\angle NAB = 2\angle MAB$; $\angle NBA = 2\angle MBA$. Доказать, что абсолютная величина разности $AN - BN$ не зависит от выбора точки M на прямой l.

2. Правильный треугольник, одна сторона которого отмечена, отражается симметрично относительно одной из своих сторон. Полученный треугольник в свою очередь отражается и т. д., пока на некотором шаге треугольник не придет в первоначальное положение. Доказать, что при этом отмеченная сторона также займет исходное положение.

3. Пусть a, b, c, d — стороны четырехугольника, не являющегося ромбом. Доказать, что из отрезков a, b, c, d можно сложить самопересекающийся четырехугольник.

4. Сумму цифр числа a обозначим через $S(a)$. Доказать, что если $S(a) = S(2a)$, то число a делится на 9.

5. Даны n карточек; на обеих сторонах каждой карточки написано по одному из чисел 1, 2, ..., n, причем так, что каждое число встречается на всех n карточках ровно два раза. Доказать, что карточки можно разложить на столе так, что сверху окажутся все числа: 1, 2, ..., n.

VIII класс

1. На сторонах AB, BC, CA правильного треугольника ABC найти такие точки X, Y, Z (соответственно), чтобы площадь треугольника, образованного прямыми CX, BZ, AY, была вчетверо меньше площади треугольника ABC и чтобы было выполнено условие:

$$\frac{AX}{XB} = \frac{BY}{YC} = \frac{CZ}{ZA}.$$

2. См. задачу № 2 для VII класса.

3. Доказать, что для любого целого d найдутся такие целые m, n, что

$$d = \frac{n - 2m + 1}{m^2 - n}.$$

4. См. задачу № 4 для VII класса.

5. См. задачу № 5 для VII класса.

IX класс

1. Даны два пересекающихся отрезка AB и CD. На отрезках выбираются точки M и N (соответственно) так, что $AM = CN$. Найти положение точек M и N, при котором длина отрезка MN минимальна (ср. задачу № 1 для X класса).

2. «Конем» называется фигура, ход которой состоит в перемещении на n клеток по горизонтали и на 1 по вертикали (или наоборот). Конь стоит на некотором поле бесконечной шахматной доски. При каких n он может попасть на любое заданное поле? При каких n это невозможно?

3. См. задачу № 4 для VII класса.

4. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{1962} = 1, \\ x_1 - x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_{1962} = 1, \\ x_1 x_2 - x_3 x_4 \cdot \ldots \cdot x_{1962} = 1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{1961} - x_{1962} = 1 \end{cases}$$

Какие значения может принимать x_{25}?

5. Доказать, что в прямоугольнике площади 1 можно расположить непересекающиеся круги так, чтобы сумма их радиусов была равна 1962.

X класс

1. В задаче № 1 для IX класса заменить отрезки пересекающимися лучами.

2. На сторонах квадрата, как на основаниях, построены во внешнюю сторону равные равнобедренные треугольники с острым углом при вершине. Доказать, что получившуюся фигуру нельзя разбить на параллелограммы.

3. Доказать, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных членов последовательности 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... , $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ldots$.

4. См. задачу № 4 для IX класса.

5. См. задачу № 5 для VII класса.

2-й тур

VII класс

1. У края биллиарда, имеющего форму правильного $2n$-угольника, стоит шар. Как надо пустить шар от борта, чтобы он, отразившись от всех бортов, вернулся в ту же точку? (При отражении углы падения и отражения равны.) Доказать, что при этом длина пути шара не зависит от выбора начальной точки.

2. ABC — равнобедренный треугольник; $AB = BC$, BH — высота, M — середина стороны AB, K — точка пересечения BH с окружностью, проходящей через B, M и C. Доказать, что $BK = \frac{3}{2} R$, где R — радиус описанной около треугольника ABC окружности.

3. «Уголком» называется фигура, составленная из трех квадратов со стороной 1 в виде буквы «Г». Доказать, что прямоугольник размерами 1961 × 1963 нельзя разбить на уголки, а прямоугольник размерами 1963 × 1965 — можно.

4. Дано число 100 ... 01; число нулей в нем равно 1961. Докажите, что это число — составное.

5. На плоскости даны 25 точек; известно, что из любых трех точек можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1. Доказать, что среди данных точек найдутся 13, лежащие в круге радиуса 1.

VIII класс

1. Проведем в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

2. Как надо расположить числа 1, 2, ..., 1962 в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{1962}$, чтобы сумма:

$$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_{1961}-a_{1962}|+|a_{1962}-a_1|$$

была наибольшей?

3. В окружность вписан неправильный n-угольник, который при повороте окружности около центра на некоторый угол $\alpha \neq 2\pi$ совмещается сам с собой. Доказать, что n — число составное.

4. Из чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 можно образовать десять попарных сумм; обозначим их через $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Доказать, что, зная числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ (но не зная, разумеется, суммой каких именно двух чисел является каждое из них), можно восстановить числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

5. Две окружности O_1 и O_2 пересекаются в точках M и P. Обозначим через MA хорду окружности O_1, касающуюся окружности O_2 в точке M, а через MB — хорду окружности O_2, касающуюся окружности O_1 в точке M. На прямой MP отложен отрезок $PH = MP$. Доказать, что четырехугольник $MAHB$ можно вписать в окружность.

IX класс

1. Школьник в течение учебного года должен решать ровно по 25 задач за каждые идущие подряд 7 дней. Время, необходимое на решение одной задачи (любой), не меняется в течение дня, но меняется в течение учебного года по известному школьнику закону и всегда меньше 45 минут. Школьник хочет затратить на решение задач в общей сложности наименьшее время. Доказать, что для этого он может выбрать некоторый день недели и в этот день (каждую неделю) решать по 25 задач.

2. См. задачу № 2 для VIII класса, где вместо чисел 1, 2, ..., 1962 взяты 25 произвольных различных чисел.

3. Стороны выпуклого многоугольника, периметр которого равен 12, отодвигаются на расстояние $d = 1$ во

внешнюю сторону. Доказать, что площадь многоугольника увеличится по крайней мере на 15.

4. См. задачу № 4 для VIII класса.

5. Даны 2^n конечных последовательностей из нулей и единиц, причем ни одна из них не является началом никакой другой. Доказать, что сумма длин этих последовательностей не меньше $n \cdot 2^n$.

X класс

1. На данной прямой l, проходящей через центр O данной окружности, фиксирована точка C. Точки A и A' расположены на окружности по одну сторону от l так, что углы, образованные прямыми AC и $A'C$ с прямой l равны. Обозначим через B точку пересечения прямых AA' и l. Доказать, что положение точки B не зависит от точки A.

2. См. задачу № 2 для IX класса.

3. См. задачу № 3 для IX класса.

4. Как надо расположить в пространстве прямоугольный параллелепипед, чтобы площадь его проекции на горизонтальную плоскость была наибольшей?

5. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым другим одну партию. Доказать, что участников можно так занумеровать, что окажется, что ни один участник не проиграл непосредственно за ним следующему.

XXVI олимпиада (1963 год)

1-й тур

VII класс

1. Из вершины B произвольного треугольника ABC проведены вне треугольника прямые BM и BN, так что $\angle ABM = \angle CBN$. Точки A' и C' симметричны точкам A и C относительно прямых BM и BN (соответственно). Доказать, что $AC' = A'C$.

2. a, b, c — такие три числа, что $a + b + c = 0$. Доказать, что в этом случае справедливо соотношение $ab + ac + bc \leqslant 0$.

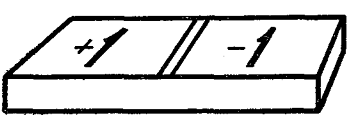


Рис. 4.

3. Имеется 200 карточек размером 1×2, на каждой из которых написаны числа $+1$ и -1 (см. рис. 4)

Можно ли так заполнить этими карточками лист клетчатой бумаги размером 4×100, чтобы произведения чисел в каждом столбце и каждой строке образовавшейся таблицы были положительны? (Карточка занимает целиком две соседние клетки.) (Ср. с задачей № 5 для VIII класса).

4. См. задачу № 4 для VIII класса.

5. Можно ли так провести прямую по листу клетчатой бумаги размером 20×30, чтобы она пересекла 50 клеток?

VIII класс

1. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — такие числа, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$. Доказать, что в этом случае справедливо соотношение:

$$S = a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n \leqslant 0;$$

в сумму S входят все возможные произведения a_ia_j, $i \neq j$ (ср. с задачей № 2 для VII класса).

2. Даны выпуклый четырехугольник $ABCD$ площади S и точка M внутри него. Точки P, Q, R, S симметричны точке M относительно середин сторон четырехугольника $ABCD$. Найти площадь четырехугольника $PQRS$.

3. Решить в целых числах уравнение

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3.$$

4. На плоскости даны 7 прямых, никакие две из которых не параллельны. Доказать, что найдутся две из них, угол между которыми меньше 26°.

5. Лист клетчатой бумаги размером $5 \times n$ заполнен карточками размером 1×2 так, что каждая карточка занимает целиком две соседние клетки. На каждой карточке написаны числа $+1$ и -1 (рис. 4). Известно, что произведения чисел по строкам и столбцам образовавшейся таблицы положительны. При каких n это возможно?

IX класс

1. Первый член и разность арифметической прогрессии — целые числа. Доказать, что найдется такой член прогрессии, в записи которого участвует цифра 9.

2. См. задачу № 5 для VIII класса.

3. a, b, c — любые положительные числа. Доказать, что

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

4. Из любых четырех точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно так выбрать три, что треугольник с вершинами в этих точках имеет хотя бы один угол, не больший 45°. Доказать. (Ср. с задачей № 2 для X класса.)

5. Можно ли в прямоугольник с отношением сторон 9 : 16 вписать прямоугольник с отношением сторон 4 : 7 (так, чтобы на каждой стороне первого прямоугольника лежала вершина второго)?

X класс

1. См. задачу № 1 для IX класса.

2. Из любых шести точек на плоскости (из которых никакие три не лежат на одной прямой) можно так выбрать три, что треугольник с вершинами в этих точках имеет хотя бы один угол, не больший 30°. Доказать.

3. Какое наибольшее число клеток может пересечь прямая, проведенная на листе клетчатой бумаги размером $m\times n$ клеток?

4. a, b, c — такие три числа, что $abc>0$ и $a+b+$ $+c>0$. Доказать, что $a^n+b^n+c^n>0$ при любом натуральном n.

5. Дан произвольный треугольник ABC. Найти множество всех таких точек M, что перпендикуляры к прямым AM, BM, CM, проведенные из точек A, B, C (соответственно), пересекаются в одной точке.

XI класс

1. Положительные числа x, y, z обладают тем свойством, что

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y+\operatorname{arctg}z<\pi.$$

Доказать, что сумма этих чисел больше их произведения.

2. Дана система из 25 различных отрезков с общим началом в данной точке A и с концами на прямой l, не проходящей через эту точку. Доказать, что не существует

замкнутой 25-звенной ломаной, для каждого звена которой нашелся бы отрезок системы, равный и параллельный этому звену.

3. См. задачу № 5 для X класса.

4. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составляются всевозможные семизначные числа, в записи которых каждая из этих цифр встречается ровно один раз. Доказать, что сумма всех таких чисел делится на 9.

5. Каждое ребро правильного тетраэдра разделено на три равные части. Через каждую полученную точку деления проведены две плоскости, параллельные соответственно двум граням тетраэдра, не проходящим через эту точку. На сколько частей построенные плоскости разбивают тетраэдр?

2-й тур

VII класс

1. Завод выпускает погремушки в виде кольца с надетыми на него 3 красными и 7 синими шариками. Сколько различных погремушек может быть выпущено? (Две погремушки считаются одинаковыми, если одна из них может быть получена из другой только передвижением шариков по кольцу и переворачиванием.)

2. См. задачу № 2 для IX класса.

3. Дан произвольный треугольник ABC и проведена такая прямая, пересекающая треугольник, что расстояние до нее от точки A равно сумме расстояний до этой прямой от точек B и C. Доказать, что все такие прямые проходят через одну точку.

4. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора 1, 2, ..., 1963, чтобы сумма любых двух выбранных чисел делилась на 26?

5. Система точек, соединенных отрезками, называется «связной», если из любой точки можно пройти в любую другую по этим отрезкам. Можно ли соединить пять точек отрезками в связную систему так, чтобы при стирании любого отрезка образовались ровно две связные системы точек, не связанные друг с другом? (Мы считаем, что в местах пересечения отрезков переход с одного из них на другой невозможен.)

VIII класс

1. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные положительные числа. Обозначим через b_k количество чисел из набора $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию: $a_i \geqslant k$. Доказать, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots .$$

2. В таблицу 8×8 вписаны все целые числа от 1 до 64. Доказать, что при этом найдутся два соседних числа, разность между которыми не меньше 5. (Соседними называются числа, стоящие в клетках, имеющих общую сторону.)

3. Найти множество центров тяжести всех остроугольных треугольников, вписанных в данную окружность.

4. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора 1, 2, ..., 1963, чтобы сумма никаких двух чисел не делилась на их разность?

5. По аллее длиной 100 метров идут три человека со скоростями 1, 2 и 3 *км/час*. Дойдя до конца аллеи, каждый из них поворачивает и идет назад с той же скоростью. Доказать, что найдется отрезок времени в 1 минуту, когда все трое будут идти в одном направлении.

IX класс

1. Дан произвольный треугольник ABC и точка X вне его. AM, BN, CQ — медианы треугольника ABC. Доказать, что площадь одного из треугольников XAM, XBN, XCQ равна сумме площадей двух других.

2. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая 14-звенная ломаная, проходящая по линиям клетчатой бумаги так, что ни на какой линии не лежит более одного звена ломаной?

3. В правильном 10-угольнике проведены все диагонали. Сколько попарно неподобных треугольников может при этом образоваться?

4. В таблицу 9×9 вписаны все целые числа от 1 до 81. Доказать, что найдутся два соседних числа, разность между которыми не меньше 6. (Ср. с задачей № 2 для VIII класса.)

5. См. задачу № 5 для VIII класса.

X класс

1. Доказать, что при нечетном n уравнение $x^n + y^n = z^n$ не может иметь решений в целых числах, если $(x + y)$ — простое число.

2. На листе бумаги нанесена сетка из n горизонтальных и n вертикальных прямых. Сколько различных $2n$-звенных ломаных можно провести по линиям сетки, так чтобы каждая ломаная проходила по всем горизонтальным и всем вертикальным прямым?

3. Из центра правильного 25-угольника проведены векторы во все его вершины. Как надо выбрать несколько векторов из этих 25, чтобы их сумма имела наибольшую длину?

4. A', B', C', D', E' — середины сторон выпуклого пятиугольника $ABCDE$. Доказать, что площади пятиугольников $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ связаны соотношением:

$$S_{A'B'C'D'E'} \geqslant \frac{1}{2} S_{ABCDE}.$$

5. Последовательность чисел a_1, a_2, ..., a_n ... образуется следующим образом:

$$a_1 = a_2 = 1;\ a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}} \quad (n \geqslant 3).$$

Доказать, что все числа в последовательности — целые.

XI класс

1. Доказать, что не существует попарно различных натуральных чисел x, y, z, t, для которых было бы справедливо соотношение

$$x^x + y^y = z^z + t^t.$$

2. Доказать, что из одиннадцати произвольных бесконечных десятичных дробей можно выбрать две дроби, разность которых имеет в десятичной записи либо бесконечное число нулей, либо бесконечное число девяток.

3. Найти все многочлены $P(x)$, для которых справедливо тождество:

$$x \cdot P(x-1) \equiv (x-26) \cdot P(x).$$

4. См. задачу № 4 для X класса.

5. Доказать, что на сфере нельзя так расположить три дуги в 300° каждая, чтобы никакие две из них не имели ни общих точек, ни общих концов.

XXVII олимпиада (1964 год)

1-й тур

VII класс

1. В треугольнике ABC высоты, опущенные на стороны AB и BC не меньше этих сторон (соответственно). Найти углы треугольника.

2. На данной окружности выбраны диаметрально противоположные точки A и B и третья точка C. Касательная, проведенная к окружности в точке B, и прямая AC пересекаются в точке M. Доказать, что касательная, проведенная к окружности в точке C, делит пополам отрезок BM.

3. Доказать, что сумма цифр числа, являющегося точным квадратом, не может равняться пяти.

4. На листе бумаги проведено 11 горизонтальных и 11 вертикальных прямых, точки пересечения которых называются «узлами». «Звеном» мы будем называть отрезок прямой, соединяющий два соседних узла одной прямой. Какое наименьшее число звеньев надо стереть, чтобы после этого в каждом узле сходилось не более трех звеньев?

5. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ образована по закону:

$$a_0 = a_1 = 1; \; a_{n+1} = a_{n-1}\, a_n + 1, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Доказать, что число a_{1964} не делится на 4.

VIII класс

1. См. задачу № 1 для VII класса.

2. Найти все такие натуральные числа n, что число $(n-1)!$ не делится на n^2.

3. Решить в целых числах уравнение:

$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}}}_{y \text{ корней}} = z.$$

4. В шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны. Доказать, что длины сторон такого шестиугольника удовлетворяют соотношениям:

$$AB - DE = EF - BC = CD - AF.$$

5. Рассмотрим суммы цифр всех чисел от 1 до 1 000 000 включительно. У полученных чисел снова рассмотрим суммы цифр, и так далее, пока не получим миллион однозначных чисел. Каких чисел больше среди них — единиц или двоек?

IX класс

1. Решить в положительных числах систему:

$$\begin{cases} x^y = z, \\ y^z = x, \\ z^x = y \end{cases}$$

2. Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел не является степенью никакого целого числа.

3. Известно, что при любом целом $k \neq 27$ число $a - k^3$ делится без остатка на $27 - k$. Найти a.

4. См. задачу № 4 для VIII класса. Кроме того, доказать, что если длины отрезков a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 удовлетворяют соотношениям

$$a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6,$$

то из этих отрезков можно построить равноугольный шестиугольник.

5. В четырехугольнике $ABCD$ из вершин A и C проведены перпендикуляры на диагональ BD, а из вершин B и D проведены перпендикуляры на диагональ AC. Доказать, что четырехугольники $ABCD$ и $MNPQ$ подобны. (M, N, P, Q — основания перпендикуляров.)

X—XI классы

1. Число N является точным квадратом и не оканчивается нулем. После зачеркивания у этого числа двух последних цифр снова получился точный квадрат. Найти наибольшее число N с таким свойством.

2. См. задачу № 3 для VIII класса.

3. Известно, что при любом целом $k \neq 27$ число $a - k^{1964}$ делится без остатка на $27 - k$. Найти a. (Ср. задачу № 3 для IX класса.)

4. См. задачу № 4 для VIII класса.

5. На какое наименьшее число непересекающихся тетраэдров можно разбить куб?

2-й тур

VII класс

1. На отрезке AC выбрана произвольно точка B и на отрезках AB, BC и AC, как на диаметрах, построены окружности O_1, O_2 и O_3. Через точку B проводится произвольная прямая, пересекающая окружность O_3 в точках P и Q, а окружности O_1 и O_2 — в точках R и S (соответственно). Доказать, что $PR = QS$.

2. Собрались $2n$ человек, каждый из которых знаком не менее чем с n присутствующими. Доказать, что можно выбрать из них четырех человек и рассадить их за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своими знакомыми.

3. В квадрате со стороной длины 1 выбраны 102 точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Доказать, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого меньше, чем $\frac{1}{100}$.

4. Через противоположные вершины A и C четырехугольника $ABCD$ проведена окружность, пересекающая стороны AB, BC, CD и AD соответственно в точках M, N, P и Q. Известно, что $DP = DQ = BM = BN = R$, где R — радиус окружности. Доказать, что в таком случае сумма углов ABC и ADC данного четырехугольника равна $120°$.

5. При каких натуральных a существуют такие натуральные числа x и y, что $x^2 + y^2 = axy$?

VIII класс

1. В n стаканов достаточно большой вместимости налито поровну воды. Разрешается переливать из любого стакана в любой другой столько воды, сколько имеется в этом последнем. При каких n можно в конечное число операций слить всю воду в один стакан?

2. Даны три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, и точка O вне этой прямой. Обозначим через O_1, O_2, O_3 центры окружностей, описанных около треугольников

OAB, OBC, OAC. Доказать, что точки O_1, O_2, O_3 и O лежат на одной окружности.

3. На квадратном поле размером 99×99, разграфленном на клетки размерами 1×1, играют двое. Первый игрок ставит крестик на центр поля, вслед за этим второй игрок может поставить нолик на любую из восьми клеток, окружающих крестик первого игрока, и т. д. Первый игрок выигрывает, если ему удастся поставить крестик на любую угловую клетку. Доказать, что при любой игре второго игрока первый всегда может выиграть.

4. Внутри равностороннего (не обязательно правильного) семиугольника $ABCDEFG$ взята произвольно точка O. Обозначим через M, N, P, Q, R, S, T основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA соответственно. Известно, что точки M, N, P, Q, R, S, T лежат на самих сторонах, а не на их продолжениях. Доказать, что

$$AM + BN + CP + DQ + ER + FS + GT = \\ = BM + CN + DP + EQ + FR + GS + TA.$$

5. В квадрате со стороной длины 1 взята произвольно 101 точка (не обязательно внутри квадрата), причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Доказать, что существует треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше $\frac{1}{100}$.

IX класс

1. См. задачу № 4 для VIII класса.

2. См. задачу № 1 для VIII класса.

3. Доказать, что любое четное число $2n$ может быть единственным образом представлено в виде $2n = (x + y)^2 + 3x + y$, где x и y — целые неотрицательные числа.

4. В треугольнике ABC сторона BC равна полусумме двух других сторон. Доказать, что биссектриса угла BAC перпендикулярна отрезку, соединяющему центры вписанной и описанной окружностей треугольника.

5. На клетчатой бумаге начерчена замкнутая ломаная с вершинами в узлах сетки, все звенья которой равны. Доказать, что число звеньев такой ломаной четно.

X класс

1. В n мензурок налиты n разных жидкостей; кроме того, имеется одна пустая мензурка. Можно ли за конечное число операций составить равномерные смеси в каждой мензурке (т. е. сделать так, чтобы в каждой мензурке было ровно $\frac{1}{n}$ от первоначального количества каждой жидкости и при этом одна мензурка была бы пустой)?

Примечание. Мензурка имеет деления, позволяющие измерять объем *налитой жидкости.*

2. Дана система из n точек на плоскости, причем известно, что для любых двух точек данной системы можно указать движение плоскости, при котором первая точка перейдет во вторую, а система перейдет сама в себя. Доказать, что все точки такой системы лежат на одной окружности.

3. Дан треугольник ABC, причем сторона BC равна полусумме двух других сторон. Доказать, что в таком треугольнике вершина A, середины сторон AB и AC и центры вписанной и описанной окружностей лежат на одной окружности (ср. задачу № 4 для IX класса).

4. Можно ли на клетчатой бумаге нарисовать равностороннюю ломаную с вершинами в узлах сетки, имеющую нечетное число звеньев? (Ср. задачу № 5 для IX класса.)

5. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написаны какие-то натуральные числа. Известно, что для любого натурального числа n можно указать ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Доказать, что любое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.

XI класс

1. Из точки O на плоскости проведено несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Доказать, что можно выбрать несколько векторов (или, быть может, один вектор), длина суммы которых больше 1.

2. См. задачу № 3 для IX класса.

3. В треугольнике ABC сторона BC равна полусумме двух других сторон. Через точку A и середины сторон AB и AC проведена окружность и к ней из центра тяжести

треугольника проведены касательные. Доказать, что одна из точек касания является центром вписанной окружности треугольника ABC (ср. задачу № 4 для IX класса и № 3 для X класса).

4. Пирог имеет форму правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Из середины каждой стороны проведены прямолинейные надрезы длины 1. Доказать, что при этом от пирога всегда будет отрезан какой-нибудь кусок.

5. При дворе короля Артура собрались $2n$ рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более $n-1$ врага. Доказать, что Мерлин — советник Артура — может так рассадить рыцарей за Круглым Столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

А. АЛГЕБРА

§ 1. Доказательство тождеств

1. Представьте число $\frac{a}{b}$ в виде $\left[\frac{a}{b}\right]+\alpha$, где $0\leqslant\alpha<1$.

Второе решение: рассмотрите числа, делящиеся на c и не превосходящие $\frac{a}{b}$, а также числа, делящиеся на c и не превосходящие $\left[\frac{a}{b}\right]$.

2. Представьте правую часть тождества в виде:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)=$$

$$=\frac{3}{\sqrt[3]{9}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}.$$

3. Двукратным умножением на сопряженное выражение избавьтесь от иррациональности в знаменателях обеих частей.

4. Используйте тождество

$$\log_m x=\frac{\log_n x}{\log_n m}$$

(так называемый «модуль перехода» от одного основания логарифмов к другому).

5. Приведите данное выражение к виду, содержащему только $\sin 10°$, и воспользуйтесь формулой: $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

6. Используйте соотношение

$$C_n^m=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^m.$$

§ 2. Суммирование конечных последовательностей

7. Покажите, что при $n=0$ равенство справедливо, и докажите, что при увеличении n на 1 левая часть также увеличивается на 1.

8. Воспользуйтесь тем, что $\frac{1}{\log_a b}=\log_b a$.

9. Воспользуйтесь результатом задачи 17.

10. Воспользуйтесь методом математической индукции.

11. Воспользуйтесь методом математической индукции.

12. Воспользуйтесь тем, что числа

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1},\ \cos\frac{4\pi}{2n+1},\ \ldots,\ \cos\frac{2n\pi}{2n+1}$$

представляют собой действительные части корней уравнения

$$x^{2n+1}-1=0.$$

Второе решение: правильный $(2n+1)$-угольник, одной из сторон которого является отрезок $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$ на оси абсцисс, спроектируйте на ось абсцисс.

13. Покажите, что числа $\sin^2\frac{\pi}{2n+1}$, $\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}$, ..., $\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$ являются корнями уравнения

$$C_{2n+1}^{1}(1-x)^n-C_{2n+1}^{3}(1-x)^{n-1}x+\ldots+(-1)^n x^n=0.$$

14. Докажите, что $(2m+1)\frac{1}{2k+1}C_m^k=C_m^k+2m\frac{1}{2k+1}C_{m-1}^k$.

Пользуясь этим и учитывая, что $C_m^0-C_m^1+C_m^2-\ldots+$ $+(-1)^m C_m^m=0$, установите соотношение $S_m=\frac{2m}{2m+1}S_{m-1}$, где S_m означает левую часть доказываемого тождества. Затем примените метод математической индукции.

15. Воспользуйтесь формулой:

$$\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{arc\,tg} y=\operatorname{arc\,ctg}\frac{1+xy}{x-y}.$$

16. Выражение, стоящее в левой части, равно коэффициенту при x^n, получающемуся после раскрытия скобок и приведения подобных членов в произведении

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n =$$

$$= \left(C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n\right)\left(C_n^n + C_n^{n-1} x + \ldots + C_n^0 x^n\right).$$

17. $1 - \frac{1}{n+1}$. Указание. Воспользуйтесь равенством

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

18. $\frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$.

Указание:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right].$$

19. $\frac{n}{2n+1}$. Указание:

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right).$$

Замечание: Результаты задач **17**, **18**, **19** нетрудно обобщить:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k(k+1)} + \ldots + \frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)\cdot \ldots \cdot n} =$$

$$= \frac{1}{k-1}\left[\frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k} - \frac{1}{(n-k+2)(n-k+3)\cdot \ldots \cdot n}\right],$$

или, иначе,

$$\frac{1}{k!} + \frac{1!}{(k+1)!} + \frac{2!}{(k+2)!} + \ldots + \frac{(n-k)!}{n!} =$$

$$= \frac{1}{k-1}\left[\frac{1}{k!} - \frac{(n-k+1)!}{n!}\right].$$

20. $1 - \frac{1}{n!}$. Указание: $\frac{k-1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$.

21. $(n+1)!-1$. Указание: $k!\,k=(k+1)!-k!$.

22. $\frac{1}{x^2-1}(x^{2n+2}-x^{-2n})-2n-1$.

23. $n!\cdot C_{n+p}^{p-1}$. Указание. Умножив и разделив данную сумму на $n!$, вычислите сумму $C_n^0+C_{n+1}^1+\ldots+C_{n+p-1}^{p-1}$, используя соотношение $C_m^k+C_m^{k-1}=C_{m+1}^k$ и заменив C_n^0 на C_{n+1}^0.

24. $\frac{1}{q-1}\left\{a(q^{n+1}-1)+d\left[nq^{n+1}-\frac{q^{n+1}-q}{q-1}\right]\right\}$.

Указание. Представьте данное выражение в виде

$$a(1+q+q^2+\ldots+q^n)+d[(q+q^2+\ldots+q^n)+$$
$$+(q^2+q^3+\ldots+q^n)+\ldots+(q^n)].$$

25. $\frac{1}{x-1}\left(nx^{n+1}-\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\right)$. Указание. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

26. $\frac{x}{1-x}\left(n-x\cdot\frac{1-x^n}{1-x}\right)$.

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи **24.**

27. $2^{n+2}-(n+3)$. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи **24.**

28. $\frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$. Указание. Покажите, что имеет место равенство: $1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n}=n+$

$+10(n-1)+100(n-2)+1000(n-3)+\ldots+10^n\cdot1$, и воспользуйтесь результатом задачи **24.**

29. $2^{n+4}-(n^2+7n+14)$. Указание. Воспользуйтесь методом математической индукции.

30. $\dfrac{\sin\frac{n\varphi}{2}\,\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$. Указание. Обозначив через z комплексное число $\cos\varphi+i\sin\varphi$, рассмотрите два выражения для суммы $z+z^2+\ldots+z^n$. Первое выражение получите, суммируя геометрическую прогрессию; для получения второго выражения воспользуйтесь формулой Муавра: $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^k=\cos k\varphi+i\sin k\varphi$; приравняйте мнимые части полученных выражений.

Второе решение: в тождестве

$$\sin kx = 2\cos x \cdot \sin (k-1)x - \sin (k-2)x$$

произведите суммирование по k.

31. $\dfrac{\sin\dfrac{n\varphi}{2}\cos\dfrac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$. См. указание к предыдущей задаче; приравняйте действительные части полученных выражений.

Второе решение: воспользуйтесь тождеством

$$\cos kx = 2\cos x\cos (k-1)x - \cos (k-2)x.$$

32. $\dfrac{\sin n\varphi - 2n\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{(2n+1)\varphi}{2}}{4\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}$. Указание. Рассмотрите выражение $z+2z^2+3z^3+\ldots+nz^n$ и воспользуйтесь результатами задач **25** и **30**.

33. $2^n\cos^n\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{n\varphi}{2}$. Указание. Данная сумма является действительной частью выражения $1+C_n^1x+$ $+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n=(1+x)^n$, где $x=\cos\varphi+i\sin\varphi$; написав соотношение

$$(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2i\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)^n=$$

$$=2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)^n,$$

воспользуйтесь формулой Муавра (см. указание к задаче **30**).

34. C_{m+n}^k. Указание. Рассмотрите коэффициент при x^k, который получится, если раскрыть скобки и затем привести подобные члены в произведении
$\left(C_n^0+C_n^1x+\ldots+C_n^nx^n\right)\quad\left(C_m^m+C_m^{m-1}x+\ldots+C_m^0x^m\right)=$ $=(1+x)^{m+n}$ (ср. с задачей **16**).

§ 3. Доказательство неравенств

35. Пусть $a \geqslant b$, тогда мы имеем неравенства:

$$b \geqslant c + d, \quad ab \geqslant ac + ad \geqslant bc + ad.$$

Случай $a \leqslant b$ рассматривается аналогично.

36. Воспользуйтесь неравенством: $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

37. Сделайте замену: $x = \frac{1}{3} + \alpha$; $y = \frac{1}{3} + \beta$, $z = \frac{1}{3} + \gamma$ и воспользуйтесь очевидным соотношением $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Второе решение: в силу результата предыдущей задачи

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = (x + y + z)^2 = 1.$$

38. Рассмотрите очевидное неравенство

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \geqslant 0.$$

39. Замените 2^2 на $1 \cdot 2$, 3^2 на $2 \cdot 3$ и т. д. и воспользуйтесь результатом задачи **17**.

40. Замените в данной сумме:

а) $\frac{1}{3}$ на $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{7}$ на $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, ..., $\frac{1}{14}$ и $\frac{1}{15}$ на $\frac{1}{16}$ и т. д.;

б) $\frac{1}{3}$ на $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ на $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, ..., $\frac{1}{14}$ и $\frac{1}{15}$ на $\frac{1}{8}$ и т. д.

41. Замените в данной сумме каждое из чисел k^2 на меньшее произведение $(k-1)(k+1)$ и воспользуйтесь методом задачи **17**.

42. а) Данная сумма состоит из n слагаемых, каждое из которых не меньше, чем $\frac{1}{2n}$.

б) Докажите, что при любом $k = 0, 1, \ldots, n-1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n+k+1} + \frac{1}{2n-k} < \frac{3}{2n}.$$

43. Воспользовавшись неравенствами: $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ и $2|xy| \leqslant x^2 + y^2$, покажите, что

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \leqslant 1.$$

44. Воспользуйтесь неравенством: $1 + x \geqslant 2\sqrt{x}$, справедливым для $x > 0$.

45. Если одно из чисел a, b отрицательно, то неравенство очевидно. При a, $b > 0$ воспользуйтесь неравенством $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ и соотношением $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$.

46. Воспользуйтесь тождеством: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ и задачей 38.

47. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи и тем, что $\pi \neq 2$.

48. Замените $k!$ меньшим числом 2^{k-1}.

49. Покажите, что $2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$ и $2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\left(\sqrt{n+2} - 1\right)$; воспользуйтесь далее методом математической индукции; для доказательства приведенных неравенств можно воспользоваться неравенством $2ab \leqslant a^2 + b^2$.

50. Просуммируйте почленно по k от 1 до n соотношения

$$4 \cdot \frac{a_{k+2}}{2^{k+2}} = 2 \cdot \frac{a_{k+1}}{2^{k+1}} + \frac{a_k}{2^k}$$

и приведите подобные члены.

51. а) Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

и замените остальные члены данной суммы на $\frac{1}{n}$.

б) Воспользуйтесь указанием б) к задаче 42.

52. Сначала индукцией по k докажите неравенство для всех чисел n вида 2^k; затем «обратной индукцией» — «от m к $m-1$» распространите доказательство на все значения n.

53. Данное неравенство — частный случай неравенства Коши-Буняковского:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Для доказательства неравенства Коши-Буняковского положите

$$x = -\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

в очевидном неравенстве

$$(xa_1 + b_1)^2 + (xa_2 + b_2)^2 + \dots + (xa_n + b_n)^2 \geqslant 0$$

(ср. задачу **43**).

54. Докажите, что $1 + a^{2n} \geqslant a + a^{2n-1} \geqslant a^2 + a^{2n-2} \geqslant \dots \geqslant \geqslant a^n + a^n$ при $a > 0$.

55. Воспользуйтесь возрастанием $\sin x$ и убыванием $\cos x$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

56. Покажите, что $(2n+2)! > \frac{[(n+2)!]^{n+1}}{[(n+1)!]^n}$ и воспользуйтесь методом математической индукции.

57. Выразите обе части неравенства через $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

58. Превратите данную дробь в выражение, содержащее только синусы, и докажите неравенство

$$\frac{\sin px}{\sin x} \leqslant |p|$$

для целых p и $x \neq n\pi$.

59. Докажите, что $(n-k+1)k \geqslant n$ при $n \geqslant k \geqslant 1$, и сгруппируйте попарно множители в выражении $(n!)^2$.

60. Так как $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $p = \frac{p+q}{q} = \frac{p_1+q_1}{q_1}$, $q = \frac{p+q}{p} = \frac{p_1+q_1}{p_1}$, где p_1, q_1 — целые числа, пропорциональные p и q (соответственно); переписав доказываемое неравенство в виде

$$ab \leqslant \frac{q_1 a^{\frac{p_1+q_1}{q_1}} + p_1 b^{\frac{p_1+q_1}{p_1}}}{p_1+q_1},$$

положите $a_1 = a_2 = \dots = a_{q_1} = a^{\frac{p_1+q_1}{q_1}}$, $a_{q_1+1} = \dots = = a_{q_1+q_2} = b^{\frac{p_1+q_1}{q_1}} = b$ и используйте неравенство задачи **52**.

61. а) Раскрыв данное выражение по формуле бинома Ньютона, ограничьтесь первыми двумя членами; остальные члены положительны.

б) В разложении бинома замените каждое слагаемое на большее так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

62. Воспользовавшись неравенством $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ (см. задачу **61**), покажите, что $\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} : \left(\frac{n}{3}\right)^n < n+1$, и примените метод математической индукции.

63. Примените результат задачи **62.**

64. Воспользуйтесь результатом задачи **52** и очевидным неравенством: $(n-m)!\ n^m \geqslant n!$.

§ 4. Решение уравнений и систем уравнений

65. $x_{1,2}=3\pm\sqrt{21},\quad x_3=-2,\quad x_4=6.$ Указание. Заменой $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=t$ уравнение сводится к квадратному относительно t.

66. $x_{1,2,3,4}=-\frac{5}{2}a\pm\sqrt{\frac{5}{4}a^2\pm\sqrt{a^4+b^4}}$. Указание. Заменой $x+\frac{5}{2}a=t$ данное уравнение сводится к биквадратному.

67. $x_1=0,\quad x_2=7,\quad x_3=1.$ Указание. Положив

$$\sqrt{x^2-8x+9}+\sqrt{x^2-8x+7}=u,$$

$$\sqrt{x^2-8x+9}-\sqrt{x^2-8x+7}=v,$$

воспользуйтесь тем, что $uv=2$.

68. $x=\log_{\frac{3}{2}}2$. Указание. Представьте правую часть уравнения в виде $2\cdot 4^x$ и разделите обе части на 6^x.

69. Действительные решения: $x_1=16;\ x_2=81.$ Указание. Приведите уравнение к системе

$$\begin{cases} u+v=5, \\ u^4+v^4=97 \end{cases}$$

и, сделав замену $u+v=z,\ uv=t$, приведите ее к квадратному уравнению относительно t.

70. $z = 1{,}5 - 2i$. Указание. Представив z в виде $x + yi$, покажите, что $y = -2$, после чего составьте уравнение относительно x.

71. При $a \neq 0$, $b \neq 0$ решение существует лишь в том случае, если частное $\frac{a}{b}$ рационально и имеет (после сокращения) вид $\frac{2k+1}{4l+2}$; в этом случае решениями будут числа $x = \frac{(2k+1)\pi q}{2a}$, где q — целое число, дающее при делении на 4 тот же остаток, что и $2k+1$; если хотя бы одно из чисел a, b равно нулю, то решений нет.

72. $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Указание. Покажите, что либо $\operatorname{tg} x = 1$, либо $\sin x + \cos x = 0$.

73. $x = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}}$, $\quad y = \dfrac{2}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$,

$$z = \frac{2}{-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Указание. Так как $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ (почему?), то можно рассмотреть вспомогательную систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{x+z}{xz} = \dfrac{1}{b}, \\ \dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{1}{c}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{b}, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{c}. \end{cases}$$

74. $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$, $x_4 = 6$, $x_5 = 5$, $x_6 = 3$. Указание. Сложив все уравнения, получим: $x_1 + x_6 = 6$; далее надо исключить все неизвестные, кроме x_6.

75. $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{99} = x_{100} = 0$. Указание. Складывая уравнения через два, покажите, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_{99} = 0$; далее, складывая все уравнения вместе, получим $x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} = 0$.

76. $x_1 = x_2 = \ldots = x_{100} = 0$. Указание. Вычитая первое уравнение из остальных, получим систему, не содержащую x_1; затем, умножая в полученной системе первое уравнение на надлежащие числа и вычитая из остальных, получим систему, не содержащую также и x_2, и т. д. Покажите, что во всех получающихся системах коэффициенты положительны. В конце концов получаем $kx_{100}=0$, где $k\neq 0$, откуда $x_{100}=0$. Аналогично находим значения остальных неизвестных.

77. $x_1=\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{11}{2}$; $x_2=\frac{3}{2}$, $y_2=\frac{11}{2}$. Указание. Воспользуйтесь тем, что $y\geqslant 5$.

78. $x_1=\frac{2}{3}$, $y_1=\frac{3}{2}$, $z_1=6$; $x_2=-\frac{2}{3}$, $y_2=-\frac{3}{2}$, $z_2=-6$. Указание. Раскрыв скобки и сложив уравнения, найдите $xy+yz+xz$; затем определите xy, yz и xz, после чего, перемножив полученные выражения, найдите значение xyz.

79. $x_1=9$, $y_1=10$, $z_1=12$; $x_2=10$, $y_2=9$, $z_2=12$. Указание. Переписав систему в виде

$$\begin{cases} x+y=z+7, \\ x^2+y^2=z^2+37, \\ x^3+y^3=z^3+1 \end{cases}$$

и возведя первое уравнение в квадрат и в куб, исключите x и y и найдите z.

80. $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=3$, $y_2=2$; $x_3=-3$, $y_3=-2$; $x_4=2$, $y_4=3$; $x_5=-2$, $y_5=-3$; $x_6=y_6=\sqrt{7}$; $x_7=y_7=-\sqrt{7}$; $x_8=\sqrt{19}$, $y_8=-\sqrt{19}$; $x_9=-\sqrt{19}$, $y_8=\sqrt{19}$. Указание. Введите новые неизвестные: $u=x+y$, $v=xy$.

81. $x_1=3$, $y_1=5$; $x_2=-3$, $y_2=-5$; $x_3=36$, $y_3=-\frac{23}{2}$; $x_4=-36$, $y_4=\frac{23}{2}$. Указание. Сложив данные уравнения, найдите $x+2y$.

82. $x_1=3$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=3$; $x_3=-3$, $y_3=-2$; $x_4=-2$, $y_4=-3$. Указание. Воспользуйтесь соотношением

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

83. Если $|a|\neq|c|$ и $|ac|\neq 1$, то система имеет четыре решения:

$$x_1=\frac{2}{a-c},\quad y_1=\frac{2}{a+c};\quad x_2=\frac{2ac}{c-a},\quad y_2=\frac{2ac}{a+c};$$

$$x_3=\frac{2c}{ac-1},\quad y_3=\frac{2c}{ac+1};\quad x_4=\frac{2a}{1-ac},\quad y_4=\frac{2a}{1+ac};$$

если одно из условий нарушено, то имеются два решения (первое и второе или третье и четвертое); если, наконец, $|a|=|c|=1$, то решений нет. Указание. Введите новые неизвестные: $u=\frac{x-y}{xy}$, $v=\frac{x+y}{xy}$.

84. а) Вычитая из первого уравнения второе, получим $(x-y)\sigma=a-b$, где $\sigma=x+y+z$. Аналогично из второго и третьего уравнений находим $(y-z)\sigma=b-c$. Вычитая второе полученное соотношение из первого, найдем $(\sigma-3y)\sigma=a-2b+c$, что позволяет выразить y через σ. Аналогично выразим x и z через σ. Подставив полученные выражения x, y и z в любое из данных уравнений, получим квадратное уравнение относительно σ. Ответ:

$$x=\frac{1}{3}\left(\sigma-\frac{b+c-2a}{\sigma}\right),\quad y=\frac{1}{3}\left(\sigma-\frac{a+c-2b}{\sigma}\right),$$

$$z=\frac{1}{3}\left(\sigma-\frac{a+b-2c}{\sigma}\right),$$

где σ находится из уравнения

$$\sigma^2=a+b+c-3\frac{ab+ac+bc}{a+b+c};$$

если $a+b+c=0$, то решение существует лишь при $a=b=c=0$; в этом случае решений бесконечно много и все они имеют вид $x=y=z$.

б) Указание. Найдя из первых двух уравнений u и v, найти затем эти же величины из последних двух уравнений; приравнивая полученные выражения, найдем (в случае, когда $x\neq y$):

$$ax-b=\frac{cx-d}{y^2},\quad ay-b=\frac{cy-d}{x^2}.$$

Эти уравнения надо вычесть, затем, освободившись в них от знаменателей, еще раз вычесть:

$$a=\frac{c(x^2+xy+y^2)-d(x+y)}{(xy)^2};\quad -axy+b(x+y)=c;$$

вводя в этих уравнениях вспомогательные неизвестные $t=xy$, $s=x+y$, мы легко определим t и s, а затем и первоначальные неизвестные.

85. $x_1=\frac{1}{|a|}$, $y_1=|a^3|$; $x_2=|a^3|$, $y_2=\frac{1}{a}$. Указание Введите новые неизвестные $u=\lg x$, $v=\lg y$.

86. $x_1 = k\pi$, $y_1 = \alpha + l\pi$; $x_2 = \alpha + k\pi$, $y_2 = l\pi$; $x_3 = \frac{\pi}{3} - \alpha + \pi(2k+1)$, $y_3 = -\frac{\pi}{3} - \alpha + \pi(2l+1)$; $x_4 = -\frac{\pi}{3} - \alpha + \pi(2k+1)$; $y_4 = \frac{\pi}{3} - \alpha + \pi(2l+1)$.

Указание. Введите новые неизвестные: $u = x + y$, $v = x - y$ и приведите систему к виду, содержащему только $\cos u$ и $\cos v$.

87. $x_1 = y_1 = 2$; $x_2 = y_2 = 0$. Указание. Приведите данное уравнение к виду $(x-1)(y-1) = 1$ и воспользуйтесь тем, что $x - 1$ и $y - 1$ — целые числа.

88. $x_{1,2} = 1$, $y_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = 3$, $y_{3,4} = \pm 3$. Указание. Докажите предварительно, рассматривая последние цифры, что x не может быть больше 4.

89. $x = t \cdot \frac{2^t - 2}{3}$, $y = \frac{2^t - 2}{3}$, где t — любое нечетное число, большее 1. Указание. Выразив y через $\frac{x}{y}$, покажите, что число $\frac{x}{y} - 1$ четно; введите новое неизвестное $t = \frac{x}{y}$.

90. $p = q = r = 1$ и еще 6 решений, получающихся из решения $p = 2$, $q = 3$, $r = 4$ перестановками. Указание. Введя новые неизвестные $\alpha = p - 1$, $\beta = q - 1$, $\gamma = r - 1$, получим относительно α, β, γ уравнение: $\alpha + \beta + \gamma = \alpha\beta\gamma$, причем α, β, γ — неотрицательные целые числа. Полученное уравнение имеет очевидные решения: $\alpha = \beta = \gamma = 0$ и $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, а также решения, получающиеся из последнего перестановками.

Покажем, что других решений это уравнение не имеет. Пусть $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ и пусть $\alpha \geqslant 2$; тогда $\alpha\beta\gamma \geqslant 2 \cdot 2 \cdot \gamma = 4\gamma$, в то время как $\alpha + \beta + \gamma$ всегда меньше, чем 3γ; следовательно, $\alpha \leqslant 1$. Если $\alpha = 0$, то, очевидно, $\beta = \gamma = 0$. Если же $\alpha = 1$, $\beta \geqslant 3$, то $\alpha\beta\gamma \geqslant 3\gamma$, в то время как $\alpha + \beta + \gamma < 3\gamma$. Значит, $\beta \leqslant 2$.

Если $\beta = 1$, то для γ получаем противоречивое уравнение $2 + \gamma = \gamma$. Следовательно, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$.

91. $x = 1$, $y = \pm 1$, z — любое четное число; $x = 3$, $y = \pm 3$, $z = 2$; $x = 1$, $y = 1$, z — любое нечетное число; x — любое натуральное число, $y = 1! + 2! + \ldots + x!$, $z = 1$.

Указание. При $z = 2k$ задача сводится к задаче 88; для $z = 2k + 1$ докажите, что при $x \geqslant 8$, $z \geqslant 3$ решений нет.

92. $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$. Указание. Перепишите уравнение в виде $\sqrt{5x-1} + \sqrt{5y-1} = 5$ и докажите, что $x \leqslant 5$, $y \leqslant 5$.

93. $x_1 = y_1 = 1$; $x_2 = 2$, $y_2 = 3$. Указание. Докажите, что x и y — положительные числа; далее, представьте $3^x - 1$ в виде $(3-1)(3^{x-1} + 3^{x-2} + \ldots + 3 + 1)$ и докажите, что либо $x = 1$, либо x — четное число.

§ 5. Исследование уравнений, систем уравнений и неравенств

94. Воспользуйтесь графической интерпретацией неравенств (например, неравенство $ax - by < 0$ справедливо для всех тех и только тех точек, которые лежат выше прямой $y = \frac{a}{b}x$).

95. $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Указание. Решите предварительно уравнения:

$$\sin x = \cos x;\ \sin x = -\cos x.$$

96. Покажите, что если x — любое действительное решение данного уравнения, то

$$a_1 x = b_1,\ a_2 x = b_2,\ \ldots,\ a_n x = b_n.$$

97. Подставив в уравнение $x = \frac{1}{m}$, приведите левую часть к общему знаменателю.

