В.Гийемин, С.Стернберг

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ

Книга американских авторов посвящена симплектической геометрии и ее многочисленным применениям к функциональному анализу и математической физике. Эти вопросы тесно связаны с построением асимптотических решений уравнений в частных производных, изучением особенностей решений, спектров дифференциальных операторов. Развитые методы оказались полезными в квантовой механике, теории представлений групп, теории динамических систем. На русском языке нет книги, в которой столь подробно и систематически, с таким прекрасным набором физических иллюстраций излагалась бы эта тематика.

Книга представляет интерес для научных работников — физиков и математиков.

Оглавление

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Предисловие переводчика

Книга Гийемина и Стернберга посвящена применениям симплектической геометрии к анализу. Этот круг идей имеет давнюю историю и восходит к классическому вопросу о соотношении между геометрической и физической оптикой и использованию симплектической структуры фазового пространства в гамильтоновой механике.

Можно выделить три основные темы, рассмотренные в книге. Прежде всего это квазиклассические (коротковолновые) асимптотики. При построении квазиклассического решения фазовая функция находится из уравнения Гамильтона—Якоби: по начальной фазовой функции строится начальное лагранжево многообразие, которое преобразуется при помощи гамильтонова потока. До тех пор, пока возникающее при этом процессе лагранжево многообразие однозначно проектируется на конфигурационное пространство, мы находим фазовую функцию, вычисляя действие вдоль траекторий, и далее, решая цепочку транспортных уравнений, получаем квазиклассическое решение.

Задача построения квазиклассического решения, когда условие однозначного проектирования лагранжева многообразия не выполняется, была решена В. П. Масловым в рамках теории канонического оператора (его книга вышла в 1965 г.). Принципиальный момент в его подходе состоит в том, что при согласовании локальных асимптотик в точках, имеющих общие проекции, возникают фазовые множители, которые выражаются через целочисленный топологический инвариант траектории — так называемый индекс Маслова. В случае стационарных задач аналогичные рассмотрения позволяют выявить топологический смысл условий квантования.

Большое число работ, начиная со статьи В. И. Арнольда 1967 г., посвящено продумыванию понятия индекса Маслова. Другие подходы к его построению были разработаны Лере — Сурьо (1971—1975 гг.) и Хёрмандером (1971 г.). Систематическому изложению этих результатов посвящена значительная часть книги. В ней с большой полнотой описан формализм получения квазиклассических решений; из технических новшеств отметим аппарат полуформ, удобный для учета фазовых сдвигов. В последней главе рассмотрен также вопрос о получении равномерных асимптотик около сингулярных точек проекции на конфигурационное пространство; в этом направлении имеются дальнейшие результаты (см. дополнительную литературу). Конкретные примеры нахождения асимптотик занимают в книге небольшое место. Хорошим дополнением здесь может служить книга: Маслов В. П. и Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики (М.: Наука, 1967), посвященная систематическому изложению метода канонического оператора.

Вторая тема книги — однородные симплектические многообразия и геометрическое квантование. В 1962 г. А. А. Кириллов обнаружил, что унитарные представления нильпотентных групп Ли описываются при помощи орбит коприсоединенного представления (в пространстве, двойственном алгебре Ли) и что эти орбиты снабжаются канонической симплектической структурой. Развитие этой идеи позволило А. А. Кириллову, Костанту и Сурьо описать однородные симплектические многообразия. Задача построения представления по орбите — пример задачи квантования. Разработка формализма геометрического квантования была в значительной степени нацелена на решение этой задачи. Метод орбит в теории представлений здесь не излагается; о нем можно прочитать в недавно вышедшей вторым изданием книге: Кириллов А. А. Элементы теории представлений (М.: Наука, 1979). Применения симплектической геометрии в теории представлений также подробно излагаются в книге: Wallach N. R. Symplectic geometry and Fourier analysis (Reading: Addison-Wesley, 1977). Возможности метода геометрического квантования за пределами теории представлений пока не ясны (см. предисловие авторов).

Третье большое направление, освещаемое в книге, — это теория интегральных операторов Фурье. Исходным примером для этой теории является регуляризатор задачи Коши для гиперболических дифференциальных операторов. Эта теория параллельна теории квазиклассических асимптотик и во многом строится в рамках тех же идей. Построению исчисления интегральных операторов Фурье посвящена работа Хёрмандера 1971 г. В настоящей книге дается оригинальное изложение теории, использующее преобразование Радона, аппарат полуформ и т. д. Наряду с традиционными применениями к дифференциальным уравнениям приводятся применения к интегральной геометрии, кажущиеся естественными и перспективными.

Изложение в книге обладает целым рядом методических достоинств. Отметим прежде всего подробно разработанную часть, касающуюся геометрии симплектических многообразий. Многие из приводимых здесь фактов, несмотря на их относительную новизну, сегодня уместно излагать в учебниках по линейной алгебре. Очень продумано изложение теории распределений. Здесь делается четкое различие между распределениями (обобщенными плотностями) —

функционалами на пространствах гладких функций и обобщенными функциями — функционалами на пространствах гладких плотностей (в стандартном изложении проводится отождествление распределений и обобщенных функций при помощи фиксированной плотности на многообразии). Существенно, что при отображении многообразий f: $X \to Y$ распределения и обобщенные функции отображаются в разные стороны. Поучительно выяснение вопроса о том, когда обобщенную функцию F на Y можно поднять до обобщенной функции на X. Это возможно, когда отображение f трансверсально особенностям F, в частности, когда f — субмерсия или F — гладкая функция.

В последнее время был получен ряд результатов, примыкающих к содержанию книги. Здесь можно упомянуть: применение метода орбит к теории вполне интегрируемых систем; распространение разрывов решений дифференциальных уравнений, включая отражение от границы; асимптотики осциллирующих интегралов с изолированными точками стационарной фазы специального вида (в частности, с невырожденными относительно многогранника Ньютона точками); дальнейшие результаты по теории канонического оператора; новые задачи интегральной геометрии. Некоторые из относящихся сюда работ при переводе включены в библиографические списки (они отмечены звездочкой).

Книга Гийемина и Стернберга посвящена живой, волнующей многих математиков области исследований. Авторы отважились изложить в ней весь разнообразный спектр задач «симплектического» анализа, связанных с очень разными разделами математики. Этим объясняется то, что ее появление было встречено математиками с очень большим интересом. Нет сомнений и в том, что ее русский перевод окажется полезным весьма широкому кругу читателей.

С. Гиндикин

Нашему учителю И. М. Гельфанду мы посвящаем свою книгу в знак любви и восхищения.

Предисловие

В последнее время ведутся активные исследования в области симплектической геометрии и теории интегральных операторов Фурье. Так, в симплектической геометрии достигнут значительный прогресс в понимании геометрии динамических систем и процедуры «квантования», которая оказалась не только важным инструментом теории динамических систем, но и ключевым средством при исследовании представлений групп. Благодаря интегральным операторам Фурье стал возможным значительно более систематический, чем прежде, анализ особенностей решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных, и вместе с тем удалось получить существенную геометрическую информацию о спектре таких операторов. В этих двух предметах выражается современный подход к проблеме, которая занимала умы многих математиков на протяжении последних трех столетий, — связи между волновой и корпускулярной теориями света. Цель данной книги — обсудить эту проблему и изложить некоторые недавние достижения, пользуясь языком дифференциальной геометрии как средством унификации.

Мы не рассчитываем полностью изложить историю вопроса ни в этом коротком предисловии, ни в основном тексте. Ограничимся упоминанием некоторых фактов из ранней истории. Вклад Ньютона и Гюйгенса в теорию света известен каждому студенту. («Конструкция огибающей» Гюйгенса, в которой суперпозиция особенностей, распределенных вдоль семейства поверхностей, проявляется в виде особенности вдоль огибающей, в современном изложении приобретает вид формулы, описывающей поведение волновых фронтов при функториальных операциях; см. гл. VI, (3.6).) Френель в своем знаменитом мемуаре 1818 г., удостоенном премии Парижской Академии наук, комбинируя конструкцию Гюйгенса с «принципом интерференции» Юнга, объяснил не только прямолинейное распространение света, но и дифракционные эффекты. Френель применил метод Гюйгенса к суперпозиции колебаний, а не возмущений и смог решить задачи о дифракции на краях, малых отверстиях, экранах. Мы изучим геометрию суперпозиции «возмущений» в гл. VI, а в гл. VII займемся геометрией суперпозиции (высокочастотных) колебаний.

В 1828 г. Гамильтон опубликовал свою фундаментальную работу по геометрической оптике, где ввел «характеристики» как ключевое средство исследования оптических инструментов. Только гораздо позднее Гамильтон обнаружил, что его метод в равной степени применим в механике. Метод Гамильтона был развит Якоби и по сегодняшний день является краеугольным камнем теоретической механики. В гл. IV мы обсудим геометрию симплектических многообразий — современную версию теории Гамильтона — Якоби. Интересно отметить, что, хотя Гамильтон знал о работе Френеля, он предпочел полностью игнорировать ее в своих фундаментальных статьях по геометрической оптике. Тем не менее он сделал одно теоретическое предсказание в рамках волновой теории — возможность «конической рефракции», которое вскоре после этого было подтверждено экспериментально. К сожалению, нам нечего сказать в этой книге по поводу конической рефракции (проблема кратных характеристик для гиперболических дифференциальных уравнений), но мы надеемся, что некоторые из развитых здесь методов могут оказаться полезными в этой связи.