98. Представьте x в виде несократимой дроби $x = \frac{m}{n}$ и покажите, что число $\frac{m^3}{n^2}$ должно быть целым, если только $x = \frac{m}{n}$ — корень данного уравнения; между тем дробь $\frac{m^3}{n^2}$ — несократима.

99. Покажите, что x не может быть ни четным, ни нечетным числом.

100. $a_1 = b_1 = 0$; $a_2 = b_2 = 2$; $a_3 = 1$, $b_3 = 5$; $a_4 = 5$, $b_4 = 1$. Указание. Воспользуйтесь теоремой Виета, из которой (при $a \neq 0$, $b \neq 0$) выведите соотношение $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1$.

101. Пусть x_0, y_0, z_0 — некоторое ненулевое целое решение. Тогда хотя бы одно из чисел x_0, y_0, z_0 отлично от нуля;

пусть, например, $z_0 \neq 0$. Уравнение $aX^2 + bXY + cY^2 = 1$ уже имеет одно рациональное решение: $X_0 = \frac{x_0}{z_0}$, $Y_0 = \frac{y_0}{z_0}$. Докажите теперь, что при любом рациональном числе k система уравнений

$$\begin{cases} aX^2 + bXY + cY^2 = 1, \\ Y - Y_0 = k(X - X_0) \end{cases}$$

имеет, кроме решения (X_0, Y_0), еще одно рациональное решение.

102. $a_1 = -\frac{125}{8}$, $a_2 = \frac{27}{8}$. Указание. Воспользуйтесь формулами Виета.

103. Перепишите данное уравнение в виде

$$p_0 + p_1x + p_2x^2 = (p_0 + p_1 + p_2)x$$

или, иначе,

$$(x - 1)(p_2x - p_0) = 0.$$

104. $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

105. а) $a_1 = -2$, $a_2 = 1$. б) $a_1 = -2$, $a_2 = 1$.

Указание. Составьте разность заданных уравнений.

106. Существуют; например, $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{22} = a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{34} = a_{35} = a_{42} = a_{46} = a_{53} = a_{56} = a_{57} = 1$, а остальные коэффициенты равны нулю. Указание. Докажите, что уравнение $2x_i + x_j = b$ (b — целое) не может иметь более одного решения при наложенных ограничениях на x_i и x_j.

107. Три решения. Указание. Постройте графики функций $y_1 = \sin x$, $y_2 = \lg x$.

108. Покажите, что $(1 + y)^k > 2y^k$, и, воспользовавшись тем, что $z \geqslant y + 1$, докажите, что при данных условиях левая часть уравнения всегда меньше правой.

109. Покажите, что $z^n > 2(z - 1)^n$, и воспользуйтесь методом предыдущей задачи.

110. Раскрывая скобки в произведении

$$\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right)(x_1 + x_2)$$

и пользуясь формулами Виета, получите соотношение

$$x_1^n + x_2^n = 6\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right) - \left(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}\right);$$

далее воспользуйтесь методом математической индукции.

111. Пусть $x^2+px+q=0$ — исходное уравнение, $y^2+py+(q+\varepsilon)=0$ — уравнение, полученное после округления числа q на ε, где $|\varepsilon|<0{,}00001$. Вычитая эти два уравнения, получим $(x-y)(x+y+p)=-\varepsilon$, откуда

$$|x_1-y_1|=\left|\frac{\varepsilon}{x_1+y_1+p}\right|\approx\left|\frac{\varepsilon}{2x_1+p}\right|=$$
$$=\frac{\varepsilon}{|x_1-x_2|}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{p^2-4q}}$$

(так как $x_1+x_2=-p$).

112. Рассмотрим отрезок длины N. Каждому решению данного уравнения в целых неотрицательных числах соответствует разбиение отрезка на n частей, дли́ны которых выражаются целыми неотрицательными числами. Следовательно, число решений данного уравнения равно числу способов выбора из $N+1$ точек (разбивающих отрезок на части длины 1, считая и концы) каких-то $n-1$ точек, некоторые из которых могут совпадать («сочетания с повторениями»).

113. Заметим, что при $v=0$ данное уравнение имеет вид $(z+1)^3+1=0$, и, следовательно, все его корни имеют отрицательные действительные части. Если бы при некотором значении v уравнение имело корень с положительной действительной частью, то нашлось бы и такое значение v, при котором уравнение имело бы ч и с т о м н и м ы й корень: $z=ix$.

Покажите теперь, что чисто мнимых корней уравнение иметь не может (для чего достаточно подставить $z=ix$ в уравнение и приравнять к нулю действительную и мнимую части полученного выражения).

114. Рассмотрите $\sin\pi nx$, $\cos\pi nx$, воспользовавшись соотношениями:

$$\sin n\alpha=C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+$$
$$+C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha-\ldots,$$
$$\cos n\alpha=C_n^0\cos^n\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+$$
$$+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-\ldots$$

и приняв

$$\cos\pi x=\frac{1}{n},\quad \sin\pi x=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}.$$

Приведенные соотношения доказываются при помощи формулы Муавра (см. указание к задаче **30**).

Второе решение: воспользовавшись равенством

$$\cos kx = 2\cos x \cos (k-1)x - \cos (k-2)x,$$

покажите, что если x — корень рассматриваемого уравнения, а p — простой множитель, входящий в число n, то $\cos kx$ имеет вид несократимой дроби, в знаменатель которой входит множитель p^k, следовательно, $\cos kx$ ни при каком k не является целым числом.

115. Покажите, что если $x+y\sqrt{5}=(9+4\sqrt{5})^n$ и x, y — целые числа, то $x-y\sqrt{5}=(9-4\sqrt{5})^n$; если $n<0$, то воспользуйтесь равенством

$$(9+4\sqrt{5})^n=(9-4\sqrt{5})^{-n}.$$

Доказательство обратного утверждения разбивается на следующие этапы (ср. стр. 16—18 вводной статьи). Для удобства мы условимся называть число $a+b\sqrt{5}$ «решением», если целые числа $x=a$, $y=b$ удовлетворяют уравнению $x^2-5y^2=1$.

1°. Если $a+b\sqrt{5}$ и $c+d\sqrt{5}$ — решения, то их произведение и частное снова являются решениями, причем частное представляется в виде $p+q\sqrt{5}$.

2°. Если $a+b\sqrt{5}$ и $c+d\sqrt{5}$ — решения, причем $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $d\geqslant 0$ и $a+b\sqrt{5}<c+d\sqrt{5}$, то $a<c$, $b<d$.

3°. Если $a+b\sqrt{5}$ — решение, то а) если $0<a+b\sqrt{5}$, то $a\geqslant 0$, б) если $1<a+b\sqrt{5}$, то $a\geqslant 0$, $b>0$.

4°. Покажите, что не существует целого решения, расположенного между 1 и $9+4\sqrt{5}$.

5°. Покажите, что все целые решения $p+q\sqrt{5}$, у которых p и q неотрицательны, имеют вид $(9+4\sqrt{5})^n$, где $n\geqslant 0$.

6°. Докажите, наконец, что последняя формула при $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ представляет все решения.

§ 6. Многочлены

116. Пусть данный многочлен является произведением многочленов $P(x)$ и $Q(y)$. Покажите, что эти многочлены должны содержать соответственно члены вида mx^3 и ny^3.

117. а) Искомая сумма равна нулю. Указание. Сумма коэффициентов многочлена равна его значению при $x = 1$.

б) Воспользуйтесь указанием к задаче а)

118. Данный многочлен ни при каком действительном x не обращается в нуль, поэтому многочлены $p(x)$ и $q(x)$, в произведение которых он может быть разложен, не меняют знака. Рассмотрите значения многочленов $p(x)$ и $q(x)$ при $x = a$ и $x = b$ и воспользуйтесь теоремой Безу.

119. Рассматривая коэффициенты при x^0, x^k, x^l в произведении $(x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k)(x^l + b_1 x^{l-1} + \ldots + b_l)$, покажите, что $a_k = b_l = 1$. Далее воспользуйтесь методом математической индукции.

120. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи и методом задачи **117.**

121. Если $x = i\omega$ — корень многочлена, то его корнем является также число $x = -i\omega$; теперь по теореме Виета $b = 0$, $c = a\omega^2$, и многочлен представляется в виде

$$ax^2 + a\omega^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{2}}\,x + \omega\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{a}{2}}\,x - \omega\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2.$$

122. $a_1 = 8$; $a_2 = 12$. Указание. В равенстве

$$(x - a)(x - 10) + 1 = (x + b)(x + c)$$

положите $x = 10$.

123. а) $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$; б) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$.

124. Воспользуйтесь тем, что при $|x| > 1$, $k < n$ имеет место неравенство $|x^k| < |x^n|$; примените неравенство $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

125. Докажите, что $P\left(\frac{p}{q}\right)$ не может быть целым числом (а значит, и нулем), если $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь.

126. Разберите отдельно случаи $x < 1$ и $x \geqslant 1$; в первом случае разбейте многочлен на три слагаемых:

$$(1 - x) + (x^4 - x^9) + x^{12};$$

во втором случае представьте многочлен в виде

$$(x^8 + 1)(x^4 - x) + 1.$$

127. Данный многочлен не может иметь действительных корней; следовательно, его корни являются попарно комплексно-сопряженными. Поэтому многочлен представляется в виде:

$$A[(x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)]\,[(x-\bar{\alpha}_1)\cdot\ldots\cdot(x-\bar{\alpha}_k)],$$

где $A>0$.

Если $f(x)$ — действительная часть многочлена, получающегося после раскрытия скобок в первой квадратной скобке, и $g(x)$ — его мнимая часть, то вторая квадратная скобка представляется в виде $f(x)-ig(x)$ (так как она комплексно-сопряжена с первой).

Данный многочлен, следовательно, равен

$$A[f(x)+ig(x)][f(x)-ig(x)]=A[f^2(x)+g^2(x)].$$

128. $a_1=-8$, $b_1=18$; $a_2=8$, $b_2=14$. Указание. Приравняйте коэффициенты при одинаковых степенях x у данного многочлена и у выражения $(mx^2+nx+p)^2$.

129. Остаток равен x^3-1. Указание. Покажите, что данный многочлен делится на x^2+x+1, после чего найдите остаток от деления многочлена

$$x^{1956}+x^{1953}+\ldots+x^6+x^3+1 \text{ на } x^2+1.$$

130. Остаток равен

$$A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+B\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Указание. Подставляя в тождество

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\,Q(x)+R(x)$$

вместо x числа a, b, c, получим систему уравнений для определения коэффициентов многочлена

$$R(x)=lx^2+mx+n.$$

Докажите, что эта система имеет единственное решение, и проверьте, что коэффициенты приведенного выше многочлена ей удовлетворяют.

131. $a=\dfrac{n}{n-2}$ (если только $n\geqslant 3$). Указание. Представьте данный многочлен в виде

$$(x^n-1)-ax(x^{n-2}-1)$$

и воспользуйтесь формулой

$$x^m - 1 = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)$$

и теоремой Безу.

132. Рассмотрите полусумму обоих выражений величины A и покажите, что эта полусумма есть частное двух возвратных многочленов (т. е. многочленов вида

$$p_0 + p_1x + p_1x^{-1} + p_2x^2 + p_2x^{-2} + \ldots + p_kx^k + p_kx^{-k}).$$

Докажите, что всякий возвратный многочлен можно представить в виде

$$q_0 + q_1z + \ldots + q_kz^k, \text{ где } z = x + \frac{1}{x}.$$

133. Представьте данное соотношение в виде $P^4 = (R+Q)(R-Q)(R+iQ)(R-iQ)$. Предполагая, что многочлены R и Q взаимно просты и пользуясь единственностью разложения на множители, покажите, что каждый сомножитель в правой части представляет собой четвертую степень. Из этого легко вывести, что $R = U^4$, $Q = V^4$, где U и V — некоторые многочлены (с комплексными коэффициентами), и потому $U^4 + iV^4 = W^4$. Повторяя этот прием, приведите исходное соотношение к противоречию.

134. $\frac{101 \cdot 102 \cdot 103}{6}$ членов. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи **112** и формулой:

$$p! + \frac{(p+1)!}{1!} + \frac{(p+2)!}{2!} + \ldots + \frac{(p+n-1)!}{(n-1)!} = \\ = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{(n+p)!}{(n-1)!},$$

справедливой при любых натуральных n и p и легко доказываемой по индукции.

135. Рассмотрите многочлен

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p).$$

Для доказательства второго утверждения задачи рассмотрите разность значений многочлена в точках x и $x-1$: $P(x) - P(x-1)$; затем рассмотрите «вторую разность»:

$$[P(x+1) - P(x)] - [P(x) - P(x-1)] = \\ = P(x+1) - 2P(x) + P(x-1),$$

затем третью разность и т. д.

Докажите, что k-я разность для многочлена степени k равна $k!$, и воспользуйтесь тем, что $k!$ не делится на p при простом p и $k < p$.

136. Воспользуйтесь методом математической индукции, применив его к рассмотрению треугольника Паскаля (см. указание к задаче **270**), составленного из остатков от деления чисел C_n^k на 2.

137. Искомая сумма равна 1. Для доказательства подставьте в многочлен $(x^{1958} + x^{1957} + 2)^{1959}$ вместо x значение $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и воспользуйтесь тем фактом, что куб этого комплексного числа равен 1.

138. $x^2 - \frac{1}{2}$; уклонение этого многочлена от нуля на отрезке от -1 до 1 равно $\frac{1}{2}$. Рассмотрите наименьшее значение многочлена $x^2 + px + q$ (оно принимается при $x = -\frac{p}{2}$) и разберите отдельно случаи $\left|-\frac{p}{2}\right| \geqslant 1$ и $\left|-\frac{p}{2}\right| < 1$.

139. а) Предварительно докажите, что $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}$, для чего воспользуйтесь соотношениями

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n \text{ и } C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

б) Раскрыв скобки по формулам бинома Ньютона, сравните полученное выражение с формулой для $\cos n\alpha$ (см. указание к задаче 114), положив в ней $\alpha = \arccos x$, $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = \sqrt{1 - x^2}$. Докажите, что уже на отрезке от -1 до 1 функция $y = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x)$ имеет n корней.

в) Воспользуйтесь результатами задач а) и б).

г) Положив $w_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ и заметив, что $w_1 + w_2 = 2x$, $w_1 w_2 = 1$, раскройте скобки в выражении $(w_1^{n-1} + w_2^{n-1})(w_1 + w_2)$.

д) Воспользуйтесь представлением многочлена $T_n(x)$ в виде

$$\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x).$$

§ 7. Прогрессии

140. Рассмотреть отдельно случай, когда обе прогрессии возрастающие, и случай, когда обе они — убывающие.

141. Прогрессию с суммой $\frac{1}{5}$ выбрать нельзя. Сумму $\frac{1}{7}$ имеет бесконечная убывающая геометрическая прогрессия $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8^2}$; $\frac{1}{8^3}$; ... . Указание. Доказать, что если сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии, составленной из чисел вида $\frac{1}{2^k}$, выражается несократимой дробью, у которой числитель и знаменатель нечетны, то знаменатель прогрессии равен ее первому члену, а сумма имеет вид $\frac{1}{2^m-1}$.

142. Доказать, что разность этой прогрессии делится одновременно на 2 и на 3. (Например, если бы разность была нечетной, то уже второй член прогрессии делился бы на 2.)

143. Покажите, что у рассматриваемой прогрессии сумма a_1+a_{m+n} равна нулю.

144. Покажите, что из равенства

$$c^2-b^2=b^2-a^2$$

следует

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}=\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c}.$$

145. Рассмотрите тысячный, миллионный, миллиардный и т. д. члены прогрессии. Покажите, что суммы цифр чисел этого ряда, начиная с некоторого члена, не меняются.

146. Выразите разности $S_{2n}-S_n$ и $S_{3n}-S_{2n}$ через S_n и q^n.

147. Для доказательства необходимости докажите, что $\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$, где d — разность прогрессии. Для доказательства достаточности рассмотрите соотношения

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{x_{k-1}x_k}=\frac{k-1}{x_1x_k}$$

при $k=n$, $n-1$, $n-2$, и выведите отсюда равенство:

$$a_{n-1}-a_n=a_{n-2}-a_{n-1}.$$

148. m должно быть наименьшим из чисел m_i, для которых $a_0(q^{m_i}-1)$ делится на p.

149. $P=\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

150. $N=q^{\frac{1}{r}}$, $M=b_0q^{-\frac{a_1}{r}}$, где r — разность арифметической прогрессии, а b_0 и q — начальный член и знаменатель геометрической прогрессии.

151. Число a должно быть равно $q^{\frac{1}{d}}$ (q — знаменатель геометрической прогрессии, d — разность арифметической прогрессии, $q>0$, $d>0$).

152. Воспользуйтесь методом математической индукции. Именно, выбрав из n прогрессий первые $n-1$ прогрессий и обнаружив у них (согласно предположению индукции) общий член A, вычтите это число из всех членов всех n прогрессий; покажите, что в последней прогрессии найдется член, делящийся на наименьшее общее кратное разностей $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ первых $n-1$ прогрессий.

§ 8. Делимость чисел

153. Дробь $\frac{a-b}{a+b}$ сократима. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

154. Если a — целый делитель числа n, то целое число $\frac{n}{a}$ также является делителем числа n; таким образом, все делители числа n, кроме $\sqrt{n}$, распадаются на пары.

155. Рассмотрите произведение $(p-q)(p+q)$; покажите, что оба сомножителя четны, хотя бы один делится на 4 и хотя бы один из них делится на 3.

156. Покажите, что этот остаток не может делиться ни на 2, ни на 3, ни на 5.

157. $p=3$. Указание. Докажите, что при $p\neq 3$ число $8p^2+1$ всегда делится на 3.

158. $p=3$. Указание. Покажите, что если $p\neq 3k$, то одно из чисел $10+p$ или $14+p$ будет делиться на 3.

159. Не будет. Указание. Рассмотрите остатки от деления чисел $2p+1$ и $4p+1$ на 3.

160. Воспользуйтесь тем, что любой делитель рассмат-

риваемого числа больше n и взаимно прост с числами $1, 2, 3, \ldots, n$.

161. Покажите, что среди чисел $a, a+d, a+2d, \ldots$ $\ldots, a+(n-1)d$ найдутся хотя бы два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n. Воспользуйтесь тем, что разность этих двух чисел делится на n.

162. Покажите, что рассматриваемая сумма представляет собой точный квадрат.

163. Таким является, например, число $x=n+2$.

164. Показать, что числа $M, 2M, 3M, \ldots, KM$ дают попарно различные остатки при делении на K. Если остаток от деления N на K равен r, то среди чисел M, $2M, \ldots, KM$ найдется число Mx, дающее при делении на K остаток $K-r$. Число $N+Mx$ — искомое.

165. Докажите, что последние цифры чисел $7, 7^2, 7^3$, $7^4, \ldots$ — периодически повторяются.

166. Замените основания 2222 и 5555 их остатками от деления на 7. Далее воспользуйтесь тем, что числа $3, 3^2$, $3^3, 3^4, \ldots$ (а также $4, 4^2, 4^3, 4^4, \ldots$) имеют периодически повторяющиеся остатки от деления на 7.

167. Представьте $11^{10}-1$ в виде $(11-1)(11^9+11^8+$ $+\ldots+11+1)$ и воспользуйтесь тем, что количество слагаемых в сумме $11^9+11^8+\ldots+11+1$ равно 10.

168. Воспользуйтесь методом математической индукции и результатом предыдущей задачи; заметим, что

$$11^{10^{1961}}=\left(11^{10^{1960}}\right)^{10}.$$

169. а) На цифру 7 (см. указание к задаче **165**).

б) 36. Указание. Так как $14^{12}=(14^2)^6=196^6=$ $=(200-4)^6=100k+4^6=100k+4096$, то оба числа 14^{12} и $14^2=196$ оканчиваются двумя одинаковыми цифрами 96. Докажите, исходя из этого, что последние две цифры чисел $14^2, 14^3, 14^4, \ldots, 14^{12}, \ldots$ периодически повторяются с периодом 10. Затем найдите последнюю цифру числа 14^{14}.

170. $13717421=3803\cdot 3607$. Указание. Если $N=x_1^2+dy_1^2=x_2^2+dy_2^2$, то $x_1^2-x_2^2=d(y_2^2-y_1^2)$, или $\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}=d\,\frac{y_2+y_1}{x_1+x_2}$. Если числа d и x_1+x_2 взаимно просты, то, сократив дроби, найдем такие натуральные числа u, v, s, t, что $\begin{cases}x_1-x_2=dut,\\ y_2+y_1=us,\end{cases}$ $\begin{cases}y_2-y_1=vt,\\ x_1+x_2=vs,\end{cases}$

причем u и v взаимно просты; отсюда

$$N = \frac{1}{4}\left(v^2 + du^2\right)\left(s^2 + dt^2\right).$$

171. а) 264 делителя (считая единицу и само число) (см. задачу б)).

б) Все делители числа отличаются друг от друга показателями, с которыми входят в их разложения на простые множители числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Число p_i может либо вовсе не войти в разложение делителя, либо войти в него в любой степени от 1 до α_i; всего имеется, стало быть, $\alpha_i + 1$ возможность. Комбинируя эти возможности для различных простых делителей, мы и получим требуемое.

172. Покажите, что разность $a^3 - a$ всегда делится на 6.

173. Покажите, что квадрат целого числа может давать при делении на 21 только следующие остатки: 0, 1, 4, 9, 16, 15, 7, 18. Воспользуйтесь тем, что никакие два из перечисленных чисел в сумме не делятся на 21, кроме пары чисел 0,0. Воспользуйтесь далее тем, что само число должно делиться на 21, если его квадрат делится на 21.

174. Методом математической индукции задача сводится к доказательству того, что $3^{2n+3} - 3$ делится на 8 при любом n. При доказательстве воспользуйтесь тем, что $3^{2k} - 1 = 9^k - 1$ делится на 8.

175. Н. О. Д. = 57. Указание. При $n = 0$ имеем: $7^{n+2} + 8^{2n+1} = 57$. Для доказательства того, что и при любом n данное выражение делится на 57, представьте его в виде $49 \cdot 7^n + 8 \cdot 64^n = 57 \cdot 7^n + 8 \cdot 64^n - 8 \cdot 7^n$.

176. Представьте данное выражение в виде $20 \cdot 50^n + 18 \cdot 12^n = 19 \cdot 50^n + 19 \cdot 12^n + (50^n - 12^n)$.

177. Покажите, что данное выражение делится на 7,4 и 3.

178. Выражение $n^5 - 5n^3 + 4n$ представляется в виде $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$; покажите, что из пяти последовательных чисел одно делится на 5, хотя бы одно делится на 3, одно — на 4 и еще одно — на 2.

179. $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 121 \cdot 11^n + 12^{2n} \cdot 12 = 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 12^{2n} = 133 \cdot 11^n + 12(144^n - 11^n)$; далее заметьте, что $144^n - 11^n$ делится на $133 = 144 - 11$.

180. Сгруппируйте слагаемые, равноотстоящие от концов данной суммы.

181. $n^2 + 3n + 5 = (n+7)(n-4) + 33$; далее, числа $n + 7$ и $n - 4$ делятся или не делятся на 11 одновременно, поэтому их произведение, если оно делится на 11, должно делиться и на 121.

182. Делимость данного выражения на 2 очевидна. Для доказательства делимости на 9 рассмотрите отдельно случаи четного и нечетного t.

183. Будем использовать буквы для написания числа в десятичной системе счисления. Так,

$$\underbrace{\overline{xyz\ldots ut}}_{k \text{ цифр}} = x \cdot 10^{k-1} + y \cdot 10^{k-2} + z \cdot 10^{k-3} + \ldots + u \cdot 10 + t;$$

при этом $x, y, z, \ldots, u, t$ — цифры (каждая из них меньше десяти).

В данной задаче имеем:

$$\overline{7xy\ldots zt} = 5 \cdot \overline{xy\ldots zt7}. \qquad (1)$$

Отсюда сразу ясно, что $t = 5$; это значение можно подставить в соотношение (1) : $\overline{7xy\ldots z5} = 5 \cdot \overline{xy\ldots z57}$; теперь без труда можно найти предпоследнюю цифру: $z = 8$.

Процесс необходимо продолжать до тех пор, пока в первый раз не получим цифру 7, которая должна быть первой цифрой искомого числа. Ответ: 714285.

184. 2178. Указание. Пусть $\overline{xyz\ldots uvt}$ — искомое число; имеем $\overline{xyz\ldots uvt} \cdot 4 = \overline{tvu\ldots zyx}$ Так как оба числа — искомое и обращенное — имеют одинаковое количество знаков, то x может быть равен только 0,1 или 2.

Случай $x = 0$ неинтересен и не дает наименьшего числа. Так как число $\overline{tvu\ldots zyx}$ делится на 4, то $x \neq 1$. Стало быть, $x = 2$. Теперь имеем: $4 \cdot \overline{2yz\ldots uvt} = \overline{tvu\ldots zy2}$. Покажите, что $t = 8$. После этого покажите, что y может быть равно лишь 0,1 или 2. Наконец, определите y и z.

185. Воспользуйтесь тем, что число $10^{2k} - 1$ делится на $10^2 - 1 = 99$.

186. Написанные числа имеют вид: $a_k = 1 + 10^4 + 10^8 + \ldots + 10^{4k}$. Рассмотрим еще числа $b_k = 1 + 10^2 + 10^4 + 10^6 + \ldots + 10^{2k}$. Мы имеем очевидные равенства:
$10^{4k+4} - 1 = (10^4 - 1)(1 + 10^4 + \ldots + 10^{4k})$,
$10^{2k+2} - 1 = (10^2 - 1)(1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2k})$.
Пользуясь этими соотношениями, покажите, что имеет место равенство $a_k \cdot 101 = b_k \cdot (10^{2k+2} + 1)$, и воспользуйтесь тем, что число 101 — простое.

187. В качестве числа N можно взять, например, $(n + 1)! + 1$.

188. Обозначив через x_{00} первое в нашей последовательности число, взаимно простое с a, рассмотрите остатки от деления чисел последовательности на x_{00} и воспользуйтесь принципом Дирихле (см. стр. 13 вступительной статьи) и методом решения задачи **161.**

189. а) 59 (см. задачу б)).

б) Искомое число равно $N - n + r$, где N — наименьшее общее кратное чисел $n, n+1, \ldots, n+m$. Для доказательства обозначьте искомое число через x и покажите, что $N = x + n - r$ делится на $n, n+1, \ldots, n+m$.

190. Обозначим через a число, записанное первыми тремя цифрами искомого числа, а через b — число, записанное тремя его последними цифрами. Имеем: $N = 1000a + b$.

Прибавьте к числу N число $a - b$, по условию делящееся на 7, и воспользуйтесь тем, что 1001 делится на 7.

191. Рассмотрите остатки, даваемые квадратами целых чисел при делении на 9.

192. Рассмотрите остатки, даваемые квадратами целых чисел при делении на 8.

193. В 6-й, 12-й, 18-й и т. д. Указание. Рассмотрите остатки, даваемые числами $a, a^2, a^3, \ldots$ (где $a = 2, 3, 4, 5, 6$) при делении на 7.

Второе решение: воспользуйтесь малой теоремой Ферма (см. задачу **206**).

194. Пусть это — признак делимости на какое-то число k и пусть число $\overline{xyz\ldots uvt}$ делится на k. Так как перестановка цифр не влияет на рассматриваемый признак, то можно считать, что $t \neq 0$. Следовательно, на k делятся числа $\overline{xyz\ldots uvt0}$ и $\overline{xyz\ldots uv0t}$, а значит, и их разность, равная $9t$. Если бы k делилось на 2, то признак делимости на k был бы и признаком делимости на 2. Но это невозможно (рассмотреть числа 12 и 21). Аналогично, k не может делиться на 5 или на 7. Значит, k содержит только множители, являющиеся тройками. Далее $k \neq 27$ или 81. (Рассмотрите числа 27 и 81.)

195. Разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, должна делиться на 11.

Для доказательства вычтите из произвольного числа указанную разность и покажите, что результат будет делиться на 11.

196. Пусть это наименьшее число равно d; тогда $d = ax + by$. Если предположить, что a не делится на d, то $a = qd + r$, где $0 < r < d$. Но тогда $r = a - qd = a - q(ax + by) = a(1 - qx) + b(-qy)$, что противоречит минимальности числа d. Итак, a делится на d. Аналогично, b делится на d, т. е. d — общий делитель чисел a и b. Докажите далее, что любое число вида $ax + by$ (а значит, и d) делится на общий наибольший делитель чисел a и b.

197. Если m — составное, т. е. $m = pq$, где $1 < p < m$, $1 < q < m$, то число $(m - 1)!$ содержит множитель p, а значит, число $(m - 1)! + 1$ не делится на p. Тем более, оно не делится на m.

198. $p^3 - p^2$ чисел (все числа, кроме кратных p).

199. Воспользуйтесь тем, что среди чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ имеется $\left[\frac{n}{p}\right]$ чисел, кратных p, из них $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ чисел, кратных p^2, и т. д.

200. n двоек. Указание. Примените результат предыдущей задачи к числам $n!$ и $(2n)!$.

Второе решение: докажите равенство

$$\frac{(2n)!}{n!} = 2^n(2n-1)!!$$

(умножив обе его части на $n!$).

201. Воспользуйтесь результатом задачи **199**, очевидным неравенством $[x] \leqslant x$ и соотношением: $\frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots = n$.

202. $n!$ первых чисел натурального ряда разбейте на группы по n последовательных чисел в группе. Докажите, что произведение k любых последовательных целых чисел делится на $k!$. Для доказательства умножьте и разделите произведение $(a + 1)(a + 2) \cdot \ldots \cdot (a + k)$ на $a!$ и покажите, что число $\frac{(a+k)!}{a!\,k!}$ — целое (здесь можно использовать результат задачи **199** и неравенство $[x + y] \geqslant [x] + [y]$; десятиклассникам же достаточно рассмотреть число C_{a+k}^{a}).

203. Покажите, что числа $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ и $\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$ — целые (см. указание к предыдущей задаче), и воспользуйтесь тем, что числа n и $n + 1$ взаимно просты.

204. При решении задачи удобно воспользоваться двоичной записью чисел (см. указание к задаче **42** раздела **В**). Число $n = \frac{4^p - 1}{3} = 4^{p-1} + 4^{p-2} + \ldots + 1$ записывается в виде $1010\ldots101$ (p единиц), а число $2^n - 2$ — в виде $111\ldots110$ ($n - 1$ единица). Заметим, что число $6n$ записывается в виде $111\ldots110$ ($2p$ единиц), и нам достаточно доказать, что $n - 1$ делится на $2p$; последнее следует из малой теоремы Ферма (см. задачу **206**).

205. а) Покажите, что если числа $2^p - 1$ и $2^q - 1$ имеют общий делитель d, причем, $p > q$, а p и q взаимно просты, то и $2^r - 1$ делится на d, где r есть остаток от деления p на q; при этом числа r и q, очевидно, взаимно просты Продолжая этот процесс, покажите, что $d = 1$.

Для доказательства обратного утверждения достаточно применить подстрочное примечание на стр. 66 к разностям

$$2^{p_1 a} - 1 \text{ и } 2^{q_1 a} - 1,$$

чтобы убедиться, что обе они делятся на $2^a - 1$.

б) Представив числа $2^{2^n} - 1$ в виде

$$2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1) \cdot \ldots \cdot (2^2 + 1)(2 + 1) = \\ = (2^{2^n} + 1) - 2,$$

выведите отсюда что любой общий делитель чисел $2^{2^k} + 1$ и $2^{2^l} + 1$ является делителем числа 2.

206. Воспользуйтесь тем, что если a не делится на p, то числа a, $2a$, $3a$, ..., $(p - 1)a$ дают при делении на p попарно различные остатки, и покажите, что $a^p - a$ делится на p.

207. Докажите, что среди чисел 0, 1, 11, 111, $\ldots \underbrace{11\ldots1}_{N \text{ цифр}}$ найдутся два числа, дающие одинаковые остатки при делении на N; рассмотрите разность этих чисел.

208. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи и тем, что число 173 взаимно просто с 10. (Разумеется, результат этой задачи сохраняет силу для любого числа, не делящегося ни на 2, ни на 5.)

209. Подберем число a, $1 \leqslant a \leqslant 9$ так, чтобы у чисел m и $a \cdot \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ цифр}}$ были одинаковые остатки при делении на 9. Тогда число $10^{q_1} + 10^{q_2} + \ldots + 10^{q_{ak}}$ делится на $\underbrace{11\ldots1}_{k \text{ цифр}}$, если для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ среди показателей q_1, $q_2, \ldots, q_k$ имеется ровно a дающих остаток $i-1$ при делении на k. Затем число слагаемых в сумме $10^{q_1} + 10^{q_2} + \ldots 10^{q_{ak}}$ можно последовательно увеличивать на 9.

210. Докажите, что для любого натурального N найдется такое n, что $0 \leqslant n < k$ и число $10^N - 10^n$ делится на число $p = \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ цифр}}$. Поэтому найдется число $10^{n_1} + 10^{n_2} + \ldots + 10^{n_L}$ (где $0 \leqslant n_i < k$), делящееся на p. Если среди показателей n_i найдутся 10 одинаковых, то их можно заменить одним показателем, уменьшив тем самым число L на 9.

211. Воспользуйтесь тем, что числа 1001 и 10101 делятся на 7.

212. Делится. Указание. Рассмотрите, как чередуются цифры частного при делении данного числа на 9

213. Воспользуйтесь результатом задачи **206.**

214. $a_{1,2} = 1$, $b_1 = 3$, $b_2 = 9$; $a_{3,4} = 4$; $b_3 = 3$, $b_4 = 7$, $a_5 = 7$, $b_5 = 3$.

215. $a = 7$, $b = 3$, $c = 2$. Указание. Покажите, прежде всего, что числа a, b, c взаимно просты. Далее, убедитесь, что $ab + bc + ca + 1$ делится на abc и потому имеет место неравенство $ac + ab + bc + 1 \geqslant abc$. Далее, считая, что $a > b > c$, покажите, что $c \leqslant 3$ (ср. указание к задаче **90**). Рассмотрите отдельно случаи $c = 3$ и $c = 2$.

216. Так как $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, то достаточно показать, что сумма $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ делится по отдельности на $\frac{n}{2}$ и на $(n+1)$ или на n и на $\frac{n+1}{2}$ в зависимости от четности n.

Для доказательства сгруппируйте равноотстоящие от концов суммы слагаемые и используйте указание, данное в сноске на стр. 66.

217. Не делится. Для доказательства примените результат задачи **199** к числителю и знаменателю дроби $\frac{1000!}{(500!)^2}$ положив $p = 7$.

218. Достаточно прибавить число 1.
Указание. Представьте данное выражение в виде $[(n^2-1)^{1000} - (n-1)^{1000}](n-1)^{1001} + [(n-1)^{2001} + 1] - 1$ и воспользуйтесь указанием, данным в сноске на стр. 66.

219. Существует; если n — такое число, что $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ цифр}}$ делится на 1959 (см. указание к задаче **208**), то оба числа делятся на 1959.

220. Воспользовавшись результатом задачи **206**, покажите, что разность

$$\underbrace{kk\ldots k}_{p \text{ цифр}}\ \underbrace{00\ldots0}_{p\,(9-k)\text{ цифр}} - k\,\underbrace{00\ldots0}_{(9-k)\text{ цифр}}$$

делится на p при любом простом $p \neq 3$ и при $k < 10$.

221. Покажите сначала, что $C_{2n}^{2^k-1}$ делится на 2^n и не делится на 2^{n+1}; затем рассмотрите коэффициент при $x^{2^{n-1}}$ в выражении $(1-x)^{2n} - (1-x^2)^{2^{n-1}}$.

222. Воспользуйтесь соотношениями из указания к задаче **270**.

223. Воспользуйтесь тем, что числа

$$\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!} = C^n_{m+n-1}, \quad \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!} = C^m_{m+n-1},$$

$$\frac{(m+n)!}{m!n!} = C^m_{m+n} = C^n_{m+n} \text{ — целые.}$$

224. Воспользуйтесь методом математической индукции, представив число $2^{(3^n)}+1$ как сумму кубов.

225. Не существует. Указание. Для любого целого числа p рассмотрите любое целое число $N > p$ и положите $n = 2^N - 1$; воспользуйтесь результатом задачи **199**.

§ 9. Задачи с целыми числами

226. 800 чисел. Указание. Будут вычеркнуты только те числа, которые дают при делении на 15 в остатке либо 1, либо 6, либо 11 (т. е. дают при делении на 5 остаток 1).

227. Достаточно заметить, что можно уплатить 8,9 и 10 рублей; далее прибавляем по 3 рубля.

228. При нечетном n разложение невозможно. При четном n существует только одно разложение:

$$2^n = \left(2^{\frac{n}{2}-1}\right)^2 + \left(2^{\frac{n}{2}-1}\right)^2 + \left(2^{\frac{n}{2}-1}\right)^2 + \left(2^{\frac{n}{2}-1}\right)^2.$$

Указание. Рассмотрите, на какую степень двойки могут делиться искомые слагаемые.

229. Докажите, что среди девяти последовательных чисел $9a$, $9a+1$, ..., $9a+8$ ($a = 1, 2, 3, \ldots$) может встретиться не более трех простых; для доказательства рассмотрите четные числа и числа, делящиеся на 3.

230. Требуемых последовательностей существует четыре:

$$1000 = 1000;$$
$$198 + 199 + 200 + 201 + 202 = 1000;$$
$$28 + 29 + \ldots + 51 + 52 = 1000;$$
$$55 + 56 + \ldots + 69 + 70 = 1000.$$

231. $100^{200} > 200!$ Указание. Воспользуйтесь неравенством $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n!$, доказать которое нетрудно по индукции.

Второе решение. В произведении $199! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 199$ сгруппируйте множители попарно, соединяя множители, равноотстоящие от концов; каждое из произведений меньше 100^2, а первое явно меньше, чем $\frac{1}{2} \cdot 100^2$.

232. Чисел, в записи которых не участвует единица, меньше. Указание. Покажите, что существует ровно 9^7-1 семизначных чисел, в записи которых нет цифры 1. (При этом под семизначными числами подразумеваются также числа, начинающиеся одним или несколькими нулями.)

233. Все числа, оканчивающиеся на 0, и двузначные числа: 11, 22, ..., 99; 12, 24, 36, 48; 13, 26, 39; 14, 28; 15; 16; 17; 18; 19. Указание. Покажите, что все искомые числа, не оканчивающиеся нулем, двузначны и при зачеркивании последней цифры уменьшаются не более чем в 19 раз.

234. а) На втором месте. Указание. Покажите, что вообще число не может уменьшаться в 9 раз при зачеркивании цифры, стоящей далее, чем на втором месте.

б) 10125, 2025, 30375, 405, 50625, 6075, 70875; к каждому из этих чисел можно приписать сколько угодно нулей. Указание. Покажите, что если a_0 — первая цифра искомого n-значного числа N, то имеет место соотношение

$$\frac{N}{9} = N - a_0 \cdot 10^{n-2} \cdot 9.$$

235. Ни в какой системе счисления указанное деление невозможно. Для доказательства достаточно представить число 75 в виде $7a + 5$, где a — основание системы счисления.

236. Таких чисел существует два: 625 и 376. У к а з а н и е. Поскольку число N^2 оканчивается на те же три цифры, что и число N, то разность этих чисел делится на 1000; искомые числа N, следовательно, удовлетворяют условию: $N^2 - N = N(N-1) = 1000k$, где k — некоторое натуральное число.

237. Так как $(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25$, то при любом a (четном или нечетном) число $(10a+5)^2 - 25$ делится на 200.

238. Искомых способов существует четыре: $10000 = (100)^2$, $40000 = (200)^2$; $90000 = (300)^2$; $60025 = (245)^2$. У к а з а н и е. Поставив на первое место каждую из цифр 1, 2, ..., 9, извлекайте обычным способом квадратный корень (учитывая, что он должен извлечься точно).

239. Обозначив первую цифру n-значного числа N через a_0, покажите, что $N \geqslant a_0 \cdot 10^{n-1}$; при этом для произведения цифр $\pi(N)$ имеется неравенство $\pi(N) \leqslant a_0 \cdot 9^{n-1}$.

240. 11, 22, 33, ..., 99; 10, 21, 32, 43, ...98; 40, 51, 62, 73, 84, 95; 90 — всего 25 чисел. У к а з а н и е. Представив искомое число в виде $10a + b$ ($a \leqslant 9$, $b \leqslant 9$), покажите, что разность $a - b$ есть точный квадрат.

241. Искомое число равно 89. У к а з а н и е. Записав искомое число в виде $10a + b$, покажите, что либо b, либо $b - 1$ должно делиться на 9.

242. Искомое число равно 27. У к а з а н и е. Покажите, что число, удовлетворяющее условиям задачи, делится на 3 и заключено между 24 и 31.

243. Искомое число равно 142857. У к а з а н и е. Если x — искомое число, то его первая цифра равна 1 — иначе число $6x$ было бы более чем шестизначным. Покажите, что первые цифры чисел x, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ и $6x$ попарно различны.

Следовательно, все цифры числа x также попарно различны и среди них нет нуля. Покажите, что последние цифры указанных чисел также попарно различны, и покажите, что из этих чисел только число $3x$ может оканчиваться на 1. Определив отсюда последнюю цифру числа x, получим:

$$x \cdot 1 = 1{*}{*}{*}{*}7, \quad x \cdot 4 = 5{*}{*}{*}{*}8,$$
$$x \cdot 2 = 2{*}{*}{*}{*}4, \quad x \cdot 5 = 7{*}{*}{*}{*}5,$$
$$x \cdot 3 = 4{*}{*}{*}{*}1, \quad x \cdot 6 = 8{*}{*}{*}{*}2.$$

244. Существует два набора чисел (с точностью до перестановки), удовлетворяющих условиям задачи: $x_1 = x_2 = \ldots = x_8 = 1$, $x_9 = x_{10} = x_{11} = x_{12} = 2$ и $x_1 = x_2 = \ldots = x_{10} = 1$, $x_{11} = 2$, $x_{12} = 12$.

Указание. В равенстве $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_{11} \cdot x_{12} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{12}$ положите $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{12}$ и покажите, что $x_1 = x_2 = \ldots x_8 = 1$; покажите далее, что если $x_9 = 1$, то и $x_{10} = 1$. (Примените способ, аналогичный решению задачи **90**.)

245. Если данное число записать в виде $100a + 10b + c$ $(a > c)$, то обращенное число будет равно $100c + 10b + a$. Покажите, что разность указанных двух чисел равна $100(a - c - 1) + 90 + (10 - (a - c))$.

246. Каждое из указанных в задаче чисел имеет вид

$$\underbrace{44\ldots4}_{k\text{ цифр}}\ \underbrace{88\ldots89}_{k-1\text{ цифра}} = 4 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{k\text{ цифр}} \cdot 10^k + 8 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{k\text{ цифр}} + 1.$$

Далее воспользуйтесь равенством $\underbrace{11\ldots1}_{k\text{ цифр}} = \frac{1}{9}\left(10^k - 1\right)$.

247. Предположив противное, рассмотрите разности между каждыми двумя соседними числами из данного набора; покажите затем, что в таком случае $a_8 \geqslant 17$.

248. Приведя данное выражение к виду $\frac{(m+1)^3 - (m+1)}{6}$, воспользуйтесь указанием к задаче **172**.

249. Такими числами являются: 11, 12, 15, 24 и 36. Указание. Записав двузначное число в виде $10a + b$, покажите, что b делится на a и $10a$ делится на b

250. Квадрат целого числа может оканчиваться на одну из следующих цифр: 0, 1, 4, 9, 6 и 5. Рассмотрев остатки от деления точного квадрата на 4, покажите, что никакой точный квадрат не может оканчиваться на 11, 55, 66 или 99. Если бы квадрат оканчивался на 4444, то, разделив на 4, мы получили бы, что точный квадрат, оканчивается на 11.

При решении второй части задачи покажите, что квадрат искомого числа может оканчиваться только на 444, а само число оканчивается на одну из следующих комбинаций:

$$\ldots462,\ \ldots038,\ \ldots962,\ \ldots538.$$

251. Докажите, что если $n? = n + 1$, то n — простое число; после этого воспользуйтесь методом математической индукции.

252. Покажите, что если данное число $100\ldots050\ldots01 = 10^{147} + 5 \cdot 10^{98} + 1$ является кубом некоторого целого числа N, то $N = 10^{49} + \alpha$; докажите, что число α заключено между 1 и 2 и, следовательно, не может быть целым.

Второе решение. Покажите, что остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления его суммы цифр на 9 (для этого достаточно показать, пользуясь указанием на стр. 66, что разность между любым числом и его суммой цифр делится на 9). Далее покажите, что кубы целых чисел могут давать при делении на 9 лишь три остатка: 0, 1 или 8.

253. Любое натуральное число имеет вид $3k$, $3k + 1$ или $3k - 1$. Возведите эти числа в квадрат.

254. В случае, когда отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ рационально и равно $\frac{p}{q}$, рассмотрите данное равенство при таких значениях n и $n - 1$, что $[n\alpha] = lp$, $[n\beta] = lq$. Если же $\frac{\alpha}{\beta}$ иррационально, то воспользуйтесь тем, что величина $\left\{k\frac{\alpha}{\beta}\right\}$ может быть сделана (при надлежащем выборе целого числа k) большей, чем $\{\alpha + \beta\}$; Здесь $\{u\} = u - [u]$.

255. Для доказательства рассмотрите многочлен $P(x) = x[(1 + x)^{100} - (1 - x)^{100}]$ и покажите, что при замене x на $-x$ многочлен не меняется; покажите теперь, что после раскрытия скобок и приведения подобных членов все члены, содержащие x в нечетной степени, уничтожатся.

256. Приведите уравнение к виду $x^3 = (2y - 1)(2y + 3)$ и воспользуйтесь тем, что числа $2y - 1$ и $2y + 3$ взаимно просты.

257. Рассмотрите наибольшее из чисел a_1, a_2, a_3, a_4, наибольшее из чисел b_1, b_2, b_3, b_4 и т. д.; докажите, что за несколько шагов это наибольшее число непременно уменьшается.

Второе решение. Покажите, что не позже, чем через четыре шага, мы получим четверку, состоящую только из четных чисел; не позже, чем через 8 шагов, получим четверку, состоящую только из чисел, кратных 4, и т. д.

258. Искомое число равно остатку от деления числа $123\ldots1956$ на 8, т. е. равно 4. Для доказательства воспользуйтесь тем, что $10^k - 2^k$ делится на 8.

259. Наименьшее число знаков равно $2^n + n - 1$; число, имеющее ровно $2^n + n - 1$ знаков, строится так: необходимо сперва выписать n единиц, а затем писать 0 всякий раз, когда это возможно (т. е. когда при этом не получается n-значного числа, ранее уже написанного); в противном случае писать единицу.

260. Для данного числа N выберите такие числа n и a_n, чтобы выполнялись неравенства:

$$n! \leqslant N, \ (n+1)! > N, \ a_n \cdot n! \leqslant N, \ (a_n + 1) \cdot n! > N,$$

и покажите, что $a_n \leqslant n$.

После этого к разности $N - a_n \cdot n!$ примените метод математической индукции.

261. В силу признака делимости на 9 сумма цифр рассматриваемого числа делится на 9; используя признак делимости на 11, покажите, что эта сумма цифр не может быть равна 9.

262. Если данное число N является полным квадратом и оканчивается на 5, то оно делится на 25 и, следовательно, оканчивается либо на 25, либо на 75.

Оба случая исключите, рассмотрев остатки от деления числа N на 4 или на 8.

Следовательно, цифра, отличная от пятерки,— последняя. Исключите и эту возможность.

263. Если k — наименьшее из рассматриваемых чисел, то среди них можно найти не менее $978 - k$ чисел, отличных от k и дающих в сумме с k число, не превосходящее 1955. Но тогда между k и 1955 (включительно) не останется 979 чисел, отличных от всех этих сумм.

264. $n = 8$. Указание. Воспользуйтесь формулами

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1),$$

легко доказываемыми по индукции.

265. Наибольшим из таких чисел является число 60.

266. Такая совокупность должна содержать k чисел, где k — число, удовлетворяющее неравенствам $2^{k-1} \leqslant N < 2^k$. Например, можно взять набор чисел 1, 2,..., 2^{k-1} (при $N \neq 2^{k+1}$ существуют и другие наборы из k чисел с теми же свойствами).

267. Прежде всего покажите, что простое число вида $4k+1$ единственным способом представляется в виде суммы двух взаимно простых квадратов (ср. указание к задаче **170**). Далее рассмотрите числа p^{2n}, $p^2 \cdot p^{2n-2}$, $p^4 \cdot p^{2n-4}$, ..., где p — простое число вида $4k+1$.

268. Искомая сумма равна $\underbrace{111\ldots110.}_{162\text{ цифры}}$ Указание. Покажите, что цифры наибольшего числа и соответствующие цифры наименьшего числа дополняют друг друга до 10.

269. а) $1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ldots}}}$;

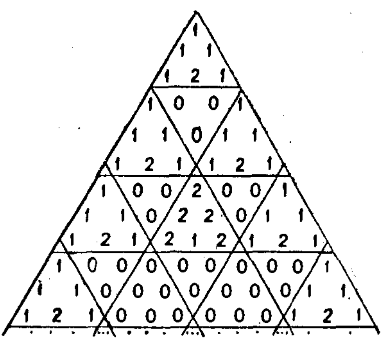
б) Если m четно, то больше вторая дробь, если m нечетно, то — первая.

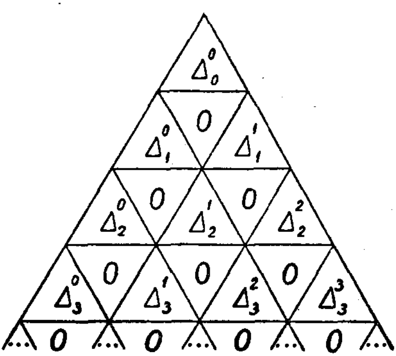
270. $\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^n$.

Указание. Будем обозначать число, стоящее в n-й строке на k-м месте слева, считая от нулевого, через C_n^k (см. задачу **57** раздела В). Заменим числа C_n^k их остатками P_n^k от деления на p. Числа P_n^k также образуют треугольник Паскаля. Покажите, что в этом треугольнике вся p-я строка состоит из нулей (кроме крайних членов). Покажите далее, что в таком случае треугольник разбивается на «элементарные треугольники» Δ_i^j, по p строк в каждом, причем эти элементарные треугольники подчинены соотношениям:

а) $\Delta_n^{k-1}+\Delta_n^k=\Delta_{n+1}^k$; б) $\Delta_n^k = P_n^k \cdot \Delta_0^0$.

Например, при $p=3$ имеем





Под суммой двух треугольников Δ_n^{k-1} и Δ_n^k мы понимаем такой треугольник, каждый член которого равен сумме соответствующих членов треугольников Δ_n^{k-1} и Δ_n^k. Аналогичный смысл имеет умножение треугольника на число.

271. Искомых дробей три: $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{4}$ и $\frac{2}{3}$. Указание. Представив дробь в виде $\frac{m}{n}$ $(n < 3m)$, получим для определения m уравнение $m = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$. Число m будет целым лишь при $\alpha = 2$.

272. 0,239... .

273. Воспользуйтесь тем, что произведение данных шести чисел отрицательно; в самом деле, оно равно $-(a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{22} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{32} \cdot a_{33})^2$.

274. Искомые числа имеют вид $p(p+q)$, $2pq$, $q(p+q)$ или пропорциональны этим числам; (p, q — натуральные числа).

§ 10. Разные задачи

275. Рассмотрите отдельно случаи четного и нечетного n и воспользуйтесь методом математической индукции. При доказательстве число $(\sqrt{2}-1)^n$ удобно представить в виде $B\sqrt{2} - A = \sqrt{2B^2} - \sqrt{A^2}$. или в виде $A - B\sqrt{2} = \sqrt{A^2} - \sqrt{2B^2}$.

276. а) Не будет. Указание. Обозначив через n длину предполагаемого периода дроби и через k — количество цифр до периода, найдите в дроби участок, состоящий подряд из $n+k$ нулей.

б) 1°. Воспользуйтесь идеей задачи а). 2°. Докажите, что квадрат этого числа имеет вид: 0,0100000000200... (единицы стоят на 2-*м*, 20-*м*, 200-*м* и т. д. местах; двойки стоят на 11-м, 101-м, 110-м, 1001-м и т. д. местах; на остальных местах стоят нули).

277. Докажите, что для любого целого k число разностей $(j - i)$, делящихся на k, не больше числа разностей $a_j - a_i$, делящихся на k. Рассмотрите сначала случай, когда n кратно k.

278. Все такие числа имеют вид: $x = 10^{\frac{k}{2}}$, где k — любое целое число.

279. Пусть, например, среди чисел n_i нет семерки.

Тогда среди них могут быть числа: 70, 71, ..., 79. Заметим, что

$$\frac{1}{70}+\frac{1}{71}+\ldots+\frac{1}{79}<\frac{1}{7}.$$

Если одно из этих чисел (например, 72) отсутствует, то возможно, что в наборе есть числа 720, 721, ..., 729, при этом

$$\frac{1}{720}+\frac{1}{721}+\ldots+\frac{1}{729}<\frac{1}{72}.$$

Обобщите приведенное рассуждение.

280. Докажите, что если $\frac{a}{b}$ — несократимая правильная дробь и q_1 — такое число, что $\frac{1}{q_1}\leqslant\frac{a}{b}<\frac{1}{q_1-1}$, то дробь $\frac{a}{b}-\frac{1}{q_1}=\frac{aq_1-b}{bq_1}$ имеет числитель меньший, чем a.

281. а) Воспользуйтесь указанием к задаче **40**.

б) Докажите что чисел N, удовлетворяющих неравенству $a\cdot 10^k\leqslant N<(a+1)\cdot 10^k$ (где a — одно из чисел 1, 2,..., 8) и не имеющих в своем написании девятки, имеется 9^k. Поэтому сумма обратных величин этих чисел меньше $\frac{1}{a\cdot 10^k}\cdot 9^k$. Затем просуммируйте последнее выражение по $k=0, 1, 2, 3,\ldots$ и по $a=1, 2,\ldots, 8$.

282. Покажите, что знаменатель дроби, полученной при сложении чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$, делится на более высокую степень двойки, чем числитель.

283. а) Предварительно разложите на множители выражение

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

б) Рассмотрите всевозможные выражения вида

$$(\pm\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\pm\sqrt{d}\pm\sqrt{e})$$

и покажите, что произведение всех таких выражений не содержит знаков радикала.

284. $\frac{1}{2}(p+q-1)(p+q-2)+q$.

285. Покажите, рассматривая тождество: $a-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$, что число $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ рационально.

286. Покажите, что чистая периодическая дробь $\frac{a}{b}$

приводится к виду $\frac{a}{b} = \frac{\overline{m_1 m_2 \ldots m_k}}{10^k - 1}$ (k — длина периода); отсюда следует, что число b взаимно просто с 10. Обратно, если b взаимно просто с 10, то найдутся такие целые p и k, что $pb = 10^k - 1$ (см. задачу **208**).

287. а) Покажите, что если бы имело место равенство $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, где p, q, r — рациональные числа, то число $\sqrt[3]{2}$ было бы рациональным.

б) Покажите, что если $1 + \sqrt{3} = (a + b\sqrt{3})^2 + (c + d\sqrt{3})^2 + \ldots + (m + n\sqrt{3})^2$, то $1 - \sqrt{3} = (a - b\sqrt{3})^2 + (c - d\sqrt{3})^2 + \ldots + (m - n\sqrt{3})^2$; воспользуйтесь тем, что число $1 - \sqrt{3}$ отрицательно.

288. $b = ka$, $c = k(a^2 - 1)$, где a и k — произвольные натуральные числа, $a > 1$.

289. Обратите внимание на то, что оба числа положительны и в сумме дают единицу, так что их цифры соответственно дополняют друг друга до 9.

290. См. задачу **285**.

291. Покажите, что знаменатель несократимой дроби, получающейся после сложения дробей $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$ и $\frac{1}{n+2}$, делится на 3 и на 2; воспользуйтесь результатом задачи **286**.

292. Здесь n — наименьшее число, для которого $n!$ делится на q, так что данное рациональное число $\frac{p}{q}$ может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n!}$ (возможно, сократимой). Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяются последовательным делением; так, x_n есть остаток от деления числа m на n; x_{n-1} есть остаток от деления числа $\frac{m - x_n}{n}$ на $n - 1$ и т. д.

293. Рассмотрите числа: $\{a\}$, $\{2a\}$, $\{3a\}$, ..., $\{Na\}$, $\{(N+1)a\}$ (здесь $\{x\} = x - [x]$). Все эти числа расположены на отрезке от 0 до 1, поэтому среди них можно найти два таких числа $\{ka\}$ и $\{la\}$ ($k > l$), что их разность меньше $\frac{1}{N}$. Рассмотрите число $(k - l)a$.

294. Пусть $m = 2^p q - 1$, где p, q — целые числа, причем q нечетно. Покажите, что числа $C_m^0, C_m^1, \ldots, C_m^m$ разбиваются на q групп, каждая из которых содержит 2^p последовательных чисел о д н о й ч е т н о с т и. При этом первые 2^p чисел: $C_m^0, C_m^1, \ldots, C^{2^p - 1}$ и последние 2^p чисел нечетны.

295. Воспользуйтесь методом математической индукции и соотношением:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

296. Докажите соотношения:

$$a_{n+1} b_{n+1} = a_n b_n = \ldots = a_0 b_0;$$

$$\frac{a_{n+1} - \sqrt{a_n b_n}}{a_{n+1} + \sqrt{a_n b_n}} = \left(\frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}}\right)^2 = \left(\frac{a_n - \sqrt{a_n b_n}}{a_n + \sqrt{a_n b_n}}\right)^2.$$

297. Покажите, что неравенство Коши — Буняковского (см. указание к задаче **53**) обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Второе решение. Используя данные соотношения, покажите, что

$$\left(a_1 - \frac{p}{q} b_1\right)^2 + \left(a_2 - \frac{p}{q} b_2\right)^2 + \ldots + \left(a_n - \frac{p}{q} b_n\right)^2 = 0.$$

298. Воспользуйтесь тем, что если число a_i входит в рассматриваемый набор, то числа $2a_i$, $3a_i$, ... не могут в него входить. Таким образом, каждое число, заключенное между $\frac{2n}{3}$ и n (включительно), как бы «вычеркивает» хотя бы одно число, лежащее между $\frac{4}{3}n$ и $2n$. Покажите, кроме того, что число, меньшее чем $\frac{2n}{3}$, «вычеркивает» не меньше двух чисел на отрезке от $\frac{2n}{3}$ до $2n$.

299. Воспользуйтесь тем, что если $a^2 + a + 1 = 0$, то $a^3 = 1$.

300. Докажите по индукции соотношения:

$$p_k^2 - 2q_k^2 = 1, \quad r_k^2 - 2 = \frac{1}{q_k^2} \qquad (k \geqslant 2).$$

301. $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$. Приведите неравенство к виду, содержащему только синусы, и при сравнении аргументов покажите, что $|\sin\varphi + \cos\varphi| \leqslant \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$ (ср. задачу **325**, а)).

302. Используйте соотношение $\frac{p+q}{2} \geqslant \sqrt{pq}$ (справедливое для неотрицательных p, q); при этом равенство имеет место лишь при $p = q$. Докажите неравенства: $\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$, $b_{n-1} - b_n > 0$. Затем в соотношении $b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ перейдите к пределу при $n \to \infty$.

303. Воспользуйтесь идеей решения задачи **21** из раздела **B**.

304. $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

305. Покажите, что если точка пересечения прямых l_M и l_N удалена от прямой AB на расстояние h, то $MN = |h \operatorname{ctg} \alpha_M - h \operatorname{ctg} \alpha_N|$; покажите затем, что $h > 1$.

306. $\cos(\alpha + \beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$. Указание. Покажите, что $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}$ и выразите $\cos(\alpha + \beta)$ через $\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}$.

307. Представив сумму $a_1 \cos(\alpha_1 + 1) + a_2 \cos(\alpha_2 + 1) + \ldots + a_n \cos(\alpha_n + 1)$ в виде $(a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \ldots + a_n \cos \alpha_n) \cos 1 - (a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \ldots + a_n \sin \alpha_n) \sin 1$ и воспользовавшись первым из данных соотношений, получаем

$$a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \ldots + a_n \sin \alpha_n = 0.$$

308. Воспользуйтесь тем, что число $z = \cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17}$ есть корень уравнения $z^{17} - 1 = 0$. Затем вычислите квадраты следующих сумм:

$$u = x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + x^{32} + x^{64} + x^{128};$$
$$v = x + x^4 + x^{16} + x^{64};$$
$$w = x + x^{16}.$$

309. Докажите, что $xy = uv$. Воспользуйтесь затем методом математической индукции, применив соотношение

$$(x^{n-1} + y^{n-1})(x + y) = (u^{n-1} + v^{n-1})(u + v).$$

310. Предварительно докажите, что какие-либо два из чисел a, b, c равны по абсолютной величине и противоположны по знаку; для этого рассмотрите соотношение $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ как уравнение относительно a (или b, или c).

311. Определив z из уравнения $z+\frac{1}{z}=2\cos\alpha$, воспользуйтесь формулой Муавра (см. указание к задаче **30**).

312. Покажите сначала, что точка M, изображаемая комплексным числом mz_1+nz_2, где $m+n=1$, $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$, лежит на отрезке, соединяющем точки, изображающие числа z_1 и z_2.

313. $f(x)=x$. Указание. Из условия $f(xy)=f(x)f(y)$ вывести, положив $y=1$, что $f(1)=1$. Далее, подставляя в равенство $f(x+y)=f(x)+f(y)$ значения $x=y=1$, найдем, что $f(2)=2$; покажите, что вообще $f(n)=n$, где n — любое натуральное число. Рассматривая соотношение $f(xy)=f(x)f(y)$ при $x=0$, $y=2$, покажите, что $f(0)=0$. Покажите далее, что $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$ и что вообще $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — любое рациональное число. Используя приближения иррациональных чисел рациональными, покажите, наконец, что $f(x)=x$ при всех действительных x.

314. Пусть p — период функции $f(x)=\cos\alpha x+\cos x$. Положив $x=0$ в равенстве $\cos(\alpha p+\alpha x)+\cos(x+p)=$ $=\cos\alpha x+\cos x$, покажите, что $p=2k\pi$, $\alpha p=2l\pi$.

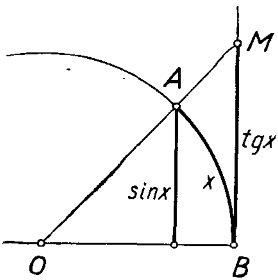


Рис. 5.

315. Предварительно докажите неравенства $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$. При доказательстве удобно пользоваться тем, что x есть длина дуги AB радиуса 1, $\sin x$ есть длина перпендикуляра, опущенного из точки A на радиус OB, и $\operatorname{tg} x$ есть длина отрезка касательной MB (см. рис. 5).

316. Покажите, что $\sin n\varphi$ представляется в виде многочлена n-й степени от $\sin\varphi$ (см. формулы в указании к задаче **114**).

Старший член многочлена равен $2^{24}\cdot\frac{3^{25}}{5^{25}}$, а все остальные члены содержат в знаменателе пятерку лишь в меньшей степени.

317. Искомая сумма равна нулю, если p не кратно n, и равна n в противном случае. Указание. Прежде всего покажите, что все корни уравнения $x^n - 1 = 0$ могут быть представлены, как целые степени о д н о г о корня x_0 $\left(\text{а именно, корня } x_0 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$. Для вычисления рассматриваемой суммы примените формулу суммы членов геометрической прогрессии и воспользуйтесь тем, что $x_0^n = 1$.

318. Числа $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ можно выбрать, например, так: $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 3$, $\xi_2 = 6$, $\ldots$, $\xi_n = 3n$. Тогда для любых n точек на комплексной плоскости найдется такая прямая $z = x + i\xi_k$, что все взятые точки удалены от этой прямой дальше, чем на 1. Воспользуйтесь далее тем, что величина $|P_n(z_0)|$ представляет собой произведение расстояний от точки z_0 до точек, соответствующих корням многочлена $P_n(z)$.

319. Воспользовавшись равенством $\cos(k+1)x = 2\cos x\cos kx - \cos(k-1)x$, докажите по индукции, что если $x = \arccos\frac{m}{n}$, где n — нечетно и $n > m > 0$, то числа $\cos x$, $\cos 2x$, ..., не являются целыми. Отсюда вытекает, что kx не кратно π ни при каком k, т. е. величина $\arccos\frac{m}{n}$ $\left(\text{а значит, и } \arcsin\frac{m}{n}\right)$ несоизмерима с π.

320. а,б) Воспользуйтесь например, равенством $x(a-x) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$.

321. а) $\frac{1}{2\sqrt{ab}}$; б) $\frac{1}{b + 2\sqrt{ac}}$. У к а з а н и е. Рассмотрите выражения $\frac{a+bx^2}{x} = \frac{a}{x} + bx$, $\frac{a + bx + cx^2}{x} = b + \left(\frac{a}{x} + cx\right)$ и воспользуйтесь предыдущей задачей.

322. Наибольшее значение равно $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ и достигается при $u = v = w = \frac{1}{3}$. У к а з а н и е. Воспользуйтесь неравенством задачи **52** при $n = 3$. Наименьшее значение равно $\frac{23^2 \cdot 18}{16^3}$ и достигается при $u = v = \frac{7}{16}$, $w = \frac{1}{8}$.

323. Наименьшая величина равна $n\sqrt{2}$. Указание. Покажите, что при любых значениях чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ имеет место неравенство $\sqrt{x_1^2+(1-x_2)^2}+\sqrt{x_2^2+(1-x_3)^2}+ \ldots + \sqrt{x_{2n}^2+(1-x_1)^2} \geqslant n\sqrt{2}$.

При доказательстве удобно рассматривать сумму, стоящую в левой части, как длину некоторой ломаной; требуется показать, что расстояние между ее начальной и конечной точками равно $n\sqrt{2}$.

324. Наибольшее значение равно $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ и достигается при $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$. Указание. Воспользуйтесь тем, что из всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный треугольник.

325. а) Наибольшее значение равно $\sqrt{a^2+b^2}$, наименьшее значение отличается от него знаком. Указание. Для доказательства умножьте и разделите данное выражение на $\sqrt{a^2+b^2}$ и приведите его к виду

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi),$$

где

$$\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

б) Наибольшее значение равно $\frac{a+c}{2}+\sqrt{b^2+\frac{(a-c)^2}{4}}$, наименьшее значение отличается от него знаком перед корнем. Указание. При решении этой задачи воспользуйтесь методом задачи а), предварительно приведя данное выражение к виду

$$m\cos 2x+n\sin 2x+p.$$

326. Наибольшее значение равно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и принимается при $\arg z=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Указание. Представив комплексное число z в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, воспользуйтесь соотношением

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=\frac{|z^2+1|}{r}=1.$$

Б. ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Задачи на вычисление

1. $R = 6$. Указание. Треугольник с вершинами в центрах данных кругов имеет стороны 3, 4 и 5.

2. Искомая сумма равна площади круга, вписанного в данный треугольник. Указание. Воспользуйтесь подобием всех образующихся прямоугольных треугольников и примените метод математической индукции.

3. $A + B - C$, $A - B + C$, $-A + B + C$. Указание. Вычислите углы треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей, и воспользуйтесь тем, что стороны этого треугольника являются биссектрисами углов между соответствующими сторонами данного и искомого треугольников.

4. $MD = \dfrac{ab}{|b - a|}$. Указание. Проведите биссектрису внешнего угла B и воспользуйтесь соотношениями $AD : DC = AN : CN$ $(= AB : BC)$, где N — точка пересечения этой биссектрисы с продолжением стороны AC.

5. $90°$, $22°30'$ и $67°30'$. Указание. Покажите прежде всего, что биссектриса расположена между медианой и высотой. Докажите далее, что если высота и медиана образуют с боковыми сторонами равные углы, то треугольник — прямоугольный.

6. 1, 1, $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Указание. Покажите, что $a + c = b + d$, $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, где a, b, c, d — последовательные стороны четырехугольника. Выведите отсюда, что рассматриваемый четырехугольник является дельтоидом (т. е. две его смежные стороны равны и две другие тоже равны).

7. $PP_1^2 + PP_2^2 + \ldots + PP_n^2 = 2nR^2$, где R — радиус окружности. Указание. Воспользуйтесь формулами задач **30**, **31** раздела **А** и соотношениями $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

8. Стороны всех таких треугольников соответственно пропорциональны числам: а) 3, 4,5; б) 1, $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

9. Катеты треугольника находятся в отношении $5 : 1$.

§ 2. Отыскание точечных множеств

10. а) Окружность радиуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, концентричная данной, где R — радиус данной окружности, $2d$ — длина хорд.

б) Окружность, построенная, как на диаметре, на отрезке, соединяющем центр данной окружности с данной точкой.

11. Искомое множество состоит из участков дуг сегментов, построенных на сторонах треугольника и вмещающих данный угол. Части множества, соответствующие стороне AC, показаны на рис. 6.

12. а) Отрезок, параллельный данному и отстоящий от него на расстоянии $\frac{AB}{4}$. б) Рассмотрите пару углов AND и DNH и пару углов MNG и MNE.

13. а) Четыре отрезка, образующие прямоугольник, стороны которого перпендикулярны биссектрисам углов между данными прямыми; вершины прямоугольника лежат на данных прямых.

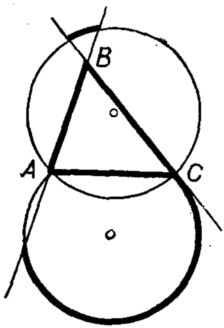


Рис. 6.

б) Восемь полупрямых, являющихся продолжениями сторон прямоугольника задачи а).

14. Четыре отрезка, образующие параллелограмм с вершинами на данных прямых. Указание. Сдвиньте отрезки AB и CD вдоль прямых, на которых они лежат, совместив точки A и C с точкой пересечения этих прямых.

15. Отрезок, параллельный диагонали BD четырехугольника. Указание. Проведите диагональ BD и рассмотрите множество вершин треугольников площади $S = |S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BCD}|$ с основанием BD.

16. Окружность с центром на прямой, проходящей через данные точки. Указание. Пусть A, B — данные точки и M — любая точка множества; рассмотрите биссектрисы внутреннего и внешнего угла M в треугольнике AMB.

17. Предположив противное, возьмите на отрезке три равноотстоящие точки X, Y, Z и, вычислив медианы AY и BY треугольников AXZ и, BXZ, воспользуйтесь неравенствами из указания к задаче **46**.

18. Прямая, перпендикулярная прямой AB и проходящая через такую точку M этой прямой, что $AM^2 - BM^2 = c$.

19. Окружность, проходящая через точки O_1 и O_2.

20. Если окружности лежат одна вне другой или касаются, это множество представляет собой прямую, перпендикулярную линии центров данных окружностей. В случае пересекающихся окружностей искомое множество представляет собой два луча, составляющих продолжение общей хорды этих окружностей.

21. Окружность с центром в середине отрезка OM.

22. Если S — площадь треугольника ABC и R — радиус его описанной окружности, то радиусы искомых окружностей равны

$$r_{1,2} = \sqrt{1 \pm 4\frac{\sigma}{S}}\,R.$$

З а м е ч а н и е. Отсюда, например, следует, что для внутренних точек треугольника отношение $\frac{\sigma}{S}$ не превосходит $\frac{1}{4}$.

23. Искомое множество представляет собой совокупность четырех лучей, лежащих на прямых, проходящих через точку, диаметрально противоположную точке A (см. рис. 7). У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатом задачи **66**.

24. Окружность с центром в точке X, лежащей на данной прямой и определяемой из условия $AX \cdot BX = CX \cdot DX$ (причем из этой окружности должны быть исключены точки её пересечения с прямой AB).

25. Множество представляет собой отрезок и луч, лежащие на прямой OA (рис. 8). У к а з а н и е. Докажите, что если треугольник симметрично отразить относительно прямой OA, то центры описанных окружностей полученного и исходного треугольников совпадают.

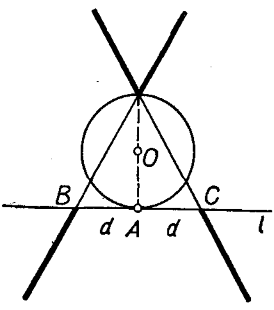


Рис. 7.

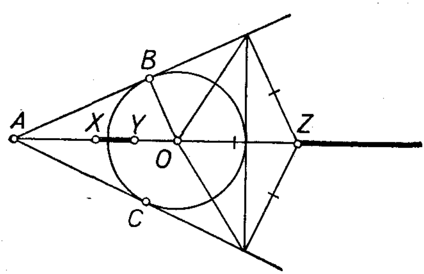


Рис. 8.

26. Прямая, перпендикулярная данной прямой и проходящая через середину N отрезка AC, за исключением самой точки N. Указание. Пусть M — одна из точек множества, а O_1 и O_2 — центры соответствующих окружностей. Покажите, что середина отрезка BM совпадает с серединой X отрезка O_1O_2. Покажите далее, что все точки X лежат на прямой, перпендикулярной отрезку AC.

27. 1) Окружность, построенная, как на диаметре, на отрезке, соединяющем центры данных окружностей.

2) Покажите, что все прямые BC пересекают линию центров данных окружностей в одной и той же точке M. Множество оснований высот треугольников ABC есть дуга окружности, построенной на отрезке AM, как на диаметре.

28. Прямая, перпендикулярная к плоскости данного треугольника и проходящая через центр описанной около него окружности.

29. Бесконечная призма (без оснований), образующие которой параллельны линии пересечения данных плоскостей, а перпендикулярным сечением служит прямоугольник. Указание. Задача сводится к планиметрической задаче **13**.

30. Две прямые в плоскости, параллельной данным прямым и отстоящей от них на равных расстояниях. Указание. Спроектируйте данные прямые на указанную плоскость и воспользуйтесь задачей XIX, 1, 8, 1.

31. Поверхность конуса с вершиной в точке M и углом α при вершине, определяемым из условия:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\text{расстояние от } N \text{ до } \pi}{\text{расстояние от } N \text{ до } M}=\text{const}.$$

32. Прямая, параллельная ребру OC и лежащая в одной плоскости с этим ребром и серединой M отрезка AB. (Эта прямая получается из OC гомотетией с центром M и коэффициентом $\frac{1}{3}$.)

33. Сфера, построенная, как на диаметре, на отрезке, соединяющем центр данного шара с данной точкой (ср. с задачей **10а**).

§ 3. Задачи на доказательство

I. Прямые и многоугольники

34. Используйте равенство площадей треугольников, на которые диагональ разбивает параллелограмм.

35. Основания противолежащих треугольников равны, а сумма высот равна высоте параллелограмма.

36. Используйте свойство смежных углов параллелограмма. Покажите, далее, что диагональ прямоугольника параллельна стороне параллелограмма и при продолжении образует медиану прямоугольного треугольника, образованного биссектрисами смежных углов и стороной параллелограмма (выберите ту из диагоналей, которая параллельна большей стороне параллелограмма).

37. Рассмотрите случай, когда все стороны треугольника KLM пересекают соответственные стороны треугольника $A_1B_1C_1$, образованного средними линиями треугольника ABC; отдельно рассмотрите случай, когда у треугольников $A_1B_1C_1$ и KLM есть пара непересекающихся сторон.

38. Достроив треугольник ABC до параллелограмма $ABCB'$, докажите равенство треугольников BFK и BCB' и воспользуйтесь равенством углов $\angle FKB$ и $\angle CBB'$.

39. Обозначив через P точку пересечения высот, а через M и N — середины сторон AC и BC (соответственно), докажите, что четырехугольники $EPDC$ и $MONC$ можно вписать в окружность; воспользуйтесь равенством углов: $\angle A = \angle EPC = \angle EDC$; $\angle A = \angle NOC = \angle NMC$.

40. Из двух противоположных сторон четырехугольника по крайней мере одна обладает тем свойством, что сумма прилежащих к ней углов не меньше 180°. Из каждых двух пар противоположных сторон выберите сторону, обладающую этим свойством; концы выбранных сторон и будут искомыми точками.

41. Докажите, что если A и B — центры симметрии, то точка, симметричная B относительно A, тоже является центром симметрии. Пользуясь этим, установите, что если фигура имеет два центра симметрии, то она имеет их бесконечно много.

42. Покажите, что у каждого многоугольника можно найти диагональ, разбивающую его на два многоугольника с меньшим числом сторон.

43. Рассмотрите выражение для суммы площадей треугольников

$$AMB,\ BMC \text{ и } CMA.$$

44. Воспользуйтесь идеей предыдущей задачи.

45. Замените сумму $AM + BP + CQ$ суммой $MD + PE + QF$ и воспользуйтесь результатом задачи **43.**

46. Докажите предварительно неравенства:

$$\frac{1}{2}(b+c-a) < m_a < \frac{1}{2}(b+c),$$

где a, b, c — стороны треугольника, m_a — медиана стороны a.

47. Воспользуйтесь тем, что середина высоты треугольника лежит на средней линии (ср. стр. 43 вводной статьи).

48. Обозначив данный треугольник через ABC, его высоты через AD, BE, CF и точку их пересечения через H, докажите, что каждый из четырехугольников $AFHE$, $BFHD$, $EHDC$ можно вписать в окружность.

49. Обозначив через M точку пересечения биссектрис, а через DE — указанный отрезок, параллельный основанию AB (точка D лежит на AC, точка E — на BC), докажите, что треугольники AMD и BME — равнобедренные.

50. Противоположные стороны нового четырехугольника являются средними линиями в треугольниках, на которые соответствующая диагональ разбивает данный четырехугольник. Ромбом этот параллелограмм будет, если диагонали данного четырехугольника равны, прямоугольником — если диагонали перпендикулярны, квадратом — если они равны и перпендикулярны.

51. Обозначив основания трапеции через AD и BC, а точку пересечения диагоналей через M, докажите равенство треугольников AMD и BMC.

52. Обозначим в четырехугольнике $ABCD$: через M — середину AB, через N — середину CD и через P середину диагонали AC. Рассмотрите треугольник MNP и покажите, что в нем $MP + PN = MN$.

53. Воспользуйтесь идеей решения задачи **43**.

54. Обозначив через M середину гипотенузы треугольника ABC, докажите равенство треугольников: $\triangle cMb = \triangle AMa$, $\triangle cMC = \triangle aMb$. Используя равенства $BM = bM = MC$, докажите на основании рассмотрения треугольника BCb, что $\angle bBC = 45^\circ$ и потому $Bb \perp ac$. Воспользуйтесь затем свойством высот треугольника.

55. а) Докажите равенство половин боковых сторон. б) Сравните два выражения для площади треугольника. в) Докажите, что два треугольника равны, если у них равны основания, углы при вершине и биссектрисы этих углов (см. стр. 23—24 вводной статьи).

56. Если O_1, O_2 — центры правильных треугольников, построенных на сторонах AB и BC треугольника ABC, O — вершина правильного треугольника O_1O_2O, то при симметрии сначала относительно OO_1, а затем относительно OO_2 точка A переходит в точку C.

Второе решение. Обратите внимание на то, что сумма трех поворотов на углы 120° относительно центров рассматриваемых равносторонних треугольников представляет собой тождественное преобразование.

57. Воспользуйтесь тем, что все точки M, для которых прямая AM пересекает сторону CD, лежат в треугольнике ACD; аналогично для остальных вершин. Проведя затем все диагонали, рассмотрите 11 образовавшихся частей.

58. Перенесите боковые стороны параллельно самим себе в середину основания и воспользуйтесь свойством медианы прямоугольного треугольника.

59. Такой точкой является, например, точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$.

60. Воспользуйтесь рис. 9.

61. Если M, N, P — основания перпендикуляров, опущенных из точки Q на стороны AB, BC, AC (соответственно), то четырехугольники $BMQN$ и $AMQP$ можно вписать в окружность. Воспользовавшись этим, докажите, что прямые MN и NP совпадают.

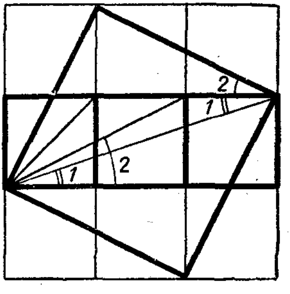


Рис. 9.

62. Пусть MN — средняя линия треугольника $AA'D$ и NP — средняя линия треугольника $DD'A'$. Рассмотрите треугольник MNP и все аналогичные треугольники.

63. Окружность, построенная на отрезке AB, как на диаметре, проходит через основания высот AD, BE. Точка P, симметричная D относительно прямой AB, лежит на этой же окружности. Выведите отсюда, что $\angle APE = \angle ABE = 90° - \angle A$. Докажите также, что $\angle APQ = 90° - \angle A$ и поэтому точка E лежит на прямой PQ, т. е. совпадает с C'.

64. Проведите через вершины четырехугольника прямые, параллельные данной стороне квадрата, и рассмотрите площади тех треугольников и трапеций, на которые эти прямые разбивают данный четырехугольник.

65. Докажите, что периметр данного остроугольного треугольника не меньше периметра прямоугольного треугольника, вписанного в ту же окружность, две вершины которого совпадают с двумя какими-нибудь вершинами данного треугольника.

66. Докажите, что окружность, вневписанная в угол A треугольника ABC, касается стороны BC в точке E.

67. Рассмотрите самый короткий перпендикуляр и покажите, что он не может упасть на продолжение стороны.

68. Покажите, что при параллельных перемещениях любой из сторон многоугольника он сохраняет свойство, сформулированное в условии.

Превратите данный многоугольник в правильный и воспользуйтесь методом задачи **43**.

69. Пусть в треугольнике MNP угол MNP равен 30°. Проведем через точку P прямую l, лежащую вне треугольника и образующую со стороной PM угол в 30°; рассмотрим любую точку X этой прямой. Покажите, что угол MXN достигает наибольшего значения в такой точке X_0, что окружность, проходящая через точки M, N и X_0, касается прямой l. Покажите далее, что даже это н а и б о л ь ш е е значение угла MX_0N не превосходит 30°.

70. Проведите медиану на бо́льшую сторону и рассмотрите вопрос о подобии исходного треугольника и образовавшегося равнобедренного треугольника со сторонами 3, 3, 2.

71. Воспользовавшись теоремой о сумме квадратов диагоналей параллелограмма, вычислите медианы треугольника.

В т о р о е р е ш е н и е. Обозначив через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторы, идущие по сторонам треугольника, найдите векторы, идущие по медианам, и составьте их скалярное произведение.

72. Если ось симметрии не проходит ни через одну вершину четырехугольника, он представляет собой равнобочную трапецию (или прямоугольник) и является вписанным.

В противном случае покажите, что ось симметрии проходит сразу через две вершины четырехугольника, и он является описанным (дельтоидом или ромбом).

73. Пусть M_1 и M_2 — середины диагоналей четырехугольника $ABCD$, точка O — центр вписанной окружности.

Докажите, что имеют место равенства:

$$S_{\triangle M_1AB} + S_{\triangle M_1CD} = S_{\triangle M_2AB} + S_{\triangle M_2CD} =$$
$$= S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

74. Докажите, что в такой четырехугольник можно вписать окружность (ее центр совпадает с центром данной окружности).

75. Докажите (применяя поворот и гомотетию треугольника ABC), что $\overline{BA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1} = 0$. Затем, используя соотношение $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$ (где M — центр тяжести треугольника ABC), покажите, что $\overline{MA_1} + \overline{MB_1} + \overline{MC_1} = 0$, и потому M — центр тяжести треугольника $A_1B_1C_1$.

76. Воспользуйтесь основным свойством медиан треугольника и покажите, что стороны нового треугольника параллельны сторонам данного.

Второе решение. Вычислите векторы, идущие из точки O пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ к центрам тяжести указанных треугольников, и используйте равенство

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0.$$

77. Проведите прямую BB_1, параллельную A_1A_2 (точка B_1 — на прямой A_nA_1); затем проведите прямую $BB_2 \parallel A_2A_3$ (точка B_2 — на прямой A_1A_2) и т. д.

Покажите, что многоугольник $B_1B_2...B_n$ — искомый.

78. Предположив противное, постройте окружность, касающуюся трех сторон четырехугольника — AB, BC и CA, и проведите из точки A вторую касательную к этой окружности.

79. Рассмотрите окружность достаточно большого радиуса и от некоторой точки отложите на ней в одну сторону наибольшую из сторон многоугольника, а в другую сторону последовательно отложите остальные стороны многоугольника (в любом порядке). Затем уменьшайте радиус окружности. Если диаметр окружности станет равен наибольшей стороне раньше, чем ломаная «замкнется», то начните снова увеличивать радиус, но уже так, чтобы центр окружности находился по другую сторону от наибольшей стороны, чем остальная ломаная. Покажите, что при достаточно большом радиусе ломаная «замкнется».

Для этого воспользуйтесь тем, что наибольшая сторона меньше суммы остальных, ибо существует какой-то многоугольник с этими сторонами.

80. а) Воспользуйтесь тем, что вершины четырехугольника лежат на перпендикулярах, проведенных к сторонам и диагоналям данного четырехугольника через их середины. Рассмотрите образующиеся подобные треугольники.

б) Докажите, что стороны четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ проходят через вершины данного четырехугольника и перпендикуляры его биссектрисам.

81. а,б) Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ — векторы, идущие по сторонам четырехугольника, и $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$, $\boldsymbol{d}'$ — векторы, идущие по сторонам квадратов.

Выразите через них векторы, идущие по диагоналям, и воспользуйтесь соотношениями: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=0$, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}'=0$, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}'=-\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$ и т. п.

82. Докажите, что сторона квадрата $MNPQ$ будет наименьшей, если его вершины совпадут с серединами сторон исходного квадрата.

83. Докажите, что из любых двух диаметрально противоположных точек окружности хотя бы одна удовлетворяет поставленному условию.

84. Воспользуйтесь формулой Герона, соотношениями: $4RS=abc$, $(a+b+c)r=2S$ и неравенством $R\geqslant 2r$.

85. Обозначив через O центр окружности, описанной около треугольника ABC, докажите, что прямые OA, OB, OC соответственно перпендикулярны сторонам треугольника DEF. Покажите далее, что площадь треугольника ABC выражается формулой:

$$S=\frac{1}{2}(OA\cdot EF+OB\cdot DF+OC\cdot DE)=\frac{1}{2}R\cdot p,$$

и воспользуйтесь соотношением $S=\frac{1}{2}rP$.

86. Если a, b, c — стороны данного треугольника (c — гипотенуза), то имеет место соотношение $\frac{r}{h}=\frac{c}{a+b+c}$; покажите, пользуясь этим, что $\frac{r}{h}<0{,}5$. Далее из соотношений $a^2+b^2\geqslant 2ab$, $c^2=a^2+b^2$ выведите неравенство $(a+b)\leqslant c\sqrt{2}$ и с его помощью покажите, что $\frac{r}{h}\geqslant\sqrt{2}-1>0{,}4$.

87. Выразите обе части равенства через стороны и углы данного треугольника.

88. Воспользуйтесь соотношением: $d^2 = R^2 - 2Rr$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника, а d — расстояние между центрами этих окружностей.

89. Воспользуйтесь формулой Птолемея: площадь вписанного четырехугольника равна

$$S = \sqrt{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)\ (p-d)},$$

где a, b, c, d — стороны четырехугольника, а p — его полупериметр.

90. Пусть M и N — такие точки на диагонали AC, что $BM \parallel DN \parallel l$. Задача сводится к доказательству соотношения:

$$\frac{AM}{AG} + \frac{AN}{AG} = \frac{AC}{AG}.$$

Покажите, что $CM = AN$.

91. Обозначим через O центр описанной окружности, а через E точку пересечения биссектрисы угла A с этой окружностью. Воспользуйтесь тем, что прямая OE параллельна высоте AD.

92. Доказательство сводится к вычислению суммы

$$S(n, \varphi) \stackrel{'}{=} \cos^2\left(\frac{2\pi}{n} - \varphi\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{n} - \varphi\right) + \ldots +$$

$$+ \cos^2\left(2\,\frac{(n-1)\,\pi}{n} - \varphi\right) + \cos^2(2\pi - \varphi);$$

при вычислении удобно воспользоваться соотношением $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ и методом задач **30**, **31** раздела **А**. Окончательное выражение для суммы S не должно зависеть от φ.

93. Центром искомой окружности является середина отрезка, соединяющего точку пересечения высот треугольника с центром описанной окружности.

Примените к описанной окружности гомотетию с коэффициентом $\frac{1}{2}$ и с центром в точке пересечения высот.

94. Примените инверсию с центром в точке M для доказательства следующего утверждения:

если ρ_1, ρ_2, ..., ρ_{2n-1}, ρ_{2n} — расстояния от точки M до сторон вписанного $2n$-угольника $A_1A_2 \ldots A_{2n}$, то

$$\rho_1\rho_3 \cdot \ldots \cdot \rho_{2n-1} = \rho_2\rho_4 \cdot \ldots \cdot \rho_{2n}.$$

Утверждение настоящей задачи получается из него, если вершину A_2 приближать к вершине A_1, вершину A_4 приближать к вершине A_3 и т. д.

95. Пусть A — ближайшая к точке O вершина n-угольника, а B и C — две такие вершины, что точка O лежит внутри или на границе треугольника ABC. Пусть угол OAB меньше угла OAC; покажите, что угол AOB — искомый.

96. Пусть A_1 и B_1 — основания биссектрис внешних углов A и B соответственно. Проведите через точки A, B, C прямые, параллельные прямой A_1B_1, и рассмотрите точки их пересечения с некоторой прямой l. Далее воспользуйтесь свойством биссектрисы внешнего угла треугольника.

97. Обозначив длины сторон треугольника через a, $a+d$, $a+2d$ рассмотрите высоту h, опущенную на среднюю сторону, и воспользуйтесь формулами:

$$S_\Delta = pr = \frac{(a+d)h}{2},$$

где p — полупериметр треугольника.

98. а,б) Сначала докажите эти утверждения для случая, когда треугольники лежат в разных плоскостях.

§ 4. Задачи на доказательство.

II. Окружность

99. Проведите диаметр CE и докажите, что $AE = BD$; далее примените теорему Пифагора к треугольнику EAC.

100. Рассмотрите второй вписанный правильный треугольник EDF.

101. Докажите, что центр рассматриваемой окружности лежит на отрезке, соединяющем точку C с центром данной окружности.

102. Искомая точка X лежит на прямой PQ и определяется из условия: $PX \cdot PQ = k^2$, где k — длина касательной, проведенной из точки P к данной окружности (ср. например, задачу **24**).

103. Покажите, что все звенья ломаной — траектории шара — находятся на равных расстояниях от центра биллиарда.

104. Воспользуйтесь симметрией относительно диаметра, перпендикулярного хордам.

105. Воспользуйтесь результатом задачи **20**.

106. Воспользуйтесь тем, что центральный угол дуги AB вдвое больше центрального угла дуги AC, а радиус новой окружности вдвое меньше радиуса данной.

107. Выразите рассматриваемый угол через угол между неподвижными касательными.

108. Воспользуйтесь тем, что касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны; используйте также равенство общих внешних касательных двух окружностей.

109. Докажите равенство углов MON и MOP (O — центр данной окружности), для чего рассмотрите эти углы как вписанные в окружности, проходящие соответственно через точки O, M, N и O, M, P.

110. Покажите, что эта задача эквивалентна задаче **66**.

111. Рассмотрите точку пересечения двух окружностей из четырех и покажите, что каждая из двух оставшихся окружностей проходит через эту точку.

112. Проведите третью окружность Σ, пересекающую окружность C_1 в диаметрально противоположных точках. Подберите окружность Σ так, чтобы инверсия относительно этой окружности переводила точку пересечения окружностей C_2 и C_3 в центр окружности C_1. Покажите, что образы окружностей C_2 и C_3 снова пересекают окружность C_1 в диаметрально противоположных точках. Подробнее об этом см. [45], т. II, стр. 338—343.

113. Воспользуйтесь инверсией с центром в одной из точек пересечения окружностей.

114. Если M — середина отрезка B_1B_2, то $AB_1^2 + AB_2^2 = 2(AM^2 + B_1M^2)$; выясните, при каком расположении точки A сумма $AM^2 + B_1M^2$ принимает наименьшее значение.

§ 5. Задачи на построение.

I. Многоугольники. Построения с ограниченными возможностями

115. Соединив точку M с вершиной угла A, отложите на прямой AM отрезок $MC = MA$; проведите через точку C прямые, параллельные сторонам угла, и рассмотрите диагональ полученного параллелограмма.

116. Покажите, что центр окружности совпадает с серединой отрезка AB.

117. Постройте сначала треугольник по серединам его сторон; затем проведите диагональ пятиугольника и воспользуйтесь результатом задачи **50**.

118. Искомая точка является точкой пересечения отрезков, параллельных диагоналям четырехугольника; один такой отрезок построен в задаче **15**.

119. Отразив биллиард относительно одного из бортов, рассмотрите, во что перейдет при этом траектория шара; после ряда последовательных отражений траектория должна превратиться в отрезок прямой (ср. задачу **249**а)).

120. Обозначив угол ABC через α, покажите, что точка D определяется из условия:

$$\angle BCD = \frac{\alpha}{2}.$$

121. Воспользуйтесь тем, что центр тяжести делит медиану в отношении $1:2$, а средняя линия делит медиану пополам.

122. Произведите поворот одной из окружностей на $60°$ вокруг данной точки.

123. Взяв на большей стороне AC треугольника ABC такую точку D, что $AD = AB$ (AB — меньшая сторона), покажите, что $BD = DC$.

124. Постройте сначала середину стороны, противолежащей данной вершине.

125. Построив прямоугольный треугольник с катетом AC, равным данной высоте, и гипотенузой AB, равной медиане, найдите на гипотенузе точку M, для которой $AM : MB = 2 : 1$. Затем из M, как из центра, проведите окружность радиуса AM. Если D — точка ее пересечения с прямой BC, то AD — основание искомого треугольника.

126. Покажите, что прямые, соединяющие центры вневписанных окружностей, проходят через вершины данного треугольника и перпендикулярны его биссектрисам.

127. Если ABC — искомый треугольник и P, Q, R — данные точки, то прямые AP, BQ, CR являются биссектрисами треугольника PQR (ср. задачу **48**). Иначе говоря, вершины искомого треугольника являются серединами дуг PQ, QR, RP.

128. Докажите предварительно, что описанная окружность делит пополам отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей.

129. а) Опустим из точки B перпендикуляр на прямую l_2 и продолжим его до пересечения с прямой l_3 в точке C; из этой точки опустим перпендикуляр на прямую l_1 и, продолжив его до пересечения с прямой l_2, получим точку D. Докажите, что треугольник BCD — искомый.

б) Постройте середину стороны, противолежащей вершине B, и воспользуйтесь задачей **115**. в) Воспользуйтесь идеей задачи а) и результатом задачи **48**.

130. а) Продолжим сторону AC за вершину A на отрезок $AD = AB$. Легко видеть, что $\angle ADB = \frac{1}{2} \angle BAC$. Задача сводится, таким образом, к стандартной задаче о построении треугольника по двум сторонам и углу против одной из них. Аналогично решаются задачи в) д) ж).

б) Заметим, что вершина A лежит на перпендикуляре, проведенном к отрезку BD через его середину (обозначения предыдущей задачи). Аналогично решается и задача е).

з) Докажите, что если в треугольнике ABC на стороне AC выбрана такая точка E, что $AE = AB$, то $\angle CBE = \frac{B - C}{2}$. Аналогично решается задача г).

и) Воспользуйтесь тем, что биссектриса β_a пересекает описанную окружность в той же точке, что и перпендикуляр, проведенный к стороне a через ее середину.

к) Если ABC — искомый треугольник и D — основание биссектрисы β_c, то, как известно, $AD : DB = AC : CB = b : a$. Поэтому, если точка A описывает окружность радиуса b с центром в точке C, то точка D также описывает некоторую окружность (гомотетия с коэффициентом $\frac{a}{a+b}$ и центром B); с другой стороны, $CD = \beta_c$ — отрезок данной длины.

л) Воспользовавшись основным свойством медиан треугольника, примените метод подобия (ср. задачу к)).

м) При исследовании достройте треугольник до параллелограмма со сторонами a и b.

н) Воспользуйтесь основным свойством медиан треугольника.

о) Постройте сначала треугольник ACD, где D — середина стороны BC.

п) Достроив треугольник до параллелограмма, докажите, что в треугольнике со сторонами $\frac{2}{3}\mu_a, \frac{2}{3}\mu_b, \frac{2}{3}\mu_c$ медианы равны $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$.

131. Таких прямых, вообще говоря, три; это — средние линии треугольника, вершины которого находятся в данных точках.

132. Решите предварительно следующую задачу: через данную точку провести прямую, отсекающую от данного угла треугольник данной площади. Задача сводится к построению отрезков a и b, удовлетворяющих уравнениям

$$ah_1 \pm bh_2 = 2S, \qquad ab \sin \alpha \, 2S,$$

где h_1 и h_2 — расстояния данной точки от сторон данного угла α, а a и b — отрезки, отсекаемые искомой прямой от сторон угла.

133. Докажите, что прямая, делящая периметр треугольника пополам, делит площадь пополам в том и только в том случае, когда она проходит через центр вписанной окружности. Воспользуйтесь построением предыдущей задачи.

134. В случае, когда даны стороны AB и AD и углы B и D, рассмотрите четырехугольник, симметричный искомому относительно диаметра AO вписанной окружности; в случае, если даны углы A и B (или A и D), решение очевидно.

135. а) 1°: стороны смежные. В этом случае постройте сначала треугольник, две стороны которого совпадают с данными сторонами четырехугольника, а третья сторона равна его диагонали.

2°: стороны противолежащие. Если $ABCD$ — искомый четырехугольник, AB и CD — данные стороны, то постройте отрезок BM, равный и параллельный отрезку AC. Треугольник BDM можно построить, так как известны две его стороны и угол между ними.