В 1833 г. Эйри опубликовал работу о поведении света около каустики. (Каустика — это множество, на котором геометрическая оптика предсказывает бесконечную интенсивность света. В точках каустики возникает высокая температура, чем и объясняется ее название (caustic (лат.) — жгучий).) В этой работе он ввел функции, которые теперь называются функциями Эйри. В гл. VII мы показываем, как можно истолковать и обобщить результаты Эйри, пользуясь теорией особенностей отображений. В 1887 г. Кельвин предложил метод стационарной фазы — способ асимптотической оценки определенных интегралов некоторого типа — для объяснения V-образного следа, распространяющегося позади судна на воде. Метод стационарной фазы в той форме, которую придал ему Хёрмандер, будет нашим основным аналитическим средством.

Перейдем теперь к описанию содержания книги по главам.

Глава I. Введение. Метод стационарной фазы

Решение стационарного волного уравнения $\Delta\mu + k^2\mu = 0$ с начальными данными на гиперповерхности $S \subset \mathbf{R}^3$ дается интегралом вида

$$\int \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} a(y)\, dS. \qquad (*)$$

Для того чтобы исследовать поведение (*) при больших частотах, мы рассматриваем вначале интегралы более общего вида

$$\int e^{ik\varphi(z)} a(z)\, dz.$$

Для оценки таких интегралов при больших k подробно обсуждается метод стационарной фазы, причем мы следуем идее Хёрмандера воспользоваться леммой Морса. Затем он применяется к (*) для объяснения сдвига фазы при прохождении светового луча через каустики. В приложении I мы приводим доказательство леммы Морса и ее обобщений о существовании полиномиальных нормальных форм для функций, удовлетворяющих условию Милнора. Техника доказательства, принадлежащая Мозеру и Пале, будет не раз применяться в дальнейшем при исследовании нормальных форм различного рода геометрических объектов. Эта глава довольно короткая и предназначена главным образом для мотивировки выбора асимптотических разложений, рассматриваемых в гл. II и VII.

Глава II. Дифференциальные операторы и асимптотические решения

Мы обсуждаем метод Люнебурга — Лакса — Людвига построения асимптотических решений для дифференциальных операторов $P(x, D, \tau)$, содержащих большой параметр τ. Этот метод включает в себя решение характеристического уравнения или уравнения эйконала, а затем индуктивное решение ряда транспортных уравнений. Мы покажем, как можно решать эти уравнения методами симплектической геометрии, и в процессе этого выяснится, что с симплектической точки зрения характеристическое и транспортное уравнения имеют смысл около каустик, хотя асимптотические разложения в каустиках портятся. Это позволяет нам в § 6 аналитически «продолжить» асимптотические разложения через каустики, введя соответствующие фазовые поправки. В § 7 мы применяем эти результаты к нестационарному уравнению Шрёдингера и получаем условия квантования Бора — Зоммерфельда по Келлеру и Маслову. Мы выводим также асимптотическую формулу для фундаментального решения нестационарного уравнения Шрёдингера и показываем, как, следуя Фейнману, ее можно интерпретировать при помощи оценки фейнмановского интеграла по методу стационарной фазы [1]).

Глава III. Геометрическая оптика

В этой главе мы показываем, как методы предыдущей главы можно применить к оптике. Мы придерживаемся здесь точки зрения, что геометрическая оптика есть не что иное, как изучение

[1]) Техника, описанная в этой главе, получила дальнейшее развитие в работах математиков из Нью-йоркского университета и привела к ряду глубоких результатов по оптике, акустике и теории рассеяния. Мы очень сожалеем, что размеры книги не позволяют нам остановиться на этих замечательных исследованиях.

бихарактеристик уравнений Максвелла. На основе этой точки зрения мы получаем элементарные законы преломления и отражения и обсуждаем фокусировку и увеличение изображений. Читателю может показаться, что мы уделяем слишком много внимания рассмотрению гауссовой оптики. Однако этот параграф отчасти преследует цель мотивировать изучение линейной симплектической группы. Мы хотим также подчеркнуть, что абстрактные математические рассмотрения глав II и IV очень тесно связаны с конкретными физическими применениями. Однако наше изложение не является полным. Имеются два прекрасных и легко читаемых учебника по этому предмету — Борна и Вольфа и Люнебурга, и мы отсылаем читателя к ним за подробностями. В заключение проводится исследование самих уравнений Максвелла.

Первые три главы следует рассматривать в основном как мотивировку. Систематическое изложение начинается с гл. IV.

Глава IV. Симплектическая геометрия

Мы уже спорадически пользовались симплектическими методами. Наша цель в этой главе — дать более систематическое их изложение, чем в предыдущих главах. Мы начинаем с того, что приводим доказательство Вейнстейна теоремы Дарбу (и обобщение Костанта — Вейнстейна, состоящее в том, что около лагранжева подмногообразия Λ заданное симплектическое многообразие локально устроено как $T^*\Lambda$). В § 2 мы излагаем линейную симплектическую геометрию, лагранжев грассманиан и его универсальное накрывающее пространство и определяем индекс Маслова, следуя идеям Лере и Сурьо. В § 3 мы обсуждаем принадлежащую Хёрмандеру конструкцию класса Маслова, основанную на двойном отношении. Этот материал опирается на § 3.3 статьи Хёрмандера в Acta Mathematica об интегральных операторах Фурье с некоторыми упрощениями, которые предложил нам Костант. В § 4 и 5 мы излагаем основные факты о лагранжевых подмногообразиях, которые потребуются в гл. VI и VII. Имея в виду гл. VI и VII, мы делаем упор на функториальные свойства лагранжевых подмногообразий. В § 6 мы исследуем периодические траектории в гамильтоновых системах и полученные результаты применяем к задаче Кеплера (следуя Мозеру). В § 7 рассматриваются симплектические многообразия, на которых группа автоморфизмов G действует транзитивно. Наконец, в § 8 обсуждаются связи между симплектической геометрией и вариационным исчислением.

Глава V. Геометрическое квантование

В этой главе мы обсуждаем нынешнее состояние знаний, касающихся геометрии квантования, в том виде, как это предложили (независимо) Костант и Сурьо. Основная роль этой главы по отношению к остальной части книги состоит во введении металинейных структур, полуформ и метаплектических структур. Эти понятия будут играть решающую роль в гл. VI и VII при построении символического исчисления в металинейной категории. Первые два параграфа посвящены концепции предквантования, принадлежащей Костанту и Сурьо. Она состоит в отборе среди симплектических многообразий тех, которые удовлетворяют некоторым условиям целочисленности. (В случае релятивистских частиц это приводит к тому, что «спину» разрешается принимать только полуцелые значения, а в случае атома водорода — к тому, что уровни отрицательной энергии принимают соответствующие дискретные значения.) В § 3 мы определяем понятие поляризации; оно было независимо введено Костантом и Сурьо в вещественном случае; Ауслендер и Костант ввели понятие комплексной поляризации. Остальная часть главы посвящена изложению совместной работы Блаттнера, Костанта и Стернберга о полуформах и спаривании между сечениями, ассоциированными с различными поляризациями, а также некоторых физических примеров, рассмотренных Симмсом. Наряду со спариванием, которое можно рассматривать как обобщение преобразования Фурье, вводится понятие метаплектической структуры. При помощи спаривания строится геометрическими методами метаплектическое представление Сигала — Шейла — Вейля, которое затем применяется к построению «симплектических спиноров».

В некотором смысле эта глава является наименее завершенной в книге. Ясно, что предлагаемая здесь схема квантования недостаточно широка, чтобы включить все интересные случаи. Предварительное вычисление, намеченное в конце главы, показывает, что требование унитарной связанности двух поляризаций — существенная компонента схемы — ненамного менее ограничительно, чем требование «связанности по Гейзенбергу», означающее, что спаривание геометрически эквивалентно классическому преобразованию Фурье. Таким образом, необходимо развить более изощренные процедуры: по-видимому, этого можно добиться на пути все более тесного приближения к фейнмановскому методу интегралов по траекториям. Даже в рамках предлагаемой схемы многие вопросы остаются без ответа. Какие разумные условия гарантируют сходимость интегралов, участвующих в спаривании? Какова правильная формулировка спаривания в случае комплексных поляризаций и как связаны соответствующие объекты с ядром Бергмана? Существует ли дискретный аналог поляризации с таким спариванием, которое позволяет установить связь с теорией тета-функций? Нужно ли рассматривать обобщенные сечения, ассоциированные с поляризациями, или старшие когомологии для построения квантовой теории представлений групп? В какой мере недавние примеры Вернь и Ротшильда — Вольфа, в которых представление группы не обладает свойством независимости от поляризации, являются следствием геометрической патологии в рассматриваемой поляризации? Как связаны поляризации и спаривания, введенные здесь из геометрических соображений, с аналогичными формальными объектами, появляющимися в p-адической теории, особенно в основополагающих работах А. Вейля? Короче говоря, ясно, что предмет этой главы находится лишь в начальной стадии развития, и мы убеждены, что уже через несколько лет эта глава совершенно устареет.