б) 1°: углы прилежат к одной стороне, например, к стороне BC. Проделав построения п.2° задачи а), заметим, что углы CBA и BCM равны. Точка C строится теперь как пересечение дуг двух сегментов.

2°: даны противолежащие углы. Построим на диагонали дуги двух сегментов, вмещающих эти углы, и одну из дуг перенесем на расстояние d_2 в направлении этой второй диагонали (которое задается углом между диагоналями). Рассмотрите точку пересечения сдвинутой и несдвигавшейся дуг.

в) 1°: угол прилежит к стороне. В этом случае решение очевидно. 2°: даны угол BCD и сторона AB. Воспользуйтесь построением п.2° задачи а).

136. Постройте на стороне AD точку B', симметричную вершине B относительно диагонали AC; рассмотрите треугольник $B'DC$.

137. При помощи параллельного переноса всех данных элементов в одну из вершин задача сводится к следующей:

Даны четыре концентрические окружности. Провести такую прямую, чтобы ее отрезок, заключенный между первой и второй окружностями, был равен отрезку между третьей и четвертой окружностями.

Для решения этой задачи примените метод подобия. (ср. задачу **181**).

138. Воспользуйтесь тем, что сумма симметрий относительно прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$ переводит точку A_1 в себя. Например, пусть $A_1A_2, \ldots, A_n$ — искомый n-угольник и B_1 — какая-то точка плоскости. Отразив отрезок A_1B_1 последовательно от прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$, мы получим отрезки $A_2B_2, \ldots, A_nB_n, A_1B_{n+1}$. Тогда точка A_1 лежит на перпендикуляре, восставленном к отрезку B_1B_{n+1} в его середине.

139. Искомых прямых две. В трапеции с основаниями AD и BC одна из них проходит через точки пересечения диагоналей с медианами треугольников ACD и ABD, проведенными к стороне AD. Вторая проходит через точки пересечения диагоналей с медианами треугольников ABC и DBC, проведенными к стороне BC.

140. Воспользуйтесь тем, что из всех треугольников с данным основанием и данной площадью наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

141. Пусть точка B' симметрична точке B относительно прямой OM. Покажите, что для искомой точки X справедливо равенство:

$$\angle B'XA = 180^\circ - 2\angle MON.$$

142. Пусть B — данная вершина квадрата $ABCD$, а E, F — данные точки на прямых AD и CD. Построим на отрезке EF, как на диаметре, окружность и обозначим через K отличную от D точку ее пересечения с прямой BD. Докажите, что дуги EK и EF равны.

143. На отрезке AB постройте дуги сегментов, вмещающие углы α и β, и первую дугу сдвиньте на данное расстояние в данном направлении. Рассмотрите точку пересечения новой дуги со второй из ранее построенных дуг.

144. Постройте сначала треугольник со сторонами, перпендикулярными сторонам данного треугольника, и такой, что только две его вершины лежат на сторонах данного треугольника.

145. а) Построение очевидно; задача имеет до четырех решений.

б) Пусть O — проекция центра данной окружности на данную прямую. Постройте квадрат, гомотетичный искомому, чтобы точка O являлась серединой его стороны, лежащей на данной прямой.

146. Пусть точка A' симметрична точке A относительно данной прямой. Докажите, что прямая BM касается окружности радиуса $R = \frac{1}{2} AA'$ с центром в точке A'.

147. Воспользуйтесь методом задачи **145** б).

148. Докажите предварительно, что если перемещать вершину B треугольника ABC параллельно основанию AC и сохранять при этом неизменной высоту прямоугольника, то длины диагонали и основания вписанного прямоугольника также не будут изменяться.

149. Построим касательную к дуге данного сегмента, образующую угол в 30° с его основанием; через точку касания проведем радиус до пересечения в точке A с основанием сегмента. Докажите, что точка A — вершина искомого треугольника.

150. Воспользуйтесь методом задачи **142**.

151. Решите вспомогательную задачу: даны два луча и точка A. Провести через данную точку прямую, пересекающую лучи в точках B и C, так, чтобы отношение отрезков AB и BC было заданным. При решении воспользуйтесь гомотетией с центром A.

152. Воспользуйтесь теоремой:

Если фигура F изменяется, оставаясь подобной сама себе, так, что три прямые l, m, n этой фигуры, не проходящие через одну точку, проходят все время через три неподвижные точки, то каждая прямая фигуры F проходит все время через неподвижную точку, а каждая точка фигуры описывает окружность.

Доказательство этой теоремы см. [45], т. II, стр. 126.

153. Докажите, что если отбросить требование расположения точки A на данной прямой, то множество всевозможных положений вершины A представляет собой окружность, концентричную с данной. Для доказательства воспользуйтесь тем, что аналогичное утверждение можно сделать относительно вершины B.

154. Докажите, что одна из вершин треугольника непременно должна совпадать с вершиной параллелограмма.

Если A — эта вершина треугольника и $m : n$ — отношение сторон, сходящихся в вершине A, то с центром в какой-либо вершине M параллелограмма $MNPQ$ совершите поворот на угол A и гомотетию с коэффициентом $m : n$. При этом сторона NP перейдет в прямую $N''P''$. Покажите, что точка пересечения прямых $N''P''$ и PQ является вершиной искомого треугольника.

155. Покажите предварительно, что стороны любого треугольника ABC являются биссектрисами внешних углов в треугольнике, вершинами которого служат основания высот треугольника ABC (ср. задачу 48). Для возможности решения данные прямые должны образовывать о с т р о у г о л ь н ы й треугольник.

156. Рассмотрите более общую задачу: в данную окружность вписать n-угольник, k идущих подряд сторон которого проходят через k данных точек, а остальные стороны имеют известные направления. Примените индукцию по числу k.

157. Пусть $A_1A_2...A_n$ — искомый многоугольник, M_1, M_2, ..., M_n — данные центры p-угольников. Совершим последовательные повороты с центрами M_1, M_2, ... на угол $\alpha \frac{2\pi}{p}$. Тогда точка A_1 после всех этих поворотов перейдет в себя. Например, если B_1 — произвольная точка, то отрезок A_1B_1 перейдет при первом вращении в A_2B_2, этот отрезок перейдет при втором вращении в A_3B_3 и т. д., пока, наконец, мы не получим отрезка A_nB_n. Этот отрезок при последнем повороте перейдет в отрезок A_1B_{n+1}. Докажите, исходя из этого, что вершина A_1 лежит на перпендикуляре, проведенном к отрезку B_1B_{n+1} через его середину.

158. Впишите в один из углов треугольника, например в угол BAC, произвольную окружность; постройте вторую окружность такого же радиуса, касающуюся первой окружности и стороны AC; затем проведите касательную к этой новой окружности, параллельную стороне BC. Пусть F — точка касания; проведите прямую AF и обозначьте через D точку ее пересечения со стороной BC. Совершите гомотетию с центром в точке A и с коэффициентом $k = \frac{AD}{AF}$.

159. Рассмотрите вспомогательную задачу в пространстве: через три точки, данные в гранях прямого трехгранного угла (по одной точке на грани), проведена плоскость. Построить стороны треугольника, образующегося при пересечении этой плоскости с гранями угла.

Данная задача является как бы «проекцией» этой вспомогательной задачи.

160. Постройте вспомогательный угол, стороны которого параллельны сторонам данного угла, отстоят от них соответственно на равных расстояниях и пересекаются в пределах чертежа.

161. Достройте треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$ и постройте медиану треугольника BCD.

162. Заметим, что $\frac{1}{3} \cdot 54° = 18° = \frac{1}{2} \cdot 36° = \frac{1}{2}\left(90° - 54°\right)$. Если предварительно требуется построить угол 54°, то можно воспользоваться построением правильного вписанного десятиугольника.

163. Воспользуйтесь тем, что сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной окружности (при удвоении данный отрезок является радиусом такой окружности). Процесс деления отрезка пополам показан на рис. 10. Здесь $AC = 2AB$, X — середина отрезка AB.

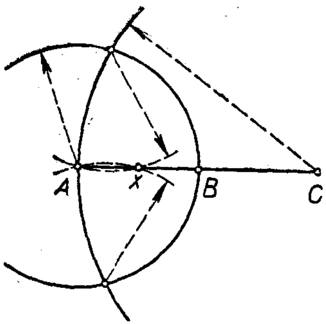


Рис. 10.

164. Предварительно увеличьте данный отрезок в n раз, для чего воспользуйтесь методом предыдущей задачи.

165. Воспользуйтесь тем, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения боковых сторон, делит оба основания пополам.

166. С помощью двусторонней линейки удобно строить ромбы;

а) воспользуйтесь тем, что диагонали ромба являются биссектрисами его углов;

б) воспользуйтесь тем, что диагонали ромба перпендикулярны, и постройте некоторый квадрат. Используя квадрат, можно строить перпендикуляр к любой прямой.

в) воспользуйтесь задачей б) и задачей **165**.

167. Воспользуйтесь методом задачи **165** и следующей теоремой:

если в параллелограмме $ABCD$ точка M лежит на отрезке AD, причем $AM \cdot n = AD$, и прямые BM и AC пересекаются в точке N, то $AN \cdot (n + 1) = AC$.

При доказательстве этой теоремы используйте метод математической индукции или результат задачи **90**.

168. Постройте прямоугольник, вписанный в данный круг. Затем, пользуясь указанием к задаче **165**, на данной прямой постройте отрезок, середина которого известна. Наконец, постройте прямую, параллельную данной.

169. Воспользуйтесь, например, следующей теоремой: если на плоскости даны две прямые l_1, l_2 и точка P, не лежащая на них, и если из точки P проведены три прямые, пересекающие данные прямые в точках A и C, соответственно, B и D, соответственно E и F, то точки пересечения прямых AD и BC, BE и FA, l_1 и l_2 лежат на одной прямой.

Доказательство теоремы см. [45], т. II, стр. 369.

Можно также воспользоваться результатом задачи **98**.

170. Воспользуйтесь тем, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

§ 6. Задачи на построение. II. Окружности

171. Рассмотрите треугольник с вершинами в данных точках и его вписанную окружность.

172. Воспользуйтесь гомотетией с центром в данной точке.

173. Докажите, что при любом положении точки M на данной дуге AB биссектриса угла AMB проходит через середину дополнительной дуги; биссектриса искомого угла, кроме того, делит хорду AB в данном отношении.

174. Произведите гомотетию с центром в данной точке и с коэффициентом $\frac{1}{2}$; рассмотрите точку пересечения исходной и полученной окружностей.

175. Пусть OA, OB — данные радиусы; отложим на прямой AB отрезок $BC = AB$ и обозначим через X точку пересечения окружности с прямой OC. Искомая прямая параллельна AB и проходит через точку X.

176. Постройте окружность O', равную данной окружности и пересекающую прямую l в точке M под данным углом α.

Покажите, что центр искомой окружности лежит на перпендикуляре к линии центров OO', проведенном через середину OO'.

177. Пусть O — центр окружности, вписанной в данный треугольник ABC, Σ_1, Σ_2, Σ_3 — окружности, вписанные в треугольники AOB; BOC, COA. Проведите общие внутренние касательные этих окружностей и покажите, что каждая из искомых окружностей касается двух из этих касательных.

178. а) Постройте окружность, симметричную одной из данных окружностей относительно точки их пересечения.

б) Постройте на отрезке, соединяющем центры данных окружностей, как на гипотенузе, прямоугольный треугольник с катетом, равным половине данной суммы.

в) Отразив меньшую окружность относительно точки пересечения, примените метод задачи б).

179. Отразите одну из сторон данного угла относительно перпендикуляра к данной прямой, проходящего через точку O.

180. Задача сводится к построению треугольника по стороне, противолежащему углу и разности двух других сторон (см. задачу **130**, д)).

181. Примените гомотетию меньшей окружности с центром в любой точке внешней окружности и с коэффициентом $\frac{1}{2}$; рассмотрите точку пересечения средней окружности с образом меньшей окружности.

182. Постройте сначала любую окружность, вписанную в тот из углов, образованных данными прямыми, в котором лежит данная точка. Воспользуйтесь тем, что искомая окружность гомотетична построенной.

183. Сведите задачу к предыдущей, рассмотрев две прямые, параллельные данным (соответственно) и отстоящие от них на расстоянии, равном радиусу данной окружности.

184. Решите предварительно задачи:

1°. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.

2°. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей.

§ 7. Прямые и плоскости в пространстве

185. Выберите из данных прямых любые две и рассмотрите положение любой прямой относительно этой пары.

186. Докажите, что проекции отрезков AB, AC, AD на плоскость треугольника BCD будут высотами этого треугольника.

187. Запишите условие задачи и воспользуйтесь тем, что у двух скрещивающихся прямых имеется **единственный** общий перпендикуляр.

188. Перенесите начала всех лучей в одну точку плоскости и рассмотрите проекцию первого луча.

189. Верно.

190. Имеется семь таких плоскостей: четыре плоскости, отделяющие по одной точке от остальных, и три плоскости, разделяющие точки на равные группы.

191. Разбейте четырехугольник диагональю на два треугольника и примените теорему о плоских углах двугранного угла.

192. Спроектируйте путь луча на любую грань и докажите, что проекция прямого и отраженного лучей параллельны.

193. Все такие прямые касаются цилиндра, осью которого служит данная прямая.

194. Проведите пару параллельных плоскостей, каждая из которых проходит через одну из данных прямых, и рассмотрите прямые m и n, по которым эти плоскости пересекаются с данной плоскостью P. Выберите отрезок данной длины, концы которого лежат на прямых l_1 и l_2. Искомый отрезок должен быть параллелен выбранному. Задача имеет не более двух решений.

195. Нельзя: проекции могут быть расположены в плоскости, перпендикулярной обеим данным плоскостям; рассматриваемая линия будет лежать в этой плоскости и может не быть прямой.

196. Спроектируйте ребро SB трехгранного угла $SABC$ на плоскость SAC; обозначив проекцию через SH, покажите, что хотя бы один из углов ASH и HSC не превосходит 90°. Если таким углом является угол ASH, то проведите через точку S плоскость, перпендикулярную ребру SA.

197. Искомая плоскость проходит через прямую, по которой одна из граней данного двугранного угла пересекается с плоскостью, симметричной другой грани относительно данной прямой.

198. Наименьшее число звеньев заузленной ломаной равно шести. Покажите, что ломаная, имеющая пять звеньев

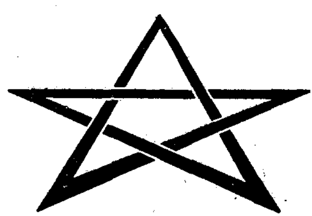


Рис. 11.

и изображенная на рис. 11, не может быть пространственной.

199. а) Покажите сначала, что найдутся четыре вершины (или три последовательные стороны) пятиугольника, лежащие в одной плоскости.

б) Возьмите правильный $2k$-угольник и его вершины поднимите через одну на одну и ту же высоту над плоскостью этого $2k$-угольника.

в) $(2k+1)$-угольники получаются перегибанием (по пунктирам) фигуры, получающейся после добавления к прямоугольнику с отношением сторон $1:(k-2)$ пятиугольника, все стороны которого равны, а угол при одной из вершин равен $90°$ (см. рис. 12).

200. Пусть ACE правильный треугольник, $B'D'F'$ — треугольник, получающийся из ACE параллельным переносом на вектор, перпендикулярный плоскости треугольника ACE; пусть, наконец, BDF — треугольник, получающийся поворотом $B'D'F'$ в его плоскости вокруг центра этого треугольника. Вектор переноса и угол поворота подберем так, чтобы выполнялось равенство: $AD = AE$. Тогда шестиугольник $ABCDEF$ — искомый.

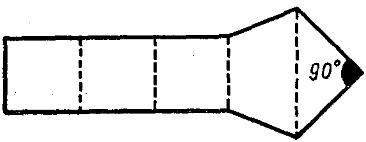


Рис. 12.

201. Если $ABCDEFGH$ — восьмиугольник с равными диагоналями, то тетраэдр $ACEG$ правильный, так же как $BDFH$; покажите, что тогда остальные диагонали не могут все быть равными ребрам этих тетраэдров.

§ 8. Многогранники

202. Не существует. Указание. Возьмите сечение, параллельное любому ребру многогранника и пересекающее все ребра, имеющие общую вершину с этим ребром.

203. Наибольшее число сторон — шесть. Так, шесть сторон имеет сечение, параллельное грани октаэдра и проходящее посредине между этой и противоположной гранями.

204. Треугольник, квадрат, шестиугольник.

205. Покажите сначала, что многогранник, составленный из семи ребер, может иметь только треугольные грани.

206. Примером многогранника с $2n$ ребрами может служить n-угольная пирамида; многогранник с $2n+1$ ребрами получается из $(n-1)$-угольной пирамиды, если на любую боковую грань поставить тетраэдр.

207. Рассмотрите диагональные сечения параллелепипеда.

208. Докажите, что обозначив через Γ, P, B число граней, ребер и вершин многогранника, мы имеем $B \leqslant \frac{2P}{3}$, а если каждая грань имеет более пяти сторон, то $P \geqslant 3\Gamma$. Выведите отсюда, что $\Gamma - P + B \leqslant 0$, и воспользуйтесь теоремой Эйлера о многогранниках (см. [47], стр. 97).

209. Выберите в каждой грани по одной точке, соедините эти точки с вершинами граней и подсчитайте сумму углов полученных треугольников. Для преобразования полученного выражения воспользуйтесь теоремой Эйлера о многогранниках.

210. Воспользуйтесь тем, что точки биссекторной плоскости двугранного угла равноудалены от его граней.

211. Докажите, что все плоские углы данного трехгранного угла не могут быть одновременно острыми или одновременно тупыми. Покажите далее, что каждая грань шестигранника имеет по крайней мере два равных плоских угла.

212. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

213. Этого утверждать нельзя. Указание. Рассмотрите две пирамиды с общим основанием и равными высотами (и, значит, имеющие равные объемы); при этом одну из пирамид возьмите прямой, а другую — «сильно наклоненной».

214. Эти сечения представляют собой параллелограммы с периметром, равным удвоенной длине ребра тетраэдра.

215. Если $ABCD$ — тетраэдр и точки E, F, G лежат на ребрах AB, AC, AD (соответственно), то можно показать, что площадь треугольника EFG меньше площади одного из треугольников AEG и CEG. (Все три треугольника имеют общее основание.) Если этим треугольником является $\triangle CEG$, то применим к нему аналогичное рассуждение, и т. д.

216. Пусть E — середина ребра AB тетраэдра $ABCD$. Покажите, что плоскость CDE делит объем тетраэдра на две равные части, причем она проходит через середины ребер CD и AB; рассмотрите, как изменяются объемы при повороте этой плоскости.

217. Искомых сечений бесконечно много и все они параллельны плоскости, проходящей через прямые, по которым пересекаются противоположные грани данного четырехгранного угла.

218. Примените обычную теорему Пифагора.

219. Воспользуйтесь тем, что расстояние от вершины куба A до прямой l, проходящей через его центр O, равно произведению длины OA на синус угла, образованного лучом OA и прямой l. Для исследования суммы квадратов синусов этих углов воспользуйтесь теоремой косинусов.

220. $R \geqslant 2r$. Указание. Для доказательства необходимости этого условия используйте теорему о плоских углах трехгранного угла; для доказательства достаточности постройте пирамиду с основанием $A_1A_2 \ldots A_n$ и высотой $h = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ (r и R — радиусы малой и большой окружностей).

221. Рассмотрите развертку тетраэдра на плоскость ABC.

222. $\alpha = 90°$.

223. Существует бесконечно много таких многогранников; в качестве примера укажем многогранник, получающийся, если два наклонных параллелепипеда с равными основаниями поставить один на другой.

224. Воспользуйтесь тем, что любая плоскость, проходящая через центр параллелепипеда, делит его объем пополам (и обратно).

225. Докажите сперва это равенство для случая, когда боковые ребра a, b, c удовлетворяют условию $a = b = c = 1$.

226. Воспользуйтесь соотношением $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$ и результатом задачи **36**.

227. Проведите плоскость, параллельную двум противоположным ребрам тетраэдра, и перемещайте ее, оставляя параллельной самой себе, наблюдая за изменением отношения сторон получающегося в сечении параллелограмма. Найдите связь между углом этого параллелограмма и углом между противоположными ребрами.

228. Совместите равные (по трем сторонам) грани рассматриваемых пирамид.

229. Воспользуйтесь теоремой, приведенной в указании к задаче **167**.

230. Либо все три плоских угла трехгранного угла Q равны, либо найдутся два плоских угла, сумма которых меньше 180°. В первом случае сечение ABC следует провести так, чтобы треугольник ABC был правильным; во втором случае (считая, что $\angle AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, $\alpha + \beta < 180°$, где O — вершина угла Q) следует провести сечение ABC, для которого справедливы соотношения: $\angle OBA = \beta$, $\angle OBC = \alpha$.

231. Спроектируйте многогранник на плоскость, перпендикулярную любому его ребру, и воспользуйтесь результатом задачи **283**.

§ 9. Поверхности и тела вращения

232. Искомое расстояние равно $\frac{4}{3}r$, где r — радиус вписанного шара.

233. Воспользуйтесь равенством касательных, проведенных из одной точки к данному шару.

234. Рассмотрите треугольные пирамиды, имеющие основаниями грани данного тетраэдра и вершинами — центр описанной сферы.

235. Воспользуйтесь тем, что все эти касательные перпендикулярны радиусу, проведенному в точку касания.

236. Таких сфер можно провести либо 5, либо 6, либо 7, либо 8; например, 5 сфер возможны в случае, если плоскости образуют правильный тетраэдр; вообще говоря, будет 8 сфер.

Указание. Рассмотрите части, на которые 4 плоскости разбивают пространство; докажите, что из двух частей, не примыкающих друг к другу ни одной точкой, только одна может содержать требуемую сферу.

237. Таких сфер может быть не больше 16; количество их зависит от того, скольким октантам принадлежат точки данной сферы. Так, если данная сфера целиком лежит в первом октанте, то существуют всего две сферы — одна из них касается данной сферы снаружи, другая — изнутри. Если же, например, центр данной сферы находится в общей точке всех плоскостей, то существует 16 требуемых сфер — по две в каждом октанте.

238. $\varphi = 2 \arccos \frac{R}{R+h}$.

239. Воспользуйтесь тем, что объем рассматриваемого тела больше объема конуса с полукруглым основанием и с вершиной в точке A; с другой стороны, этот объем меньше половины объема цилиндра с полукруглым основанием и образующей AB.

240. Сначала докажите, что две оси вращения тела всегда пересекаются (для этого можно использовать идею указания к задаче **41**). Затем покажите, что точка пересечения осей вращения является центром симметрии фигуры, причем все ее точки удалены от этого центра на одинаковое расстояние.

241. Рассмотрите сечение, имеющее наибольший диаметр, и все сечения, проходящие через диаметр этого наибольшего сечения.

242. Стороны сферического треугольника лежат на больших кругах, которые разбивают сферу на три пары сферических двуугольников; воспользуйтесь тем, что в пересечении этих двуугольников образуются два симметричных (и, следовательно, равновеликих) сферических треугольника.

243. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

244. Докажите предварительно, что площадь поверхности, образующейся при вращении ломаной длины $\frac{d}{2}$ вокруг прямой, проходящей через ее конец, не превосходит $\frac{1}{4}\pi d^2$; далее разбейте данную ломаную на две ломаных равной длины.

§ 10. Задачи на наибольшие и наименьшие значения

245. Отразите точки A и B относительно сторон угла OM и ON (соответственно). Искомая ломаная должна при этом перейти в отрезок прямой.

246. Кратчайшим путем является ломаная $OABCO$. Указание. Для доказательства опустите из точки O перпендикуляры OD, OE, OF на стороны BC, AC, AB и докажите, что имеют место неравенства:

$$OA > OC > OB, \; OA - AF < OC - CE < OB - BD.$$

247. В случае, когда три данные точки A, B, C образуют прямоугольный или тупоугольный треугольник, искомый круг имеет диаметром наибольшую сторону этого треугольника.

В случае, когда треугольник ABC — остроугольный, искомый круг описан около него.

248. Воспользуйтесь «методом отражения» (см. задачи **245**, **119**). Применив этот метод, получим, вообще говоря, три ломаные (по числу возможных способов отражения); из этих ломаных нужно еще выбрать наикратчайшую.

249. Если прямые l и AB параллельны, то решение задачи а) существует: искомая точка лежит на перпендикуляре, проведенном к отрезку AB через его середину; решения задачи б) в случае $l \parallel AB$ не существует.

Если прямые l и AB перпендикулярны, то решения задачи а) не существует, а задача б) имеет решение: искомая точка лежит на прямой l. Во всех остальных случаях обе задачи имеют решение.

250. Это — прямая, для которой данная точка и основание перпендикуляра, опущенного на нее из вершины угла, симметричны относительно середины отрезка, высекаемого прямой на сторонах данного угла.

251. Отразите данную точку относительно обеих сторон угла; контур искомого треугольника должен перейти при этом в отрезок прямой (ср. задачу **245**).

252. Все стороны треугольника видны из искомой точки под углом 120° (если такая точка лежит внутри треугольника). В противном случае искомой точкой является вершина тупого угла.

253. Построим на противоположных сторонах квадрата $ABCD$ равнобедренные треугольники ABM и CDN с углом при вершине 120°; соединим вершины этих треугольников отрезком MN. Тогда отрезки AM, MB, MN, CN, DN образуют искомую сеть.

254. Опустите из центров окружностей перпендикуляры на секущую и рассмотрите образовавшуюся прямоугольную трапецию. Наибольшая секущая параллельна линии центров; наименьшая секущая является или продолжением общей хорды, или касательной к большей из окружностей.

255. Решите вспомогательную задачу: через данную точку внутри угла провести прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади; покажите, что отрезок, высекаемый сторонами угла на искомой прямой, делится в данной точке пополам.

256. Воспользуйтесь идеей указания к задаче **69**. Для проведения требуемой окружности постройте прямую, симметричную данной прямой l относительно оси симметрии отрезка MN.

257. Покажите, что каждая сторона искомого треугольника должна быть параллельна касательной, проведенной к соответствующей окружности в противоположной вершине. Покажите далее, что ортоцентры (точки пересечения высот) всех таких треугольников совпадают с общим центром данных окружностей.

258. а) Рассмотрите отдельно случаи, когда точки A и B лежат по разные стороны от данной прямой и по одну сторону от нее.

б) Рассмотрите отдельно случаи, когда вершина A лежит внутри тупого угла, образованного данными прямыми, и внутри острого угла; рассмотрите также случаи, когда данные прямые параллельны или перпендикулярны.

в) Рассмотрите отдельно все возможные случаи взаимного расположения данных прямых; в случае, когда все прямые попарно пересекаются, рассмотрите случаи, когда образованный ими треугольник XYZ остро-, прямо- или тупоугольный. В первом случае вершинами искомого треугольника являются основания высот треугольника XYZ.

259. Искомые точки образуют правильный треугольник, вписанный в окружность, концентричную данной, вдвое меньшего радиуса.

Указание. Данная задача эквивалентна следующей: покрыть круг тремя равными кругами возможно меньшего радиуса.

260. Искомый треугольник — правильный. Указание. Задача равносильна следующей: из всех треугольников, вписанных в данную окружность, найти тот, у которого сумма квадратов расстояний от центра окружности до сторон минимальна.

261. Искомые хорды образуют равные углы с диаметром, проходящим через данную точку. Указание. Обозначив через u и v расстояния от центра окружности до хорд, сведите задачу к отысканию наибольшей величины произведения $u \cdot v$; воспользуйтесь при этом тем, что $u^2 + v^2 = d^2$, где d — расстояние от центра окружности до данной точки.

262. Искомой точкой является центр тяжести треугольника. Указание. Найдите связь между суммой $AM^2 + BM^2 + CM^2$ (M — центр тяжести треугольника) и суммой $AN^2 + BN^2 + CN^2$ (N — любая точка плоскости).

263. Докажите, что сторона искомого квадрата параллельна стороне шестиугольника.

264. Проведите три главные диагонали шестиугольника и воспользуйтесь неравенствами треугольника (ср. задачу XXIII. II. 7. 1.).

В случае пятиугольника соедините его центр с вершинами и, предположив, что точка M находится в одном из образовавшихся треугольников, примените ту же идею.

265. Воспользуйтесь тем, что из всех треугольников данного периметра с данным основанием наибольшую площадь имеет равнобедренный.

266. Наибольшая боковая поверхность равна $2a^2$. Указание. Обозначив стороны параллелепипеда через x, y, z и имея в виду, что $x^2+y^2+z^2=a^2$, найдите максимум выражения $S=xy+xz+yz$ (см. задачи **36**, **37** раздела **А**).

267. Наибольшую площадь имеет сечение с прямым углом при вершине.

268. Через ребро MA трехгранного угла Q и точку O проведем плоскость; пусть MD — прямая, по которой эта плоскость пересекается с гранью BMC угла Q. Взяв на луче MD произвольную точку, проведем через нее прямую l, отсекающую от угла BMC треугольник наименьшей площади (см. указание к задаче **255**). Тогда искомая плоскость должна высекать из угла Q треугольник, сторона которого, лежащая в плоскости BMC, параллельна l.

Выведите отсюда, что искомая плоскость пересекает угол Q по треугольнику, для которого точка O является центром тяжести.

§ 11. Разные задачи

269. Не могут.

270. а) $\frac{n(n+1)}{2}+1$; б) $n(n-1)+2$;

в) на любое число частей, большее 2.

Указание. При доказательстве формул а), б) воспользуйтесь методом математической индукции.

271. Покажите, что два различных прямоугольника могут пересекаться не более чем в восьми точках.

272. Прежде всего разбейте на такие треугольники прямоугольник. Затем сетью горизонтальных и вертикальных прямых разбейте плоскость на попарно неравные и неподобные прямоугольники; для этого достаточно, например, чтобы расстояние между любыми двумя горизонтальными прямыми было несоизмеримо с расстоянием между любыми двумя другими горизонтальными прямыми и несоизмеримо с расстоянием между любыми двумя вертикальными прямыми; для вертикальных прямых должно выполняться такое же условие.

273. Из двух треугольников сложите параллелограмм, а из параллелограммов — полосу; из двух четырехугольников сложите центрально-симметричный шестиугольник, приложив их равными сторонами; из центрально-симметричных шестиугольников сложите «ступенчатую полосу», прикладывая их по определенной паре противоположных сторон.

274. n-угольник разобьется на $\frac{(n-1)(n-2)(n^3-3n+12)}{24}$ частей. Указание. Воспользуйтесь методом математической индукции.

275. Не могут. Указание. Обе точки пересечения окружностей C_1, C_2 (точки A и B) лежат на одной прямой с центром O окружности C_3, причем $OA \cdot OB = R_3^2$, где R_3 — радиус окружности C_3.

276. Вообще говоря, неверно. Например, возьмем точки A_1, A_2, A_3, A_4, как это показано на рис. 13, и положим $\alpha = 180°$.

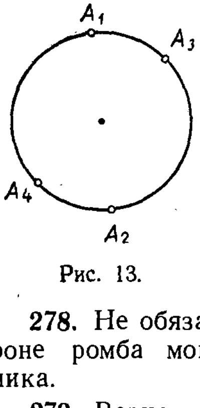


Рис. 13.

277. Докажите следующую лемму: если данная ломаная не имеет хорды длины a, параллельной прямой AB, и не имеет хорды длины b, параллельной прямой AB, то она не может иметь хорды длины $a+b$, параллельной прямой AB. Далее, примените эту лемму, положив $a = b = \frac{AB}{2}$.

278. Не обязательно, если допустить, что на одной стороне ромба могут лежать две вершины прямоугольника.

279. Верно.

280. Докажите, что если расстояние между двумя точками многоугольника равно его диаметру, то обе эти точки являются вершинами многоугольника.

281. Обратное отражение произойдет при любой величине угла α, причем прямое и обратное направления будут параллельны.

282. Покажите, что площадь такого многоугольника может быть сделана как угодно малой (например, меньше 0,001 $см^2$). При этом, конечно, многоугольник не будет выпуклым.

283. Выделите какую-либо сторону данного многоугольника и рассмотрите примыкающие к ней многоугольники разбиения. Стороны этих многоугольников, противоположные выбранной стороне, параллельны ей; к этим многоугольникам вдоль рассматриваемых сторон примыкают новые многоугольники, и т. д.

Построенная цепочка параллельных отрезков заканчивается, очевидно, некоторой стороной исходного многоугольника.

284. Таким многоугольником является, например, правильный 12-угольник.

285. Равенство треугольников не обязательно. Так, если стороны одного треугольника равны 1, a, a^2, а стороны другого — a, a^2, a^3 и $a \neq 1$, то равенство не имеет места. При этом, однако, необходимо выполнение условий $1 < a^2 < a+1$, т. е. $1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, или условий $1 < a^2+a$, $a < 1$, т. е. $0 < a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

286. Наибольшее число сторон равно $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Примером многоугольника, для которого это число как раз равно C_n^3, является правильный n-угольник: все треугольники должны иметь в качестве вершин середины сторон n-угольника.

287. Контур правильного описанного n-угольника при достаточно большом n не может полностью обертываться около окружности более одного раза; с другой стороны, «сильно вытянутый» описанный n-угольник может иметь сколь угодно большой периметр.

288. а) На 10 частей.

б) На 16 частей.

в) На любое число частей, большее 2 (аналогия с задачей **270**, в).

289. Воспользуйтесь идеей решения задачи XX. II. 7. 1.

В. СМЕШАННЫЙ ОТДЕЛ

Задачи комбинаторные, логические, задачи на клетчатой бумаге и другие задачи

1. Указание. Будем считать, что на каждой линии имеется два «ввода» — к одному и ко второму абоненту. Подсчитайте двумя способами общее число вводов: 1) по абонентам, 2) по предполагаемым телефонным линиям.

2. Нельзя. Указание. Докажите, что при любом расположении всех костей домино в ряд согласно правилам игры на концах ряда окажутся равные числа.

3. Докажите сначала, что общая сумма всех чисел рукопожатий, сделанных каждым из людей, четна.

4. Подсчитайте сумму числа сторон по всем граням.

5. Проходя каждый узел, мы вычеркиваем две кривые, входящие в него; исключения составляют начальный и конечный узлы (если они не совпадают).

6. Воспользуйтесь методом математической индукции.

7. См. указание к предыдущей задаче.

8. Возможны два (с точностью до подобия) набора из девяти квадратов, удовлетворяющих условию; стороны этих квадратов находятся в отношениях:

1-й набор: $1:4:7:8:9:10:14:15:18$;
2-й набор: $2:5:7:9:16:25:28:33:36$.

9. Решение показано на рис. 14.

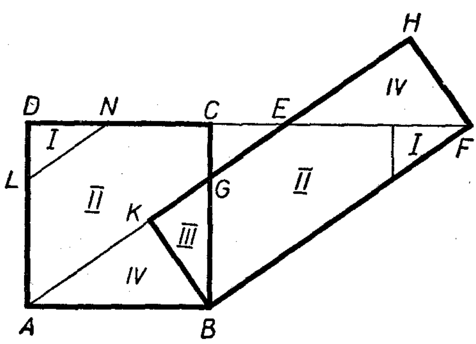


Рис. 14.

10. Решение для случая $n = 6$ показано на рис. 15; $AB = \sqrt{6}$.

11. Рассмотрите, как могут быть приложены кубы к наименьшему из кубов, примыкающих к какой-либо грани кирпича.

12. Разрежьте плиту на 2 части и сложите из них параллелепипед с отношением ребер 8 : 12 : 18.

13. Воспользуйтесь идеей решения задачи **11**.

14. Разбиение производится, например, средней линией треугольника и отрезком высоты от вершины до этой средней линии.

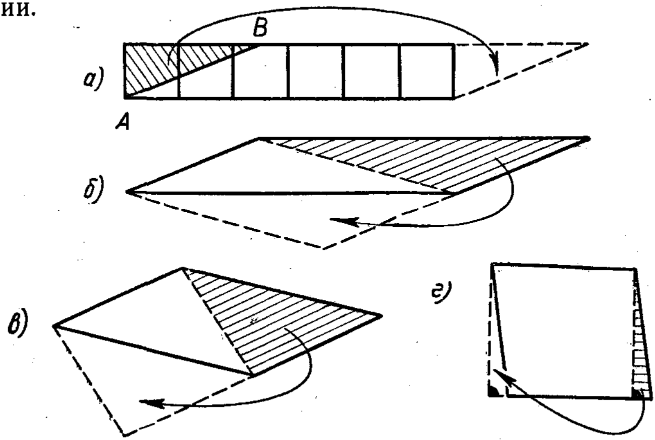


Рис. 15.

15. Искомых многогранников два: сам тетраэдр и «бипирамида», получающаяся прикладыванием двух равных тетраэдров. Указание. Двухгранный угол правильного тетраэдра равен $\arccos \frac{1}{3} \approx 70°32'$. Поэтому больше двух тетраэдров приложить к одному ребру нельзя — иначе полученный многогранник окажется невыпуклым.

16. Отсечь от данного треугольника ему подобный с коэффициентом подобия 4 : 5.

17. $\frac{499 \cdot 500}{2}$. Указание. Воспользуйтесь методом математической индукции (см. рис. 16).

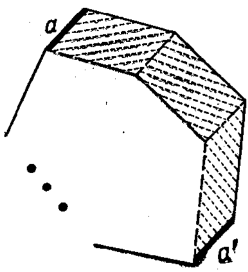


Рис. 16.

18. Нельзя. Указание. Рассмотрите суммы углов семнадцатиугольника и всех треугольников разбиения.

19. Используйте иррациональность числа 2π — длины окружности радиуса 1 (см. стр. 14—15 вводной статьи).

20. Существует; таким является, например, множество всех точек A_1, A_2, ..., A_n, ..., описанных в предыдущей задаче.

21. Используйте идею решения задачи 19.

22. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$. Будем отмечать положение движущегося объекта (автомобиля или воза) на первой дороге точкой отрезка AB (в масштабе), а положение объекта на второй дороге точкой отрезка AD (в том же масштабе). Тогда совместное положение двух объектов на первой и второй дорогах изобразится точкой прямоугольника $ABCD$. Начальному положению машин соответствует точка B, их конечному положению соответствует точка D.

Начальному и конечному положению возов соответствуют две точки — A и C (соответственно). Найдите в прямоугольнике точку, соответствующую такому положению, в котором, с одной стороны, находились машины, а, с другой стороны, должны оказаться возы.

23. Если маршрут проходит через узел квадратной сетки, то будем считать, что он проходит через все четыре квадрата, сходящиеся в этом узле. Доказать, что, «выпрямляя» отдельные участки маршрута, можно построить маршрут *меньшей* длины, проходящий по тем же квадратам и представляющий собой ломаную *с вершинами в узлах сетки*. Доказать затем, что такая ломаная помещается не более, чем на 36 квадратах. (Вообще, если карта разрезана на квадраты 20 *км* $\times$ 20 *км*, то маршрут длины l *км* помещается не более, чем на $\left[\frac{l}{20}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}+4\right]$ квадратах.)

24. Провести $(2n-3)$-звенную ломаную по схеме, указанной на рис. 17, и доказать, что оставшимися тремя звеньями можно перечеркнуть остальные узлы. Рассмотреть отдельно случаи, когда n имеет вид $3k$, $3k+1$, $3k+2$.

25. Исходя из данного параллелограмма, построим «косую сетку» из равных и параллельно расположенных параллелограммов. Покажите, что параллелограммы «косой сетки» равносоставлены с квадратами данной сетки.

Второе решение: рассмотрите разбиение очень большого (по площади) куска плоскости на квадраты и на параллелограммы «косой сетки».

26. Существует: пусть $p^2 + q^2 = r^2$, $a^2 + b^2 = c^2$, где a, b, c, p, q, r — натуральные числа. Тогда существует отрезок длины r (не параллельный линиям сетки) с концами в узлах сетки. Отложим такой отрезок a раз в одном направлении и b раз в перпендикулярном направлении; мы получим прямоугольный треугольник с вершинами в узлах сетки и со сторонами ar, br, cr.

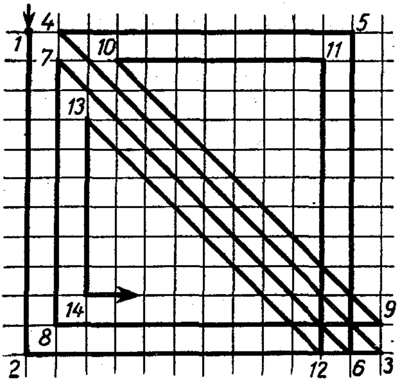


Рис. 17.

27. Если любой отрезок, концы которого лежат в узлах сетки, сдвинуть параллельно самому себе так, чтобы один его конец снова оказался лежащим в узле, то и второй его конец также попадет в узел сетки. Воспользовавшись этим, докажите, что для правильного n-угольника ($n=5$ или $n > 6$), имеющего вершины в узлах сетки, существует меньший правильный n-угольник с тем же свойством. Отдельно докажите невозможность построения правильного треугольника (и, следовательно, правильного шестиугольника) с вершинами в узлах сетки.

28. Разбейте многоугольник на два многоугольника с меньшим числом сторон и проведите индукцию. Последовательными делениями разбейте многоугольник на треугольники и воспользуйтесь результатом задачи 25.

29. При первом взвешивании поместите на каждую чашку весов по 4 монеты.

30. При первом взвешивании положите на каждую чашку весов по 27 монет.

31. Рассмотрите полосу ширины 2, окаймляющую сеть труб, и докажите, что площадь этой полосы будет меньше 100, если общая длина труб меньше 48.

32. Прямыми, параллельными стороне квадрата, разбейте его на полосы ширины 1 *м* 20 *см* и докажите, что в густом лесу в каждой такой полосе растет не меньше девяти деревьев.

33. Наименьшее число частей равно трем. На две части меньшего размера нельзя разбить, например, круг диаметра 1. Докажите, что для любой фигуры диаметра d существует правильный шестиугольник, целиком содержащий эту фигуру, расстояние между противоположными сторонами которого не больше d. Разбейте затем этот шестиугольник на три части, диаметры которых меньше d.

34. Воспользуйтесь методом математической индукции: проведите прямую, отделяющую одну из $n+1$ точек от остальных; покажите, что хотя бы одна сторона многоугольника с вершинами в этих n точках целиком видна из первой точки.

35. Покажите сначала, что на данной прямой l лежит нечетное число таких вершин ломаной, что оба звена, сходящихся в этой вершине, лежат по одну сторону от прямой l; отметьте все такие вершины (воспользуйтесь тем, что прямая l должна столько же раз «войти» внутрь области, ограниченной ломаной, сколько и «выйти» из этой области). Далее, пусть к прямой l примыкают в отмеченных вершинах $2k$ звеньев с одной стороны и $2m$ звеньев — с другой. Пусть $k > m$ (число $k+m$ нечетно!). Сдвиньте прямую l в эту сторону.

36. Подсчитайте общее количество сторон у всех треугольников разбиения, считая каждую сторону дважды, если она принадлежит двум треугольникам.

37. Выберем любого человека из данных шести, назовем его A. Пусть с A знакомы k человек. Рассмотрите отдельно случаи: $k=1$, $k=2$, $k \geqslant 3$.

38. Пусть A и B — две соседние отмеченные точки на отрезке. Докажите, что среди перпендикуляров, основания которых лежат между точками A и B, самое большее на одном нет отмеченной точки.

39. Ответ: $29\,786 + 850 + 850 = 31\,486$. Указание. Прежде всего, заметьте, что число $ten + ten$ оканчивается двумя нулями, откуда $n = 0$, $e = 5$. Далее при сложении цифр третьего разряда $(r + t + t + 1)$ получается менее 30, т. е. в четвертый с конца разряд переходит не более двух единиц; так как в пятый разряд тоже должна переходить единица, то $o = 9$, $i = 1$, так что из третьего разряда переходят две единицы. Далее докажите, что $t > 6$ и рассмотрите оставшиеся возможности: $t = 7$, $t = 8$.

40. Докажите, что подсчет должен в результате дать число, дающее при делении на 6 остаток 1.

41. Пусть шахматист сыграл за какой-то понедельник a_1 партий; за этот день и следующий — a_2 партий; за этот день и за два следующих — a_3 партий, и т. д. Рассмотрите 154 числа: $a_1, a_2, \ldots, a_{77}, a_1+20, a_2+20, \ldots, a_{77}+20$. Покажите, что наибольшее из них не превосходит 132, и докажите, что среди этих чисел найдутся по крайней мере два одинаковых.

42. Эту задачу удобно решать, применяя так называемую «двоичную систему счисления» В общепринятой, десятичной системе счисления любое натуральное число представляется единственным образом в виде

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0,$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_k$ могут принимать любые целые значения от 0 до 9. Так, например,

$$467 = 400 + 60 + 7 = 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

Аналогично, в двоичной системе счисления любое натуральное число представляется однозначно в виде

$$b_l \cdot 2^l + b_{l-1} \cdot 2^{l-1} + \ldots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0,$$

где коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_l$ могут принимать значения 0 или 1. Так, $467 = 256 + 128 + 64 + 16 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$, или, сокращенно, 467 = «111010011». Заметим, что любое число от 1 до 1023 может быть представлено в двоичной системе счисления как десятизначное число. Так, например,

1023 = «1111111111»,
1000 = «1111101000»,
513 = «1000000001»,
32 = «0000100000» и т. п.

Заметим теперь, что для выяснения любой цифры из двоичной записи некоторого числа достаточно задать 1 вопрос. Например, для выяснения первой цифры достаточно спросить: «Является ли задуманное число меньшим, чем 512?»

Таким образом, за 10 вопросов мы сможем узнать все цифры двоичной записи числа, т. е. узнаем само число

Меньшего, чем 10, количества вопросов недостаточно, так как для любых заданных девяти вопросов количество возможных ответов типа «да — нет» имеется 512, что не позволяет распознать 1000 чисел.

43. а) Достаточно просто повторять каждый вопрос предыдущей задачи и, если на какой-то дважды заданный вопрос получены разные ответы, повторить его в третий раз.

б) Задав сначала 10 вопросов (см. предыдущую задачу), мы затем с помощью четырех дополнительных вопросов найдем неверную цифру и исправим ее, тем самым узнав число (либо же выясним, что все цифры — верные). Для выяснения неверной цифры поступим так: отделим первые пять цифр числа (в двоичной записи) и спросим: «Эти цифры верные?» (Заметим, что этот вопрос легко перефразировать в требуемую условиями форму.) Получив отрицательный ответ, выберем три цифры из пяти и зададим тот же вопрос, и т. д. Покажите, что ответ «Да» в этой ситуации никогда не может быть обманом.

44. Первый игрок должен при первом ходе положить свою монету на центр стола, а все следующие ходы делать так, чтобы расположение монет на столе было центрально-симметричным.

Замечание. Начинающий игрок выигрывает эту игру и в том случае, когда вместо прямоугольного стола взят любой стол центрально-симметричной формы (круглый, овальный, в форме правильного шестиугольника, в форме шестиконечной звезды и т. п.).

45. а) Если игрок A соединил точки 1 и 2, находящиеся на одной вертикали, то ответным ходом игрок B должен соединить точки 2 и 3 (см. рис. 18).

Если же игрок A соединил точки 4 и 5, находящиеся на одной горизонтали, то игрок B должен соединить точки 5 и 6 (см. рис. 18).

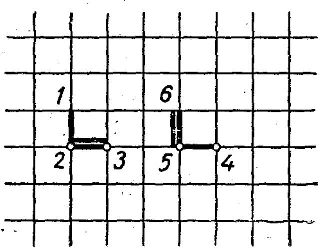


Рис. 18.

При такой стратегии игрока B начинающему игроку никогда не удастся сделать, двигаясь сверху вниз, «левый поворот» с вертикали на горизонталь — а ведь любой замкнутый многоугольник содержит такой поворот!

б) Воспользуйтесь идеей решения задачи а).

46. Жители B и C дали одинаковый ответ на один и тот вопрос; следовательно, они живут в одном городе — Кривдине.

47. Вот необходимые четыре вопроса:

1. Равен ли нуль нулю?
2. Равна ли единица единице?
3. Это город A?
4. Это город B?

Первые два вопроса дают возможность «опознать» собеседника и, если это житель города C,— узнать, правду или ложь ответит он на следующий вопрос.

48. Докажите, что разность $a - b$ не меняется при перестановке двух соседних знаков. Переставьте затем все знаки так, чтобы плюсы шли подряд.

49. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

50. Покажите сначала, что количество n-цепочек, удовлетворяющих условию, не может быть больше, чем $\frac{n-1}{2}$. Далее покажите, что при всяком простом n, большем чем 2, это количество как раз равно $\frac{n-1}{2}$. Итак, $\frac{k_n}{2} \leqslant \frac{1}{2}$.