Глава VI. Геометрические аспекты теории распределений

С математической точки зрения это, вероятно, центральная глава книги. В ней мы развиваем теорию обобщенных функций (или сечений векторного расслоения), исходя из их поведения при гладких отображениях. *Плотность* на многообразии X — это объект, который локально выглядит как функция, но преобразуется при замене координат таким образом, что имеет смысл интегрирование. Если μ — плотность, а v — гладкая функция с компактным носителем на многообразии X, то определим $\mu(v)$, полагая $\mu(v) = \int\limits_X v\mu$; тем самым плотности определяют линейные функционалы на $C_0^\infty(X)$. Под обобщенной плотностью мы понимаем любой непрерывный линейный функционал на $C_0^\infty(X)$.

Пусть X и Y — многообразия и $f\colon X \to Y$ — собственное отображение. Если μ — обобщенная плотность на X, то опускание $f_*\mu$ определяется формулой

$$f_*\mu(v) = \mu(f^*v), \quad v \in C_0^\infty(Y).$$

Оказывается, в некоторых случаях можно определить поднятие $f^*\mu$ обобщенной функции на Y. (Например, это всегда возможно в случае, когда f — расслаивающее отображение.) Цель этой главы — систематически развить теорию распределений таким образом, чтобы допустить максимальное взаимодействие между этими двумя функторами.

В § 1 мы приводим основные свойства этих двух функторов и, пользуясь ими, определяем специальный класс распределений, называемых δ-распределениями; здесь же выводится формула для неподвижных точек. В § 2 дается несколько применений идей, обсуждавшихся в § 1; в частности, доказывается несколько теорем о характерах индуцированных представлений (в теории представлений групп) и приводится набросок доказательства формулы Атья — Ботта для неподвижных точек. В § 3 мы определяем волновой фронт распределения. Оказывается, с нашей функториальной точки зрения удобнее пользоваться преобразованием Радона, а не преобразованием Фурье, как это делает Хёрмандер. (Это объясняется тем, что преобразование Радона можно определить как композицию опускания и поднятия.) В связи с этим мы включили в § 3 основные свойства преобразования Радона. Идея воспользоваться преобразованием Радона была подсказана нам Дэйвом Шеффером на лекции, посвященной обзору некоторых фундаментальных работ Людвига, развившего теорию особенностей с этой точки зрения. Работами Людвига мы руководствовались при построении значительной части теории, изложенной в этой главе. Кроме того, мы рассматриваем несколько других преобразований типа Радона, которые определяются при помощи операций поднятия — опускания, и показываем, что лишь «эллиптические» примеры обладают свойствами, очень похожими на свойства классических преобразований Радона на однородных пространствах ранга 1.

В § 4 мы рассматриваем более широкий класс распределений, чем тот, который описан в § 1. Этот класс получится, если к δ-функции на вещественной прямой применять операции поднятия, опускания, дифференцирования и умножения на гладкую функцию. Он примерно совпадает с классом распределений, который рассматривал Хёрмандер в своей основной статье по интегральным операторам Фурье (хотя Хёрмандер пришел к этим распределениям совершенно другим путем). В § 5 мы развиваем для этих распределений символическое исчисление, опять-таки существенно используя два функтора. Наши символы несколько отличаются от символов Хёрмандера из-за того, что вместо применения линейного расслоения Маслова, как это делает Хёрмандер, для введения фазовых поправок мы пользуемся метаплектической структурой, рассмотренной в гл. V. В частности, наши символы — полуформы, а не полуплотности. Мы получаем несколько менее общую теорию, чем Хёрмандер. (Многообразия, которые мы рассматриваем, удовлетворяют условию $w_1(X)^2 = 0$, где $w_1(X)$ — первый класс Штифеля — Уитни.) Однако нам кажется, что этот недостаток окупается тем, что получаются менее сложные символы. Мы показываем, как модифицировать нашу теорию, чтобы она была пригодной и в более общей ситуации. В § 6 строится исчисление интегральных операторов Фурье и приводятся некоторые применения к дифференциальным уравнениям в частных производных.

В § 7 мы описываем, как ведут себя наши распределения при композиции с дифференциальными операторами, и показываем, что на уровне символов $\sigma(P\mu)$ получается из $\sigma(\mu)$ при помощи транспортного уравнения, точно так же, как это делалось в гл. II в несколько более элементарной ситуации. В качестве применения мы описываем прямое и обратное фундаментальные решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2} - \Delta\mu = 0$$

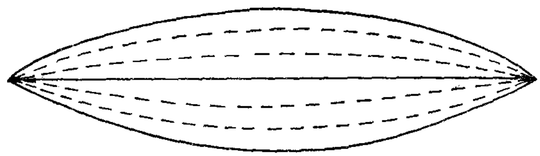
для оператора Лапласа — Бельтрами на компактном многообразии. В § 8 мы, пользуясь результатами § 7, доказываем некоторые теоремы из спектральной теории. В частности, мы выводим асимптотическую формулу Хёрмандера для спектральной функции положительного самосопряженного эллиптического оператора на компактном многообразии и результат Шазарена — Дёйстермата — Гийемина об особенностях преобразования Фурье спектральной функции. Этот результат, грубо говоря, состоит в том, что собственные значения оператора Лапласа позволяют определить длины замкнутых геодезических, или, как выразился Марк Кац, длины замкнутых геодезических можно «услышать» [1]. (Этот результат связан с одним физическим наблюдением Гельмгольца, которое он сделал при изучении струнных инструментов. Его озадачила следующая проблема. Почему струна, по которой проводят смычком и которая тем самым совершает «вынужденные колебания», издает (приблизительно) ту же ноту, что и при игре пиццикато, когда она совершает «свободные колебания»? Частота вынужденных колебаний должна была бы быть той же, что и частота вынуждающего члена (смычка). Значит, должен существовать какой-то механизм, при помощи которого струна заставляет смычок вызывать колебания лишь с частотой ее свободных колебаний.) Гельмгольц исследовал движение струны, пользуясь «вибрационным микроскопом» (сегодня он воспользовался бы стробоскопом), и получил следую-

---

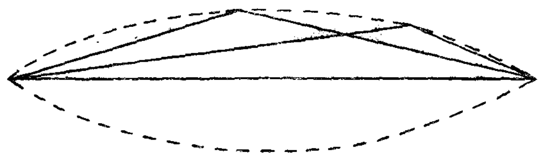
[1] Наиболее раннее упоминание об этой задаче обращения, которое мы смогли обнаружить в научной литературе, содержится в докладе по спектроскопии, направленном в 1882 г. сэром Артуром Шустером Британской Ассоциации. До тех пор основным назначением анализа спектров атомов и молекул считалась идентификация соответствующих химических веществ. (И действительно, результаты Кирхгофа об определении химического состава солнечной атмосферы при помощи анализа линий поглощения в солнечном спектре были поистине поразительными.) Характерно, что исследование спектров называлось «спектральным анализом». В своем докладе Шустер высказал мысль, что в будущем основной целью изучения спектров станет анализ структуры атомов и молекул, и предложил для этой новой науки название «спектроскопия». Он пишет:

«Однако не следует ожидать слишком скоро открытия какого-то великого и очень общего закона, ибо строение того, что мы называем молекулой, несомненно, очень сложно, и трудность проблемы так велика, что не будь результаты, которые можно надеяться здесь получить, столь первостепенной важности, никто, кроме самых неисправимых оптимистов, и не отважился бы взяться за исследования, грозящие после многих лет работы оказаться совершенно бесплодными. Мы знаем намного больше о силах, которые производят звуковые колебания, чем о тех, которые вызывают световые колебания. Разобраться в том, какие звуки испускает колеблющаяся система, — это задача, которая разрешима или не разрешима в определенных частных случаях, но обратная задача — найти форму колокола по тем звукам, которые он способен издавать, — может сбить с толку самого искусного математика. Именно эту задачу надеется в конечном счете решить спектроскопия в случае света. А тем временем мы должны с восхищением приветствовать каждый даже небольшой шаг в этом направлении».

щий результат. При щипке струна колеблется между крайними положениями, как показано на рисунке:



Центральная линия отвечает положению покоя струны. С другой стороны, мгновенные положения струны под действием смычка выглядят так:



Изгиб на струне совершает обход по ней со скоростью звука, и это движение изгиба заставляет смычок прикрепляться и отскакивать от струны. Таким образом, в этом случае мы «слышим» период изгиба, т. е. длину «замкнутой геодезической». В приложении к этой главе с использованием метода стационарной фазы излагаются известные результаты И. М. Гельфанда о формуле Планшереля для комплексных полупростых групп Ли.