51. а) Примените метод математической индукции.
б) Рассмотрите сначала случай, когда все числа a_i неотрицательны (или все неположительны). Если среди чисел a_i есть и положительные, и отрицательные (например, $a_1 > 0$, $a_2 < 0$), то при $n > 3$ каждому правильному набору, удовлетворяющему соотношению $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$, можно сопоставить правильный набор, не удовлетворяющий этому соотношению, по следующей схеме:

$$0,\ 0,\ x_3,\ \ldots,\ x_n \to 0, 1,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$$
$$0,\ 1,\ x_3,\ \ldots,\ x_n \to 1, 1,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$$
$$1,\ 0,\ x_3,\ \ldots,\ x_n \to 1, 1,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$$

$$1,\ 1,\ x_3,\ \ldots,\ x_n \to \begin{cases} 1,\ 0,\ x_3,\ \ldots,\ x_n, & \text{если хотя бы одно из чисел } x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_n \text{ равно } 1. \\ 0,\ 0, 1,\ \ldots,\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

52. Достаточно доказать, что если $[x,\ y,\ y,\ x,\ \ldots]$ — строка с номером n, а $f(z) = a_0z^k + a_1z^{k-1} + \ldots + a_k$ — произвольный многочлен степени $k \leqslant n$, то сумма $A = f(b) - f(b + r) - f(b + 2r) + f(b + 3r) - \ldots$ равна нулю (знак «+» ставится, если в строке на соответствующем месте стоит x, а «—» — если стоит y). Если $k=0$, то равенство $A=0$ очевидно. При $k>0$ положим $g(z) = f(z) - f(z+r)$. Тогда $g(z)$ — многочлен степени $k-1$, а сумма A имеет вид $g(b) - g(b+r) - \ldots$, где, как легко видеть, знаки чередуются в соответствии с расстановкой чисел x и y в $(n-1)$-й строке. Далее примените индукцию.

53. Искомое произведение равно $8! \cdot abcdefgh$, так как на одной вертикали или на одной горизонтали не могут стоять две ладьи.

54. Обозначив через x число ходов вправо, через y — число ходов вверх и через z — число ходов «вниз — влево», покажите, что для любого пути, ведущего из A в B, справедливы соотношения

$$x = y + 1 = z + 1 \quad \text{и} \quad 3z = N^2 - 2.$$

Покажите далее, что число N^2-2 не делится на 3.

55. Пусть первая шашка стоит на поле с номером k, k-я шашка стоит на поле с номером l, l-я шашка стоит на поле с номером m и т. д. Возможны два случая: либо найдется в этой цепочке шашка, стоящая на поле без номера, либо найдется шашка, стоящая на поле с номером 1. Покажите, что если в этой цепочке n шашек, то за $n+1$ ход их можно расставить на свои места.

56. Возьмем полосу шириной в 2 клетки, идущую по краю доски. Покажите, что существует замкнутый путь коня, проходящий ровно по одному разу через каждое поле этой полосы. Разбейте далее всю доску на такие полосы и начните путь с центральной клетки.

57. Если точки отстоят друг от друга на m клеток по горизонтали и на n клеток по вертикали, то искомое число путей равно $C_{m+n}^{m} = C_{m+n}^{n}$. Для доказательства достаточно заметить, что все пути имеют длину $m+n$ и каждый путь такой длины задается выбором m горизонтальных отрезков из общего числа $m+n$ отрезков.

58. $\dfrac{n^p - n}{p} + n$ способами. Указание. Если бы окраски, совпадающие при поворотах круга считались различными, то имелось бы n^p способов окраски.

Замечание. Так как число различных окрасок заведомо целое, то здесь, по существу, дано новое доказательство малой теоремы Ферма: при простом p число $n^p - n$ делится на p (ср. задачу **206** из раздела **A**).

59. Пусть на двух горизонтальных прямых даны точки $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (не обязательно $m = n$), причем точка A_{i+1} расположена правее, чем точка A_i, и точка B_{i+1} — правее, чем B_i.

Будем рассматривать ломаные, начинающиеся в точке A_1 и не имеющие «попятных» участков (т. е. при движении по ломаной от точки A_1 точка A_i с номером $i < j$ встречается раньше, чем точка A_j, а точка B_i встречается раньше, чем B_j). Доказать по индукции, что число таких ломаных равно $\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!}$. Отсюда следует, что искомое число ломаных (начинающихся в A_1 или в B_1) равно $2\frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}$.

При желании можно учесть и ломаные с «попятными» участками.

60. Число замков равно $C_{11}^5 = 462$; число ключей у каждого члена оргкомитета равно $\frac{C_{11}^5 \cdot 6}{11} = 252$.

61. Проведите любую хорду и рассмотрите отдельно хорды, расположенные по разные стороны от нее. Примените метод математической индукции.

62. Пусть придуман такой порядок для числа игроков, меньшего, чем 2^k, и пусть $n = 2^k + m$, где $0 \leqslant m < 2^k$. При $m < 2^k - k$ можно разбить игроков на две группы по $2^k - 1$ и по $m + 1$ игроков, выяснить их расположение по силе в каждой группе, после чего достаточно $n - 1$ партий для выяснения общего расположения игроков по силе. Если же неравенство $m < 2^k - k$ не выполнено, то надо разбить игроков на две группы по 2^k и по m игроков.

63. Существует 30 возможных игральных костей.

64. За один рейс может быть использовано, самое большее, 67 сортов билетов. У к а з а н и е. Покажите, что на участке между седьмой и восьмой остановками в п р и н ц и п е может использоваться 49 сортов билетов. Следовательно, не меньше 24 сортов билетов в течение одного рейса в о о б щ е не будут использованы, и, значит, будет использовано не больше, чем 67 сортов билетов. Постройте пример таких поездок, при которых за один рейс используется ровно 67 сортов билетов.

65. Обозначим искомое число перестановок через k_n. Имеет место соотношение: $k_{n+1} = n(k_n + k_{n-1})$. Для доказательства рассмотрите сначала случай, когда на первом месте стоит некоторое число a, а на месте с номером a стоит единица; далее рассмотрите случай, когда на первом месте стоит число a, а единица стоит на месте с номером $b \neq a$, и поставьте на это место число a.

Покажите затем, что справедливо соотношение $k_{n+1} = (n+1)\ k_n + (-1)^{n+1}$, которое (исходя из очевидного равенства $k_1 = 0$) позволяет последовательно вычислять значения k_n. Читатель, которому известно, что сумма бесконечного ряда

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \dots$$

равна $\frac{1}{e}$, сможет из написанной выше формулы вывести для k_n следующее явное выражение:

$$k_{2n} = \left[\frac{(2n)!}{e}\right] + 1, \quad k_{2n+1} = \left[\frac{(2n+1)!}{e}\right].$$

66. Искомое число способов x_n равно $\frac{(2n-1)!!}{(n+1)!} \cdot 2^n$. Указание. Предварительно покажите, что выпуклый n-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники, причем число способов y_n равно $\frac{(2n-5)!!}{(n-1)!} \cdot 2^{n-2}$.

Покажите далее, что $y_{n+1} = \frac{2(2n-3)}{n} y_n$, $x_n = y_{n+2}$.

67. Существует только одно (с точностью до зеркальных отражений) такое расположение. Указание. Покажите, что числа 1 и n^2 непременно располагаются в противоположных углах таблицы (на одной диагонали). Докажите далее, что в строке и столбце, содержащих число 1, разности соответствующих арифметических прогрессий не превосходят n и составляют в сумме $n+1$. Наконец, обратите внимание на то, что если эти разности отличны от 1 и от n, то в указанных строке и столбце найдутся два одинаковых числа, что невозможно.

68. Воспользуйтесь принципом Дирихле (см. стр. 14 вступительной статьи).

69. Выбирая несколько предметов, рассматривайте оставшиеся.

70. Необходимо взять 38 шаров.

71. Примените метод математической индукции по числу $s > 2$; при $s = 2$ утверждение легко доказывается; при $s = 1$ оно очевидно.

72. Покажите, что среди денежных сумм 0, 5, 10, 15, ..., 95, 100 копеек (остающихся от рубля, если несколько раз вычесть по 5 копеек) имеется большее число делящихся на 2, чем делящихся на 3.

73. Существует 29 способов такого размена.

74. Необходимо расковать три звена. Указание. Рассмотрите вспомогательную задачу: при каком наибольшем n достаточно расковать k звеньев цепочки (состоящей из n звеньев) так, чтобы из полученных кусков, учитывая раскованные звенья, можно было составить все веса от 1 до n. Оказывается, если $2^k \cdot k \leqslant n \leqslant 2^{k+1}(k+1)-1$, то можно обойтись k разрывами цепочки, но не меньшим числом!

75. Достаточно доказать, что с помощью разновесов в 1, 2, 2 и 5 *мг* можно составить любой вес от 1 до 10 *мг*, и воспользоваться методом математической индукции.

76. Пусть у нас имеется k билетов достоинством в a рублей и l билетов достоинством в b рублей, причем $a > b$, $k + l = 100$. Рассмотрите суммы: a, $2a$, $3a$, ..., ka, $ka + b$, $ka + 2b$, ..., $ka + lb$ — всего сто сумм. Рассмотрите остатки от деления этих сумм на 101. Если ни одна из этих сумм не делится на 101 и никакие две не дают при делении на 101 одинаковых остатков, то рассмотрите еще сумму $(k-1)a + b$.

77. Проведите аналогию с задачей 71.

78. Для каждой полуплоскости рассмотрите дополнительную полуплоскость и примените к этим полуплоскостям теорему: если каждые 3 из 43 полуплоскостей имеют общую точку, то все полуплоскости имеют общую точку.

79. Докажите предварительно, что можно отбросить некоторые из 43 отрезков так, чтобы оставшиеся все еще полностью покрывали отрезок длины 1, но чтобы никакая точка не была покрыта более чем двумя отрезками.

80. Докажите, что у дерева с n листьями можно оторвать один лист, оставив при этом не менее $\frac{n-1}{n}$ тени.

81. Проведите аналогию с задачей 78.

82. Возьмем на первой окружности еще одну точку O, наложим первую окружность на вторую и будем поворачивать первую окружность, оставляя вторую неподвижной. Отметим все положения точки O, при которых первая из отмеченных точек попадает на одну из заданных дуг. Эти положения точки O заполняют несколько дуг, сумма длин

которых меньше 1. Аналогично рассмотрим вторую, третью,... отмеченные точки.

83. Рассмотрите цвета, в которые окрашены вершины правильного треугольника, вписанного в окружность, если одну его вершину поместить в точку, окрашенную двумя красками.

84. 44 раза в сутки. Указание. В течение каждого часа стрелки дважды располагаются под прямым углом друг к другу; при этом третий и четвертый, девятый и десятый часы приходится рассматривать особо.

85. Пусть угол между стрелками равен α. Чтобы часы показывали первый час, необходимо, чтобы часовая стрелка образовывала некоторый угол x с лучом, идущим из центра к цифре 12, при этом $0 < x < \frac{360^\circ}{12}$; минутная стрелка образует с тем же лучом, с одной стороны, угол $x + \alpha$, а — с другой — $12x$. Из уравнения $12x = x + \alpha$ находим: $x = \frac{\alpha}{11}$.

86. Когда школьник кончил работу, часы показывали (примерно) 17 часов, 2 минуты, 58,7 секунды. Указание. Воспользуйтесь методом предыдущей задачи.

87. На 12 часов; на 24 часа; на 36 часов в сутки.

РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

Обозначения: запись XIX. II. 8. 3 означает: задача № 3 для VIII класса 2-го тура 19-й олимпиады.

XV.I.9.1. Каждый член геометрической прогрессии представляется, как известно, в виде aq^n $(n \geqslant 0)$. Пусть, вопреки утверждению задачи, найдутся такие различные неотрицательные целые числа $k_1, k_2, \ldots, k_{m+1}$, $m \geqslant 2$, что

$$aq^{k_1} + aq^{k_2} + \ldots + aq^{k_m} = aq^{k_{m+1}}. \qquad (1)$$

Расположим числа $k_1, k_2 \ldots, k_m, k_{m+1}$ в порядке возрастания:

$$k_\alpha < k_\beta < k_\gamma < \ldots \qquad (2)$$

и преобразуем выражение (1) к виду:

$$aq^{k_\alpha} = aq^{k_\beta} + aq^{k_\gamma} + \ldots . \qquad (3)$$

Сократим обе части равенства (3) на aq^{k_α} и в правой части полученного равенства вынесем $q^{k_\beta - k_\alpha}$ за скобки (что возможно в силу неравенств (2)):

$$1 = q^{k_\beta - k_\alpha} + q^{k_\gamma - k_\alpha} + \ldots;$$

$$1 = q^{k_\beta - k_\alpha}(1 + q^{k_\gamma - k_\beta} + \ldots). \qquad (4)$$

Мы видим, что правая часть равенства (4) делится на целое число $q^{k_\beta - k_\alpha}$, в то время как левая его часть равна 1.

Полученное противоречие показывает, что чисел k_1, $k_2, \ldots, k_{m+1}$, удовлетворяющих условию (1), не существует.

XV. I. 10. 4. Пусть $a > 0$. Тогда график функции

$$y = ax^2 + bx + c + p$$

представляет собой параболу, обращенную вогнутостью в сторону положительного направления оси y («вверх»,рис. 19). Увеличение слагаемого p, очевидно, сдвигает параболу вверх по оси y. Сделаем p таким большим, чтобы парабола не пересекала больше оси x. При этом значении p (и при $a > 0$) действительные корни, очевидно, отсутствуют. Итак, предположение $a > 0$ ведет к противоречию с условием.

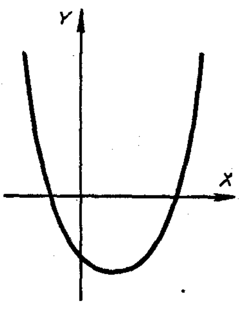


Рис. 19

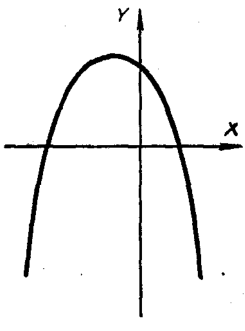


Рис. 20.

Пусть теперь $a < 0$. Парабола при этом обращена вогнутостью «вниз» (рис. 20), и увеличение p сдвигает ее вверх по оси y, причем так, что меньший из корней уравнения

$$y = ax^2 + bx + c + p = 0$$

сдвигается влево по оси x (уменьшается).

Выберем p настолько большим, чтобы этот меньший корень уравнения $y = 0$ стал отрицательным.

При этом p и $a < 0$ мы также пришли к противоречию с условием задачи.

Итак, оба предположения: $a > 0$ и $a < 0$ ведут к противоречию. Следовательно, $a = 0$, что и требовалось.

XV. II. 9. 1. Из первого и второго уравнений сразу получим:

$$x_1 = x_3$$

(ибо x_2, очевидно, не может быть равно нулю).

Из третьего и четвертого получаем $x_3 = x_5$ и т. д. Если теперь n нечетно, то, очевидно, мы таким путем получим:

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-2} = x_n.$$

Совершенно аналогично устанавливаем, что $x_2 = x_4 = \ldots$ $\ldots = x_{n-1}$. Из последнего уравнения находим теперь: $x_1^2 = 1$, т. е. $x_1 = \pm 1$, и, подставляя это значение x_1 в первое уравнение, получаем:

$$x_2 = \frac{1}{x_1} = x_1 (= \pm 1).$$

Итак, для нечетного n имеем $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = x_n = \pm 1$. Очевидная проверка показывает, что оба найденные решения $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ и $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = -1$ удовлетворяют заданной системе.

Пусть теперь n четно. Точно так же, как и раньше, получим: $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1}$; $x_2 = x_4 = \ldots = x_n$.

Из первого уравнения находим

$$x_2 = \frac{1}{x_1}.$$

Пусть $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = a$, тогда $x_2 = x_4 = \ldots = x_n = \frac{1}{a}$.

Очевидно, что при любом $a \neq 0$ эти значения неизвестных будут удовлетворять системе. Итак, система имеет следующие решения:

при нечетном n: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \pm 1$; при четном n:

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = a;$$

$$x_2 = x_4 = \ldots = x_n = \frac{1}{a}, \quad a \neq 0.$$

XV.II.9.5. Пусть ученик A — самый высокий из низких учеников, а ученик B — самый низкий из высоких. Рассмотрим ученика C, стоящего на пересечении того поперечного ряда, в котором стоит A, и того продольного ряда, в котором стоит B.

Так как ученик A — самый низкий в своем поперечном ряду, то A не выше C. С другой стороны, C не выше B, так как последний является самым высоким в своем продольном ряду. Следовательно, ученик A не выше ученика B.

Ясно, что могут представиться случаи, когда ученики A и B одного роста, например, когда все ученики одного роста. С другой стороны, можно привести пример такого построения учеников, при котором рост ученика A окажется строго меньше роста ученика B (рис. 21).

Рост учеников на всех неотмеченных местах равен 165 *см*.

В этом примере рост ученика A равен 160 *см*, а рост ученика B равен 170 *см*.

Итак, оба случая (рост ученика A равен росту ученика B и рост ученика A меньше роста ученика B) возможны.

Поперечные ряды

						175			
						175			
155	155	160	155	155	175	155	155	155	155
		A			155	175			
						175			
						175			
						170	B		
						175			
						175			
						175			

Продольные ряды

Рис. 21.

XVI.1.9.3. Пусть существуют такие два многочлена

$$f(x) = ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n,$$
$$g(y) = by^m + b_1 y^{m-1} + \ldots + b_m,$$

что

$$f(x) \cdot g(y) = x^{200} y^{200} + 1. \qquad (1)$$

Положим $x = 0$. Тогда многочлен $f(x)$ примет значение a_n. При этом в силу (1) будет выполнено соотношение $a_n \cdot g(y) = 1$ (при любом y), откуда $g(y) = \frac{1}{a_n}$.

Точно так же, положив $y = 0$, получим (при любом x)

$$f(x) = \frac{1}{b_m},$$

где $b_m = g(0)$.

Если теперь мы положим $x = y = 0$, то обнаружим, что $f(0) \cdot g(0) = 1$, т. е. $a_n \cdot b_m = 1$. Но в таком случае при любых x, y мы имеем

$$f(x) \cdot g(y) = \frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{b_m} = \frac{1}{a_n \cdot b_m} = 1,$$

что, очевидно, не равно $x^{200} \cdot y^{200} + 1$.

XVI. II. 7. 3. Пусть первое колесо вращается по часовой стрелке. Тогда второе колесо, очевидно, вращается против часовой стрелки (рис. 22), третье снова, как первое,— по часовой стрелке и т. д. Мы видим, что каждое колесо с нечетным номером вращается, как и первое, по часовой стрелке.

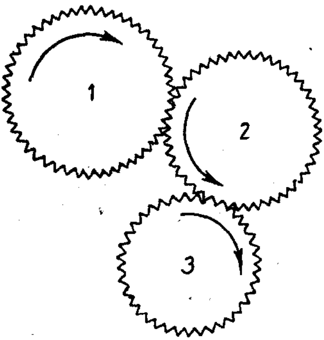


Рис. 22.

Но если одиннадцатое колесо вращается по часовой стрелке, то сцепленное с ним первое колесо должно вращаться против часовой стрелки (вопреки нашему предложению). Мы показали тем самым, что осуществить движение системы зубчатых колес с такими условиями невозможно.

XVII. I. 7. 4. Пусть $n^2 - m^2 = 1954$. Если m^2 четно, то $n^2 = 1954 + m^2$, очевидно, тоже четно. Если же m^2 нечетно, то нечетно и n^2.

Итак, числа n^2 и m^2 одной четности, а следовательно, числа m и n также имеют одинаковую четность. Но в таком случае числа $m + n$ и $n - m$ оба четны, и, значит, разность $n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$ делится на 4. С другой стороны, 1954 на 4 не делится.

Тем самым показано, что целых чисел m и n, удовлетворяющих условию $n^2 - m^2 = 1954$, не существует.

XVII. I. 7. 5. Для чисел 100, 200, ..., 900 отношение числа к сумме его цифр равно 100. Пусть теперь $\overline{abc}$ — произвольное трехзначное число, отличное от перечисленных выше, в его десятичной записи; a, b, c — соответственно числа сотен, десятков и единиц. Сумма цифр такого числа, очевидно, не меньше, чем $a + 1$, так как хотя бы одна из цифр b или c отлична от нуля. Вместе с тем само число, очевидно, меньше, чем $\overline{(a+1)\,00} = 100 \cdot (a + 1)$.

Таким образом, интересующее нас отношение $\frac{\overline{abc}}{a+b+c}$ меньше, чем

$$\frac{\overline{(a+1)\,00}}{a+1}=100,$$

и потому наибольшее отношение трехзначного числа к сумме его цифр равно 100. Это наибольшее отношение достигается только для чисел: 100, 200, ..., 900, т. е. для круглых сотен.

XVII. I. 9. 2. Заметим, во-первых, что при вычеркивании из данного числа 100 цифр, мы всегда будем получать числа с одним и тем же числом знаков. Во-вторых, ясно, что из двух чисел с одинаковым числом знаков больше то, у которого больше первая цифра; при совпадении же первых нескольких цифр больше то число, у которого больше первая несовпадающая цифра.

Теперь понятно, что все первые цифры искомого числа должны быть, по возможности, девятками. Значит, для получения требуемого числа мы должны вычеркивать слева подряд все цифры, кроме девяток, пока это будет возможно. После того как мы вычеркнем 84 цифры (и последнюю из них — четверку у числа 49), у нас останется число

$$999995051\ \ldots\ 5758596061\ \ldots.\ 99100,$$

из которого мы имеем право вычеркнуть еще 16 цифр (проверьте).

Ясно, что сделать следующую цифру девяткой мы уже не сможем, так как для этого пришлось бы вычеркнуть 19 цифр. Ясно также, что следующую цифру нельзя сделать восьмеркой (потребовалось бы вычеркивание 17 цифр). Но вот сделать следующую цифру семеркой мы уже можем, вычеркивая 15 цифр: 5, 0, 5, 1,..., 5, 6, 5.

После этого мы имеем право вычеркнуть еще одну цифру; очевидно, это должна быть цифра 5 из числа 58.

Итак, искомое число равно 9999978596061 ... 99100.

XVII. I. 9. 3. П е р в о е р е ш е н и е. Допустим, что не все числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ равны между собой, и пусть a_k — наибольшее из этих чисел. Вообще говоря, несколько соседних чисел могут быть равны числу a_k, но не все. Могут представиться два случая: либо среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ есть число, меньшее, чем a_k, либо среди чисел $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$, ..., a_{100} есть число, меньшее, чем a_k (либо же выполнено и то, и другое).

Пусть, например, имеет место первый случай, и пусть a_m — последнее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, которое меньше чем a_k, т. е. $a_m < a_{m+1} = \ldots = a_k$. Тогда мы имеем: $a_m < a_{m+1}$, $a_{m+1} \geqslant a_{m+2}$ (ибо число $a_m = a_k$ — наибольшее), и потому

$$a_m - 3a_{m+1} + 2a_{m+2} = (a_m - a_{m+1}) + 2(a_{m+2} - a_{m+1}) < 0,$$

что противоречит заданной системе неравенств. Таким образом, все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ должны быть равны между собой

Второе решение.

Сложим все данные неравенства. Так как каждое число входит в сумму с коэффициентами 1, 2 и 3, то в левой части получится нуль. Каждое слагаемое при этом было неотрицательно: именно этот факт и записан в данной системе. Но если сумма нескольких неотрицательных чисел равна нулю, то, очевидно, каждое из них равно нулю.

Следовательно, в действительности мы имеем дело не с системой неравенств, а с системой уравнений:

$$\begin{cases} a_1 - 3a_2 + 2a_3 = 0, \\ a_2 - 3a_3 + 2a_4 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{100} - 3a_1 + 2a_2 = 0, \end{cases} \quad \text{или иначе} \quad \begin{cases} (a_1 - a_2) + 2(a_3 - a_2) = 0, \\ (a_2 - a_3) + 2(a_4 - a_3) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ (a_{100} - a_1) + 2(a_2 - a_1) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим $a_2 - a_3$ и подставим полученное значение во второе уравнение:

$$a_3 - a_4 = \frac{1}{2}(a_2 - a_3) = \frac{1}{2^2}(a_1 - a_2).$$

Подставляя это значение $(a_3 - a_4)$ в третье уравнение, получим:

$$a_4 - a_5 = \frac{1}{2}(a_3 - a_4) = \frac{1}{2^3}(a_1 - a_2)$$

и т. д. Наконец, из последнего уравнения следует:

$$a_1 - a_2 = \frac{1}{2}(a_{100} - a_1) = \frac{1}{2^{100}}(a_1 - a_2),$$

что возможно лишь при условии $a_2 = a_1$. Но тогда и $a_3 = a_2$, и $a_4 = a_3$, и т. д., так что вообще

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{100}.$$

XVII.1.9.5. Построим треугольник ABC со сторонами $AB = 8$, $AC = 10$, $BC = 13$.

Построим, далее, на стороне BC треугольник BCD со сторонами $BD = 10$, $CD = 8$ (возможно, не лежащий в одной плоскости с треугольником ABC). Обозначим через M середину стороны BC. В треугольнике AMD, по известной теореме, $AD \leqslant AM + MD$.

Заметим, что, когда треугольники ABC и BCD лежат в одной плоскости, фигура $ABCD$ представляет собой параллелограмм (ибо $AB = CD$, $BD = AC$). Следовательно, в этом случае точки A, M и D лежат на одной прямой, так что $AD = AM + MD$. Заметим теперь, что длины отрезков AM и MD не зависят от положения точки D, ибо AM и MD — это медианы треугольников с заданными сторонами. Таким образом, наибольшее возможное значение длина отрезка AD принимает, когда точка D лежит в плоскости ABC. В этом случае угол BAC тупой, так как $AB^2 + AC^2 = 8^2 + 10^2 < BC^2 = 13^2$ и, следовательно, угол ABD — острый. Но в таком случае

$$AD^2 < AB^2 + BD^2 = 8^2 + 10^2 < 13^2,$$

т. е. $AD < 13$. Мы показали, что наибольшее значение, которое может принимать длина отрезка AD (если $AB = CD = 8$, $AC = BD = 10$, $BC = 13$), меньше 13, т. е. условие $AD = 13$ невыполнимо.

XVII.II.10.5. Пусть имеются два различных десятизначных числа, в состав которых входит одинаковое количество единиц и, следовательно, одинаковое количество двоек. Если написать эти числа одно под другим, то в первом числе будет такая единица, под которой окажется двойка (так как числа различны, а единиц одинаковое количество). Но так как под какой-то единицей первого числа будет стоять двойка, то над какой-то единицей второго числа тоже должна стоять двойка. Мы видим, что в записи суммы таких чисел обязательно встретится не меньше двух троек. Итак, числа с одинаковым количеством единиц могут быть отнесены к одному классу.

Среди наших чисел есть число 111...11. Отнесем его к первому классу. Число 11...12 дает в сумме с предыдущим только одну тройку и поэтому должно быть отнесено ко второму классу.

К этому же классу, как мы видим, могут быть отнесены все числа, имеющие в записи только одну двойку.

Число 11...122 снова должно быть отнесено к первому классу, так как в сумме числом 11...12 оно дает только одну тройку.

Теперь нетрудно догадаться, каково должно быть решение задачи. Именно, отнесем к первому классу все числа, в записи которых имеется четное число двоек, а ко второму — числа, в записи которых имеется нечетное число двоек. Два числа одного класса либо имеют одинаковое количество двоек — в этом случае, как мы уже показали, в записи их суммы встретится не менее двух троек,— либо в одном числе двоек по крайней мере на две больше, чем в другом, и тогда также в записи их суммы тройка встретится, очевидно, не менее двух раз.

Таким образом, мы произвели требуемое разбиение.

XVIII.I.7.4. Заметим, что при перемножении двух чисел остатки от деления их на некоторое число k также перемножаются. В самом деле, пусть остатки от деления чисел a и b на k равны α и β, т. е.

$$a = km + \alpha,\ b = kl + \beta,\ 0 \leqslant \alpha < k,\ 0 \leqslant \beta < k.$$

Тогда $ab = k(\alpha l + \beta m + lmk) + \alpha\beta$, т. е. остаток от деления числа ab на k равен $\alpha\beta$ (разумеется, если при этом $\alpha\beta \geqslant k$, то надо взять не само число $\alpha\beta$,а остаток от деления его на k).

Если существует такое n, что число $n^2 + n + 1$ делится на 1955, то $n^2 + n + 1$ делится и на 5, и потому остаток от деления числа $n^2 + n$ на 5 равен 4.

Но число $n^2 + n = n(n + 1)$ представляет собой произведение двух последовательных чисел n и $n + 1$. Остатки от деления чисел n и $n + 1$ на 5 тоже, очевидно, будут двумя последовательными числами x и $x + 1$, т. е. это будет либо 0 и 1, либо 1 и 2, либо 2 и 3, либо 3 и 4, либо 4 и 0.

Непосредственно проверяется, что ни в одном из этих случаев произведение не будет иметь при делении на 5 остаток 4.

Тем самым показано, что числа n, удовлетворяющего условию $n^2 + n + 1 = 1955k$, и даже числа n, удовлетворяющего условию $n^2 + n + 1 = 5l$, не существует.

XVIII.I.7.5. Поскольку квадраты, на которые разбит прямоугольник, по условию равны, то каждая сторона прямоугольника окажется разбитой на равные части: одна — на m, другая — на n частей. Но тогда общее число квадратов равно mn, откуда получаем соотношение $mn = 13$, в котором m и n — целые числа. Так как 13 — число простое, то из этого следует, что одно из чисел m, n равно 1, а другое — 13. Таким образом, единственным прямоугольником, удовлетворяющим условиям задачи, является прямоугольник со сторонами 1 и 13.

XVIII.I.9.1. Запишем таблицу в виде:

$$\begin{array}{cccc} k\cdot 0+1 & k\cdot 0+2 & \dots & k\cdot 0+k, \\ k\cdot 1+1 & k\cdot 1+2 & \dots & k\cdot 1+k, \\ k(k-1)+1 & k(k-1)+2 & \dots & k(k-1)+k. \end{array}$$

Каждое число представлено нами в виде:

$$ka+b, \tag{1}$$

где a и b принимают значения:

$$a=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ k-1;\ b=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k.$$

Мы теперь отдельно просуммируем (для всех выписанных чисел) первые слагаемые ka и отдельно вторые слагаемые b (см. (1)). Так как у нас выписано k чисел, причем из каждой строки можно было взять только одно число (ибо при выписывании числа все остальные числа этой же строки вычеркиваются), то у нас выписано в точности по одному числу из каждой строки. Но для числа, стоящего в первой строке, первое слагаемое равно $k\cdot 0$; для числа, стоящего во второй строке, первое слагаемое равно $k\cdot 1$; ...; для числа, стоящего в последней строке, оно равно $k\cdot(k-1)$. Таким образом, сумма всех первых слагаемых в выписанных числах равна

$$k\cdot 0+k\cdot 1+\dots+k(k-1)=k(0+1+\dots+k-1)=$$
$$=k\cdot\frac{(k-1)k}{2}.$$

Аналогично, выписанные числа обладают тем свойством, что из каждого столбца взято ровно одно число. Для числа из первого столбца второе слагаемое равно 1, для числа из второго столбца оно равно 2, ..., для числа из последнего столбца второе слагаемое равно k. Таким образом, сумма всех вторых слагаемых равна

$$1+2+\dots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Взяв теперь сумму и всех первых, и всех вторых слагаемых, мы и получим сумму всех выписанных чисел. Искомая сумма, таким образом, равна

$$S=k\cdot\frac{k(k-1)}{2}+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k^2+1)}{2}$$

(и, стало быть, не зависит от способа выписывания).

XVIII. I. 9. 2. Пусть O_1, O_2 — центры окружностей, а r_1, r_2 — их радиусы; причем $r_1\geqslant r_2$.

Закрепим конец A отрезка AB, лежащий на окружности с центром O_1, и будем перемещать конец B по окружности с центром O_2. Пусть O' — середина отрезка AO_2 и M — середина отрезка AB. Так как $O'M$ — средняя линия треугольника ABO_2, то

$$O'M = \frac{O_2B}{2}.$$

Мы видим, что при закрепленном конце A длина отрезка $O'M$ остается постоянной (и равной $\frac{1}{2}r_2$), причем очевидно, что любая точка M, находящаяся от O' на расстоянии $\frac{1}{2}r_2$, может быть получена таким образом. Это означает, что точка M описывает окружность радиуса $\frac{1}{2}r_2$ с центром в точке O'.

Исследуем теперь, как перемещается точка O', когда A движется по окружности O_1. Рассуждение, совершенно аналогичное вышеизложенному, показывает, что точка O' описывает окружность с центром в точке O, радиус которой равен $\frac{O_1A}{2} = \frac{1}{2}r_1$, где O — середина отрезка O_1O_2 (рис. 23). Итак, чтобы получить множество точек M, мы должны взять все окружности радиуса $\frac{1}{2}r_2$, центры которых в свою очередь пробегают окружность радиуса $\frac{1}{2}r_1$ с центром O. Ясно теперь, что множеством точек M будет кольцо, заключенное между двумя концентрическими окружностями с центром в точке O, радиусы которых равны:

$$R_1 = \frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{2}, \qquad R_2 = \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2}$$

(см. рис. 24). Если $r_1 = r_2$, то это кольцо превращается в круг радиуса $2r_1$ $(=2r_2)$.

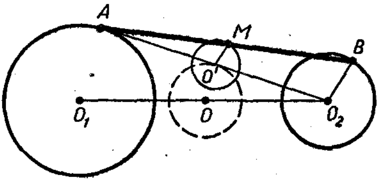


Рис. 23.

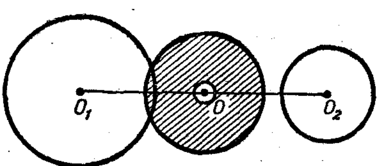


Рис. 24.

Замечание. Легко понять, как по данной точке M из кольца найти отрезок AB, серединой которого эта точка является; нужно построить окружность в кольце, проходящую через M, по ее центру найти точку A и по положению точки M на окружности найти точку B.

XVIII.I.9.3. Исследуем, прежде всего, какие ограничения должны быть наложены на решения системы. Пусть $x < 0$, тогда $x^3 < 0$, и из первого уравнения видно, что $y^3 > 1$; следовательно, $y > 1$, $y^4 > 0$, и из второго уравнения следует, что $x^4 < 0$; но это невозможно: четная степень действительного числа всегда неотрицательна. Пусть теперь $x > 1$, тогда $x^3 > 1$, $y^3 < 0$, $y < 0$; в силу полной симметрии уравнений относительно x и y этот случай также надо считать уже исключенным. Итак,

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Если бы было $0 < x < 1$, то мы имели бы:

$$x^4 = x^3 \cdot x < x^3 \cdot 1 = x^3.$$

Кроме того, $y^4 \leqslant y^3$ (так как $0 \leqslant y \leqslant 1$). Итак, $x^4 < x^3$, $y^4 \leqslant y^3$, и потому $x^4 + y^4 < x^3 + y^3$, что противоречит данной системе.

Следовательно, неравенства $0 < x < 1$ не могут быть выполнены, и потому либо $x = 0$, либо $x = 1$.

Таким образом, система имеет только два действительных решения: $x_1 = 0$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = 0$ (то, что эти пары значений x, y являются решениями, проверяется непосредственно).

XVIII.I.10.1. Поскольку в каждой строке и в каждом столбце встречаются по условию все числа $1, 2, \ldots, n$, то, очевидно, каждое число встречается в любом столбце (и в любой строке) ровно один раз. Значит, всего в таблице ровно n единиц, n двоек и т. д. По условию, для каждого числа, стоящего вне диагонали, имеется такое же число, симметричное относительно диагонали (рис. 25).

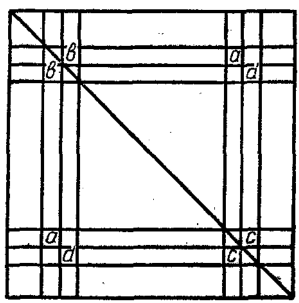


Рис. 25.

Таким образом, в н е диагонали стоит ч е т н о е количество единиц, ч е т н о е количество двоек и т. д.

Между тем n нечетно; следовательно, на диагонали должно стоять нечетное количество единиц, нечетное количество двоек и т. д., то есть, во всяком случае, не менее одной единицы, не менее одной двойки и т. д. Но всего на диагонали n клеток, а каждое число должно встретиться не менее одного раза; значит, каждое число встречается на диагонали ровно 1 раз.

XVIII. II. 7. 1. Перенеся все члены, кроме x^3, в правую часть, мы обнаружим, что $x^3 = 2(y^3 + 2z^3)$, так что x^3 четно; в таком случае и x должно быть четно: $x = 2x_1$, $x^3 = 8x_1^3$.

Подставив это выражение для x^3 в уравнение, мы приведем его к виду $8x_1^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$, или $4x_1^3 - y^3 - 2z^3 = 0$. Оставляя y^3 в левой части, получим $y^3 = 4x_1^3 - 2z^3$, и мы убеждаемся в том, что y^3 и вслед за ним y четны: $y = 2y_1$, $y^3 = 8y_1^3$. Точно так же можно получить, что z^3 и z должны быть четны: $z = 2z_1$, $z^3 = 8z_1^3$.

После подстановки полученного значения z^3 в уравнение оно примет следующий вид:

$$x_1^3 - 2y_1^3 - 4z_1^3 = 0,$$

где $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$.

Итак, если числа x, y, z удовлетворяют уравнению, то они все четны, и числа $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$, $\frac{z}{2}$ тоже удовлетворяют уравнению. Но в таком случае и эти три числа должны быть четны и т. д. Мы видим, что числа x, y, z обладают следующим свойством: они четны и сколько бы мы ни делили их на 2, всегда будут получаться целые числа.

Единственное число, обладающее подобным свойством,— нуль.

Следовательно, единственное решение нашего уравнения:

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$$

XVIII.II.7.3. Пусть O — центр вписанной окружности, O_1, O_2, O_3 — центры вневписанных окружностей. Как известно, точка O есть точка пересечения биссектрис углов ACB и ABC, а точка O_2 является точкой пересечения биссектрис внешних углов треугольника ABC при вершинах B и C (см. рис. 26).

Из очевидного равенства

$$\angle A_1CB + \angle BCA = 180°$$

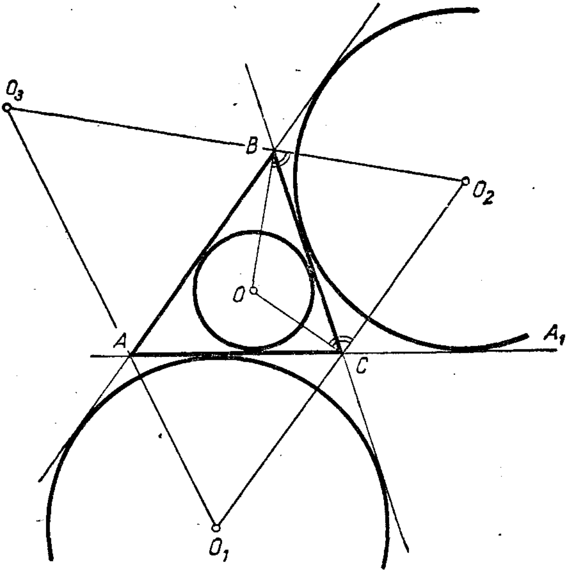


Рис. 26

получаем

$$\angle O_2CB + \angle BCO = \frac{1}{2}\angle A_1CB + \frac{1}{2}\angle BCA = 90^\circ.$$

Следовательно, $OC \perp O_2C$ и, точно так же, $OC \perp O_1C$. Полученные соотношения показывают, что точки O_1, C и O_2 лежат на одной прямой, причем $O_1O_2 \perp OC$. Аналогично, точки O_2, B и O_3 лежат на одной прямой, причем $O_2O_3 \perp OB$.

Покажем, теперь, что $\angle CO_2B$ — острый. Так как в четырехугольнике CO_2BO углы C и B — прямые, то

$$\angle CO_2B + \angle BOC = 180^\circ.$$

Следовательно,

$$\angle CO_2B = \angle OCB + \angle OBC = \frac{1}{2}\angle BCA + \frac{1}{2}\angle CBA <$$

$$< \frac{1}{2}\ 180^\circ = 90^\circ,$$

т. е. $\angle CO_2B$, или, что то же самое, $\angle O_1O_2O_3$ — острый. Доказательство того, что остальные углы острые, проводится аналогично.

XVIII.II.9.2. Выберем систему отрезков следующим образом. В положительной части оси x возьмем отрезки $[1;\ 2]$, $\left[2\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{2}\right]$, $\left[3\frac{3}{4};\ 4\frac{3}{4}\right]$, ..., а в отрицательной части оси x симметрично. Отрезки построены так, что промежутки между ними образуют убывающую геометрическую прогрессию: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... (см. рис. 27).

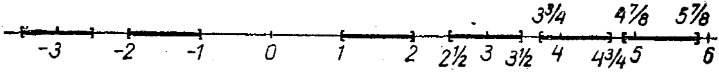


Рис. 27.

Пусть теперь a_1, a_2, ..., a_p, ... — произвольная арифметическая прогрессия с положительной разностью d и первым членом a_1.

Какое бы ни было задано число A, мы можем выбрать настолько большой номер N, что член a_N рассматриваемой прогрессии и все следующие за ним будут больше A. В самом деле, при $N > \frac{A-a_1}{d}+1$ имеем: $(N-1)\,d > A - a_1$, и потому

$$a_N = a_1 + (N-1)\,d > A.$$

Обозначим через (d) наибольшее число, меньшее d; далее, положим $\langle\, d\,\rangle = d - (d)$. Так, для $d = 2\frac{3}{4}$ имеем $(d) = 2$, $\langle\, d\,\rangle = \frac{3}{4}$, для $d = 5$ имеем $(d) = 4$, $\langle\, d\,\rangle = 1$.

Рассмотрим теперь прогрессию:

$$\frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{1}{2^1}, \quad \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2^3}, \ \dots, \frac{1}{2^n}, \ \dots .$$

Ясно, что для любого числа $\langle\, d\,\rangle$, $0 < \langle\, d\,\rangle \leqslant 1$ найдется такое число $k \geqslant 0$, что

$$\frac{1}{2^{k+1}} < \langle\, d\,\rangle \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Выберем теперь такое число M, что справа от него все промежутки между отрезками системы меньше $\frac{1}{2^{k+2}}$. Это можно сделать, так как промежутки между отрезками по построению образуют убывающую геометрическую прогрессию.

Легко видеть, что сумма всех промежутков, расположенных справа от M, меньше, чем $\frac{1}{2^{k+1}}$ $\left(\text{так как } \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+3}} + \ldots = \frac{1}{2^{k+1}}\right.$ по формуле суммы геометрической прогрессии$\left.\right)$.

Рассмотрим любые два последовательных члена данной арифметической прогрессии, расположенных справа от M (по доказанному выше, такие члены существуют). Обозначим эти члены через a_m и a_{m+1}. Если хотя бы одно число, a_m или a_{m+1}, лежит на каком-либо из отрезков системы, то нам нечего больше доказывать. Пусть, напротив, оба эти числа лежат в промежутках между отрезками системы.

На отрезке $[a_m;\ a_{m+1}]$ расположены несколько отрезков системы и несколько промежутков (причем первый и последний промежуток могут лежать на отрезке $[a_m;\ a_{m+1}]$ не полностью, а частично). Обозначим общую длину всех таких отрезков через x, а общую длину промежутков — через y. С одной стороны, по определению, длина отрезка $[a_m;\ a_{m+1}]$ равна d, следовательно, $x+y=d$. Так как при этом, очевидно $y>0$, то $x<d$. Но ведь x — целое число; значит,

$$x \leqslant (d). \tag{1}$$

С другой стороны, в силу выбора числа M общая длина всех промежутков, лежащих справа от M, меньше $\frac{1}{2^{k+1}}$, стало быть,

$$y < \frac{1}{2^{k+1}} < \langle d \rangle. \tag{2}$$

Складывая неравенства (1) и (2), получаем $x+y<d$. Полученное противоречие показывает, что числа a_m и a_{m+1} не могут одновременно лежать в промежутках между отрезками системы.

Остается заметить, что в случае прогрессии с отрицательной разностью d мы повторили бы все наши рассуждения, используя при этом систему отрезков, лежащую в отрицательной части оси x.

XIX.I.7.1. Рассмотрим сперва случай, когда точки A, B, C, D образуют выпуклый четырехугольник. Сумма его углов равна, как известно, 360°. Если бы все углы четырехугольника были острыми, то их сумма была бы, очевидно, меньше 360°. Следовательно, найдется вершина, угол при которой не острый (тупой или прямой); пусть этой вершиной является, для определенности, точка A. В таком случае треугольник BAC не остроугольный.

Пусть теперь точки A, B, C, D не образуют выпуклого четырехугольника. В таком случае одна из точек, очевидно, лежит внутри треугольника, образованного тремя остальными точками. Для определенности, пусть точка D лежит в треугольнике ABC. Сумма углов ADB, BDC, CDA равна 360°. Следовательно, хотя бы один из этих углов должен быть не меньше 120°. Но тогда треугольник, имеющий этот угол, — тупоугольный.

XIX.I.7.2. Пусть a — двузначное число и $S(a)$ — сумма его цифр. Число $9a$, по условию, имеет ту же сумму цифр, что и число a, т. е. $S(a) = S(9a)$. Но, по признаку делимости на 9, число $S(9a)$ должно делиться на 9. Таким образом, сумма цифр числа a также должна делиться на 9, а вместе с нею должно делиться на 9 и само число a.

Итак, все искомые числа содержатся среди чисел, кратных девяти

$$18,\ 27,\ 36,\ 45,\ 54,\ 63,\ 72,\ 81,\ 90,\ 99.$$

Легко видеть, что числа 27, 36, 54, 63, 72 и 81 не удовлетворяют условию задачи (это проверяется умножением соответственно на 7, 8, 7, 3, 4, 9).

Мы представляем читателю возможность самостоятельно проверить пригодность остальных чисел: 18, 45, 90, 99.

XIX.I.7.3. Пусть число точек самопересечения ломаной равно m. Подсчитаем число ее звеньев. Во-первых, через каждую точку самопересечения проходит ровно два звена: в противном случае каждое из звеньев, проходящих через эту точку, пересекалось бы ломаной более, чем однократно. Во-вторых, на каждом звене ломаной лежит ровно одна точка самопересечения. Следовательно, число звеньев ломаной ровно вдвое больше числа точек самопересечения и потому оно четно.

XIX.I.7.4. Пусть дробь $\frac{5l+6}{8l+7}$ сократима на k. Это значит, что числа $5l+6$ и $8l+7$ делятся на k. В таком случае и их разность

$$(8l+7)-(5l+6)=3l+1$$

будет делиться на k. Но если числа $5l+6$ и $3l+1$ оба делятся на k, то делится на k и число $2l+5=(5l+6)-(3l+1)$. Продолжая этот процесс, мы обнаружим, что на k должны делиться следующие числа:

$$l-4=(3l+1)-(2l+5),$$
$$l+9=(2l+5)-(l-4),$$
$$13=(l+9)-(l-4).$$

Итак, если дробь $\frac{5l+6}{8l+7}$ сократима на k, то 13 должно делиться на k. Так как 13 — простое число, то k может принимать только два значения: 13 и 1.

Следовательно, наша дробь может быть сократима только на 13.

Один из примеров такой дроби получим, положив $l=4$: дробь $\frac{5l+6}{8l+7}=\frac{26}{39}$ в самом деле сократима на 13.

XIX.I.7.5. Пусть на окружности уже имеется система точек, удовлетворяющая поставленному условию, и пусть A — любая точка этой системы. По условию, для точки A существует точка B на расстоянии 1 и точка C на расстоянии 2. Если бы точки B и C были расположены по одну сторону от точки A, то точки A и C были бы удалены от B на расстояние 1 (рис. 28, а), что, по условию, невозможно. Пусть точка B расположена справа от A, а точка C — слева. Для точки C должна найтись теперь точка D на расстоянии 1, причем эта точка должна лежать слева от

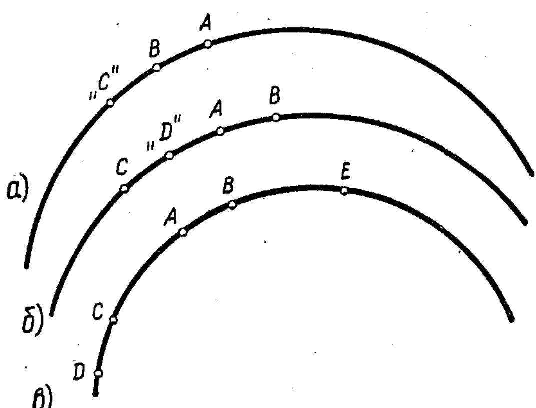


Рис. 28.

C (в противном случае (см. рис. 28, б) мы имели бы две точки: A и C, удаленные от D на расстояние 1).