Глава VII. Составные асимптотики

Мы возвращаемся к тому типу задач, которые рассматривались в гл. II. Поскольку в нашем распоряжении теперь имеется более развитый аппарат, мы можем сформулировать результаты гл. II более систематически. Мы определяем на многообразиях объекты, которые называем *асимптотиками*. Это функции (плотности, полуплотности и т. д.), зависящие от большого параметра τ. Два таких объекта отождествляются, если они имеют одинаковый асимптотический рост при $\tau \to \infty$. Следуя Лере, мы определяем преобразование Фурье асимптотики на $\mathbf{R}^n$ и используем его для исследования особенностей асимптотики. Более общо, для заданной асимптотики $[\gamma]$ на многообразии X мы определяем подмножество $F[\gamma]$ в T^*X, которое называем «частотным множеством» (по аналогии с волновым фронтом Хёрмандера); оно дает нам довольно точную информацию о том, где локализованы высокочастотные осцилляции $[\gamma]$. Асимптотики обладают некоторыми очевидными функториальными свойствами, которые мы обсуждаем в § 3.

В § 4 мы развиваем для асимптотик символическое исчисление. Здесь имеются две параллельные теории — одна связана с «точными» лагранжевыми многообразиями (для которых $(1/2\pi)\alpha$ — точная форма), а другая — с «целочисленными» лагранжевыми многообразиями, для которых $(1/2\pi)\alpha \in H^1(\Lambda, \mathbf{Z})$, т. е. $(1/2\pi)\alpha$ определяет целочисленный класс. Первые приводят к асимптотикам, зависящим от непрерывного параметра, а вторые — к асимптотикам с дискретным параметром. (Эти тонкости не появлялись в гл. VI, поскольку там мы имели дело с однородными лагранжевыми многообразиями, а α обращается в нуль при ограничении на такое многообразие.) Затем мы рассматриваем субглавный символ и транспортное уравнение для асимптотик и указываем, как пользоваться целочисленными асимптотиками вместе с полуформами для получения условий квантования. В частности, наша точка зрения совершенно изменилась по сравнению с высказанной в гл. II.

Даже в нулевой размерности асимптотические свойства произвольной асимптотики могут быть довольно сложными. Известен единственный общий результат — теорема И. Н. Бернштейна об асимптотических свойствах интегралов вида

$$\int a(z)\, e^{i\tau\alpha(z)}\, dz$$

для функций α с изолированными особенностями. Эти вопросы обсуждаются в § 5.

В § 6—9 рассматриваются асимптотические свойства некоторых типов асимптотик общего положения, подобных тем, которые возникают в оптике в окрестности простой каустики. Случай простой каустики обсуждается в § 6 и используется для получения результатов Людвига о равномерных асимптотических разложениях. Для получения аналогичных результатов в случае более сложных типов каустик нужны теоремы о канонической форме для соответствующих фазовых функций. Эти канонические формы рассматриваются в § 7 и 8. Наконец, в § 9 мы указываем на некоторые обобщения результатов § 6. Результаты § 6—9 были получены в совместных исследованиях Гийемина и Шеффера и относятся к 1972 г. С тех пор появились две статьи по тем же вопросам: Дёйстермата и В. И. Арнольда. Нам кажется, что развитая здесь точка зрения и полученные результаты достаточно отличаются от излагаемых в упомянутых статьях и заслуживают опубликования в первоначальной форме.

Читателю, который предпочитает иметь дело непосредственно с математической теорией, не отягощенной историческими ссылками и физическими применениями, мы рекомендуем начать с гл. VI и возвращаться к соответствующим разделам гл. IV и V по мере необходимости.

Как отмечалось выше в обзоре содержания по главам, многое в этой книге представляет собой совместную работу с другими авторами. Многие результаты гл. IV были получены совместно с Костантом; в гл. V изложена совместная работа Блаттнера, Костанта и Стернберга. Вторая половина гл. VII — это совместная работа Гийемина и Шеффера, и при ее написании были очень полезны замечания Шеффера. Поскольку многие результаты опубликованы здесь впервые, мы благодарим Боба Блаттнера, Берта Костанта и Дэйва Шеффера, позволивших опубликовать эти материалы в книге.

Книга основана на интенсивном совместном курсе Гарвардского университета и Массачусетского технологического института, прочитанного осенью 1973 г., а также на семинарах нескольких последних лет. Мы хотим поблагодарить Джона Гукенхеймера и Марти Голубицкого за их вклад в курс и семинар и Молли Шеффе за аккуратные конспекты, которые легли в основу рукописи. Мы хотим также поблагодарить Мэри Мак-Квиллин за помощь на разных стадиях издания.

Оба автора пользовались частичной финансовой поддержкой Национального научного фонда, а второй из авторов — Мемориального фонда Дж. С. Гуггенхейма, которым мы хотим выразить нашу благодарность.

Обозначения

В основном мы следуем обозначениям, принятым в книге:

Loomis, Sternberg. Advanced Calculus. — Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968,

с небольшими отклонениями. Буквы X, Y, Z, W, M используются для обозначения дифференцируемых многообразий; обычно M — общее дифференцируемое многообразие, а X — многообразие, снабженное какими-то дополнительными структурами. Точки многообразий обозначаются буквами x, y, z и т. д. Локальные координаты записываются в виде $(x^1, \ldots, x^n)$. Если M — многообразие и T^*M — его кокасательное расслоение, то локальные координаты на T^*M, ассоциированные с локальными координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ на M, будем записывать как $(x^1, \ldots, x^n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, а иногда как $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$. Фундаментальную 1-форму на кокасательном расслоении будем обозначать через α, т. е. на языке локальных координат $\alpha = \xi_1\, dx^1 + \ldots + \xi_n\, dx^n$ или $\alpha = p_1\, dq^1 + \ldots + p_n\, dq^n$. Для обозначения касательных векторов или векторных полей мы будем пользоваться жирными греческими буквами, обычно $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ или $\boldsymbol{\zeta}$. Касательное пространство к многообразию M в точке x обозначается через TM_x, а типичный элемент этого пространства через $\boldsymbol{\xi} \in TM_x$. Если f: $M \to N$ — гладкое отображение дифференцируемых многообразий, то дифференциал в точке x обозначается через df_x, так что df_x: $TM_x \to TN_{f(x)}$. Поднятие дифференциальной формы θ на N при помощи f будет обозначаться через $f^*\theta$. Так, например, если θ — *линейная* дифференциальная форма на N и $\theta_y \in T^*N_y$ — ее значение в $y \in N$, то для $\boldsymbol{\xi} \in TM_x$ имеем

$$\langle \boldsymbol{\xi}, (f^*\theta)_x \rangle = \langle df_x \boldsymbol{\xi}, \theta_{f(x)} \rangle,$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ — спаривание между векторами и ковекторами. Для обозначения производной Ли относительно векторного поля $\boldsymbol{\xi}$ мы пользуемся символом $D_{\boldsymbol{\xi}}$. Значит, если Ω — это k-форма, то $D_{\boldsymbol{\xi}}\Omega$ — ее производная Ли относительно $\boldsymbol{\xi}$; если $\boldsymbol{\eta}$ — другое векторное поле, то $D_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}]$ — коммутатор векторных полей; если u — функция, то мы часто пишем $\boldsymbol{\xi}u$ вместо $D_{\boldsymbol{\xi}}u$.

На ориентированном римановом или псевдоримановом многообразии размерности n имеется оператор «звездочка», обозначаемый символом $*$; он переводит k-формы в $(n-k)$-формы. Так, например, если S — ориентированная поверхность в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$ и u — гладкая функция в $\mathbf{R}^3$, то вместо выражения $\iint\limits_S (\partial u/\partial n)\, dS$, которое встречается во многих старых учебниках по анализу, мы пишем $\iint\limits_S * du$.

ВВЕДЕНИЕ. МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

Одним из ранних убедительных экспериментов, подтверждающих волновую природу света, был опыт Френеля с двумя зеркалами. В этом опыте два плоских зеркала располагаются так, чтобы угол между ними был немного меньше 180°. Если свет падает из некоторого источника S, то на экране, помещенном в области, общей для двух пучков, отраженных от зеркал, наблюдаются интерференционные полосы. Можно считать, что эти пучки приходят из точек S_1 и S_2 — образов точки S в обоих зеркалах. Эти источники можно считать синхронными и однородными, поскольку они происходят из одного и того же источника S. Точки на экране, равноотстоящие от S_1 и S_2, будут освещены лучше всего, а чередование темных и светлых областей и есть интерференционная картина.

Гуи обнаружил (*Comp. Rend.*, **110** (1890), p. 1251), что если одно из плоских зеркал заменить вогнутым зеркалом, а экран поместить за фокусом, то в центре будет уже не светло, а темно, и вообще характер интерференционной картины изменится. Получается, что свет, проходя через фокус, претерпевает фазовый сдвиг на π. Фокус можно представлять себе как пересечение двух фокальных линий. Тогда, как указывает Гуи, полученный результат можно сформулировать так: свет, проходя через фокальную линию, претерпевает фазовый сдвиг на $\pi/2$. Этот феномен был объяснен Пуанкаре в его лекциях 1891—1892 гг. по теории света (см. [2]). Его метод состоял в применении асимптотической оценки некоторых интегралов, возникающих при решении волнового уравнения. Эта асимптотическая оценка уже была проведена ранее Кельвином и известна как метод стационарной фазы. Опишем теперь соответствующие рассуждения. Вместо того чтобы иметь дело с зеркалами, мы предположим вначале, что имеется поверхность, являющаяся источником высокочастотного излучения. Кроме того, чтобы упростить дело, мы будем рассматривать скалярное волновое уравнение, а не векторные уравнения Максвелла. Все рассуждения легко переносятся на векторный случай.

Рассмотрим сферически симметричные решения волнового уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u = 0, \quad \text{где} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

Δ — обычный лапласиан в трехмерном евклидовом пространстве. В полярных координатах имеем

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

поэтому если функция u сферически симметрична, $u = u(r, t)$, то волновое уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\left[2 \frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right] = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru).$$

Таким образом, $v = ru$ удовлетворяет одномерному волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) v = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v(r, t) = f(r+t) + g(r-t),$$

а значит, общее решение симметричного волнового уравнения имеет вид

$$u(r, t) = \frac{f(r+t)}{r} + \frac{g(r-t)}{r}.$$

Здесь первый член представляет собой приходящую волну, а второй — уходящую волну. В частности, если положить $f = 0$, $g(s) = e^{iks}$, то

$$w_k(t, r) = \frac{e^{ik(r-t)}}{r}$$

представляет собой уходящую (синусоидальную) волну с частотой k. В самом деле, легко убедиться, что с точностью до нормирующих констант

$$E_k(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$$

является фундаментальным решением стационарного волнового оператора $\Delta + k^2$, т. е.

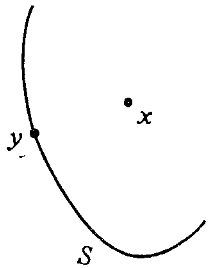
$$(\Delta + k^2) E_k = C\delta$$

для подходящей константы C (фактически $C = -4\pi$).

Пусть y — точка $\mathbf{R}^3$. Тогда функция

$$c(y)\, w_k(t, |x-y|), \quad x \neq y,$$

описывает установившееся излучение из точки y с частотой k. Здесь комплексное число $c(y)$ задает амплитуду и фазу излучения. Теперь предположим, что источником установившегося излучения являются все точки y поверхности S, а плотность излучения имеет вид $c(y)\,dy$, причем все $c(y)$ имеют одну и ту же фазу, т. е. можно считать, что функция $c(y)$ вещественна. Тогда для каждой точки $x \notin S$ излучение в x имеет вид



$$e^{-ikt} I_k(x),$$

где $I_k(x)$ — интеграл по S, а именно

$$I_k(x) = \int\limits_S \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} c(y)\,dy.$$

Мы хотим оценить этот интеграл асимптотически для больших значений k. Таким образом, мы интересуемся интегралом вида

$$\int a(y)\, e^{ik\varphi(y)}\, dy$$

для больших значений k. Такие интегралы оцениваются методом стационарной фазы. Заметим, что наибольший вклад дает окрестность точек, в которых $d\varphi = 0$. В самом деле, мы можем разбить a в сумму слагаемых с маленькими носителями, пользуясь разбиением единицы. Предположим, что $d\varphi \neq 0$ на $\operatorname{supp} a$. Тогда, пользуясь интегрированием по частям, можно показать, что рассматриваемый интеграл есть $O(k^{-N})$ для всякого N, если a является C^∞-функцией от y. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим векторное поле

$$\xi = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^i},$$

т. е.

$$\xi e^{ik\varphi} = ik\left[\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y^i}\right)^2\right] e^{ik\varphi} = ik\,|\xi|^2\, e^{ik\varphi},$$

где $|\xi|^2 \neq 0$. Пусть

$$\eta = \frac{-i}{k\,|\xi|^2}\,\xi.$$

Тогда $\eta e^{ik\varphi} = e^{ik\varphi}$, т. е.

$$\int a e^{ik\varphi}\, dy = \int a\,[\eta e^{ik\varphi}]\, dy = \int ({}^t\eta a)\, e^{ik\varphi}\, dy =$$
$$= \frac{-i}{k}\int {}^t\xi\left(\frac{a}{|\xi|^2}\right) e^{ik\varphi}\, dy = \frac{1}{k}\int b e^{ik\varphi}\, dy$$

для некоторой C^∞-функции b с компактным носителем. Повторяя эту операцию, мы увидим, что этот интеграл равен $O(k^{-N})$. Предположим теперь, что каждая критическая точка функции φ

невырожденна. Это означает, что в каждой критической точке невырожден гессиан

$$d^2\varphi=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^i\,\partial y^j}\right).$$

Пусть p — критическая точка функции φ. По лемме Морса, в окрестности точки p можно так ввести координаты $z_1, \ldots, z_n$, что

$$\varphi=\varphi(p)+[-z_1^2-\ldots-z_l^2+z_{l+1}^2+\ldots+z_n^2]/2= \\ =\varphi(p)+Q(z)/2,$$

где l — индекс квадратичной формы $d^2\varphi_p$. (Доказательство леммы Морса см. в приложении I после этой главы.)

Если $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)$ — матрица Якоби замены координат и если носитель функции a лежит в нужной координатной окрестности, то

$$\int ae^{ik\varphi}\,dy=e^{ik\varphi(p)}\int ae^{ikQ(z)/2}\left|\det\frac{\partial y}{\partial z}\right|dz.$$

Заметим, что если Q — матрица формы $Q(z)$, то в точке p имеем

$$Q={}^t\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^i\,\partial y^j}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right),$$

т. е.

$$\left|\det\frac{\partial y}{\partial z}\right|(p)=\left|\det\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^i\,\partial y^j}(p)\right|^{-1/2}.$$

Таким образом, мы свели вопрос к рассмотрению интеграла вида

$$\int f(z)\,e^{ikQ(z)/2}\,dz$$

для больших k. Здесь $z=(z_1, \ldots, z_n)$. Мы утверждаем, что этот интеграл допускает асимптотическое разложение

$$\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{n/2}e^{i\pi(n-2l)/4}f(p)+O(k^{-n/2-1}).$$

Докажем это следующим образом. Мы можем написать $f(z)=f(0)+\sum z_jf_j(z)$, где функции f_j гладкие, но, разумеется, не обязательно имеют компактный носитель. Если бы мы смогли показать, что интеграл $\int e^{ikQ(z)/2}g(z)\,dz$ корректно определен для соответствующих функций g, не обязательно имеющих компактные носители, то мы могли бы написать

$$\int e^{ikQ(z)/2}z_jf_j(z)\,dz=\pm\frac{1}{ik}\int\frac{\partial}{\partial z_j}\left(e^{ikQ(z)/2}\right)f_j\,dz= \\ =\mp\frac{1}{ik}\int e^{ikQ(z)/2}\frac{\partial f_j}{\partial z_j}\,dz,$$

а этот интеграл вновь относится к рассматриваемому типу. Таким образом, член наивысшего порядка в асимптотическом разложении происходит из постоянного члена, и нам остается оценить интеграл $\int e^{ikQ(z)/2}\,dz$. Он является произведением одномерных интегралов, и мы должны сосчитать интеграл $\int e^{iku^2/2}\,du$. Прежде чем приводить это вычисление, вернемся к проблеме придания смысла рассматриваемым интегралам.

Итак, мы хотим придать смысл интегралам вида $\int e^{ikQ(z)/2}h(z)\,dz$. Вопрос о сходимости кратного интеграла сводится путем рассмотрения повторного интеграла к случаю одного вещественного переменного. Пусть имеется C^2-функция $h(t)$ одного вещественного переменного t, которая ограничена вместе с двумя производными. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2/2}h(t)\,dt.$$

Мы утверждаем, что этот интеграл равномерно сходится при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, $|\lambda| \geqslant 1$. Действительно, при $0 < R < S$ имеем

$$\int_R^S e^{-\lambda t^2/2}h(t)\,dt = -\lambda^{-1}\int_R^S \frac{1}{t}\left(e^{-\lambda t^2/2}\right)' h(t)\,dt =$$

$$= -\lambda^{-1}e^{-\lambda t^2/2}(h(t)/t)\,\Big|_R^S + \frac{1}{\lambda}\int_R^S e^{-\lambda t^2/2}(h(t)/t)'\,dt =$$

$$= -\lambda^{-2}e^{-\lambda t^2/2}\left[\lambda(h(t)/t) - (1/t)(h(t)/t)'\right]\Big|_R^S +$$

$$+\lambda^{-2}\int_R^S e^{-\lambda t^2/2}\left[(1/t)(h(t)/t)'\right]'\,dt.$$

Интеграл справа абсолютно сходится, а граничные члены стремятся к нулю при $R \to \infty$. Кроме того, если константа M ограничивает h и две ее производные, то рассматриваемые выражения можно оценить только через M. Таким образом, если h зависит от некоторых дополнительных параметров и равномерно ограничена вместе с двумя производными относительно этих параметров, то интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2/2}h(t)\,dt$$

сходится равномерно относительно этих параметров. (В частности, при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ интеграл $\int e^{-\lambda Q(z)/2}f(z)\,dz$ корректно определен.) Далее, интеграл $\int e^{-\lambda t^2/2}h(t)\,dt$ является голоморфной функцией от λ при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, непрерывной при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, $\lambda \neq 0$. В частности, мы можем взять $h \equiv 1$. Тогда $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{2\pi}$, и, делая замену переменных для вещественных λ вместе с аналитическим продолжением для комплексных λ, получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u^2/2}\, du = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{1/2}$$

при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, где берется значение квадратного корня, полученное продолжением с положительной вещественной оси. Подстановка $\lambda \longmapsto \mp ik$ дает

$$\int e^{\pm iku^2/2}\, du = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{1/2} e^{\pm \pi i/4}.$$

На этом доказательство формулы закончено. Предполагая, что φ имеет только конечное число критических точек в $\operatorname{supp} a$, мы можем поэтому утверждать, что

$$\int a(y)\, e^{ik\varphi(y)}\, dy = \\ = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{n/2} \sum_{y \mid d\varphi(y)=0} e^{\pi i \operatorname{sign} H(y)/4} \frac{e^{ik\varphi(y)} a(y)}{\sqrt{|\det H(y)|}} + O(k^{-n/2-1}), \qquad \text{(С.Ф.)}$$

где $H(y)$ — гессиан функции φ в y.