Точно так же должна найтись справа от B такая точка E, что дуга BE равна 2. Мы получили две дуги длины 3: DA и AE (рис. 28, в). Заметим, что 1956 делится на 3; поэтому, продолжая описанный выше процесс построения новых точек, мы в конце концов получим разбиение окружности на дуги длины 3. Очевидно, таких дуг будет 652. Точек, делящих окружность на такие части, тоже будет 652. Кроме того, на каждой дуге лежит еще по одной точке системы. Построенная нами система содержит $2 \cdot 652 = 1304$ точки, при этом необходимость наличия каждой точки была выведена из существования всех предыдущих. Таким образом, наименьшее возможное число точек на окружности, удовлетворяющее поставленному условию, есть 1304.

XIX.I.8.1. Обозначим середину отрезка DE через M. Проведем прямую AM и отложим на ней отрезок $MP = AM$. Соединим точку P с точками D и E и рассмотрим четырехугольник $ADPE$ (рис. 29). В этом четырехугольнике диагонали, пересекаясь, делятся пополам. Следовательно, $ADPE$ — параллелограмм. Стало быть, $PE = AD$. Но по условию $AD = EC$, так что $PE = EC$, и треугольник PEC — равнобедренный. Угол между прямыми PE и EC не меняется, так как PE все время остается параллельной прямой AB. В равнобедренном треугольнике PEC имеем: $\angle ECP = \frac{1}{2}(180° - \angle PEC)$, так что угол ECP также остается неизменным.

Отсюда следует, что все точки P лежат на прямой,

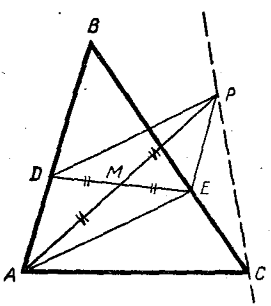


Рис. 29.

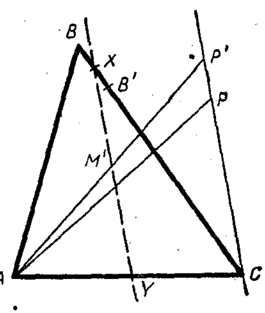


Рис. 30.

проходящей через точку C под некоторым вполне определенным углом к стороне BC.

Соединим точку A с любой точкой P' этой прямой и рассмотрим середину M' отрезка AP' (см. рис. 30). Ясно, что все такие точки M' лежат на средней линии треугольника APC или на ее продолжении. С другой стороны, по любой точке M'' этой средней линии можно построить точку P'' на прямой PC и по ней — точки D'' и E''.

Таким образом, искомым множеством является прямая, проходящая через середину Y стороны AC параллельно прямой PC.

Укажем способ построения этой прямой, не использующий вспомогательной прямой PC. Одну точку мы уже построили, приняв $AD = CE = 0$ — это середина Y стороны AC. Другую точку получим, отложив меньшую из сторон AB и BC на большей (на рис. 30: AB меньше BC и $CB' = AB$) и взяв середину X отрезка BB'.

Заметим, еще, что вся прямая XY получится лишь в случае, когда отрезки разрешено откладывать на продолжениях сторон за точку B и на их продолжениях за точки A и C. В противном случае искомым множеством является лишь отрезок XY.

XIX.1.8.2. Пусть данное число равно a, округленное равно a_0 и $a - a_0 = \alpha$. Очевидно, $a_0 \leqslant a$, так что $\alpha \geqslant 0$. С другой стороны, по определению округления, $\alpha < 0{,}01$.

1) Если $a < 0{,}01$, имеем $a_0 = 0$, и, значит, $\frac{a_0}{a} = 0$.

2) Если $a \geqslant 0{,}01$, то мы представим число $\frac{a_0}{a}$ в виде:

$$\frac{a_0}{a} = \frac{a - \alpha}{a} = 1 - \frac{\alpha}{a}.$$

При этом $a_0 \geqslant 0{,}01$ и, как указывалось, $\alpha < 0{,}01$. Следовательно, $\alpha < a_0$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства число α, получим $2\alpha < a_0 + \alpha = a$, откуда $\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{2}$. С другой стороны, $\frac{\alpha}{a} \geqslant 0$, так что $0 \leqslant \frac{\alpha}{a} < \frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$\frac{1}{2} < 1 - \frac{\alpha}{a} \leqslant 1.$$

Покажем, что величина $\frac{\alpha}{a}$ может принимать любые значения β, удовлетворяющие неравенству

$$0 \leqslant \beta < \frac{1}{2}.$$

В самом деле, положим $a_0 = 0{,}01$ и рассмотрим уравнение

$$\frac{\alpha}{0{,}01 + \alpha} = \beta.$$

Это уравнение — первой степени относительно α, и, очевидно, при любом $\beta \neq 1$ оно имеет решение:

$$\alpha = 0{,}01 \frac{\beta}{1 - \beta}.$$

Заметим, что при $0 \leqslant \beta < \frac{1}{2}$ мы имеем

$$0 \leqslant \frac{\beta}{1 - \beta} < 1.$$

и потому

$$0 \leqslant \alpha < 0{,}01.$$

Следовательно, величина $\frac{a_0}{a} = 1 - \frac{\alpha}{a}$ может принимать любые значения, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{1}{2} < \frac{a_0}{a} \leqslant 1,$$

а также значение 0.

Если теперь снова — в соответствии с условием — округлить числа $\frac{a_0}{a}$, то, очевидно, при этом могут получаться лишь следующие значения $\frac{a_0}{a}$:

$$0;\ 0{,}50;\ 0{,}51;\ 0{,}52;\ \ldots;\ 0{,}98;\ 0{,}99;\ 1{,}00,$$

причем каждое из этих значений, по доказанному, можно получить при надлежащем выборе числа a.

XIX.I.8.4. То, что дробь $\frac{al + b}{cl + d}$ сократима на k, означает, что числа $al + b$ и $cl + d$ делятся на k, т. е.

$$al + b = kn,$$
$$cl + d = km.$$

Умножая первое равенство на c, а второе — на a и вычитая почленно полученные равенства, получим

$$ad - bc = k(am - cn).$$

Это и означает, что $ad - bc$ делится на k.

XIX.I.8.5. Пусть a больше всех чисел, стоящих на вырезанном из таблицы куске, и пусть, вопреки утверждению задачи, оно стоит не с края. Это означает, что число a имеет четырех «соседей»: b, c, d, e, также принадлежащих таблице. Так как по условию $a > b$, $a > c$, $a > d$, $a > e$, то

$$a > \frac{b + c + d + e}{4},$$

что противоречит условиям задачи.

XIX.II.8.1. При распределении груза по машинам поступим следующим образом: будем грузить ящики на первую машину, не выбирая, пока их вес не превысит 1,5 *т*. Последний ящик снимем и положим рядом с машиной. После этого будем грузить ящики на вторую машину, потом — на третью, и так до тех пор, пока не будут загружены 8 машин. При этом вес ящиков, лежащих на машинах и рядом с ними, будет больше, чем 1,5 $m \cdot 8 = 12$ тонн. Оставшиеся на складе ящики весят меньше, чем 1,5 *т* (так как общий вес груза 13,5 *т*), и их сможет увезти девятая машина.

В нашем распоряжении осталось еще две машины, которые должны увезти 8 ящиков (ранее снятых и лежащих рядом). Но любых 4 ящика весят не более, чем

$$350 \cdot 4 = 1400 \text{ кг},$$

так что две машины могут увезти оставшиеся 8 ящиков.

XIX.II.8.2. Пусть в строке с номером k сумма чисел равна $S \geqslant 518$. Из условия симметрии таблицы ясно, что точно такая же сумма будет у чисел строки с номером $8 - k + 1$ и у столбцов с номерами k и $8 - k + 1$.

Сумма всех чисел, стоящих в этих столбцах и строках, легко вычисляется: ясно, что для ее вычисления нужно из числа $4S$ вычесть сумму чисел, стоящих в четырех клетках пересечения взятых строк со взятыми столбцами (ибо эти числа учтены дважды в числе $4S$).

Но сумма последних четырех чисел не больше суммы всех чисел, стоящих на диагоналях, т. е. не больше 112.

Итак, сумма чисел в двух строках и двух столбцах таблицы не меньше, чем $4S - 112$, т.е. не меньше, чем

$$4 \cdot 518 - 112 = 1960,$$

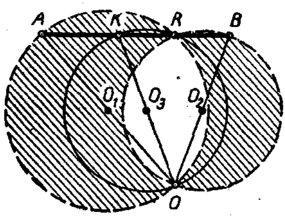
в то время как общая сумма стоящих в таблице чисел равна, по условию, 1956.

Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

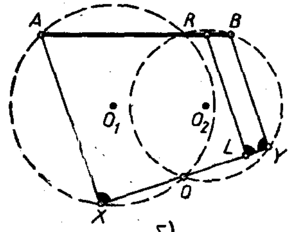
XIX.II.8.3. Пусть M и N — две фиксированные точки и P — проекция точки M на некоторую прямую, проходящую через N. Так как $\angle MPN = 90°$, то, очевидно, точка P лежит на окружности, построенной на отрезке MN, как на диаметре.

Применим это рассуждение к концам A и B данного отрезка и точке O. Мы получим две окружности O_1 и O_2, построенные на отрезках AO и BO, как на диаметрах, и пересекающиеся в точках O и R. При этом точка R лежит на прямой AB, так как $\angle ARO = \angle BRO = 90°$ (углы, опирающиеся на диаметры).

Пусть теперь K — любая точка отрезка AB. Проекция точки K описывает окружность O_3, проходящую через O. Так как $AB \perp OR$, то проекцией точки K на прямую OR является точка R. Таким образом, рассматриваемая окружность проходит и через точку R. Эта окружность ни в каких других точках не пересекает окружностей O_1 и O_2 (в противном случае две различные окружности имели бы три общие точки). Из сказанного следует, что окружность O_3 целиком лежит внутри фигуры, состоящей из двух «луночек», образованных окружностями O_1 и O_2 (см. рис. 31, а). Эти «луночки» состоят из точек, которые лежат внутри одной из окружностей O_1, O_2, но вне другой. Таким образом, искомое множество целиком принадлежит этой фигуре.



а)



б)

Рис. 31.

Покажем обратное: всякая точка L фигуры, состоящей из двух «луночек», образованных окружностями O_1 и O_2, принадлежит рассматриваемому множеству. Для этого проведем прямую OL (см. рис. 31, б) и обозначим через X и Y точки ее пересечения с окружностями O_1 и O_2 соответственно. Так как $\angle AXO = 90°$ и $\angle BYO = 90°$, то перпендикуляр к прямой OL в точке L параллелен прямым AX и BY и лежит между ними, а поэтому пересекает отрезок AB в некоторой точке Z. Значит, точка L является проекцией точки Z отрезка AB на прямую OL и, следовательно, принадлежит рассматриваемому множеству

Мы доказали, что искомое множество представляет собой описанную выше фигуру, состоящую из двух «луночек» (рис. 31, а).

XIX.II.8.5. Пусть, вопреки утверждению задачи, общая часть любых двух прямоугольников меньше $\frac{1}{9}$. Перенумеруем данные 9 прямоугольников в любом порядке и выясним, какую площадь они могут занимать. Второй прямоугольник может пересекаться первым по площади, меньшей, чем $\frac{1}{9}$; следовательно, второй прямоугольник добавляет к площади первого больше, чем $\frac{8}{9}$, т. е. общая площадь, занимаемая этими двумя прямоугольниками, больше, чем $1+\frac{8}{9}$.

Третий прямоугольник может пересекаться как с первым, так и со вторым прямоугольником, но с каждым из них по площади, меньшей $\frac{1}{9}$, т. е. с первым и со вторым вместе по площади, меньшей, чем $\frac{2}{9}$.

Следовательно, третий прямоугольник добавляет к первым двум прямоугольникам площадь, большую $\frac{7}{9}$, т. е. общая площадь, занимаемая первыми тремя прямоугольниками, больше, чем

$$1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}.$$

Продолжая эти рассуждения, получим, что общая площадь, занимаемая всеми девятью прямоугольниками, больше, чем

$$1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\ldots+\frac{1}{9}.$$

Между тем, эта сумма равна 5.

Следовательно, общая площадь данных прямоугольников больше 5, а это противоречит тому, что все они размещены на площади, равной 5.

XIX.II.9.2. Плоскостями, параллельными граням куба, разобьем его на кубики с ребром 1. Таких кубиков будет, очевидно, $13^3 = 2197$.

Если бы теперь в н у т р и каждого кубика нашлась бы точка (из числа выбранных), то мы имели бы не менее 2197 различных точек, вопреки условию. Следовательно, найдется кубик, внутри которого не лежит ни одной выбранной точки.

З а м е ч а н и е. Если бы мы потребовали, чтобы точек не было не только внутри, но и на границе кубика, то изложенное решение было бы непригодно, так как одна точка могла бы «обслужить» сразу 8 кубиков.

XX.I.7.2. Положим $x = 0$; тогда многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ принимает значение d, и потому, по условию, d должно делиться на 5, т. е. $d = 5d_1$. Положив $x = 1$ и $x = -1$, получим соотношения:

$$a + b + c + 5d_1 = 5m,$$
$$-a + b - c + 5d_1 = 5n.$$

Сложив написанные равенства, мы увидим, что $2b$ делится на 5, значит, b делится на 5 и, следовательно, $a + c$ делится на 5. Положим теперь $x = 2$. Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ примет значение $8a + 4b + 2c + d = 5p$. Учитывая равенства $d = 5d_1$, $b = 5b_1$ и совершив формальные преобразования, получаем:

$$8a + 2c = 3a - 3c + 5(a + c) = 5(p - d_1 - 4b_1).$$

Отсюда ясно, что $a - c$ делится на 5:

$$a - c = 5k.$$

Принимая во внимание доказанное ранее равенство $a + c = 5l$, имеем:

$$2a = 5(k + l),\ 2c = 5(l - k).$$

Поскольку числа 2 и 5 взаимно просты, коэффициенты a и c обязаны делиться на 5. Итак, все коэффициенты многочлена делятся на 5.

XX.I.7.4. Обозначим сумму чисел, стоящих в k-й строке через S_k, сумму чисел l-го столбца — через S^l, а сумму всех чисел, стоящих в таблице — через Σ.

Пусть таблица имеет m строк и n столбцов. Тогда, очевидно,

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_m = S^1 + S^2 + \ldots + S^n = \Sigma.$$

Обозначим число, стоящее на пересечении l-го столбца и k-й строки через a_k^l.

По определению числа S_k имеем:

$$a_k^1 + a_k^2 + \dots + a_k^n = S_k.$$

Кроме того, по условию задачи,

$$a_k^l = S_k \cdot S^l.$$

Стало быть, для любого $k = 1, 2, 3, \dots, m$ мы имеем:

$$S_k = a_k^1 + a_k^2 + \dots + a_k^n = S^1 S_k + S^2 S_k + \dots + S^n S_k = S_k \cdot \Sigma.$$

и потому

$$\Sigma = S_1 + S_2 + \dots + S_m = S_1 \Sigma + S_2 \Sigma + \dots + S_m \Sigma = \Sigma (S_1 + S_2 + \dots + S_m) = \Sigma^2.$$

Из соотношения $\Sigma^2 = \Sigma$ получаем: либо $\Sigma = 0$, либо $\Sigma = 1$. Однако равенство $\Sigma = 0$ невозможно, так как таблица заполнена положительными числами. Следовательно, $\Sigma = 1$, что и требовалось доказать.

XX.I.9.2. Пусть $[x] = x - y$; по определению числа $[x]$ имеем:

$$0 \leqslant y < 1.$$

Наше уравнение запишется теперь так:

$$x^3 - x + y = 3.$$

Принимая во внимание неравенство $0 \leqslant y < 1$, получим:

$$2 < x^3 - x \leqslant 3,$$

или

$$2 < x(x^2 - 1) \leqslant 3.$$

Пусть $x > 2$. В этом случае $x(x^2 - 1) > 2 \cdot 3 = 6$, и, значит, при $x > 2$ неравенство $x(x^2 - 1) \leqslant 3$ не выполняется.

Пусть теперь $x < -1$. Тогда $x^2 - 1 > 0$ и произведение $x(x^2 - 1)$ отрицательно, что противоречит условию $x(x^2 - 1) > 2$. Остается исследовать отрезки: от -1 до 0, от 0 до 1 и от 1 до 2.

1. Пусть $-1 \leqslant x < 0$; в этом случае $[x] = -1$, и уравнение принимает вид: $x^3 + 1 = 3$, откуда $x = \sqrt[3]{2}$. Но это значение x вовсе не лежит на отрезке от -1 до 0, т. е. на этом отрезке нет решений рассматриваемого уравнения.

2. Пусть $0 \leqslant x < 1$; в этом случае $[x] = 0$ и уравнение имеет вид: $x^3 = 3$, откуда $x = \sqrt[3]{3}$. Но это число больше 1, так что на отрезке от 0 до 1 решений также нет.

3. Наконец, при $1 \leqslant x < 2$ мы имеем $[x] = 1$, и получающееся уравнение $x^3 - 1 = 3$ имеет решение $x = \sqrt[3]{4}$, которое действительно удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant x < 2$.

Таким образом, $x = \sqrt[3]{4}$ — единственное решение данного уравнения.

XX.I.9.5. Выберем любой отрезок AB ломаной; пусть его длина равна a. Рассмотрим точку M, делящую пополам длину всей оставшейся ломаной. Если эта точка является вершиной ломаной, то, распрямив ломаные AM и BM, мы получим требуемый треугольник (равнобедренный в данном случае).

Пусть теперь M не является вершиной ломаной, а принадлежит какому-то ее звену CD длины b (рис. 32). Пусть длины ломаных AC и BD равны соответственно x и y. Если из отрезков a, $x + b$, y или из отрезков a, $y + b$, x можно составить треугольник, то задача решена.

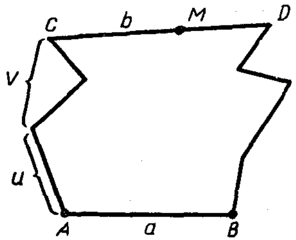


Рис. 32.

Предположим, что невозможно составить треугольник из отрезков a, $x + b$, y и невозможно составить треугольник из отрезков a, $y + b$, x. Напомним, что невозможность построения треугольников из трех отрезков означает, что один из них не меньше суммы двух других.

Поскольку $x + y + b > a$ (ломаная всегда длиннее отрезка) и $x + b > y$, $y + b > x$ (в силу выбора точки M), то невозможность построения треугольников из указанных отрезков приводит к неравенствам:

$$x + b \geqslant a + y, \quad y + b \geqslant a + x,$$

сложив которые, мы получим:

$$2b \geqslant 2a, \text{ т. е. } b \geqslant a.$$

Выберем теперь в предыдущих рассуждениях в качестве отрезка AB н а и б о л ь ш и й из всех отрезков ломаной. Неравенство $b > a$ теперь невозможно, значит, $b = a$.

Неравенства $x+b \geqslant a+y$, $y+b \geqslant a+x$ принимают вид: $x \geqslant y$, $y \geqslant x$, откуда $x=y$.

В силу условия $n>4$ на одной из ломаных x или y имеется вершина ломаной (пусть для определенности, она имеется на ломаной x), которая разбивает эту ломаную на две части: $x=u+v$ (рис. 32).

Покажем, что из отрезков $a+u$, $b+v$, y можно построить треугольник. Нам нужно проверить выполнение трех неравенств:

$$a+u+y>b+v,\quad a+u+b+v>y,\quad b+v+y>a+u.$$

Доказательство этих неравенств не составляет никакого труда, если учесть, что $a=b$ и $y=x=u+v$:

$$a+u+y=b+u+x=b+u+u+v>b+v,$$
$$a+u+b+v=a+b+x=a+b+y>y,$$
$$b+v+y=a+v+y=a+v+u+v>a+u.$$

XX.I.10.1. Заметим прежде всего, что $323=17\cdot19$. Пусть n четно, т. е. $n=2k$. Разность 20^n-3^n делится на $20-3$, т. е. на 17. Покажем, что разность 16^n-1 также делится на 17. Действительно, число

$$16^n-1=16^{2k}-1=256^k-1$$

делится на

$$256-1=255=17\cdot15.$$

Число 20^n-1 делится на $20-1=19$. Покажем, что и разность 16^n-3^n делится на 19. Мы имеем:

$$16^n-3^n=16^{2k}-3^{2k}=256^k-9^k,$$

а это число делится на

$$256-9=247=19\cdot13.$$

Итак, при четном n сумма $20^n+16^n-3^n-1$ делится на 17 и на 19, а следовательно, и на их произведение (так как это числа взаимно простые).

Пусть теперь n нечетно, т. е. $n=2k+1$. Число 20^n-3^n по-прежнему делится на $20-3=17$. Далее, мы имеем:

$$16^n-1=16^{2k+1}-1=16^{2k+1}-16+15=16(16^{2k}-1)+15.$$

Число $16^{2k}-1$, как показано выше, делится на 17, тогда как 15 на 17 не делится. Но если из двух чисел одно делится на a, а другое не делится, то их сумма не делится на a. Отсюда следует, что число $16^{2k+1}-1$ не делится на 17, а значит, не делится на 17 и сумма $20^n+16^n-3^n-1$ при нечетном $n=2k+1$. Но тогда эта сумма не делится и на 323.

Итак, число $20^n+16^n-3^n-1$ делится на 323 при любом четном $n>0$ и не делится на 323 ни при каком нечетном n.

XX.II.7.1. Прежде всего заметим, что искомое множество, очевидно, симметрично относительно прямых OA и OB; поэтому мы будем рассматривать лишь точки угла AOB.

Пусть точки A и B удалены от O на расстояние l. Очевидно, что вся дуга окружности радиуса l с центром в O, заключенная между сторонами угла AOB, принадлежит искомому множеству («ломаными» в этом случае являются радиусы, проведенные в соответствующую точку).

Ясно также, что любая точка, лежащая вне этой окружности, нам не подходит, так как расстояние до нее от точки O больше l.

Пусть теперь M — точка, лежащая внутри круга и принадлежащая искомому множеству, и пусть $OA_1A_2...A_nM$ — ломаная длины l, удовлетворяющая поставленному условию. Ясно, что эта ломаная целиком лежит внутри прямоугольника $OPMQ$, где P и Q — проекции точки M на прямые OA и OB (см. рис. 33, а). В самом деле, выйдя за пределы этого прямоугольника, ломаная должна будет снова вернуться в него (хотя бы в точке M) и при этом неминуемо пересечет второй раз его сторону.

То же рассуждение применимо к неполной ломаной $A_kA_{k+1}...A_nM$, и потому конец A_{k+1} любого звена A_kA_{k+1} ломаной расположен выше и правее, чем его начало (рис. 33, б). Иначе говоря, точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$, являющиеся проекциями точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на сторону OP прямоугольника $OPMQ$, расположены на отрезке OP снизу вверх в указанном порядке: $B_1, B_2, \ldots B_n$. Точно так же, точки $C_1, C_2, \ldots, C_n$, являющиеся проекциями точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на сторону OQ, идут слева направо. Так как каждая сторона треугольника меньше суммы двух других, то мы имеем (см. рис. 33 а):

$$OA_1<OB_1+OC_1,\ A_1A_2<B_1B_2+C_1C_2,\ A_2A_3<B_2B_3+\\+C_2C_3,\ \ldots,\ A_nM<B_nP+C_nQ.$$

Следовательно,

$$OA_1 + A_1A_2 + \ldots + A_nM < (OB_1 + B_1B_2 + \ldots + B_nP) + \\ + (OC_1 + C_1C_2 + \ldots + C_nQ).$$

Так как длина ломаной $OA_1A_2 \ldots A_nM$ равна l, то последнее неравенство можно переписать в виде $l < OP + OQ$ или $l < OP + PM$.

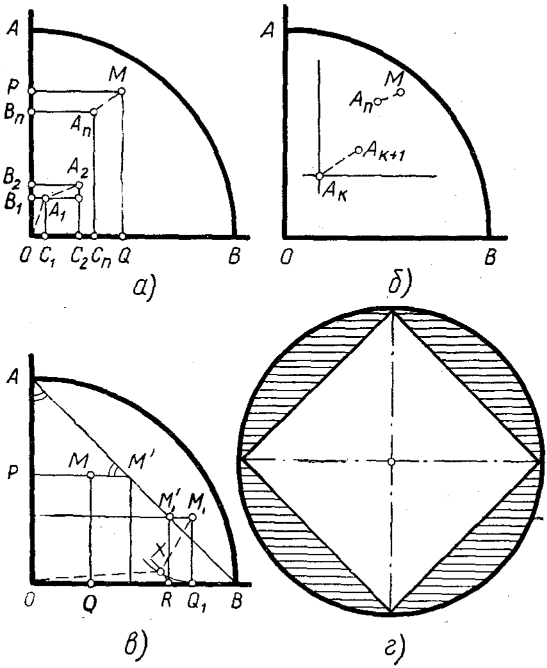


Рис. 33.

Итак, если точка M принадлежит искомому множеству, то $OP + PM > l$. Из этого легко заключить, что ни одна точка, лежащая внутри треугольника OAB или на отрезке AB, этому множеству не принадлежит.

Действительно (см. рис. 33, в),

$$OP + PM \leqslant OP + PM' = OP + PA = l$$
$$(\angle PAM' = \angle AM'P = 45°).$$

Таким образом, внутри угла AOB искомому множеству могут принадлежать лишь точки, лежащие внутри сегмента, отсеченного хордой AB, или на дуге AB этого сегмента.

Для любой точки M_1 из этого сегмента требуемую ломаную легко построить: именно пусть (см. рис. 33, в) точка X — точка пересечения окружностей радиуса M_1Q_1 с центром M_1 и радиуса OR с центром O (окружности пересекутся, так как иначе расстояние OM_1 было бы больше l). Ясно, что ломаная OXM_1 — искомая, так как

$$OX + XM_1 = OR + M_1Q_1 = OR + RM_1' = l.$$

Окончательный вид множества показан на рис. 33, г.

XX.II.7.3. Обозначим две данные стороны треугольника через a и b. Пусть, для определенности, $a \geqslant b$. Ясно, что если точки A и C неподвижны, то при изменении стороны c вершина B описывает окружность радиуса a с центром в точке C. Понятно, что мы можем ограничиться рассмотрением только верхней полуплоскости.

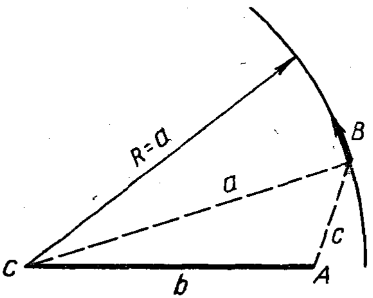


Рис. 34.

Известно, что из двух треугольников с двумя соответственно равными сторонами третья сторона больше у того треугольника, у которого больше противолежащий этой стороне угол, и обратно. Отсюда следует, что при увеличении стороны c угол C также увеличивается. Таким образом, увеличение стороны связано с движением точки B по окружности против часовой стрелки (см. рис. 34). При этом, очевидно, угол A уменьшается.

Поскольку в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а, по условию, $a \geqslant b$, то наибольшим углом всегда является один из углов: A или C.

В случае, когда $a = c$, углы A и C принимают равные значения A_0 и C_0. Если $a > c$, то наибольшим углом является угол A и, как было показано, $A > A_0$. Если же $a < c$, то наибольшим углом становится угол C, причем $C > C_0$.

Следовательно, наибольший угол треугольника принимает наименьшее значение при условии $a = c$.

XX.II.7.5. Пусть $S = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+8}$ — сумма некоторых восьми идущих подряд членов последовательности. Очевидно, $S > a_{k+7} + a_{k+8} = a_{k+9}$ (так как все члены последовательности положительны).

С другой стороны,

$$a_{k+10} = a_{k+9} + a_{k+8} = a_{k+8} + a_{k+8} + a_{k+7} =$$
$$= a_{k+8} + a_{k+7} + a_{k+7} + a_{k+6} = \ldots = a_{k+8} + a_{k+7} + \ldots$$
$$\ldots + a_{k+2} + a_{k+2} + a_{k+1},$$

что, как нетрудно заметить, больше S.

Таким образом, сумма S заключена между двумя последовательными членами a_{k+9} и a_{k+10} и, значит, не может быть равна никакому члену последовательности.

XX.II.8.4. Заметим сначала, что все три неизвестных x_1, x_2, x_3 могут обращаться в нуль лишь одновременно. В самом деле, если например, $x_1 = 0$, то (из первого уравнения) $x_2 = 0$ и (из второго уравнения) $x_3 = 0$.

Пусть теперь $x_1x_2x_3 \neq 0$. Перепишем данную систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1 + x_1^2}{2x_1^2}, \\ \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{1 + x_2^2}{2x_2^2}, \\ \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1 + x_3^2}{2x_3^2}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x_3^2} + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Умножая обе части уравнений на 2 и производя почленное сложение всех уравнений, получим:

$$2 \cdot \frac{1}{x_1} + 2 \cdot \frac{1}{x_2} + 2 \cdot \frac{1}{x_9} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + 1 + 1 + 1,$$

или, иначе,

$$\left(\frac{1}{x_1^2} - 2 \cdot \frac{1}{x_1} + 1\right) + \left(\frac{1}{x_2^2} - 2 \cdot \frac{1}{x_2} + 1\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{x_3^2} + 2 \cdot \frac{1}{x_3} + 1\right) = 0,$$

или, наконец,

$$\left(1-\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(1-\frac{1}{x_2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{x_3}\right)^2=0.$$

Написанное равенство может выполняться лишь при условии:

$$1-\frac{1}{x_1}=1-\frac{1}{x_2}=1-\frac{1}{x_3}=0,$$

откуда находим:

$$x_1=x_2=x_3=1.$$

Итак, данная система уравнений имеет лишь два решения:

$$x_1=x_2=x_3=0; \quad x_1=x_2=x_3=1.$$

XXI.I.7.2. Заметим, что через точки O, P, M, Q можно провести окружность, причем диаметром ее будет отрезок OM (так как $\angle MPO=\angle MQO=90^\circ$). В построенной окружности хорда PQ стягивает дугу, на которую опирается угол POQ (или смежный с ним угол).

Таким образом, в равных кругах (вдвое меньшего диаметра, чем данный круг) некоторые хорды стягивают равные дуги. По известной теореме, все такие хорды равны, что и требуется.

XXI.I.9.2. Напомним, что система из двух непараллельных прямых имеет три оси симметрии. Именно, если провести через эти прямые параллельные плоскости и провести еще одну плоскость, параллельную этим двум и удаленную от них на равные

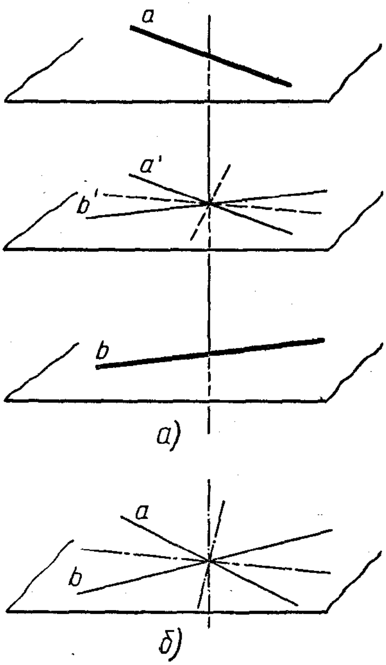


Рис. 35.

расстояния, то две оси симметрии получаются как биссектрисы вертикальных углов между проекциями двух данных прямых на третью плоскость (см. рис. 35, а). Третья ось симметрии — общий перпендикуляр данных прямых. В случае пересекающихся прямых положение вещей аналогично (рис. 35, б).

Данная нам система состоит из трех прямых, из которых можно образовать, очевидно, три пары: 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3. Каждая пара имеет три оси симметрии, так что общее число осей симметрии не может быть больше 9, и этот случай будет достигнут лишь тогда, когда к а ж д а я ось симметрии к а ж д о й пары является также осью симметрии для третьей прямой, т. е. либо совпадает с этой третьей прямой, либо ей перпендикулярна.

Сформулированное условие выполняется, как нетрудно заметить, в случае, когда все три прямые взаимно перпендикулярны и пересекаются в одной точке.

Итак, наибольшее число осей симметрии у фигуры, образованной тремя непараллельными прямыми в пространстве, равно 9.

XXI.1.10.5. Обозначим плоскость, в которой лежат прямые, через α и рассмотрим перпендикуляр l к этой плоскости.

Если на прямой l откладывать время, то движение пешехода по прямой, лежащей в плоскости α, выразится графиком, который будет тоже, очевидно, прямой (н о л е ж а щ е й, разумеется, в п р о с т р а н с т в е).

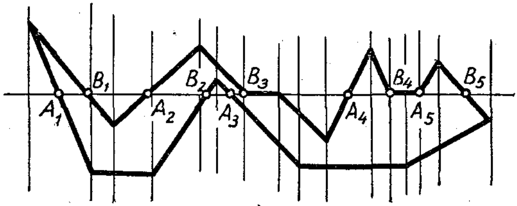
Тот факт, что первый пешеход встречается со вторым, означает, что графики Γ_1 и Γ_2 движения этих пешеходов пересекаются. Точно так же, имеют общую точку: прямая Γ_1 с Γ_3 и Γ_4, а прямая Γ_2 — с Γ_3.

Рассмотрим прямые Γ_1 и Γ_2. Прямая Γ_3 имеет с ними обеими по одной общей точке, причем не проходит через точку пересечения прямых Γ_1 и Γ_2. Поэтому прямая Γ_3 лежит в плоскости, определяемой прямыми Γ_1, Γ_2.

Прямая Γ_4 по той же причине лежит в этой же плоскости.

Если бы теперь прямые Γ_3 и Γ_4 были параллельны, то их проекции на плоскость α тоже были бы параллельны, что противоречит условию. Значит, прямые Γ_3 и Γ_4 пересекаются (лежат в одной плоскости и не параллельны). Но, как мы уже отметили, это означает, что третий пешеход встречается с четвертым.

XXI.II.8.1. Рассмотрим участки прямой AB, целиком проходящие внутри данного многоугольника. Эти отрезки не входят в состав границы многоугольника, но после перегибания они превращаются в звенья ломаной — границы нового многоугольника (отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_kB_k; на рис. 36,а $k = 5$).

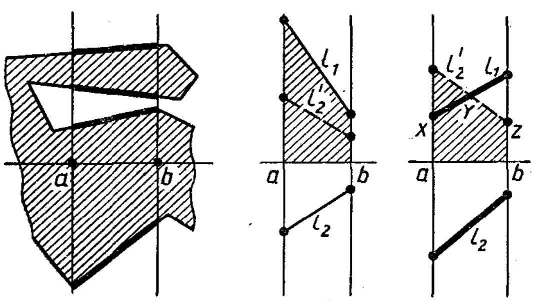


а)

Рис. 36.

Проведем через каждую вершину данного многоугольника прямую, перпендикулярную AB. Каждый из отрезков A_iB_i будет разбит этими прямыми на несколько «элементарных отрезков», целиком лежащих внутри данного многоугольника.

Рассмотрим любой такой отрезок ab и соответствующую полосу между прямыми, перпендикулярными AB и проходящими через точки a и b. В этой полосе, по построению, не лежит ни одной вершины исходного многоугольника; поэтому полоса «высекает» из его границы два или более о т р е з к о в (а не ломаных) — по обе стороны от AB (рис. 36, б).



б) в) г)

Рис. 36, б, в, г.

Рассмотрим отрезки l_1 и l_2, ближайшие к прямой AB по разные стороны от нее (в полосе над отрезком ab). Рассмотрим, кроме того, отрезок l_2', симметричный l_2 относительно AB. Если отрезки l_1 и l_2' не пересекаются, то один из них, очевидно, целиком попадет внутрь нового многоугольника. Если же они пересекаются, то образуется двухзвенная ломаная XYZ, попадающая внутрь этого многоугольника (рис. 36, в, г). Наконец, если отрезки l_1 и l_2' совпадают, то в границе нового многоугольника учитывается длина только одного из них, как если бы другой проходил внутри.

Заметим теперь, что как длина любого из отрезков l_1 или l_2', так и длина двухзвенной ломаной XYZ не меньше длины отрезка ab. Таким образом, если к границе многоугольника и добавляется при перегибании «элементарный отрезок» ab, то одновременно граница «теряет» ломаную или отрезок не меньшей длины.

Применяя эти рассуждения ко всем «элементарным отрезкам», мы и получим требуемое утверждение.

XXI.II.8.3. Продолжим отрезки CD и CE за вершину C до пересечения со сторонами угла соответственно в точках P и Q (рис. 37).

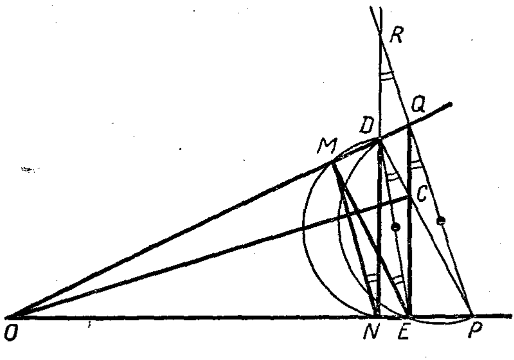


Рис. 37.

Покажем, что $PQ \parallel MN$. Заметим, что точки E и D лежат на окружности, диаметром которой является отрезок PQ (углы QEP и PDQ, по условию, прямые). Следовательно,

$$\angle EDP = \angle EQP.$$

С другой стороны, окружность с диаметром ED проходит через точки M и N, и, значит,

$$\angle MND = \angle MED.$$

Но $EM \parallel PD$ (прямые EM и PD перпендикулярны к одной прямой), и потому углы EDP и DEM равны.

Следовательно,

$$\angle MND = \angle EQP.$$

Продолжив теперь отрезок DN до пересечения с прямой PQ в некоторой точке R, мы найдем, что $\angle EQP = \angle NRP$ (так как $NR \parallel EQ$), и потому $\angle MND = \angle NRP$. Но эти углы — накрест лежащие (при пересечении прямых NM и PQ с секущей NR); из их равенства вытекает, что $MN \parallel PQ$.

Рассмотрим теперь треугольник OPQ. Его высоты QE и PD пересекаются в точке C, и, значит, OC — тоже высота, т. е. $OC \perp PQ$. Но $PQ \parallel MN$; следовательно,

$$OC \perp MN,$$

что и требовалось доказать.

XXI.II.10.1. При $y = 0$ уравнение, очевидно, не имеет решения. При $y = 1$ уравнение обращается в квадратное, имеющее лишь одно решение $x = 3$ (второй корень $x = -1$ отрицателен).

Пусть теперь $y > 1$. Заметим, что числа x^{2y} и $(x + 2)^{2y}$ одной четности, а потому число $(x + 1)^{2y}$ четно, так что $x + 1$ четно: $x + 1 = 2k$, откуда $x = 2k - 1$, $x + 2 = 2k + 1$. Подставим эти значения в уравнение и раскроем скобки по формуле разложения бинома:

$$(2k - 1)^{2y} + (2k)^{2y} = (2k + 1)^{2y}, \qquad (1)$$

$$[(2k)^{2y} - 2y \cdot (2k)^{2y-1} + \ldots - 2y \cdot 2k + 1] + (2k)^{2y} =$$
$$= (2k)^{2y} + 2y \cdot (2k)^{2y-1} + \ldots + 2y \cdot 2k + 1.$$

Так как $y > 1$, то $2y \geqslant 3$ и члены $C_{2y}^3 \cdot (2k)^3$ будут существовать. Перенесем теперь все члены, кроме $2 \cdot 2y \cdot 2k$, в правую часть и вынесем $(2k)^3$ за скобки:

$$2 \cdot 2y \cdot 2k = (2k)^3 [2C_{2y}^3 + 2C_{2y}^5 (2k)^2 + \ldots +$$
$$+ 2C_{2y}^1 (2k)^{2y-3} + (2k)^{2y-3}],$$

или $y = k \cdot [\ldots]$. Мы видим, что при $y > 1$ число y должно делиться на k.

Разделим теперь слагаемые в равенстве (1) на $(2k)^{2y}$:

$$\left(1-\frac{1}{2k}\right)^{2y}+1=\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2y}.$$

При этом, очевидно, $\left(1-\frac{1}{2k}\right)^{2y}<1$, так что $1+\left(1-\frac{1}{2k}\right)^{2y}<2$. С другой стороны, $\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2y}=1+\frac{2y}{2k}+C_{2y}^{2}\left(\frac{1}{2k}\right)^{2}+\ldots$, так что $\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2y}>1+\frac{2y}{2k}$. Отсюда следует, что $1+\frac{2y}{2k}<2$, откуда $\frac{2y}{2k}<1$, $y<k$.

Таким образом, y не может делиться на k, и, значит, при $y>1$ уравнение не имеет решений.

Итак, единственное решение уравнения: $x=3$, $y=1$.

XXI.II.10.2. Пусть сначала отрезок AB целиком проходит внутри или по границе многоугольника. Обозначим через A' точку пересечения прямой AB с границей многоугольника, лежащую на продолжении отрезка AB за точку A и ближайшую к точке A. Точка B' определяется аналогично (см. рис. 38, а). Точки A' и B' разбивают границу многоугольника на две ломаных, каждая из которых имеет длину, бóльшую, чем $A'B'$. В свою очередь $AB\leqslant A'B'$. Но отрезок AB не выходит из многоугольника, и, значит, его длина больше 1. Периметр многоугольника в этом случае имеет длину, большую, чем 2, что и требуется.

Пусть теперь отрезок AB не проходит целиком внутри или по границе многоугольника, т. е. на отрезке AB есть точки, лежащие вне многоугольника. В этом случае, кроме точек A' и B', определяемых, как и раньше, выберем еще две точки: A''— ближайшая к A точка пересечения отрезка AB с границей многоугольника; точ-

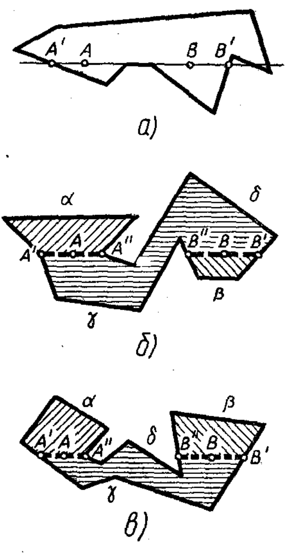


Рис. 38.

ка B'' определяется аналогично. (Точки A'' и B'' непременно различны, так как в противном случае весь отрезок AB проходил бы внутри многоугольника или по его границе.)

Отрезки $A'A''$ и $B''B'$ лежат, по построению, внутри многоугольника и, значит, разбивают внутреннюю область многоугольника на три части. Границей одной из них является отрезок $A'A''$ и часть границы многоугольника — ломаная α. Точно так же граница второй области состоит из отрезка $B'B''$ и ломаной β. Третья часть ограничена отрезками $A'A''$ и $B'B''$ и частями границы многоугольника γ и δ. Ломаные $AA'\gamma B''B$ и $AA''\delta B'B$ (рис. 38, б) не выходят из многоугольника и, по условию, имеют длину больше 1. Значит, периметр многоугольника $A''A'\gamma B''B'\delta$ больше 2. Остается отметить, что периметр данного многоугольника получается заменой отрезков $A''A'$ и $B''B'$ бóльшими по длине ломаными α и β, и потому он также больше 2.

Отметим еще, что вместо ломаных $AA'\gamma B''B$ и $AA''\delta B'B$ может потребоваться рассмотрение ломаных $AA'\gamma B'B$ и $AA''\delta B''B$ (это зависит от расположения отрезков $A'A''$ и $B'B''$ в многоугольнике). Последнее замечание, однако, не создает новых трудностей (см. рис. 38, в).

XXII.1.7.4. Мы будем говорить, что ладья движется вдоль горизонтали (или вертикали), если при своем ходе она перемещается с одного поля этой горизонтали (вертикали) на другое.

Допустим, что ладья совершила обход шахматной доски, побывав при этом на каждом поле по одному разу.

Покажем, что при обходе доски ладья должна либо хотя бы один раз двигаться вдоль каждой вертикали, либо хотя бы один раз двигаться вдоль каждой горизонтали.

Действительно, пусть найдется вертикаль, вдоль которой ладья ни разу не двигалась. Это значит, что каждое поле этой вертикали (на всех этих полях ладья, по условию, побывала) ладья проходила, двигаясь «поперек» вертикали, т. е. вдоль соответствующей горизонтали. Следовательно, ладья двигалась хотя бы один раз вдоль каждой горизонтали.

Пусть, для определенности, ладья двигалась хотя бы один раз вдоль каждой вертикали. На каждую вертикаль (кроме, быть может, той, с которой начинается обход, и той, на которой обход заканчивается) ладья должна войти и после движения вдоль вертикали — выйти с нее. При этом вход и выход осуществляются обязательно с поворотами.

Таким образом, общее число поворотов не меньше, чем

$$6 \cdot 2 + 1 + 1 = 14$$

(6 вертикалей со «входом» и «выходом», начальная вертикаль только с «выходом», конечная — только со «входом»).

Итак, меньше 14 поворотов сделать нельзя. В то же время, обходы, содержащие ровно 14 поворотов, существуют (см., например, рис. 39; этот вариант, конечно, не единственный).

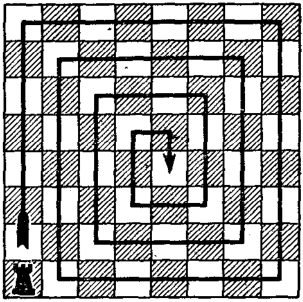


Рис 39.

XXII.1.8.3. Заметим, что площадь треугольника ABD вдвое больше площади треугольника AKD, так как эти треугольники имеют общую высоту, а основание одного из них вдвое больше основания другого: $2AK = AB$. Итак,

$$\frac{1}{2} S_{\triangle ABD} = S_{\triangle AKD}.$$

Точно так же

$$\frac{1}{2} S_{\triangle CBD} = S_{\triangle BMC}.$$

Сложим равенства (1) и (2):

$$S_{\triangle AKD} + S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Применив аналогичное рассуждение к треугольникам AMD и ACD и к треугольникам BKC и BAC, покажем, что

$$S_{\triangle AMD} + S_{\triangle BKC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Следовательно,

$$S = S_{\triangle AKD} + S_{\triangle BMC} + S_{\triangle AMD} + S_{\triangle BKC} = S_{ABCD}. \quad (3)$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle AKD} + S_{\triangle BMC} + S_{\triangle AMD} + S_{\triangle BKC} =$$
$$= S_{ABCD} - S_{MPKO} + S_{\triangle BCP} + S_{\triangle AOD}. \quad (4)$$

так как площади треугольников BCP и AOD в сумме S учтены дважды. Сопоставляя равенства (3) и (4), получим требуемое:

$$S_{MPKO} = S_{\triangle BCP} + S_{\triangle AOD}.$$

XXII.1.9.3. Покажем сначала, что общие хорды окружности O и каждой из окружностей, проходящих через точки A и B, пересекаются в одной точке. Для этого проведем через точки A и B любую окружность O_1, пересекающую данную окружность O в точках M_1 и N_1, и обозначим через P точку пересечения прямых M_1N_1 и AB. Проведем теперь через точку P секущую M_2N_2 к окружности O и построим окружность O_2, проходящую через точки M_2, N_2, A. По известной теореме,

$$PM_2 \cdot PN_2 = PA \cdot PB' \text{ (в окружности } O_2),$$
$$PM_2 \cdot PN_2 = PM_1 \cdot PN_1 \text{ (в окружности } O),$$
$$PM_1 \cdot PN_1 = PA \cdot PB \text{ (в окружности } O_1),$$

где B' — точка пересечения прямой AB с окружностью O_2. Отсюда $PA \cdot PB' = PA \cdot PB$, т. е. $PB' = PB$, и потому точки B и B' совпадают. Ясно, что таким способом может быть построена любая окружность, проходящая через точки A и B и пересекающая окружность O. В самом деле, кроме знания точек A и B, для определения окружности необходимо и достаточно задания еще одной точки. Пусть это будет одна из точек пересечения искомой окружности с окружностью O. По этой точке M мы построим секущую PMN и через точки M, N и A проведем окружность. Как было показано, она непременно пройдет и через точку B.

Итак, мы показали, что любая окружность, проходящая через точки A и B и пересекающаяся с окружностью O, имеет с O общую секущую, проходящую через фиксированную точку P, которую можно построить (с помощью любой такой окружности). Заметим теперь, что в данной окружности все хорды данной длины лежат на одном расстоянии от центра и, значит, касаются некоторой окружности, которую также можно построить с помощью любой такой хорды.

Построение, завершающее решение задачи, теперь очевидно: нужно из точки P провести касательную к вспомогательной окружности и по этой касательной построить искомую окружность, как было описано выше.

Заметим, наконец, что в том случае, когда перпендикуляр, проведенный через середину отрезка AB, проходит через центр окружности O, общие хорды данной окружности и каждой из окружностей, проходящих через точки A и B, уже не будут пересекаться в одной точке, но будут все параллельны прямой AB. В этом случае завершающее построение состоит в проведении прямой, параллельной данной прямой AB и касающейся вспомогательной окружности, и в последующем построении искомой окружности по этой касательной.