Здесь через $\operatorname{sign} H$ обозначена сигнатура квадратичной формы H. (Для Q сигнатура равна разности числа членов со знаком $+$ и числа членов со знаком $-$, т. е. $n-2l$.)

Эта формула и лежит в основе метода стационарной фазы. Позднее мы дадим более инвариантную формулировку этого результата. Теперь мы хотим применить полученную формулу к интересующей нас ситуации. Заметим, что если $\varphi \neq 0$, то $d\varphi = 0$ тогда и только тогда, когда $d\varphi^2 = 0$ и

$$d^2\left({}^1/_2\varphi^2\right) = \varphi\, d^2\varphi$$

в каждой критической точке. Поскольку проще иметь дело с ${}^1/_2|y-x|^2$, чем с $|y-x|$, мы можем воспользоваться этим для упрощения вычислений. Ясно, что для всякого фиксированного x функция $\psi^x(y) = {}^1/_2|y-x|^2$ имеет y критической точкой тогда и только тогда, когда прямая, соединяющая x с y, ортогональна y-поверхности. Гессиан функции ψ^x в каждой критической точке связан с первой и второй фундаментальными формами поверхности. Проведем вычисления в несколько большей общности, поскольку это почти не потребует дополнительных усилий (см. Милнор [3]).

Пусть M — подмногообразие размерности l в $\mathbf{R}^m$. Таким образом, каждая точка в M обладает окрестностью с координатами $u = (u_1, \ldots, u_l)$ и имеется отображение $y = y(u) = (y_1(u), \ldots, y_m(u))$ в $\mathbf{R}^m$, где матрица Якоби $(\partial y/\partial u)$ имеет ранг l. Для простоты мы считаем M подмножеством в $\mathbf{R}^m$ (хотя все, что будет говориться, проходит и для иммерсированных подмногообразий).

Итак, мы можем рассматривать нормальное расслоение $N(M)$ как множество пар (y, w), где $y \in M$, а вектор $w \in \mathbf{R}^m$ ортогонален касательному пространству к M в точке y, т. е. $w \perp TM_y$. Заметим, что с этой точки зрения $N(M)$ можно считать лежащим в $\mathbf{R}^m + \mathbf{R}^m$. Легко проверить, что $N(M)$ — иммерсированное подмногообразие размерности m. Действительно, пусть U — координатная окрестность на M с координатами $u_1, \ldots, u_l$. Векторы

$$\frac{\partial y}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial u_l}$$

являются касательными к M в каждой точке множества U. Расширим это множество до базиса в $\mathbf{R}^m$ для некоторого $p \in U$, добавив векторы $v_{l+1}, \ldots, v_m$. Итак,

$$\frac{\partial y}{\partial u_1}(p), \ldots, \frac{\partial y}{\partial u_l}(p), v_{l+1}, \ldots, v_m$$

— базис пространства $\mathbf{R}^m$ в p, а значит,

$$\frac{\partial y}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial u_l}, v_{l+1}, \ldots, v_m$$

— базис в $\mathbf{R}^m$ для всех точек из U, достаточно близких к p. Будем обозначать эту окрестность также через U. Ортонормируем этот базис; получим

$$t_1(u), \ldots, t_l(u), n_{l+1}(u), \ldots, n_m(u).$$

Тогда $n_{l+1}(u), \ldots, n_m(u)$ порождают пространство нормалей к M в точке $y(u)$. Таким образом, $U \times \mathbf{R}^{m-l}$ задает параметризацию нормального расслоения над U, где

$$(u_1, \ldots, u_l, s_{l+1}, \ldots, s_m) \longmapsto (y(u), s_{l+1}n_{l+1}(u) + \ldots + s_m n_m(u)).$$

Определим отображение E: $N(M) \to \mathbf{R}^m$ следующим образом:

$$E(y, w) = y + w.$$

Заметим, что

$$T(N(M))_{(y, w)} = TM_y + NM_y \subset \mathbf{R}^m + \mathbf{R}^m.$$

Поэтому дифференциал этого отображения

$$dE_{(y, 0)}\colon T(N(M))_{(y, 0)} \to \mathbf{R}^m,$$

имеющий вид

$$dE_{(y, 0)}(v, w) = v + w,$$

сюръективен. Таким образом, по теореме об обратной функции, E является диффеоморфизмом некоторой окрестности точки $(y, 0)$ в $\mathbf{R}^m$. Разумеется, E не будет, вообще говоря, диффеоморфизмом

$N(M) \to \mathbf{R}^m$. При этом *критические значения отображения* E *называются фокальными точками подмногообразия* M.

Итак, $x \in \mathbf{R}^m$ *не является* фокальной точкой, если для всех (y, w), таких, что $E(y, w) = x$, ранг dE равен m. Далее, дифференциал отображения E относительно w всегда имеет ранг $m - l$. Таким образом, x — критическое значение тогда и только тогда, когда для некоторого (y, w) имеем $E(y, w) = x$, причем дифференциал отображения E относительно y имеет ранг, меньший l.

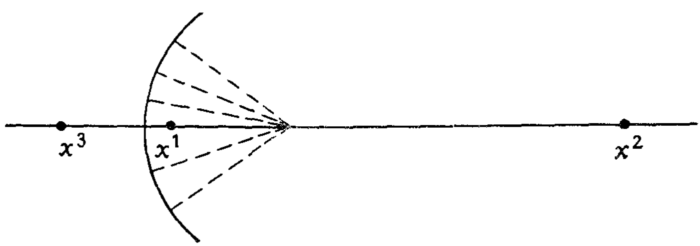
Теперь рассмотрим введенную выше функцию ψ^x:

$$\psi^x(y) = \frac{1}{2}|y - x|^2 = \frac{1}{2}(y,\ y - 2x) + \frac{1}{2}|x|^2.$$

Тогда

$$d\psi^x = (dy,\ y - x),$$

т. е. $d\psi^x = 0$ в том и только том случае, когда вектор $y - x$ нормален к TM_y, и при этом $x = E(y,\ y - x)$. Рисунок подсказывает, что:



(i) $d^2\psi^x$ вырожден тогда и только тогда, когда x — фокальная точка.

(ii) Пусть L — прямая, соединяющая y и x. Если нет фокальных точек между y и x, то ψ^x имеет минимум в y, а $d^2\psi^x$ положительно определен.

(iii) Если существует фокальная точка вида $E(y, v)$, $v \in L$, где $(y, v) \in N(M)$ — сингулярная точка, а v лежит между 0 и $x - y$, то ψ^x не имеет минимума, а индекс $d^2\psi^x$ связан с числом таких фокальных точек. (На рисунке ψ^{x^1} и ψ^{x^3} имеют минимум в y, в то время как ψ^{x^2} имеет максимум.)

На самом деле мы докажем, что *гессиан* $d^2\psi^x(y)$ *невырожден тогда и только тогда, когда* $x = E(y, v)$ *и* $\operatorname{rank} dE_{(y,v)} = m$, *т. е.* x *не является фокальной точкой в окрестности точки* y. *Кроме того, для индекса* $d^2\psi^x$, *т. е. числа отрицательных собственных значений этой квадратичной формы, имеем*

$$\operatorname{ind}(d^2\psi^x) = \sum_{0<t<0} \operatorname{corank} dE_{(y,tv)}.$$

Этот результат — частный случай теоремы Морса об индексе.

Грубо говоря, эта формула означает, что индекс формы $d\psi^x$ равен числу фокальных точек между y и x с учетом их кратностей.

Введем, как и выше, локальные координаты, и пусть $F\colon U\times \times \mathbf{R}^{m-l}\to\mathbf{R}^m$ — отображение E, записанное в этих координатах, т. е.

$$F(u,\ s)=y(u)+s\cdot n(u)=y(u)+s_{l+1}n_{l+1}(u)+\ldots+s_m n_m(u).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}=\frac{\partial y}{\partial u_i}+\sum_{r=l+1}^{m} s_r\frac{\partial n_r}{\partial u_i},\qquad i=1,\ \ldots,\ m,$$

$$\frac{\partial F}{\partial s_r}=n_r,\qquad r=l+1,\ \ldots,\ m.$$

Далее, точка $(y,\ v)\in N(M)$ с координатами $(u,\ s)$ регулярна для E тогда и только тогда, когда m векторов $\partial F/\partial u_i$, $\partial F/\partial s_r$ линейно независимы. Заметим, что m векторов $\partial y/\partial u_i$, n_r всегда линейно независимы по построению. Беря скалярные произведения с $\partial F/\partial u_i$, $\partial F/\partial s_r$, получаем матрицу

$$\left[\begin{array}{c|c}\left(\dfrac{\partial y}{\partial u_i},\ \dfrac{\partial y}{\partial u_j}\right)+\sum s_r\left(\dfrac{\partial n_r}{\partial u_i},\ \dfrac{\partial y}{\partial u_j}\right) & \sum s_r\left(\dfrac{\partial n_r}{\partial u_i}\cdot n_t\right)\\ \hline 0 & 1\ldots 1\end{array}\right]$$

которая невырожденна тогда и только тогда, когда невырожден ее верхний левый блок. Не уменьшая общности, мы можем считать, что $n_{l+1}=n$, причем $v=n$ с $s>0$. Таким образом, коранг $dE_{(x,\,v)}$ тот же, что и коранг матрицы

$$\left(\left(\frac{\partial y}{\partial u_i},\ \frac{\partial y}{\partial u_j}\right)+s\left(\frac{\partial n}{\partial u_i},\ \frac{\partial y}{\partial u_j}\right)\right).$$

Далее,

$$0=\frac{\partial}{\partial u_i}\left(n,\ \frac{\partial y}{\partial u_j}\right)=\left(\frac{\partial n}{\partial u_i},\ \frac{\partial y}{\partial u_j}\right)+\left(n,\ \frac{\partial^2 y}{\partial u_i\,\partial u_j}\right).$$

Таким образом, $(i,\ j)$-й элемент матрицы можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u_i},\ \frac{\partial y}{\partial u_j}\right)-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u_i\,\partial u_j},\ v\right)=\frac{\partial^2\psi^x}{\partial u_i\,\partial u_j},$$

поскольку $v=x-y$. Это показывает, что коранг $dE_{(x,\,v)}$ равен кратности ядра у $d^2\psi^x$. В частности, если $(y,\ v)$ — регулярная точка отображения E, то форма $d^2\psi^x(y)$ невырожденна, откуда следует первая часть сформулированного предложения. Пусть

$$g_{ij}=\left(\frac{\partial y}{\partial u_i},\ \frac{\partial y}{\partial u_j}\right).$$

Квадратичная форма на $\mathbf{R}^l$ с матрицей (g_{ij}) называется *первой фундаментальной формой*. Она представляет собой евклидово скалярное произведение на TM_y, рассматриваемое как билинейная форма на $\mathbf{R}^l$ при помощи отождествления $\mathbf{R}^l$ с TM_y. Эта форма положительно определена.

Билинейная форма с матрицей

$$(r_{ij}(n)) = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u_i\, \partial u_j},\ n\right), \quad n \in N(M)_y,$$

называется *второй фундаментальной формой в направлении* n.

Обозначим через I_y и II_y первую и вторую фундаментальные формы в точке y. Мы показали, что

$$\frac{\partial^2(\psi^x)}{\partial u^i\, \partial u^j} = g_{ij} - s r_{ij}(n), \quad \text{где} \quad v = sn.$$

Вычислим индекс правой части. Сделав линейную замену координат u, мы можем считать, что $(g_{ij}) = (\delta_{ij})$; это означает, что мы перешли к ортогональному базису для первой фундаментальной формы. Тогда $(r_{ij}) = (r_{ij}(n))$ — симметрическая матрица с собственными значениями $\mu_1, \ldots, \mu_m$ и попарно ортогональными собственными векторами. Делая дополнительную ортогональную замену переменных u, мы можем диагонализировать матрицу $(r_{ij}(n))$. Таким образом, получаем

$$\frac{\partial^2\psi^x}{\partial u^i\, \partial u^j} = \delta_{ij} - s\mu_i\delta_{ij} = (1 - s\mu_i)\,\delta_{ij}.$$

Значит, индекс формы $d^2\psi^x$ равен числу таких μ_i, что $s\mu_i > 1$. Это то же самое, что

$$\sum_{0<t<1} (\text{число } \mu_i \text{ с } ts\mu_i = 1) = \sum_{0<t<s} \operatorname{corank}(I - t(r_{ij})) = \sum_{0<t<s} \operatorname{corank} dE_{y,\,tv},$$

откуда следует вторая часть предложения.

Собственные векторы матрицы $(r_{ij}(n))$ называются *главными направлениями кривизны* подмногообразия M в направлении n. Числа $K_i = \mu_i^{-1}$ называются *главными радиусами кривизны*.

Если положить $\varphi^x(y) = |x - y|$, т. е. $\psi^x = {}^1/_2[\varphi^x]^2$, то для гессианов имеем

$$H\varphi = \frac{1}{\varphi} H\psi.$$

В нашем случае M двумерно, т. е.

$$\frac{1}{|\det H\varphi|^{1/2}} = \frac{|y-x|}{|\det H\psi|^{1/2}} = \frac{|y-x|}{|(1-|y-x|\mu_1)(1-|y-x|\mu_2)|^{1/2}}.$$

Для любых x и y обозначим через d расстояние между x и y. Если вектор $x-y$ нормален к M, то через $\#$ обозначим число фокальных точек между y и x.

Подстановка в наши исходные интегралы дает

$$I_k = \frac{2\pi}{k} \sum_{y \mid E(y,\, v) = x} e^{(1-\#)\pi i/2} e^{ikd} \frac{a(y)}{|(1-\mu_1 d)(1-\mu_2 d)|^{1/2}} + O(k^{-2}).$$

До сих пор мы рассматривали довольно искусственную ситуацию, когда каждая точка поверхности равномерно излучает во всех направлениях. Теперь мы покажем, что аналогичные рассмотрения применимы к физически интересным решениям волнового уравнения; при этом вещественная поверхность заменяется на мнимую и используется теорема Стокса. Начнем с напоминания формулы Грина: пусть u и v — функции на $\mathbf{R}^3$; тогда

$$d(u * dv - v * du) = ud * dv - vd * du,$$

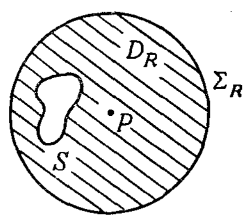
так что по теореме Стокса

$$\iiint_D (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dV = \iint_{\partial D} (u * dv - v * du),$$

где D — произвольная ограниченная область с гладкой границей. Пусть u удовлетворяет уравнению $\Delta u + k^2 u = 0$, а v удовлетворяет уравнению $\Delta v + k^2 v = \delta_P$; тогда слева мы получаем $u(P)$ при $P \in D$ и 0 при $P \notin \overline{D}$. В результате получается формула Гельмгольца

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \left[\frac{e^{ikr}}{r} * du - u * d\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right] = \begin{cases} u(P), & \text{если} \quad P \in D, \\ 0, & \text{если} \quad P \notin \overline{D}, \end{cases}$$

где u — решение уравнения $(\Delta^2 + k^2)u = 0$, а через r обозначено расстояние от P.



Для многих приложений важна ситуация, когда D — не ограниченная область, а внешность некоторой поверхности S. Вначале применим формулу к ограниченной области D_R, являющейся пересечением области D с шаром радиуса R с центром в точке P.

Если R выбрано достаточно большим, то

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_R} = \begin{cases} u(P), & \text{если} \quad P \in D, \\ 0, & \text{если} \quad P \notin \overline{D}, \end{cases}$$

где Σ_R — сфера радиуса R. Далее,

$$d\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = \frac{e^{ikr}}{r}\left[ik - \frac{1}{r}\right] dr$$

и $* dr = R^2\,d\omega$ на Σ_R, где $d\omega$ — элемент телесного угла на Σ_R. В результате для второго интеграла получаем

$$\iint e^{ikR}\left[r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) + u\right]_{r=R} d\omega.$$

Значит, интеграл по сфере стремится к нулю при $R \to \infty$, если

$$\iint |u|\, d\omega = o(1) \quad \text{и} \quad \iint \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right| d\omega = o(R^{-1}),$$

где интегралы берутся при $r = R$. Эти условия известны как условия излучения Зоммерфельда. Их смысл состоит в том, что они задают условия, при которых в разложении u участвуют только уходящие волны и не участвуют приходящие[1]. Предположим, что эти условия выполнены. Тогда значения u вне некоторой поверхности S задаются формулой

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{e^{ikr}}{r} * du - u * d\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \right]. \qquad (\Gamma)$$

Итак, решение во внешности к S описывается в терминах «излучения, исходящего из S»[2]. Гюйгенсу принадлежит идея представить распространяющиеся возмущения в волновой теории как суперпозицию «вторичных возмущений» вдоль промежуточной поверхности, такой, как S. Однако Гюйгенс не дал адекватного объяснения, почему нет «обратной волны» т. е. почему распро-

---

[1] Точное математическое рассмотрение условий излучения Зоммерфельда можно найти в книге Лакса и Филлипса [4]. Дело обстоит следующим образом. Пусть $f = \{f_1, f_2\}$ — данные Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w = 0,$$

где $w(x, 0) = f_1$ и $(\partial w/\partial t)(x, 0) = f_2$. Будем говорить, что f — *эвентуально уходящие* данные, если существует такая константа c, что $w = 0$ при $|x| < t - c$. Если мы ищем решение с фиксированной частотой, то соответствующие данные Коши имеют вид $\{w, ikw\}$. Предположим, что w — решение стационарного волнового уравнения вне некоторой ограниченной области. Тогда данные $\{w, ikw\}$ эвентуально уходящие тогда и только тогда, когда удовлетворяются условия Зоммерфельда.