XXII.I.9.5. Пусть такой тетраэдр существует. Выберем в нем наибольшее ребро и обозначим его через a (если таких ребер несколько, то возьмем любое из них). По условию, должна найтись грань (треугольник), в котором ребро a было бы стороной тупого угла. Так как тупой угол в треугольнике — заведомо наибольший, а против большего угла всегда лежит большая сторона, то у тетраэдра существует ребро, большее, чем a, вопреки нашему выбору. Полученное противоречие показывает, что тетраэдров с требуемыми свойствами не существует.

XXII.I.10.4. Будем обозначать клетку, находящуюся на пересечении строки №a и столбца №b, через (a, b). Каждое из чисел 1, 2, ..., N встречается в такой записи всех клеток ровно $2N$ раз; N раз как номер столбца и N раз как номер строки.

Пусть теперь 1 стоит в клетке (a, x). Номер строки, в которой стоит 2, по условию, равен номеру столбца, содержащего 1, то есть равен x. Значит, 2 стоит на поле (x, y). Далее, 3 стоит на поле (y, z) и так далее; наконец, N^2 стоит на некотором поле (m, n).

Ясно, что номер a встречается внутри (т. е. не на первом и не на последнем месте) цепочки

$$(a,x)\ (x,y)\ (y,z)\ \ldots\ (m,n)$$

четное число раз. Так как при этом a стоит в начале цепочки и всего использован, как было замечено, четное число раз ($2N$ раз), то этот номер должен стоять и в конце цепочки: $n = a$. Итак, строка, содержащая 1, имеет тот же номер, что и столбец, содержащий N^2.

Рассмотрим любое, кроме 1 и N^2, число p из столбца, в котором стоит N^2. Следующее число, т. е. $p + 1$, стоит, как следует из доказанного, в строке, содержащей число 1. Итак, каждому числу из столбца, содержащего N^2, соответствует на единицу большее число из строки, содержащей 1. Исключение составляет лишь N^2. Кроме того, число 1 также не имеет себе пары в столбце. Следовательно, искомая разность равна

$$-1(N-1)+N^2-1=N^2-N.$$

XXII.I.10.5. Пусть, напротив, среди любых k чисел нашей последовательности наименьшее меньше или равно половине наибольшего. Рассмотрим числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$. По условию, a_1 — наибольшее среди них, a_k — наименьшее; согласно сделанному предположению,

$$a_k \leqslant \frac{1}{2} a_1.$$

Рассматривая числа $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{2k-1}$, точно так же получим

$$a_{2k-1} \leqslant \frac{1}{2} a_k \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2^2} a_1.$$

Продолжая далее этот процесс, обнаружим вообще, что

$$a_{n(k-1)+1} \leqslant \frac{1}{2^n} a_1.$$

Рассмотрим теперь сумму:

$$S_1 = a_1 + a_k + a_{2k-1} + \ldots + a_{n(k-1)+1} + \ldots.$$

Вследствие полученных выше неравенств, мы, используя формулу суммы геометрической прогрессии, получим

$$S_1 \leqslant a_1\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\ldots\right)=2a_1.$$

Отсюда следует, что

$$S_2 = a_2 + a_{k+1} + \ldots + a_{n(k-1)+2} + \ldots \leqslant 2a_1,$$
$$S_3 = a_3 + a_{k+2} + \ldots + a_{n(k-1)+3} + \ldots \leqslant 2a_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{k-1} = a_{k-1} + a_{2k-2} + \ldots + a_{n(k-1)+(k-1)} + \ldots \leqslant 2a_1,$$

так как каждому слагаемому в этих суммах соответствует не меньшее слагаемое в сумме S_1. Суммируя полученные неравенства, очевидно, будем иметь

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_{k-1} \leqslant 2\cdot(k-1)\cdot a_1 = 2\frac{k-1}{2k} < 1,$$

так как $a_1 = \frac{1}{2k}$. В то же время S должно быть равно 1, так как

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_{k+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = 1$$

по условию. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

XXII.II.7.1. Разобьем выражения

$$A = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

и

$$B = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1$$

на слагаемые следующим образом:

$$A = (a_1b_1 + a_nb_n) + (a_2b_2 + a_{n-1}b_{n-1}) + \ldots ,$$
$$B = (a_1b_n + a_nb_1) + (a_2b_{n-1} + a_{n-1}b_2) + \ldots .$$

Если n четно, то для каждого одночлена найдется «пара», если же n нечетно, то в обеих суммах содержится общее слагаемое

$$a_{\frac{n+1}{2}}\, b_{\frac{n+1}{2}}.$$

Составим разность

$$A - B = (a_1b_1 + a_nb_n - a_1b_n - a_nb_1) + (a_2b_2 + a_{n-1}b_{n-1} - a_2b_{n-1} - a_{n-1}b_2) + \ldots .$$

Поскольку при нечетном n член $a_{\frac{n+1}{2}}\, b_{\frac{n+1}{2}}$ уничтожится, то при всех n в выражение $A - B$ ничего, кроме скобок вида

$$C_k = (a_kb_k + a_{n-k+1}\, b_{n-k+1} - a_kb_{n-k+1} - a_{n-k+1}\, b_k),$$

не войдет; при этом $k \leqslant \frac{n}{2}$. Разложим каждую такую скобку на множители:

$$C_k = (a_k - a_{n-k+1}) \cdot (b_k - b_{n-k+1}).$$

Так как, по условию,

$$a_k > a_{n-k+1},\ b_k > b_{n-k+1},$$

то $C_k > 0$, т. е. все слагаемые положительны и, значит, разность $A - B$ положительна. А это и означает, что

$$A > B, \text{ т. е. } a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n > a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1.$$

XXII.II.7.3. Запишем число 999 999 999 в виде 1 000 000 000 — 1. Обозначим искомое число через A и пусть $\overline{A}$ — десятичная запись числа A. Очевидно, $999\,999\,999 \cdot A = 1\,000\,000\,000\,A - A = \overline{A000000000} - A$. Это число и должно состоять из одних единиц. Итак,

$$1\,000\,000\,000\,A - A = 111\ldots11,$$

откуда

$$A = 1000\,000\,000A - 111\ldots11$$

или

$$A = \overline{A000\,000\,000} - 11\ldots1. \qquad (*)$$

Так как последние цифры уменьшаемого известны, то мы можем производить вычитание («в столбик»), выясняя тем самым последние знаки самого числа A, стоящего в левой части равенства (*). Приписывая эти знаки слева к нулям в правой части, мы сможем продолжить вычитание, выясняя новые знаки, и так далее, пока это возможно (т. е. пока вновь полученные знаки числа A не станут равными 1).

Покажем, как происходит этот процесс на примере более короткого числа 99:

$$99A = 100A - A = 111\ldots11,$$

так что

$$A = 100A - 111\ldots11 = \overline{A00} - 111\ \ldots\ 1.$$

Вот последовательное вычисление знаков:

$$\begin{array}{r} -\ \ldots 00 \\ \ldots 111 \\ \hline 89 \end{array}; \quad \begin{array}{r} -\ \ldots 8900 \\ \ldots 11111 \\ \hline 7789 \end{array}; \quad \begin{array}{r} -\ \ldots 778900 \\ \ldots 111111 \\ \hline 667789 \end{array},$$

и так далее.

В нашем случае, как нетрудно убедиться, получится число

$$A_1 = \underbrace{11\ldots1}_{9\text{ цифр}}\ \underbrace{22\ldots2}_{9\text{ цифр}}\ \ldots\ \underbrace{77\ldots7}_{9\text{ цифр}}\ \underbrace{88\ldots8}_{8\text{ цифр}}\ 9.$$

Полученное число A_1, очевидно, *наименьшее*, обладающее требуемым свойством, так как каждый знак числа A_1 с необходимостью получался из последующих. Но это число — не единственное, так как наш процесс можно продолжить, дописав слева от A_1 девять нулей (111...11 — — 111...11 = 000...00) и возобновив вычитание.

Ясно, что любое число A_n с требуемым свойством имеет вид:

$$A_n = A_1\ \underbrace{000\ldots00}_{9\text{ цифр}}\ A_1\ \underbrace{000\ldots00}_{9\text{ цифр}}\ A_1\ \ldots 0\ A_1\ \underbrace{000\ldots00}_{9\text{ цифр}}\ A_1.$$

XXII.II.7.5. Покажем сначала, что n четно. В самом деле, среди n чисел $(x_1 x_2)$, $(x_2 x_3)$, ..., $(x_n x_1)$ должно быть столько же $+1$, сколько -1, так как они все равны ± 1, а их сумма равна нулю. Итак, среди этих n чисел k раз встречается $+1$ и k раз -1, т. е. $n = 2k$. Рассмотрим теперь все числа, равные -1. Если $x_m \cdot x_{m+1} = -1$, то числа x_m, x_{m+1} — разного знака. Обратно, если числа x_m, x_{m+1} разного знака, то $x_m \cdot x_{m+1} = -1$. Таким образом, k есть число перемен знака в последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1$. Но в конце последовательности стоит то же число, что и в начале. Значит, число перемен знака в ней должно быть четно: $k = 2l$. Отсюда $n = 2k = 4l$, что и требовалось доказать.

XXII.II.9.5. Занумеруем поля доски (кроме центрального) в порядке обхода их шахматным конем (рис. 40, а); белые кони стоят на полях 1 и 3, черные — на полях 5 и 7. Рассмотрим вспомогательную схему, изображенную на рис. 40, б.

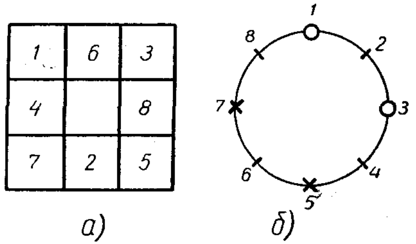


Рис. 40.

Положения коней обозначены символами:

○ — белый конь,

× — черный конь.

Ход коня изображается на схеме движением одного из символов на один шаг по или против часовой стрелки.

Заметим, что после всех перестановок каждый конь сделает четное число ходов (так как после одного хода меняется цвет поля, на котором стоит конь, а все поля 1, 3, 5, 7 — одного цвета).

Пусть какой-то конь сделал за все время перестановок только 2 хода; например, пусть белый конь 1 встал на поле 7, пройдя через поле 8.

Так как при этом белый конь 3 должен встать на поле 5, а черный конь 5 на одно из полей 1 или 3, то эти два коня должны на схеме «перескочить» один через другого или через коня, стоящего вначале на поле 1. Но такое «перескакивание» означает, что при каком-то ходе в одной клетке будут находиться сразу два коня, что противоречит правилам.

Итак, ни один конь не может сделать только 2 хода. Это значит (ввиду четности числа ходов каждого коня), что всего будет сделано не меньше, чем $4 \cdot 4 = 16$ ходов.

XXIII.1.7.1. Предположим сначала, что мы имеем денежную сумму в 10 рублей или больше. Покажем, что любая такая сумма может быть представлена как четным, так и нечетным количеством денежных билетов.

Именно, любая четная денежная сумма (в 10 рублей или более) представляется, с одной стороны, четным числом билетов достоинством в 1 рубль, а с другой — одним билетом в 10 рублей и еще четным числом билетов по одному рублю. Точно так же, любая нечетная денежная сумма (в 10 рублей или более) представляется, с одной стороны, нечетным числом билетов по одному рублю, а с другой — одним билетом в 10 рублей и еще нечетным числом билетов по одному рублю.

Рассмотрим теперь денежные суммы, меньшие 10 рублей. Для представления этих сумм в нашем распоряжении имеются лишь билеты достоинством в 1, 3, 5 рублей — все нечетные. Понятно, что нечетное число билетов, каждый из которых представляет нечетную сумму, могут составить лишь нечетную сумму; следовательно, никакую четную сумму, меньшую 10 рублей, нельзя представить нечетным числом билетов. Аналогично, четное число билетов, каждый из которых представляет нечетную сумму, могут составить лишь четную сумму; следовательно, никакую нечетную сумму, меньшую 10 рублей, нельзя представить четным числом билетов. Итак, четная сумма, меньшая 10 рублей, может быть представлена лишь четным числом билетов, а нечетная сумма (меньшая 10 рублей) требует для своего представления нечетного количества билетов.

Таким образом, все суммы, не меньшие 10 рублей, удовлетворяют поставленному условию; все остальные суммы не удовлетворяют.

XXIII.1.7.2. Пусть K — общая точка всех трех окружностей (рис. 41). Так как окружности по условию равны, то KA_1 есть перпендикуляр, проведенный через середину M_1 отрезка O_2O_3; далее KA_2 — перпендикуляр, проведенный через середину M_2 отрезка O_1O_3, и KA_3 — перпендикуляр, проведенный через середину M_3 отрезка O_1O_2. Точки M_1, M_2, M_3 являются также серединами отрезков KA_1, KA_2, KA_3. В треугольниках KA_2A_3 и $O_1O_2O_3$ отрезок M_2M_3 является средней линией и, следовательно,

$$O_2O_3 = 2M_2M_3 = A_2A_3.$$

Аналогично,

$$O_1O_3 = 2M_1M_3 = A_1A_3,$$
$$O_1O_2 = 2M_1M_2 = A_1A_2.$$

Отсюда и следует требуемое равенство треугольников:

$$\triangle A_1A_2A_3 = \triangle O_1O_2O_3.$$

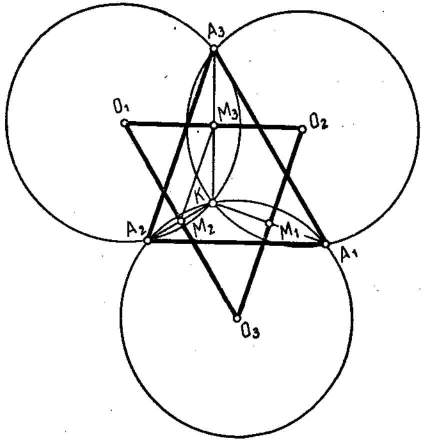


Рис. 41.

XXIII.I.7.4. Покажем прежде всего, что точки A_1, N и B_2 лежат на одной прямой. В самом деле,

$$\angle A_1NB_2 = \angle A_1NM + \angle B_2NM.$$

Но углы A_1NM и B_2NM — прямые, так как опираются на диаметры. Итак, $\angle A_1NB_2 = 180°$, т. е. точка N лежит на отрезке A_1B_2.

Рассмотрим теперь треугольник A_1MB_2. Поскольку углы A_1B_1M и B_2A_2M — прямые (они опираются на диаметры), а угол MNB_2, как показано выше,— тоже прямой, то прямые MN, A_1B_1 и A_2B_2 являются высотами в рассматриваемом треугольнике A_1MB_2. Следовательно, эти три прямые пересекаются в одной точке.

XXIII.I.8.1. Сумма цифр рассматриваемого числа равна 300, т. е. делится на 3. Следовательно, и само число должно делиться на 3 (по признаку делимости на 3). Пусть теперь $x = a^2$, где a — целое число. Тогда a также делится на 3 (иначе и число x не делилось бы на 3), и, значит, число x должно делиться на 9. Однако сумма цифр числа x (равная 300) на 9 не делится, а потому и x не делится на 9. Полученное противоречие показывает, что число x не может быть точным квадратом.

XXIII.I.8.2. Будем для краткости называть игроков, занявших последние три места, «плохими», а всех остальных — «хорошими».

Плохие игроки сыграли между собой, как нетрудно видеть, три партии, и в этих партиях было набрано в общей сложности три очка.

По условию, это — половина всех очков, набранных плохими игроками; значит, в играх с хорошими плохие игроки набрали еще 3 очка. Но всего между плохими и хорошими игроками было сыграно $(n-3)\cdot 3$ партий и разыграно столько же очков (n — общее число игроков). Из них 3 очка взяли плохие игроки, а остальные очки взяли хорошие. Следовательно, в партиях с плохими игроками хорошие игроки завоевали $(n-3)\cdot 3-3$ очка, и, значит, столько же очков хорошие игроки набрали (в общей сложности) в играх друг с другом.

Как легко видеть, между хорошими игроками было проведено $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ партий и разыграно столько же очков. Следовательно,

$$\frac{(n-3)\ (n-4)}{2}=(n-3)\cdot 3-3,$$

откуда получаем два решения: $n=4$, $n=9$.

Ясно, между тем, что вариант $n=4$ должен быть исключен, так как в этом случае единственный хороший игрок набрал все свои очки во встречах с тремя остальными участниками. Остается одно решение: $n=9$. Однако этим задача еще не решена, так как еще неясно, годится ли это значение n. Для того чтобы убедиться в этом, нужно показать, что возможно такое распределение очков в турнире между девятью участниками, при котором выполняются требования, указанные в условии задачи. Пример турнирной таблицы, показывающей, что такое распределение очков возможно, приведен ниже (см. рис. 42).

	0	0	1	1	1	1	1	1
1		0	0	1	1	1	1	1
1	1		0	0	1	1	1	1
0	1	1		0	0	0	1	1
0	0	1	1		0	1	0	1
0	0	0	1	1		1	1	0
0	0	0	1	0	0		½	½
0	0	0	0	1	0	½		½
0	0	0	0	0	1	½	½	

Рис. 42.

XXIII.I.8.3. Проведем диагональ AC и прямую, проходящую через точку B и параллельную этой диагонали. Обозначим через P точку пересечения этой прямой с продолжением стороны DC (рис. 43, а). Треугольники APC и ABC имеют общее основание AC и, очевидно, равные высоты. Следовательно, их площади равны.

Предположим сначала, что середина R отрезка DP лежит на отрезке DC. Проведем медиану AR к стороне DP в треугольнике ADP. Так как высота у треугольников ADP и ADR общая и основание одного составляет половину основания другого, то

$$S_{\triangle ADR} = \frac{1}{2} S_{\triangle ADP}.$$

Так как при этом

$$S_{\triangle ADP} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle APC} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ABC} = S_{ABCD},$$

то прямая AR — искомая.

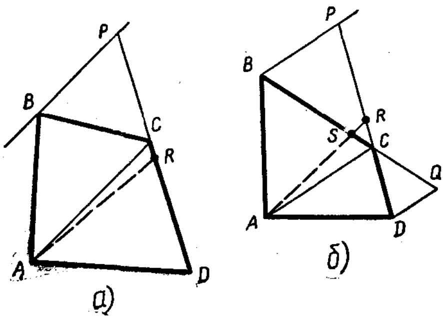


Рис. 43.

Пусть теперь точка R окажется вне отрезка DC, т. е. $PC > CD$. В таком случае проведем еще прямую, параллельную диагонали AC, и проходящую через точку D (рис. 43, б). Если Q — точка пересечения этой прямой с продолжением стороны BC, то середина S отрезка BQ заведомо лежит на отрезке BC.

Действительно, из подобия треугольников BCP и DCQ вытекает, что $BC : CQ = PC : CD$, а так как $PC > CD$, то $PC : CD > 1$ и, значит, $BC : CQ > 1$. Иначе говоря, $BC > CQ$, и потому середина S отрезка BQ лежит на отрезке BC.

Из этого, как и раньше, легко следует, что в рассматриваемом случае прямая AS — искомая.

XXIII.1.8.4. Проведем прямые OA и OB и заштрихуем угол AOB (т. е. тот угол, в котором расположен отрезок AB) и вертикальный с ним угол (рис. 44, а). Ясно, что точка C (или D) будет отмечена, если она не лежит в заштрихованных углах, и не будет отмечена, если она лежит в одном из заштрихованных углов.

Могут представиться следующие возможности:

1) Отрезок CD не пересекает ни одной из прямых OA, OB. В этом случае обе точки A, B являются отмеченными. Точки же C и D лежат обе в одном и том же из четырех углов, определяемых прямыми OA и OB, т. е. либо обе являются отмеченными (рис. 44, б), либо обе не являются отмеченными (рис. 44, в). Итак, в рассматриваемом случае отмечены либо 2, либо 4 точки.

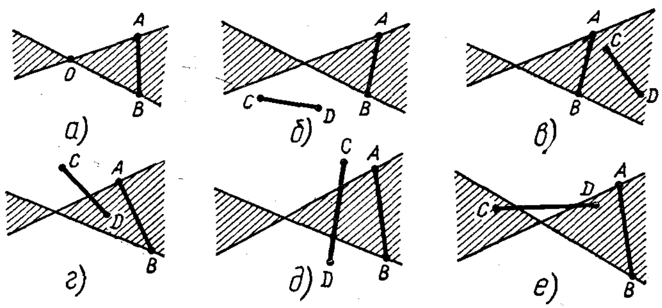


Рис. 44.

2) Отрезок CD пересекает только одну из прямых OA, OB, т. е. только одна из точек A, B является отмеченной. Точки же C и D лежат в двух смежных углах, определяемых прямыми OA, OB (рис. 44, г), т. е. одна лежит в заштрихованном углу, а другая — в незаштрихованном; следовательно, только одна из точек C, D является отмеченной. Итак, в рассматриваемом случае отмечены 2 точки.

3) Отрезок CD пересекает обе прямые OA, OB, т. е. ни одна из точек A, B не является отмеченной. Точки C и D лежат в этом случае в двух вертикальных углах, т. е. либо обе отмечены (рис. 44, д), либо ни одна из них не отмечена (рис. 44, е). Итак, в рассматриваемом случае либо 2 точки отмечены, либо ни одна не отмечена.

Сопоставляя все возможности, мы видим, что могут быть отмеченными 0, 2 или 4 точки.

XXIII.I.8.5. Мы должны показать, что существует бесконечно много чисел m, не представимых в виде $m=p+n^{2k}$. Мы покажем даже, что среди чисел, являющихся точными квадратами, бесконечно много чисел обладают требуемым свойством. В самом деле, если мы возьмем $m = a^2$, то для p получим выражение:

$$p = a^2 - n^{2k} = (a - n^k)\ (a + n^k).$$

Чтобы p было простым, необходимо теперь, чтобы один из сомножителей был равен 1. Так как $a + n^k$, очевидно, больше чем $a - n^k$, то должно выполняться именно соотношение:

$$a - n^k = 1.$$

В таком случае $n^k = a - 1$, и потому $p = 1 \cdot (a + n^k) = a + (a - 1) = 2a - 1$. Остается лишь заметить, что нечетных чисел $2a - 1$, не являющихся простыми, бесконечно много (таковы, например, все числа вида $3b$, где b нечетно). Таким образом, можно подобрать бесконечно много чисел $m = a^2$, для которых число p в соотношении $m = p + n^{2k}$ не может быть простым.

XXIII.I.9.3. Пусть l — некоторая прямая, проходящая через точку O; A и B — точки ее пересечения с границей многоугольника. Нам надо доказать, что $OA = OB$ (для любой прямой l, проходящей через точку O). Допустим, напротив, что отрезки OA и OB не равны; пусть например, $OA > OB$.

Возьмем прямую l', проходящую через O и пересекающую границу многоугольника в точках C и D, настолько близко расположенных от точек A и B (соответственно), чтобы было $OC > OD$ и, кроме того, чтобы на участках границы от A до C и от B до D не было вершин многоугольника (в силу выпуклости многоугольника это всегда можно сделать). Прямая l разбивает площадь многоугольника на части S_1 и S_2, прямая l' — на части S_1' и S_2', причем, по условию

$$S_1 = S_2, \quad S_1' = S_2'.$$

Вычитая одно равенство из другого, получим

$$S_{\triangle BOD} = S_{\triangle AOC}.$$

Однако из равенств

$$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} AO \cdot OC \cdot \sin \angle AOC,$$

$$S_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} BO \cdot OD \cdot \sin \angle BOD$$

в силу соотношений

$$OA > OB, \ OC > OD, \ \angle AOC = \angle BOD$$

вытекает, что $S_{\triangle AOC} > S_{\triangle BOD}$. Полученное противоречие показывает, что для любой прямой l, проходящей через точку O, имеет место равенство $OA = OB$. Это и означает, что O есть центр симметрии многоугольника.

XXIII.I.9.4. Обозначим точку, заданную внутри окружности, через A. Пусть сначала четвертая вершина D является в прямоугольнике вершиной, противолежащей вершине A (рис. 45, а). В этом случае по теореме Пифагора $OD^2 = OF^2 + FD^2$, так как $OF \perp CD$, $OH \perp BD$. Учитывая равенства

$$OF = HD, \ BH = AN, \ FC = ON,$$

получаем отсюда

$$OD^2 = OF^2 + OH^2 = OF^2 + FC^2 - FC^2 + OH^2 + BH^2 - BH^2 = (OF^2 + FC^2) + (OH^2 + HB^2) - (FC^2 + BH^2) = R^2 + R^2 - (ON^2 + AN^2) = 2R^2 - OA^2.$$

Таким образом,

$$OD^2 = 2R^2 - OA^2,$$

т. е. длина отрезка OD не зависит от положения прямоугольника. Это значит, что точка D лежит на окружности радиуса $\sqrt{2R^2 - OA^2}$, концентричной с данной. Заметим, что $\sqrt{2R^2 - AO^2} > R$, т. е. эта окружность лежит вне данной окружности.

Если теперь точка D является в прямоугольнике вершиной, смежной с A, то, как легко видеть, $OD = OA$ (в силу симметрии рисунка 45, б относительно прямой, проходящей через центр и перпендикулярной AD); следовательно, точка D лежит на окружности радиуса OA, также концентричной с данной. При этом, разумеется, точка D должна быть отличной от точки A.

Покажем теперь, что любая точка каждой их этих двух окружностей, за исключением точки A, принадлежит множеству четвертых вершин прямоугольников. Пусть X — любая точка внутренней окружности, отличная от A (рис. 45,*б*). Соединив X и A, проведем перпендикуляры AB' и XC' к отрезку AX до пересечения с данной окружностью в точках B' и C'. Покажем, что $AB'C'X$ — прямоугольник. Сумма углов при вершинах B' и C' четырехугольника $AB'C'X$ равна, очевидно, 180°. С другой стороны, эти углы равны в силу симметрии четырехугольника относительно перпендикуляра, проведенного из центра O к отрезку AX. Тем самым доказано, что $AB'C'X$ — прямоугольник, и, значит, точка X принадлежит рассматриваемому множеству.

Рассмотрим теперь произвольную точку Y внешней окружности. Соединим точки Y и A и на отрезке AY, как на диаметре, построим окружность. Пусть B — одна из точек ее пересечения с данной окружностью. По точкам A и B уже можно построить прямоугольник, третья вершина C которого, противолежащая вершине B, лежит на данной окружности. Таких прямоугольников будет два (рис. 45, в), причем четвертые их вершины, по доказанному, должны лежать на внешней окружности. С другой стороны, эти четвертые вершины обоих прямо-

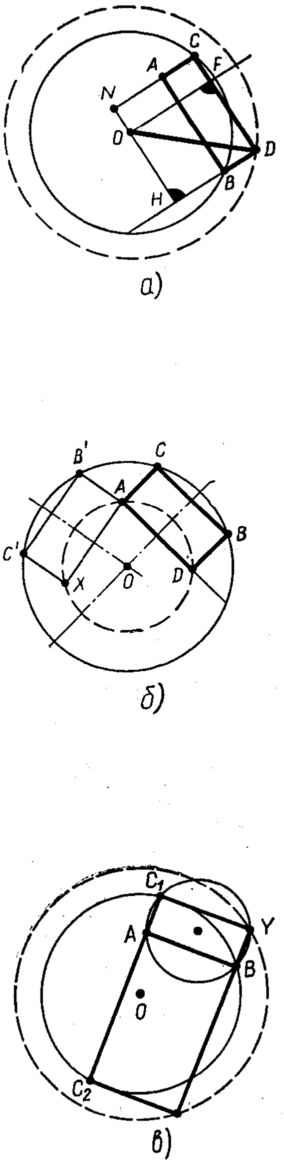


Рис. 45.

угольников должны лежать на прямой YB, так как $YB \perp AB$ по построению (угол YBA опирается на диаметр). Но у прямой BY с внешней окружностью есть как раз две точки пересечения, значит, именно они и являются четвертыми вершинами прямоугольников. Так как одна из точек пересечения прямой BY с внешней окружностью, очевидно, совпадает с Y, то точка Y принадлежит рассматриваемому множеству.

XXII.1.10.5. Расположим числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ в порядке убывания их абсолютных величин:

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k;\ |\beta_1| \geqslant |\beta_2| \geqslant \ldots \geqslant |\beta_k|,$$

и соотношение

$$\beta_1^n + \beta_2^n + \ldots + \beta_k^n = 0$$

разделим на β_1^n:

$$1 + \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^n + \ldots + \left(\frac{\beta_k}{\beta_1}\right)^n = 0. \tag{1}$$

Обозначим через β_{l+1} первое число, абсолютная величина которого отлична от абсолютной величины числа β_1:

$$|\beta_1| = |\beta_2| = \ldots = |\beta_l| > |\beta_{l+1}| \geqslant \ldots \geqslant |\beta_k|.$$

Соотношение (1) перепишется тогда таким образом:

$$1 \pm 1 \pm 1 \pm \ldots \pm 1 + \left(\frac{\beta_{l+1}}{\beta_1}\right)^n + \ldots + \left(\frac{\beta_k}{\beta_1}\right)^n = 0. \tag{2}$$

Выберем теперь n столь большим, чтобы $\left(\frac{\beta_{l+1}}{\beta_1}\right)^n$ было меньше, чем $\frac{1}{2(k-l)}$; это всегда можно сделать, так как последовательность

$$\frac{\beta_{l+1}}{\beta_1},\ \left(\frac{\beta_{l+1}}{\beta_1}\right)^2, \ \ldots,\ \left(\frac{\beta_{l+1}}{\beta_1}\right)^n, \ \ldots$$

представляет собой убывающую геометрическую прогрессию (заметим, что $\frac{|\beta_{l+1}|}{|\beta_1|} < 1$). При таком выборе n абсолютная величина суммы

$$S = \left(\frac{\beta_{l+1}}{\beta_1}\right)^n + \ldots + \left(\frac{\beta_k}{\beta_1}\right)^n$$

будет, очевидно, меньше $\frac{1}{2}$. Ясно теперь, что количество $+1$ и -1 в равенстве (2) должно быть одинаковым, так как сумма S, меньшая $\frac{1}{2}$ по абсолютной величине, не сможет компенсировать избытка, представляющего собой (положительное или отрицательное) ц е л о е число. Итак, числа, равные по абсолютной величине числу β_1, разбиваются на пары в соответствии с утверждением задачи. Исключив эти числа из рассмотрения (что возможно, так как их сумма равна 0), мы проведем точно те же рассуждения для оставшихся чисел и так далее, пока не исчерпаем всех чисел.

XXIII.II.7.1. При решении задачи могут представиться три возможности.

1. Точки A, B, C, D образуют выпуклый четырехугольник. В этом случае для любой точки M имеем неравенства:

$$MA + MC \geqslant AC,$$

$$MB + MD \geqslant BD,$$

складывая которые, мы убедимся в том, что искомой точкой является точка пересечения диагоналей AC и BD. (Для этой точки сумма расстояний до вершин как раз равна $AC + BD$; для всех остальных точек эта сумма, как мы видим, больше.)

2. Точки A, B, C, D не образуют выпуклого четырехугольника, но не лежат на одной прямой. В этом случае одна из точек — пусть это будет D — лежит внутри или на стороне треугольника, образованного тремя остальными точками.

Пусть точка M лежит внутри или на стороне треугольника BDC (если бы точка M лежала внутри или на стороне треугольника ABD или ACD, рассуждение было бы аналогичным). Проведем прямую AM и рассмотрим ту из вершин B, C, которая лежит по ту же сторону от прямой AM, что и точка D; пусть это будет вершина C (рис. 46, а). Тогда

$$AM + CM \geqslant AD + CD,$$

$$DM + BM \geqslant BD.$$

Складывая эти неравенства, мы обнаружим, что

$$AM + BM + CM + DM \geqslant AD + BD + CD,$$

т. е. для точки D исследуемая сумма минимальна.

Если точка D лежит по ту же сторону от прямой AM, что и вершина B (рис. 46, б), то написанные неравенства заменяются следующими:

$$AM + BM \geqslant AD + BD, \quad DM + CM \geqslant CD,$$

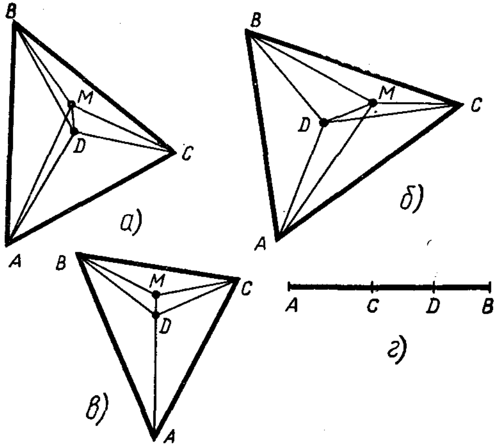


Рис. 46.

откуда, складывая, получаем то же соотношение. Если точка D лежит на прямой AM (рис. 46, в), то применимы любые из написанных неравенств. Итак, во втором случае искомая точка — точка D.

3. Точки A, B, C и D лежат на одной прямой. Пусть, например, точки C и D лежат между A и B (рис. 46, г); тогда искомой точкой будет любая точка M отрезка CD (для любой такой точки M сумма $AM + BM + CM + DM$ равна $AB + CD$; для точки M, не лежащей на отрезке CD, эта сумма, как легко видеть, больше).

XXIII.II.7.2. Пусть $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. Покажем прежде всего, что можно построить треугольник со сторонами $a - d$, b, c. Для этого необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$a - d < b + c, \tag{1}$$

$$b < a - d + c, \tag{2}$$

$$c < a - d + b. \tag{3}$$

Неравенство (1) равносильно неравенству

$$a < b + c + d,$$

которое выполнено, так как a, b, c, d — стороны четырехугольника (в многоугольнике каждая сторона меньше суммы всех остальных). Так как $b \leqslant a$, $c - d \geqslant 0$ (в силу наших предположений о числах a, b, c, d), то выполнено и неравенство (2). Аналогично, неравенство (3) следует из того, что $c \leqslant a$, $b - d \geqslant 0$. Построив теперь треугольник со сторонами $a - d$, b, c, мы легко достроим его до трапеции со сторонами a, b, c, d (см. рис. 47): нужно продолжить сторону $a - d$ на отрезок d (в любую сторону, например за конец стороны c) и на отрезках c, d построить параллелограмм.

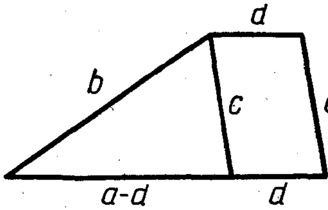


Рис. 47.

XXIII.II.7.3. Будем обходить границу пятиугольника $ABCDE$ так, чтобы его внутренность оставалась все время слева. При обходе мы делаем повороты направо или налево. Если мы делаем поворот направо, то внутренний угол в такой вершине больше 180°, а если — поворот налево, то внутренний угол меньше 180° (рис. 48, а, и 48, б). Так как сумма углов пятиугольника равна 540°, то правых поворотов может быть не больше двух: если бы их было три, то сумма углов пятиугольника была бы больше 540°. Зна-

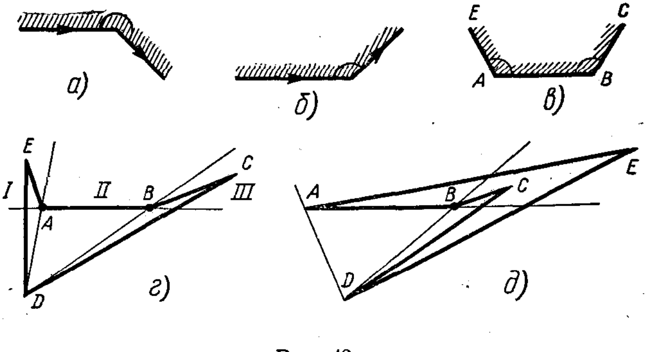


Рис. 48.

чит, левых поворотов будет не меньше трех, и поэтому хотя бы два из них обязательно идут подряд. Пусть такие левые повороты произошли в двух вершинах A и B. Тогда стороны AE и BC лежат по одну сторону от прямой AB (рис. 48, в).

Если точка D лежит в той же полуплоскости (относительно прямой AB), что отрезки AE и BC, то, очевидно, сторона AB — искомая. Пусть точка D лежит по другую сторону от прямой AB. Тогда прямые AD и BD разбивают верхнюю полуплоскость на три части (см. рис. 48, г). Вершины C и E могут, очевидно, лежать только в 1-й и 3-й частях, так как иначе пятиугольник был бы самопересекающимся. Если точки C и E лежат в разных частях, то нас удовлетворит любая из сторон: CD или DE. Если же точки C и E лежат в одной части, то обе стороны, CD и DE, пересекают прямую AB по одну сторону от отрезка AB и нас удовлетворит та сторона, точка пересечения которой с прямой AB отстоит дальше от ближайшего конца отрезка (сторона DE на рис. 48, д).

XXIII.II.8.1. Выберем из всех отрезков, соединяющих (попарно) все точки, наибольший (или один из наибольших) и обозначим его через AB. Очевидно, что во всех треугольниках, содержащих точки A и B как вершины, отрезок AB (как наибольший) должен лежать против прямого угла. Таким образом, все рассматриваемые точки лежат на окружности с диаметром AB.

Пусть C — одна из точек. Выясним, где может лежать еще одна точка D, если она существует.

В треугольнике ACD угол ACD не прямой, так как иначе точка D совпадала бы с точкой B. Далее, $\angle ADC \neq$ $\neq 90°$, так как он опирается на хорду AC, не являющуюся диаметром. Следовательно, в треугольнике ACD прямым должен быть угол DAC; отсюда следует, что CD — диаметр.

Итак, если кроме A, B, C есть еще точки, то любая из них должна совпадать с концом диаметра, проходящего через точку C, откуда ясно, что наибольшее возможное значение n равно 4 (четыре точки расположены в вершинах прямоугольника).

XXIII.II.8.4. Пусть a_1 — первый наблюдатель. Рассмотрим всех наблюдателей, которые начали следить за улиткой либо в тот момент, когда кончил a_1, либо еще раньше (по условию, такие наблюдатели есть).

Пусть a_2 — последний из таких наблюдателей. Рассмотрим далее всех наблюдателей, начавших следить за улиткой, не позже, чем кончил a_2, и обозначим через a_3 последнего из них. Аналогично выберем наблюдателя a_4 и т. д. Очевидно, что в конце концов мы дойдем до наблюдателя, окончившего наблюдать как раз в конце шестой минуты (если наблюдатель a_k кончил наблюдать раньше, то имеются наблюдатели, начавшие следить позже, чем a_k, а потому можно выбрать наблюдателя a_{k+1}). Пусть a_1, a_2, ..., a_k — все выбранные таким образом наблюдатели. Ясно, что промежутки наблюдения a_1, a_3, a_5, ... не пересекаются; точно так же не пересекаются промежутки, в которые следили наблюдатели a_2, a_4, a_6, ... Действительно, если бы, например, нашелся момент времени, когда наблюдали a_1 и a_3, то это означало бы, что наблюдатель a_2 выбран неправильно, так как a_3 начал наблюдать позже, чем a_2, но еще до того, как кончил a_1. Так как промежутки наблюдения a_1, a_3, ... (каждый длиной в 1 минуту) не пересекаются, то наблюдателей a_1, a_3, a_5, ... не больше 5, ибо весь интервал наблюдения составляет 6 минут. Точно так же наблюдателей a_2, a_4, ... не более 5, т. е. всего наблюдателей a_1, a_2, ..., a_k имеется не более десяти: $k \leqslant 10$.

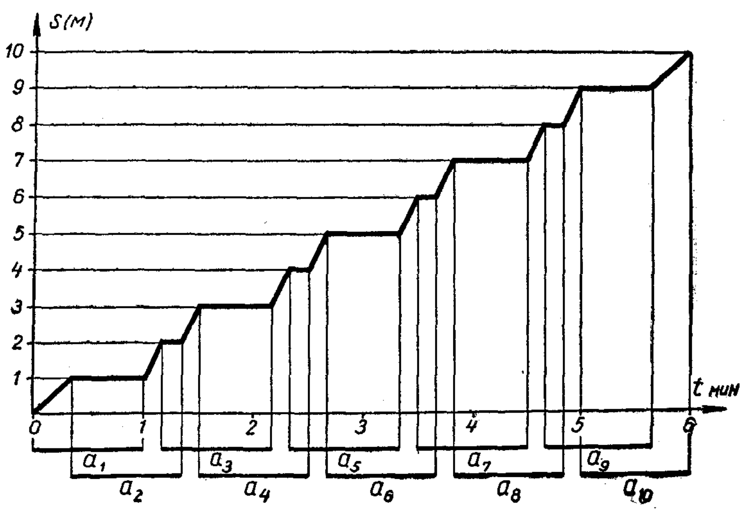


Рис. 49.

Теперь у нас за улиткой все время наблюдает кто-нибудь из людей a_1, a_2, ..., a_k; всего таких наблюдателей не более 10, и каждый видит, как улитка проползла 1 *м*. Значит, больше 10 *м* улитке не проползти. Ниже (рис. 49) приведен пример движения улитки, когда она проползает ровно 10 *м* ($k = 10$).

Улитка ползет только тогда, когда на нее смотрит ровно один наблюдатель, и за это время проползает 1 *м*; остальное время улитка не движется.

XXIII.II.9.3. Мы представляем себе доску $n \times 4$, имеющей 4 вертикали и n горизонталей (рис. 50). «Крайними» мы будем называть клетки, расположенные на первой и четвертой вертикалях; остальные клетки назовем «средними».

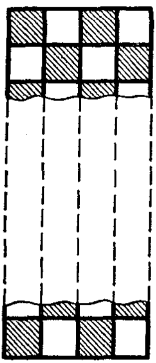


Рис. 50.

Заметим, что с любой из крайних вертикалей конь за один ход может попасть только на среднюю клетку.

Значит, если бы конь мог требуемым способом обойти доску, то клетки, находящиеся на крайних вертикалях, были бы расположены в последовательности ходов коня не подряд (именно, н и к а к и е две такие клетки не идут подряд).

С другой стороны, крайних клеток столько же, сколько средних, а конь, по условию, обходит все клетки по одному разу и возвращается на исходную клетку. Ясно поэтому, что крайние клетки расположены не реже, чем через одну, в требуемой последовательности ходов коня. (Если бы где-нибудь встретились подряд две средние клетки, то в качестве «компенсации» должны были бы найтись и две крайние, идущие подряд; последнее, однако, невозможно.)

Мы видим, что крайние клетки должны быть расположены в требуемой последовательности ходов строго через одну.

Но в этом случае они все были бы одного цвета, а это противоречит устройству шахматной доски.

XXIII.II.9.4. По смыслу термина «описанный», каждая сторона прямоугольника должна проходить через какую-нибудь вершину треугольника. Так как при этом вершин у треугольника на одну меньше, чем сторон у прямоугольника, то хотя бы одна вершина прямоугольника должна совпадать с одной из вершин треугольника. Мы будем называть такую вершину «главной». Пусть A — главная вершина треугольника, Q — совпадающая с ней вершина прямоугольника, N — вершина прямоугольника, противоположная Q. Так как $\angle CNB = 90°$, то, очевидно, точка N лежит на полуокружности, построенной на стороне BC, как на диаметре (полуокружность лежит вне треугольника ABC). Пусть теперь R и S — середины сторон AC и AB, O — точка пересечения средней линии RS с медианой AL стороны BC; X — произвольная точка построенной полуокружности, Y — середина отрезка AX. В треугольнике ALX

$$OY = \frac{LX}{2} = \frac{BC}{4},$$

так как OY — средняя линия.

Стало быть, точка Y лежит на полуокружности радиуса

$$\frac{BC}{4} = \frac{RS}{2},$$

построенной на RS, как на диаметре (рис. 51, а). Заметим теперь, что центр прямоугольника есть точка пересечения его диагоналей и, значит, середина любой диагонали. Пока вершина A треугольника остается главной, центр прямоугольника описывает, как мы показали, какую-то часть дуги полуокружности, построенной на RS, как на диаметре. Выясним, какую именно часть полуокружности описывает центр прямоугольника. Если A — главная вершина, то сторона PN прямоугольника образует со стороной AC треугольника тупой угол: $\angle NCA \geqslant 90°$ (см. рис. 51, б). Этот угол становится прямым как раз тогда, когда роль главной вершины переходит к точке C. Точно так же угол NBA не мень-

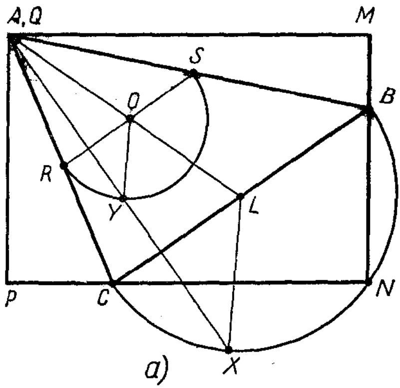


Рис. 51, а.

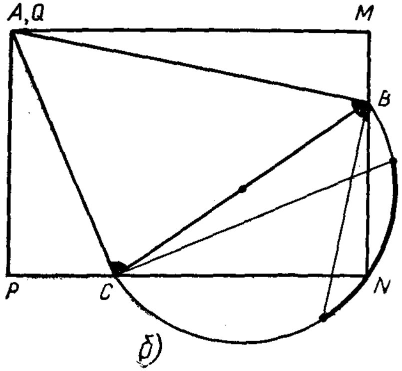


Рис. 51, б.

ше 90°. Построим перпендикуляры к сторонам AC и AB в точках C и B (соответственно); они высекают на дуге полуокружности как раз ту ее часть, которая заметается вершиной N прямоугольника (пока точка A остается главной, см. рис. 51, б). Если теперь построить на средних линиях треугольника ABC дуги полуокружностей вдвое меньшего радиуса и выделить на них соответствующие части, то образуется криволинейный треугольник, который и является искомым множеством (см. рис. 51, в).

XXIII.II.10.2. Представим исходное число A в виде

$$A = 10a + b.$$

После перестановки последней цифры b в начало мы получим, очевидно, число

$$B = 10^{6n-1} \cdot b + a.$$

Рассмотрим число

$$3B - A = 3b \cdot 10^{6n-1} + 3a - 10a - b = -7a + b(3 \cdot 10^{6n-1} - 1).$$

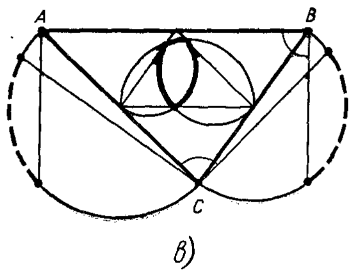


Рис. 51, в.

Из двух слагаемых в правой части равенства одно делится на 7. Покажем, что и другое делится на 7. В самом деле,

$$3 \cdot 10^{6n-1} - 1 = \underbrace{300\ldots0}_{6n-1 \text{ цифра}} - 1 = 299999\,\underbrace{99\ldots9}_{6(n-1) \text{ цифра}}.$$

Легко проверить, что 299 999 и 999 999 делятся на 7, и потому число $3 \cdot 10^{6n-1} - 1$, а значит, $3B - A$, делится на 7. Поскольку $3B - A$ делится на 7 и A делится на 7 (по условию), число $3B$ тоже должно делиться на 7. Отсюда следует, что B кратно 7, что и требовалось доказать.

XXIII.II.10.3. Пусть кто-то из собравшихся — назовем его X — имеет m — знакомых: a_1, a_2, ..., a_m. По условию, никакие два человека из a_1, a_2, ..., a_m (знакомых с X) друг с другом незнакомы. Значит, для каждых двух человек (a_i, a_j) должен найтись еще один общий знакомый, кроме X. Этот человек должен быть, очевидно, не знаком с X; при этом разным парам (a_i, a_j) должны соответствовать разные люди (если бы один и тот же человек был общим знакомым одновременно для двух или более пар из числа a_1, a_2, ..., a_m, то он, очевидно, имел бы с X более двух общих знакомых).

Мы видим, что число всех людей, не знакомых с X, не меньше, чем число пар людей из числа a_1, a_2, ..., a_m, т. е. не меньше

$$C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}.$$

С другой стороны, каждый человек, не знакомый с X, имеет с ним ровно двух общих знакомых — разумеется, из числа a_1, a_2, ..., a_m. При этом разным людям соответствуют разные пары (если бы одна пара (a_i, a_j) соответствовала двум или более людям, то a_i и a_j имели бы, очевидно, больше двух общих знакомых, учитывая X).

Таким образом, число людей, не знакомых с X, не больше, чем C_m^2. Следовательно, $n = 1 + m + \frac{m(m-1)}{2}$ (1 — это сам X, m — число его знакомых и $\frac{m(m-1)}{2}$ — число людей, с ним не знакомых).

Рассматривая это выражение как квадратное уравнение относительно m, мы видим, что оно имеет только один положительный корень, а это и означает, что для всех X число m знакомых этого человека постоянно.

Замечание. Из уравнения видно также, что вовсе не при всех n число m может быть целым, а только при $n = 1, 2, 4, 7, 11, \ldots$ (m соответственно равно $0, 1, 2, 3, \ldots$).