[2] Пока мы имеем дело с «монохроматическим излучением» и для соответствующей функции v, зависящей от времени: $v(x, y, z, t) = u(x, y, z)\, e^{-ikt}$. Для фиксированной точки P через v_P обозначим функцию $v_P(x, y, z, t) = v(x, y, z, t - r)$, где r — расстояние от P до (x, y, z). Тогда подстановка в формулу Гельмгольца дает

$$v(P, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(v_P * d(1/r) - (1/r)(\partial v_P/\partial t) * dr - (1/r) * dv_P\right).$$

Это формула Кирхгофа. Поскольку она линейна по v и не содержит явно частоту, то она справедлива и для любой суперпозиции монохроматических волн с разными частотами, а значит, и для произвольного решения волнового уравнения. В этой форме связь с принципом Гюйгенса очень наглядна, см. [5].

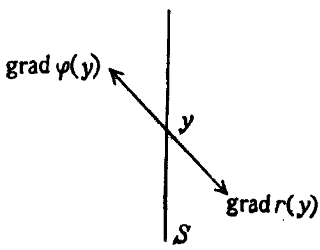
странение происходит только в направлении ухода. Френель высказал идею, что обратные волны взаимно гасятся из-за разницы фаз. Он думал, что если все источники находятся внутри S, то «вторичное излучение» (т. е. подынтегральное выражение в формуле Гельмгольца) из каждого отдельного элемента поверхности дает нулевой эффект в каждой внутренней точке из-за интерференции. Приведенное выше рассуждение, по существу принадлежащее Гельмгольцу, было первым математически строгим рассмотрением задачи. Оно показало, что внутреннее погашение — эффект, связанный со всей границей. Тем не менее, как мы увидим ниже, метод стационарной фазы показывает, что (при определенных предположениях) гипотеза Френеля верна с точностью до членов порядка $1/k$. Применим теперь метод стационарной фазы к формуле Гельмгольца. Функция u, фигурирующая в правой части формулы, осциллирует, и прежде всего мы должны сделать некоторые предположения о ее виде. Будем считать, что $u = ae^{ik\varphi}$ вблизи S, где a и φ — гладкие и $\|\operatorname{grad}\varphi\| = 1$. Это будет выполняться, например, если u представляет излучение из одной точки Q, лежащей внутри S, а $\varphi(y) = |y - Q|$. Кроме того, в следующей главе мы увидим, как строятся «аппроксимативные решения» стационарного волнового уравнения, которые имеют указанный вид для a и φ, произвольно заданных на S (от φ требуется только, чтобы $\operatorname{grad}\varphi$ не касался S). Эти «аппроксимативные решения» удовлетворяют волновому уравнению с точностью до членов порядка k^{-N} для сколь угодно больших N. Мы можем применить наши вычисления к этим аппроксимативным решениям. Здесь мы будем проводить вычисления по методу стационарной фазы только до порядка $1/k$.

Предположим, что мы находимся достаточно далеко от S, так что $1/r^2$ пренебрежимо мало по сравнению с k, и что a и da также малы по сравнению с k. Подстановкой в (Г) находим, что член наибольшего порядка (по степеням k) равен

$$\frac{ik}{4\pi}\iint\limits_S (a/r)\, e^{ik(\varphi + r)} (*\, d\varphi - *\, dr).$$

Далее, точки стационарной фазы — это те точки y на S, в которых $\operatorname{grad}\varphi(y) + \operatorname{grad} r(y)$ нормален к S. Возможны две ситуации:

случай (а)



$$\operatorname{grad}\varphi(y) = -\operatorname{grad} r(y)$$

$$*\, d\varphi(y) = -*\, dr(y)$$

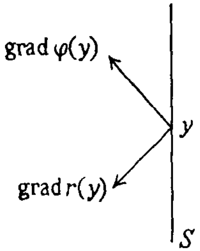
$$P = y + r \operatorname{grad}\varphi(y)$$

случай (b)

$$\operatorname{grad} \varphi(y) = 2(\operatorname{grad} \varphi(y),\ n)\, n - \operatorname{grad} r(y)$$

$$* d\varphi(y) = * dr(y)$$

$$P = y - r\,(2(\operatorname{grad} \varphi(y),\ n)\, n - \operatorname{grad} \varphi(y))$$



Предположим временно, что y — невырожденная критическая точка типа (b). Тогда старший член в формуле стационарной фазы обратится в нуль, и весь вклад, вносимый точкой y/ в формулу Гельмгольца, будет порядка 1аk. (Заметим, что если поверхность S выпуклая и grad φ направлен наружу, то для каждой точки P внутри S все критические точки относятся к типу (b). Это в некотором смысле подтверждает идею Френеля о «локальном погашении» обратных волн.) Для невырожденных критических точек типа (a), поскольку $* d\varphi(y) = - * dr(y)$, мы можем при вычислении вклада наивысшего порядка в формулу стационарной фазы заменить указанный выше интеграл на

$$\frac{ik}{2\pi} \iint (a/r)\, e^{ik(\varphi + r)} d * r.$$

Это показывает, что (до порядка $1/k$) индуцированное «вторичное излучение» вдоль S ведет себя так, как если бы:

(i) оно имело амплитуду, равную амплитуде основной волны, умноженной на $1/\lambda$, где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны, и

(ii) его фаза на четверть периода была сдвинута вперед по сравнению с основной волной. (Это способ интерпретировать множитель i.)

Френель ввел эти предположения непосредственно в свою формулировку принципа Гюйгенса, и по этой причине многие рассматривали его теорию как относящуюся только к этому случаю. Как мы видели, эти предположения являются следствием метода стационарной фазы и формулы Гельмгольца.

Мы еще должны обсудить вопрос о том, когда невырожденны критические точки. Мы ограничимся точками типа (a); точки типа (b) рассматриваются аналогично. Это обсуждение почти не будет отличаться от уже проведенного. Определим «экспоненциальное отображение» E: $S \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^3$ следующим образом:

$$E(y,\ r) = y + r \operatorname{grad} \varphi(y).$$

Тогда критические точки на S, связанные точкой P, — это такие y, что $E(y,\ r) = P$, где $r = |y - P|$. Если grad $\varphi(y)$ не касается S, то E — диффеоморфизм вблизи $(y,\ 0)$. В этих предположениях мы поступим, как на стр. 29. (Описанную там ситуацию можно рассмативать как частный случай, когда $\operatorname{grad}\varphi$ всюду нормален к S.) Показывается, что y — вырожденная критическая точка для $P = E(y, r)$ тогда и только тогда, когда (y, r) — точка, в которой отображение E сингулярно. В этом случае мы назовем P фокальной точкой отображения E в y. Как и прежде, если P не является фокальной точкой, то индекс гессиана функции $\varphi + r$ в y равен числу фокальных точек на отрезке, соединяющем y и P (с учетом кратностей). Проведение деталей мы предоставляем читателю.

Наконец, отметим, что если $\operatorname{grad}\varphi$ близок к нормали поверхности S, то фокальные точки отображения E, ассоциированного с φ, близки к соответствующим фокальным точкам поверхности. Таким образом, мы получаем объяснение опыта Гуи с двумя зеркалами, который упоминался в начале главы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gouy L. G. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, **110** (1890), 1251.
2. Poincaré H., Théorie mathématique de la lumière, II. — George Carré, Paris, 1892, pp. 168—174.
3. Милнор Дж. Теория Морса. Пер. с англ. — М.: Мир, 1965.
4. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. Пер. с англ. — М.: Мир, 1971
5. Baker B. B., Copson E. T. The mathematical theory of Huygens' principle. — Clarendon Press, Oxford, 1953.
6. Larmor J. — *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **19** (1919), 169—180.
7. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Пер. с англ. — М.: Наука 1970.
8. Palais R. S. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 968—971.
9. Golubitsky M., Guillemin V. — *Advances in Math.* **15** (1975), 2.
10*. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.

ЛЕММА МОРСА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

Пусть f — гладкая функция, определенная в окрестности начала в векторном пространстве V. Мы будем считать V конечномерным векторным пространством, хотя наши утверждения применимы и к банаховым пространствам. Предположим, что $f(0)=0$, $df(0)=0$ и $^1/_2 d^2 f(0)$ — невырожденная квадратичная форма Q. Лемма Морса утверждает, что можно сделать такую замену координат вблизи начала, что f станет в новых координатах квадратичной формой. Точнее: существуют такая окрестность U точки 0 и такой диффеоморфизм φ: $U \to V$, что

$$(f \circ \varphi) = Q(x, x).$$

Мы приводим доказательство Пале [8] (см. литературу к гл. I), которое основывается на более ранней идее Мозера. В дальнейшем мы воспользуемся той же техникой в ряде других доказательств.

Положим

$$f^t(x) = Q(x, x) + t(f(x) - Q(x, x)),