XXIV.I.7.1. Запишем числа от 1 до $2n$ в две строки следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n, \\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & \ldots & n+2 & n+1. \end{array}$$

Суммы чисел в каждом столбце, как видно, равны. Так как

n четно, мы можем разбить строки на пары и в первую пару строк записать числа от 1 до $2n$ так, как было указано; во вторую пару — числа от $2n+1$ до $4n$ аналогичным способом:

$$\begin{array}{lll} 2n+1 & 2n+2 \ldots & 3n, \\ 4n & 4n-1 \ldots & 3n+1, \end{array}$$

и т. д.

В каждой паре строк суммы чисел в столбцах одинаковы, поэтому построенная таблица удовлетворяет требуемым условиям.

XXIV.1.8.2. Покажем, что задуманный набор можно определить, задав всего один вопрос. Именно, достаточно взять

$$a_1 = 100,\ a_2 = 100^2,\ \ldots,\ a_n = 100^n.$$

Тогда сообщенная нам сумма равна

$$S_1 = 100x_1 + 100^2x_2 + \ldots + 100^n x_n.$$

Рассмотрим теперь соотношение

$$\frac{S_1}{100^n} = \frac{100x_1 + 100^2x_2 + \ldots + 100^{n-1}x_{n-1}}{100^n} + x_n$$

и покажем, что

$$\left|\frac{100x_1 + 100^2x_2 + \ldots + 100^{n-1}x_{n-1}}{100^n}\right| < \frac{1}{10}.$$

Действительно,

$$|100x_1 + 100^2x_2 + \ldots + 100^{n-1}x_{n-1}| \leqslant 100 \cdot |x_1| + 100^2 \cdot |x_2| + \ldots + 100^{n-1} \cdot |x_{n-1}| \leqslant 9 \cdot (100 + 100^2 + \ldots + 100^{n-1}),$$

так как $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ — однозначные числа. Число $9(100 + 100^2 + \ldots + 100^{n-1})$, как легко понять, имеет $2n-1$ десятичных знаков и состоит из нулей и девяток, т. е. оно меньше, чем $\underbrace{99\ldots999}_{2n-1 \text{ цифра}}$, и подавно меньше, чем 10^{2n-1}.

Таким образом, интересующее нас отношение меньше, чем

$$\frac{10^{2n-1}}{100^n} = \frac{10^{2n} \cdot \frac{1}{10}}{10^{2n}} = \frac{1}{10}.$$

Мы показали, что отношение $\frac{S_1}{100^n}$ отличается от целого числа x_n меньше, чем на $\frac{1}{10}$; это, очевидно, позволяет однозначно определить x_n. Зная x_n, мы можем найти сумму

$$S_2 = S_1 - 100^n x_n = 100x_1 + 100^2 x_2 + \dots + 100^{n-1} x_{n-1}$$

и по ней найти x_{n-1} (разделив на 100^{n-1}), и т. д.

З а м е ч а н и е. Если все числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ положительны, то S_1 представляет собой число, у которого на нечетных местах стоят цифры x_i, а на четных местах — нули, так что решение задачи в этом случае особенно просто.

XXIV.1.9.4. Так как проезд в автобусе стоит 5 копеек, а ни у кого из пассажиров, по условию, нет монет мельче 10 копеек, то после оплаты проезда каждый пассажир должен получить сдачу, т.е. после оплаты проезда у каждого на руках должна остаться хотя бы одна монета. Таким образом, после оплаты на руках у пассажиров должно остаться не меньше, чем $4k$ монет. Вместе с тем стоимость проезда $4k$ пассажиров составляет $20k$ копеек, и для ее оплаты д а ж е 20-к о п е е ч н ы м и м о н е т а м и (самыми крупными из имеющихся) потребовалось бы не меньше, чем k монет. Значит, в кассу автобуса будет опущено не меньше k монет, и общее необходимое количество монет равно $5k$.

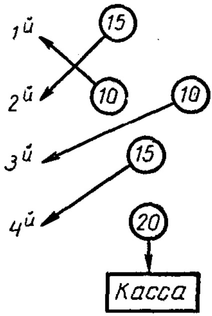


Рис. 52.

Нам осталось построить пример правильной оплаты проезда при наличии у пассажиров ровно $5k$ монет. Разобьем пассажиров на k групп по 4 человека и пусть в каждой группе деньги распределены следующим образом:

1-й пассажир:	15 коп.;
2-й пассажир:	10 + 10 коп.;
3-й пассажир:	15 коп.;
4-й пассажир:	20 коп.

(5 монет на каждую группу из 4 человек; всего, значит, $5k$ монет). Расчет в группе происходит следующим образом (рис. 52):

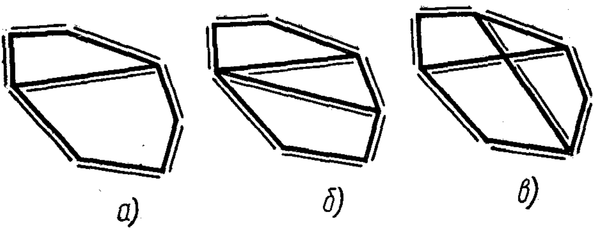
1-й	получает	10 коп.	взамен	15 коп.;
2-й	»	15 коп.	»	20 коп.;
3-й	»	10 коп.	»	15 коп.;
4-й	»	15 коп.	»	20 коп.

В кассу опущено 20 коп. за четырех пассажиров.

XXIV.II.7.1. Нам дан многоугольник, в котором проведены какие-то диагонали. Сотрем их и будем проводить снова, но уже по одной, по очереди.

Первая диагональ разделила многоугольник на два; каждый из них покрашен снаружи всюду, кроме диагонали. Но так как диагональ покрашена с одной стороны, ясно, что один из двух многоугольников целиком покрашен снаружи (рис. 53, а).

Проведем вторую диагональ. Если она проходит так, что не пересекает выбранного нами многоугольника, то ничего не меняется — выбранный многоугольник остается окрашенным снаружи (рис. 53, б), если же диагональ пересекает многоугольник, то она снова разбивает его на две части, одна из которых, как и раньше, окрашена снаружи (рис. 53, в).



а) б) в)

Рис. 53.

И каждый раз, проводя новую диагональ, мы либо просто сохраняем уже имеющийся многоугольник (окрашенный снаружи), либо получаем новый — и так пока не проведем все диагонали.

XXIV.II.7.2. Рассмотрим треугольники APS и BQP (рис. 54, а). Так как $AP \perp BQ$ и $PS \perp PQ$, то $\angle APS = \angle BQP$ и $ASP = \angle BPQ$. Аналогично, $\angle BQP = \angle CRQ = \angle DSR$ и $\angle BPQ = \angle CQR = \angle DRS$. Поскольку в прямоугольнике противоположные стороны равны, то справедливы соотношения: $PQ = RS$ и $QR = PS$, откуда вытекают равенства: $\triangle BPQ = \triangle DRS$ и $\triangle APS = \triangle CQR$. Следовательно, $AP = CR = x$, $BP = DR = 1 - x$; $AS =$

$= CQ = y$, $DS = BQ = 1 - y$ (мы считаем здесь сторону квадрата равной 1). Выписанные соотношения верны, таким образом, для любого прямоугольника $PQRS$, вписанного в квадрат $ABCD$.

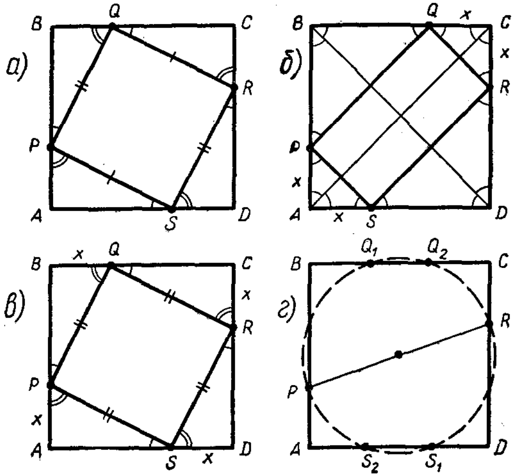


Рис. 54.

Пусть теперь P и R — любые такие точки на сторонах AB и CD соответственно, что $AP = CR = x$, $BP = DR = 1 - x$. Если мы выберем точки Q и S на сторонах BC и AD таким образом, чтобы выполнялись соотношения:

$$CQ = AS = x, \quad BQ = DS = 1 - x, \tag{1}$$

или

$$BQ = DS = x, \quad CQ = AS = 1 - x, \tag{2}$$

то в том и другом случае фигура $PQRS$ будет представлять собой прямоугольник (проверьте!). В первом случае его стороны будут параллельны диагоналям квадрата, во втором случае он сам будет квадратом (см. рис. 54, б и 54, в соответственно). Заметим теперь, что у любого другого прямоугольника, вписанного в квадрат $ABCD$, вершины которого P и R лежат на сторонах AB и CD (соответственно), две другие вершины должны лежать на окружности, построенной на отрезке PR, как на диаметре,— каждая на своей полуокружности. Каждая из этих полуокружностей пересекает соответствующую сторону квадрата не более, чем в двух точках (рис. 54, г); значит, больше двух прямоугольников, вписанных в квадрат, с вершинами в точках P и R, не существует. Вместе с тем два таких прямоугольника мы уже построили выше. Тем самым утверждение доказано.

XXIV.II.7.4. Пусть в таблице расставлено меньше, чем семь звездочек. Тогда возможны два случая:

1) Может случиться, что в какой-то строке таблицы звездочек вовсе нет; пусть это, например, первая строка. Тогда найдется строка, в которой расположено не больше двух звездочек. Действительно, если бы в каждой из трех остальных строк содержалось не меньше трех звездочек, то общее количество звездочек в таблице превысило бы 6.

Пусть для определенности, строкой, содержащей не более двух звездочек, является вторая. Вычеркнем из таблицы третью и четвертую строки, а также столбцы, содержащие звездочки второй строки (этих столбцов, как было показано, не больше двух). Получившаяся таблица вовсе не содержит звездочек.

*			*
	*		
		*	*
*		*	

*			*
	*		*
		*	
*	*		

Рис. 55

2) Пусть теперь в таблице нет строк, не содержащих звездочек. Если бы при этом в трех строках нашлось по две звездочки, то число звездочек в таблице превысило бы 6. Следовательно, найдутся две строки, в каждой из которых содержится только по одной звездочке; пусть это будет первая и вторая строки. Вычеркнем третью и четвертую строки таблицы и те столбцы, в которых стоят звездочки первой и второй строк (таких столбцов, как мы видели, не больше двух). Оставшаяся таблица не содержит звездочек.

Таким образом, последнее утверждение задачи доказано.

Осталось построить пример расположения семи звездочек. Два таких примера показаны на рис. 55.

XXIV.II.8.5. Пусть, напротив, где-нибудь в построенной последовательности встретилась четверка (a, b, c, d). Покажем, что в этом случае все числа данной четверки положительны. Пусть сперва в четверке имеется одно отрицательное число, т. е. знаки в ней расположены так: (с точностью до циклической перестановки):

$$+++-.$$

Рассмотрим тогда первые пять шагов исследуемого процесса:

1. $+++-$ 2. $++--$ 3. $+-+-$ 4. $----$ 5. $++++$.

Мы видим, что ни на каком шагу не получается четверка, содержащая одно отрицательное число (как исходная), а после пятого шага вообще все числа становятся положительными.

Заметим, что мы попутно разобрали случай двух отрицательных членов: эти случаи соответствуют второму и третьему шагам разобранного примера (отрицательные числа стоят в четверке рядом или не рядом). Мы видели, что и в этих случаях повторения не возникает. Случай четырех отрицательных чисел также разобран (четвертый шаг примера). Осталось рассмотреть тот случай, когда лишь одно число в четверке положительно:

1. $+---$ 2. $-++-$ 3. $-+-+$ 4. $----$ 5. $++++$.

Заметим еще, что чисел, равных нулю, также не может быть, ибо это приводит к равенству нулю всех чисел четверки уже через три шага:

1. $0, a, b, c$; 2. $0, ab, bc, 0$; 3. $0, ab^2c, 0, 0$; 4. $0, 0, 0, 0$.

Рассмотрим теперь произведение чисел каждой четверки. У первой четверки оно равно $abcd$, у второй $(abcd)^2$, у третьей $(abcd)^4$. Вообще у n-й четверки произведение чисел равно $(abcd)^{2^{n-1}}$. Пусть теперь какие-то две различные четверки — с номерами k и l — совпадают. Отсюда следует, что $(abcd)^{2^{k-1}} = (abcd)^{2^{l-1}}$ и, значит, $abcd = 1$.

Рассмотрим далее любую четверку m, n, p, q из нашей последовательности. Произведение ее чисел равно, как мы видели, 1: $mnpq = 1$. Из двух положительных чисел $mn > 0$ и $pq > 0$, произведение которых равно 1, одно, очевидно, должно быть не больше 1, а другое — не меньше 1. Пусть, для определенности, $mn = \alpha \geqslant 1$, $pq = \frac{1}{\alpha} \leqslant 1$. Точно так же обстоит дело с числами np и mq. Пусть $np = \beta \geqslant 1$, $mq = \frac{1}{\beta} \leqslant 1$ и пусть, для определенности, $\alpha \geqslant \beta$.

Рассмотрим следующие три четверки:

$$\begin{array}{cccc}
m & n & p & q \\
mn=\alpha & np=\beta & pq=\dfrac{1}{\alpha} & mq=\dfrac{1}{\beta} \\
\alpha\beta & \dfrac{\beta}{\alpha} & \dfrac{1}{\alpha\beta} & \dfrac{\alpha}{\beta} \\
\beta^2 & \dfrac{1}{\alpha^2} & \dfrac{1}{\beta^2} & \alpha^2.
\end{array}$$

В последней четверке наибольшее число равно, очевидно, α^2, что не меньше α, так как $\alpha \geqslant 1$. В предыдущей четверке наибольшее число равно $\alpha\beta$, что также не меньше α.

Мы видим, что наибольшее число в четверке с каждым шагом увеличивается, если $\alpha \neq 1$ и $\beta \neq 1$.

Пусть теперь первая четверка совпала с некоторой четверкой x, y, z, v. Если это — вторая четверка, то мы имеем: $a = x = ab$, $b = y = bc$, $c = z = cd$, $d = v = ad$, откуда $b = c = d = a = 1$.

Если же это — любая другая четверка, то, как мы видели, начиная со второй четверки, наибольшее число в четверке увеличивается, если $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$. Допустить увеличения этого наибольшего числа мы не можем, так как в итоге у нас *должна* получиться четверка, *равная* исходной. Следовательно, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, и, начиная со второй, *все* четверки состоят из единиц, *в том числе и та четверка, которая совпадает с первой*. Тем самым утверждение доказано.

XXIV.II.9.2. С помощью перемен знака у чисел некоторого столбца или некоторой строки таблицы мы можем, очевидно, получить не больше, чем 2^{mn}, различных таблиц; (2^{mn} — число способов выбора знаков у mn чисел). Поскольку таких таблиц имеется конечное число, среди них существует (может быть, не одна) таблица, сумма всех чисел которой максимальна.

Если бы у этой таблицы сумма чисел некоторой строки была бы отрицательна, то путем перемены знака у всех чисел этой строки мы получили бы таблицу с большей общей суммой (так как суммы чисел, стоящих во всех остальных строках, при этом не меняются).

По той же причине не может быть отрицательной сумма чисел никакого столбца таблицы.

Итак, мы должны, меняя знаки у чисел некоторых строк и столбцов, прийти к таблице с наибольшей общей суммой — она и будет искомой.

XXIV.II.10.1. Докажем сперва, что из любой последовательности натуральных чисел можно выбрать неубывающую подпоследовательность, т. е. такую, что каждый ее член не меньше предыдущего.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — произвольная последовательность натуральных чисел. Так как все члены последовательности неотрицательны, то среди них существует наименьший — пусть это будет x_p. Если среди членов $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots$, следующих за x_p, число, равное x_p, встречается бесконечно много раз, то, выбрав все такие члены, мы уже получим требуемую подпоследовательность. Если же таких членов лишь конечное число, то выберем их все. Из идущей после последнего выбранного члена (равного x_p) части последовательности снова выберем наименьшее число x_{p_1} (оно, очевидно, будет больше x_p) и все члены, равные x_{p_1}, и так далее; получим неубывающую последовательность:

$$x_p, x_p, \ldots, x_p, x_{p_1}, x_{p_1}, \ldots, x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots .$$

Перейдем к решению задачи. Выберем из последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ неубывающую подпоследовательность:

$$a_1', a_2', \ldots, a_n', \ldots .$$

Из соответствующей последовательности $b_1', b_2', \ldots, b_n', \ldots$:

$$a_1, a_2, \ldots, a_1', \ldots, a_2', \ldots, a_n', \ldots,$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_1', \ldots, b_2', \ldots, b_n', \ldots$$

в свою очередь выберем неубывающую подпоследовательность:

$$b_1'', b_2'', \ldots, b_n''.$$

Наконец, выберем неубывающую подпоследовательность из соответствующей последовательности $c_1'', c_2'', \ldots, c_n'', \ldots$:

$$c_1''', c_2''', \ldots, c_n''', \ldots .$$

Рассмотрим теперь подпоследовательности:

$$a_1''', a_2''', \ldots, a_n''', \ldots,$$
$$b_1''', b_2''', \ldots, b_n''', \ldots,$$
$$c_1''', c_2''', \ldots, c_n''', \ldots .$$

Все они не убывают (по построению) и, значит, для любых p, q ($p > q$) имеют место неравенства:

$$a'''_p \geqslant a'''_q, \; b'''_p \geqslant b'''_q, \; c'''_p \geqslant c'''_q.$$

Мы, таким образом, доказали даже больше, чем требовалось в задаче.

XXIV.II.10.2. Окружим каждый квадрат со стороной 1 «пограничной полосой» ширины $\frac{1}{2}$ (заштрихованной на рис. 56, а). Площадь образовавшейся овальной фигуры, состоящей из квадрата и «пограничной полосы», как легко видеть, равна $1 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2$, т. е. равна $3 + \frac{\pi}{4}$, и, значит, меньше 3,79, ибо $\pi < 3{,}16$. Все 120 таких фигур занимают площадь, не большую, чем

$$120 \cdot 3{,}79 = 454{,}8 < 455.$$

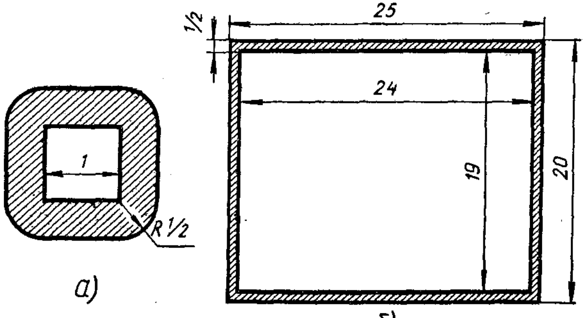


Рис. 56.

Далее, все точки прямоугольника, отстоящие от его контура более чем на $\frac{1}{2}$, образуют меньший прямоугольник, размером 19×24 (см. рис. 56, б), площадь которого равна $19 \cdot 24 = 456$. Отсюда следует, что в этом меньшем прямоугольнике найдется точка O, не лежащая ни внутри, ни на границе ни одной из овальных фигур. Круг радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в этой точке O, очевидно, не пересекается ни с каким квадратом, так как в противном случае выбранная точка попала бы внутрь «пограничной полосы» этого квадрата. Кроме того, круг радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в O лежит целиком в прямоугольнике 20×25. Тем самым утверждение доказано.

XXIV.II.10.4. Пусть A, B, C и P — такие точки плоскости, что $AB = BC = CA$, $AP = 2$, $BP = 3$. Проведем из точки B такой луч BM, что $\angle CBM = \angle ABP$, и отложим на этом луче отрезок $BP' = PB$ (рис. 57. а). Из равенства углов: $\angle CBM = \angle ABP$ вытекает, что $\angle PBP' = \angle ABC = 60^\circ$, и поэтому треугольник PBP' — равносторонний (ибо $PB = BP'$). Следовательно, $PP' = PB = 3$. Далее, $\triangle PAB = \triangle P'CB$ (так как $AB = BC$, $PB = P'B$, $\angle ABP = \angle CBP'$). Следовательно, $P'C = PA = 2$. Таким образом, ломаная $PP'C$ имеет длину $PP' + P'C = 3 + 2 = 5$, а потому длина отрезка PC не может быть больше 5. На рис. 57,б показано построение равностороннего треугольника ABC, для которого $PC = 5$ (и по-прежнему $AP = 2$, $BP = 3$).

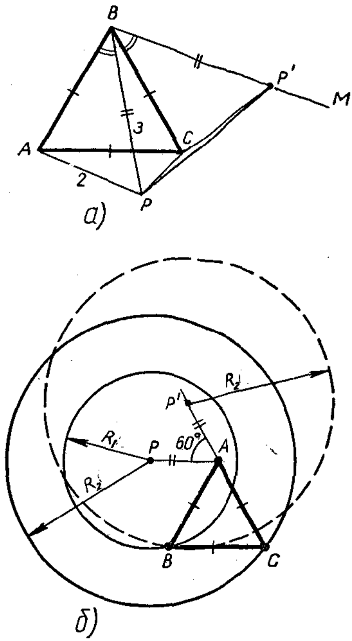


Рис. 57.

Точку A выберем произвольно на расстоянии $AP = 2$, от данной точки P.

Проведем окружности радиусов $R_1 = 3$, $R_2 = 5$ с центром в точке P (эти окружности на рис. 57, б обозначены сплошной линией) и повернем вторую окружность на угол 60° относительно точки A. Пусть P' — центр новой окружности, $AP = AP' = 2$, $\angle PAP' = 60^\circ$.

В качестве точки B выберем точку пересечения вновь построенной окружности (обозначена на рис. 57, б пунктиром) с окружностью радиуса $R_1 = 3$, построенной ранее.

Таким образом, максимальное возможное расстояние от точки P до точки C равно 5.

XXIV.II.10.5. Рассмотрим несколько первых шагов исследуемого процесса. Исходный набор:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{2k}.$$

Набор, полученный после первого шага:

$$a_1a_2,\ a_2a_3,\ a_3a_4,\ \ldots,\ a_{2k}a_1.$$

Набор, получившийся после второго шага:

$$a_1a_3,\ a_2a_4,\ \ldots,\ a_{2k}a_2$$

(так как $a_i^2 = 1$). Итак, после двух шагов мы приходим к набору, числа которого получаются из чисел исходного набора умножением через одно. Еще через два шага с этим набором произойдет то же самое, т. е. мы получим набор:

$$a_1a_3^2a_5,\ a_2a_4^2a_6,\ \ldots,$$

или, иначе говоря, набор:

$$a_1a_5,\ a_2a_4,\ a_3a_7,\ \ldots,\ a_{2k}a_4.$$

Итак, в результате четырех шагов мы приходим к набору, числа которого получаются из чисел исходного набора умножением через 3. Еще через 4 шага с этим последним набором произойдет то же самое, т. е. мы получим набор

$$a_1a_5^2a_9,\ a_2a_6^2a_{10},\ \ldots,$$

или, иначе говоря, набор

$$a_1a_9,\ a_2a_{10},\ a_3a_{11},\ \ldots,\ a_{2k}a_8.$$

Вообще, после 2^p шагов мы получим набор

$$a_1a_{2^p+1},\ a_2a_{2^p+2},\ \ldots,\ a_{2^k}a_{2^p},$$

что легко доказывается по индукции. В частности, после 2^{k-1} шагов мы получим набор:

$$a_1a_{2^{k-1}+1},\ a_2a_{2^{k-1}+2},\ \ldots,\ a_{2^k}a_{2^{k-1}},$$

а еще после 2^{k-1} шагов (т. е. всего после 2^k шагов) — набор,

$$a_1^2, a_2^2,\ \ldots,\ a_{2^k}^2,$$

состоящий из одних единиц.

XXV.I.10.1. Проведем через точку M прямую, параллельную BN, и возьмем на ней такую точку P, что $BP \parallel MN$ (рис. 58, а). Так как $BPMN$ — параллелограмм, и MA, по условию, равно BN, то мы получаем: $AM = MP$, т. е. треугольник AMP — равнобедренный. Обозначим через α угол между данными лучами (и, значит, между прямыми AM и MP). В таком случае

$$\angle MAP = \frac{180^\circ - \alpha}{2}.$$

Мы видим, что $\angle MAP$ не зависит от положения точки M на луче AO. Это значит, что точка P всегда лежит на некоторой вполне определенной прямой (составляющей угол $\beta = \frac{180° - \alpha}{2}$ с данным лучом AO). Заметим теперь, что $PB = MN$, а мы ищем такое положение точки M, что отрезок MN минимален. Это, очевидно, произойдет в том случае, когда $PB \perp AP$ (рис. 58, б), что и определяет выбор точки P, а следовательно, и точки M.

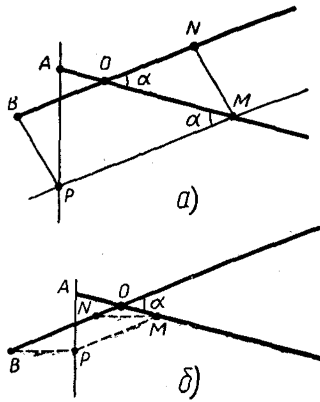


Рис. 58.

XXV.II.7.3. Так как площадь «уголка» равна 3, то площадь прямоугольника, который можно разбить на «уголки», должна делиться на 3. Ни одно из чисел 1961 и 1963 на 3 не делится, и поэтому не делится на 3 и их произведение 1961×1963, так что утверждение первой половины задачи доказано.

Покажем, что второй прямоугольник разбить на «уголки» можно. Для этого прямыми, параллельными сторонам прямоугольника, разобьем его на прямоугольники размерами 1965×1958, 1956×5 и 5×9 и покажем, что каждый из этих трех прямоугольников можно разбить на «уголки».

У первого прямоугольника длина одной стороны четна, длина другой делится на 3; следовательно, его можно разбить на прямоугольники размерами 2×3, каждый из которых в свою очередь разбивается на два «уголка». У второго прямоугольника одна сторона равна 5, длина другой делится на 6; разобьем его на прямоугольники размерами 5×6, каждый из которых разбивается на «уголки», как показано на рисунке 59. Наконец, разобьем на уголки прямоугольник 5×9 следующим образом:

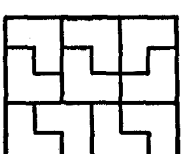


Рис. 59.

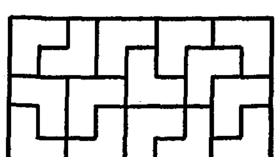


Рис. 60.

XXV.II.7.5. Пусть x — любая из заданных 25 точек. Если все точки находятся от x на расстоянии, меньшем 1, то нам нечего доказывать.

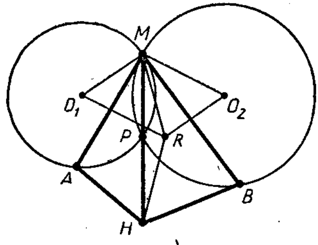
В противном случае обозначим через y какую-нибудь точку, расстояние которой от x больше или равно 1.

Пусть z — любая из остальных 23 точек. В треугольнике xyz, по условию, есть сторона, меньшая 1. Так как расстояние между x и y больше или равно 1, то этой стороной должна быть или xz, или yz.

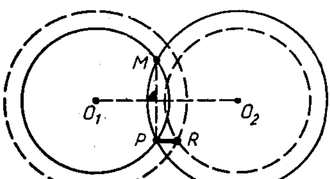
Итак, каждая точка z из остальных двадцати трех либо лежит в круге радиуса 1 с центром в x (если сторона xz меньше 1), либо в таком же круге с центром в y.

Ясно, что при этом не меньше 12 точек попадет в один круг, например в круг с центром в точке y (если бы в каждый круг попало меньше 12 точек, то общее количество точек было бы меньше 25). Но в таком случае точка y и 12 точек из круга радиуса 1 с центром в этой точке — искомые.

XXV.II.8.5. Проведем перпендикуляры из точек O_1 и O_2 к хордам AM и BM соответственно и обозначим через R их точку пересечения. Если мы докажем, что $RP \perp MP$, то отсюда последует равенство $MR = RH$, и мы докажем тем самым, что R есть центр окружности, описанной около четырехугольника $AMBH$ (так как $AR = MR$ и $BR = MR$ по построению; см. рис. 61, а).



а)



б)

Рис. 61

Итак, необходимо показать, что $RP \perp MP$. Заметим, что $O_2M \perp AM$ (так как O_2M — радиус, проведенный в точку касания), и, значит, $O_2M \parallel O_1R$. По той же причине $O_1M \parallel O_2R$. Но тогда O_2MO_1R — параллелограмм, и потому $O_2R = O_1M$ и $O_1R = O_2M$. Это значит, что точка R лежит на пересечении окружностей с центрами O_1 и O_2, имеющих радиусы r_2 и r_1 соответственно (рис. 61, б). Из очевидной симметрии ясно теперь, что $RP \parallel O_1O_2$, т. е. $RP \perp MP$, что и требуется.

XXV.II.9.1. Пусть a_1, a_2, ..., a_7, a_8 — число задач, решенных школьником за некоторые идущие подряд 8 дней. По условию:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = 25,$$
$$a_2 + a_3 + \ldots + a_8 = 25,$$

откуда $a_1 = a_8$. Итак, число задач, решаемых школьником за день, должно повторяться через каждые 7 дней. Школьнику, таким образом, нужно выбрать не некоторый «общий план», а лишь «план на неделю».

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7$ — произвольный план на неделю. Это значит, что каждый понедельник школьник решает α_1 задач, каждый вторник — α_2 задач и т. д. Если бы школьник решал все 25 задач в понедельник, то он истратил бы на все задачи в течение учебного года некоторое время, которое обозначим через S_1. Точно так же определены числа S_2, S_3, ..., S_7. Решая по понедельникам не 25, а α_1 задач, школьник з а в с е п о н е д е л ь н и к и, очевидно, потратит время, равное $\frac{\alpha_1}{25} S_1$. Точно так же, за все вторники он потратит время $\frac{\alpha_2}{25} S_2$ и т. д. Общее затраченное школьником время, равно, таким образом:

$$S = \frac{1}{25}\left(\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_7 S_7\right),$$

При этом, по условию,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_7 = 25.$$

Ясно теперь, что, выбрав из чисел $S_1, S_2, \ldots, S_7$ наименьшее и полагая соответствующий коэффициент α_k равным 25, а остальные — нулю, мы добьемся того, что S станет минимальным.

XXV.II.9.5. Набор последовательностей, удовлетворяющий условиям задачи, мы назовем «правильным».

Пусть дан правильный набор, состоящий из 2^n последовательностей. Последовательности длины строго меньше n (если такие в наборе имеются) мы будем называть «короткими», в отличие от «длинных» — длины больше n и «полных» — длины ро́вно n. Покажем прежде всего, что если правильный набор, состоящий из 2^n последовательностей, содержит короткие последовательности, то он непременно содержит и длинные последовательности. Допустим, что существует набор, не содержащий ни одной длинной последовательности, но содержащий хотя бы одну короткую. Составим по этому набору новый правильный набор по следующему правилу. Все полные последовательности перенесем в новый набор без изменений, а все короткие последовательности допишем всеми возможными способами до полных и все полученные последовательности включим в новый набор. Правильность такого набора очевидна.

Новый набор состоит только из полных последовательностей, и потому в нем не больше, чем 2^n, последовательностей (ибо существует ровно 2^n последовательностей длины n, состоящих из 0 и 1). С другой стороны, новый набор содержит больше последовательностей, чем исходный, так как каждая короткая последовательность порождает не меньше двух полных. Это, однако, противоречит тому, что в исходном наборе было 2^n последовательностей.

Если теперь в наборе нет коротких последовательностей, то нам нечего доказывать. Остается предположить, что данный правильный набор из 2^n последовательностей содержит длинные, короткие и, возможно, полные последовательности.

Построим тогда по данному набору новый правильный набор следующим образом. Возьмем самую длинную последовательность (если их несколько, то любую) и зачеркнем в ней последний знак. Если при этом набор остался правильным, то поступим с этим набором точно так же, и т. д., пока при некотором вычеркивании новый набор — обозначим его через N — не станет неправильным. Последнее произойдет в том случае, когда укороченная на один знак последовательность совпадет с некоторой другой или станет ее началом. Совпадение, однако, невозможно, так как в этом случае уже шаг назад набор был неправилен: вторая последовательность была началом первой (неукороченной).

Итак, в наборе N некоторая последовательность $\overline{a}$ является началом некоторой другой последовательности $\overline{b}$. При этом $\overline{b}$ лишь на один знак длиннее $\overline{a}$, так как до укорачивания последовательность $\overline{a}$ была самой длинной.

Поскольку существует лишь две последовательности требуемой длины с началом $\overline{a}$: $\overline{a}0$ и $\overline{a}1$, то, кроме $\overline{b}$, в наборе N не может быть другой последовательности, для которой

$\overline{a}$ была бы началом (так как она имела бы своим началом или $\overline{b}$, или неукороченную последовательность $\overline{a}$).

Вычеркнем теперь из набора N последовательность $\overline{b}$, тогда набор станет правильным. Кроме того, возьмем любую короткую последовательность $\overline{d}$, вычеркнем ее и добавим в набор две последовательности: $\overline{d\,0}$ и $\overline{d\,1}$. Правильность нового набора также очевидна.

Посмотрим, как менялась при этих преобразованиях сумма длин всех последовательностей набора. При вычеркивании последнего знака у длинной последовательности сумма, очевидно, уменьшалась. При вычеркивании длинной последовательности $\overline{b}$ *теряется* не меньше, чем $n+1$ знак, а при добавлении вместо короткой последовательности $\overline{d}$, длина которой не больше $n-1$, двух последовательностей $\overline{d\,0}$ и $\overline{d\,1}$ *приобретается* не больше, чем $(n-1)+2=n+1$ знак. Таким образом, и в этом случае сумма длин всех последовательностей не увеличивается. Общее число последовательностей в наборе неизменно: оно равно 2^n.

В результате описанных преобразований мы придем к правильному набору из 2^n последовательностей, в котором не будет больше длинных последовательностей. Но, по доказанному выше, такой набор не содержит также и коротких последовательностей, т. е. состоит из 2^n последовательностей длины n. Сумма длин исходного набора оказывается, таким образом, не меньше, чем $n \cdot 2^n$, что и требуется.

XXV.II.10.4. Проекция прямоугольного параллелепипеда на плоскость представляет собой шестиугольник (быть может, вырождающийся в четырехугольник). Так как проекция каждой грани параллелепипеда есть параллелограмм, то площадь треугольника ABC (рис. 62) составляет ровно половину площади всей проекции (ибо диагональ параллелограмма разбивает его на два равных треугольника). Но треугольник ABC представляет собой проекцию соответствующего треугольника $A'B'C'$, «вписанного» в параллеле-

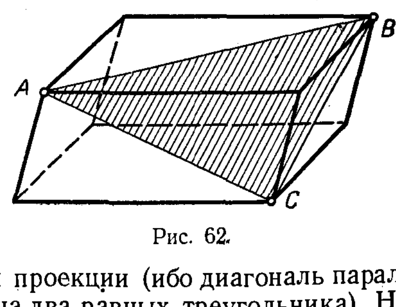


Рис. 62.

пипед. Расположение треугольника $A'B'C'$ очевидно, определяет расположение в пространстве всего параллелепипеда.

Как известно,

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'B'C'} \cdot \cos\alpha,$$

где $A'B'C'$ — треугольник, проекцией которого является треугольник ABC, и α — угол между плоскостями треугольников ABC и $A'B'C'$.

Ясно теперь, что площадь треугольника ABC будет наибольшей (а стало быть, будет максимальной и площадь проекции данного прямоугольного параллелепипеда), когда $\cos\alpha = 1$, т. е. $\alpha = 0$, или, иначе говоря, когда точки A', B' и C' лежат в горизонтальной плоскости.

XXV.II.10.5. Доказательство проводится по индукции. При числе участников, равном 2, утверждение очевидно. Пусть мы можем расположить k участников так, как этого требует условие задачи: $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Возьмем $(k+1)$-го участника и посмотрим, как он сыграл с a_1. Если он выиграл или сыграл вничью, то ставим его в начало строки; в противном случае сравниваем с игроком a_2, и так до тех пор, пока не обнаружим такого участника из числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, у которого он выиграл или сыграл вничью (а предыдущему проиграл). Найдя такого участника, мы поставим $(k+1)$-го участника перед ним. Если же $(k+1)$-й участник проиграл всем шахматистам $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то ставим его в конец цепочки.

XXVI.I.8.3. Заметив, что все числа x, y, z отличны от нуля (так как каждое из них является знаменателем дроби), приведем данное уравнение к виду

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 3xyz. \qquad (1)$$

Если тройка чисел x_0, y_0, z_0 является решением уравнения (1), то либо все числа x_0, y_0, z_0 положительны, либо одно из них положительно, а два другие — отрицательны (иначе правая часть равенства (1) будет отрицательной). Если далее тройка чисел x_0, y_0, z_0 является решением, то, изменив знак у любых двух чисел из этой тройки, мы получим, очевидно, снова решение уравнения. Отсюда следует, что мы можем ограничиться рассмотрением только положительных решений: $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Выясним сначала, нет ли таких решений, для которых $x = y = z$; в этом случае из уравнения (1) немедленно находим:

$$3x^4 = 3x^3, \quad x^4 = x^3, \quad x = y = z = 1.$$

Предположим теперь, что не все числа x, y, z равны между собой, и рассмотрим исходное уравнение

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3. \qquad (2)$$

Пусть, для определенности, $x \leqslant y \leqslant z$. Могут представиться два случая:

1°. $x < y \leqslant z$. В этом случае $z \geqslant y \geqslant x + 1$, и слагаемое $\frac{yz}{x}$ не меньше, чем $\frac{(x+1)^2}{x} = \frac{x^2+2x+1}{x} = 2 + x + \frac{1}{x}$, что, однако, больше 3, так как x — положительное целое число. Тем самым этот случай исключается.

2°. $x = y < z$. В этом случае, очевидно, $z \geqslant 2$, и сумма $\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} = 2z$ превосходит 3, так что и этот случай исключается.

Итак, единственным положительным решением уравнения (2) является решение $x_1 = y_1 = z_1 = 1$, и все остальные решения получаются из этого заменой знаков у двух неизвестных:

$$x_2 = 1,\ y_2 = z_2 = -1;\ x_3 = y_3 = -1,\ z_3 = 1;$$
$$x_4 = z_4 = -1,\ y_4 = 1.$$

Второе решение.

Заметив, как и выше, что мы можем рассматривать только положительные решения, перепишем наше уравнение в виде

$$2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 = 6xyz \qquad (3)$$

и воспользуемся известным неравенством $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ (которое является прямым следствием неравенства $(a-b)^2 \geqslant 0$). Имеем:

$$6xyz = (x^2y^2 + x^2z^2) + (x^2y^2 + y^2z^2) + (x^2z^2 + y^2z^2) \geqslant$$
$$\geqslant 2x^2yz + 2y^2xz + 2z^2xy = 2xyz(x + y + z),$$

так что

$$x + y + z \leqslant 3.$$

Так как при этом x, y, z — натуральные числа, то единственным положительным решением уравнения (3) является тройка: $x = y = z = 1$.

XXVI.I.8.4. Возьмем на плоскости произвольную точку A и проведем через нее 7 прямых, параллельных прямым данной системы. Заметим, что, по известной теореме об углах со взаимно параллельными сторонами, углы между построенными прямыми будут равны соответствующим углам между прямыми исходной системы. Но через точку A у нас проходит 7 прямых, которые делят угол в 360° на 14 частей. Ясно, что либо все эти углы равны $\frac{360^\circ}{14} = 25^5/_7{}^\circ$, либо найдется угол, меньший, чем $25^5/_7{}^\circ$, и, следовательно, меньший 26°.

XXVI.I.8.5. Мы считаем, что таблица имеет столбцы длины 5 и строки длины n. Так как произведение чисел в каждом столбце положительно, то (—1) встречается в каждом столбце четное число раз, а значит, и во всей таблице (—1) встречается четное число раз. Но (—1) встречается в таблице столько раз, сколько имеется карточек. Таким образом, общее число карточек четно; обозначим его через $2m$. Тогда общее число клеток в таблице (которое вдвое больше) равно $4m$, т. е. делится на 4.

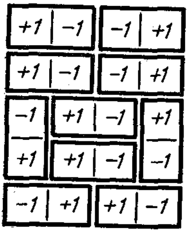


Рис. 63.

Итак, $5n$ делится на 4; стало быть, n делится на 4. Покажем теперь, что для любого $n = 4k$ возможно требуемое размещение карточек. Для этого достаточно разместить карточки на листе размером 5 × 4 и повторить это расположение k раз. Требуемый пример приведен на рис. 63.

XXVI.I.10.2. Возьмем на плоскости окружность настолько большого радиуса, чтобы она содержала внутри себя все данные точки, и рассмотрим любую прямую l, лежащую вне этой окружности. Будем теперь приближать прямую l к нашим точкам, пока она не станет проходить через одну из них; пусть, например, она пройдет через точку A. Соединим точку A со всеми остальными точками — у нас образуется 5 лучей: AB, AC, AD, AE, AF (см. рис. 64).

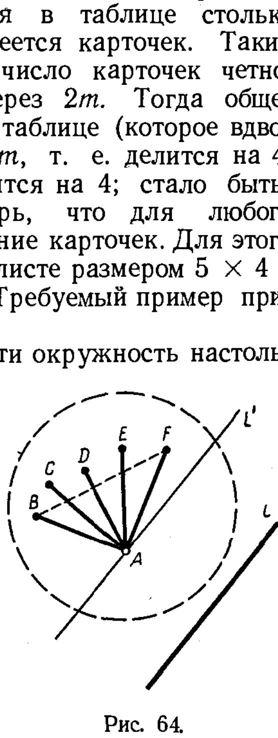


Рис. 64.

Если при этом угол BAF меньше или равен 120°, то лучи AC, AD, AE разбивают его на четыре части, среди которых, очевидно, найдется одна, меньшая или равная 30°.

Если же угол BAF больше 120°, то в треугольнике ABF сумма углов ABF и AFB меньше 60°, и, значит, один из них должен быть меньше 30°.

XXVI.II.8.2. Рассмотрим горизонтальную строку таблицы, содержащую число 1, и вертикальный столбец, содержащий число 64. Мы можем, двигаясь сначала по строке, а потом по столбцу, пройти от клетки, в которой написано число 1, к клетке, в которой написано число 64, причем наш путь будет состоять не более, чем из 14 ходов (ходом мы называем переход из любой клетки в соседнюю). В самом деле, двигаясь по горизонтали, мы не сделаем больше 7 ходов, так как наибольшая возможная длина горизонтального отрезка равна 8. То же самое справедливо для вертикального участка пути.

Предположим теперь, что разность между любыми двумя соседними числами в таблице, вопреки условию, меньше 5. Это означает, что при каждом ходе к предыдущему числу прибавляется не более, чем 4, а за 14 или меньшее число ходов, которые мы сделали при переходе от 1 к 64, к исходному числу 1 прибавится не более, чем $14 \times 4 = 56$. Между тем (при переходе от 1 к 64) к числу 1 должно прибавиться 63. Полученное противоречие показывает, что непременно найдутся хотя бы два соседних числа, разность между которыми больше 4, что и требовалось доказать.

XXVI.II.8.4. Покажем, сначала, что из данного набора можно выбрать требуемым способом 655 чисел. В самом деле, возьмем все числа вида $3k + 1$; $k = 0, 1, \ldots, 654$. Разность любых двух таких чисел, очевидно, делится на 3, в то время как сумма любых двух из них дает при делении на 3 остаток 2. Отсюда следует, что сумма никаких двух чисел из выбранных нами не делится на их разность, т. е. выбор произведен правильно.

Покажем теперь, что выбор большего количества чисел, удовлетворяющих условиям задачи, невозможен. Действительно, если бы мы выбрали больше, чем 655 чисел, то нашлись бы два числа, отличающихся друг от друга менее, чем на 3 (в противном случае разность между наибольшими и наименьшими числами данного набора была бы больше, чем $3 \times 654 = 1962$, что невозможно). Итак, должны найтись два числа, отличающиеся друг от друга на 1 или на 2.

В первом случае разность между ними равна 1, а на 1 делится любое число, в том числе и их сумма. Во втором случае разность между взятыми числами равна 2, и потому оба эти числа имеют одинаковую четность, а значит, их сумма — четное число. И в этом случае сумма взятых чисел делится на их разность.

Мы показали, что из данного набора нельзя выбрать более, чем 655 чисел так, чтобы выполнялись условия задачи, и построили пример того, как можно выбрать 655 чисел. Следовательно, наибольшее количество чисел, которое можно выбрать из данного набора в соответствии с условиями задачи, равно 655.

XXVI.II.9.2. Покажем сначала, что любая замкнутая 14-звенная ломаная имеет 7 горизонтальных и 7 вертикальных звеньев. Действительно, из каждой вершины ломаной выходят одно вертикальное и одно горизонтальное звено. По всем 14 вершинам мы насчитаем, таким образом, 14 горизонтальных и 14 вертикальных звеньев. Но при таком подсчете каждое звено мы учили дважды. Значит, имеется 7 горизонтальных и 7 вертикальных звеньев.

Занумеруем теперь горизонтальные звенья нашей ломаной «сверху вниз» и выясним, сколько точек самопересечения может лежать на каждом звене. На первом и седьмом звеньях вовсе нет точек самопересечения, так как выше первого и ниже седьмого звена нет вершин ломаной. Ясно, кроме того, что на втором и шестом звеньях может быть не больше двух, а на третьем и пятом звеньях — не больше четырех точек самопересечения — по числу вершин ломаной, лежащих сверху (соответственно, снизу) от этих звеньев. На четвертом звене может быть не более шести точек самопересечения. Покажем, что на четвертом звене может лежать на самом деле только пять точек самопересечения. Действительно, если бы их было шесть, то при этом каждая вершина ломаной, лежащая выше четвертого звена, оказалась бы соединенной с одной из вершин, лежащих ниже этого звена, и обратно. Таким обра-

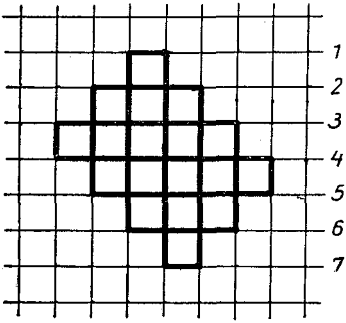


Рис. 65.

зом, вершины, принадлежащие четвертому звену, не с чем было бы соединять. Мы показали, что наша ломаная не может иметь больше, чем $2 + 4 + 5 + 4 + 2 = 17$ точек самопересечения. Пример ломаной, у которой число точек самопересечения равно 17, показан на рис. 65.

XXVI.II.10.1. Из курса алгебры известно, что при нечетном n сумма $x^n + y^n$ делится на $x + y$. Пусть $x^n + y^n = z^n$, где x, y, z — целые числа и $x + y$ — простое число. Мы видим, что z^n делится на простое число $x + y$. Следовательно, и само число z должно делиться на $x + y$, т. е. $z \geqslant x + y$. Но тогда $z^n \geqslant (x + y)^n$, и мы получаем неравенство $x^n + y^n = z^n \geqslant (x + y)^n$, которое, очевидно, не справедливо; это и доказывает утверждение задачи.

XXVI.II.10.3. Пусть мы уже выбрали требуемым способом несколько векторов; пусть $\overline{OS}$ — сумма этих векторов (рис. 66). Проведем через точку O (центр 25-угольника) прямую l, перпендикулярную вектору $\overline{OS}$.

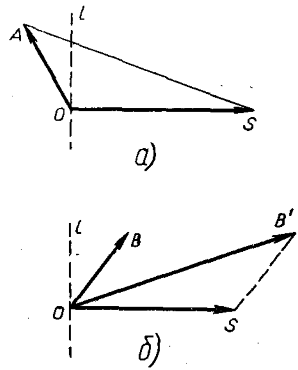


Рис. 66.

Предположим, что среди выбранных векторов содержится хотя бы один, лежащий на прямой l или по другую сторону от прямой l, чем вектор $\overline{OS}$. Если мы исключим этот вектор из числа выбранных и вычтем его из суммы $\overline{OS}$, то новая сумма будет иметь большую длину. Действительно, треугольник OAS — прямоугольный или тупоугольный, и значит, $SA > OS$ (рис. 66, а), но $|\overline{SA}| = |\overline{OS} - \overline{OA}|$.

Предположим еще, что в число выбранных векторов не вошел какой-либо вектор, лежащий по ту же сторону от прямой l, что и вектор $\overline{OS}$. Присоединим этот вектор к числу выбранных и прибавим его к сумме $\overline{OS}$; новая сумма будет иметь большую длину: треугольник $OB'S$ — тупоугольный и $OB' > OS$ (рис. 66, б), но $|\overline{OB'}| = |\overline{OS} + \overline{OB}|$.

Мы видим, что в число выбранных векторов должны войти любые 12, идущие подряд, так как угол между крайними векторами меньше 180°, а при добавлении тринадцатого вектора этого угол становится больше развернутого.

ОГЛАВЛЕНИЕ

СБОРНИК ЗАДАЧ МОСКОВСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД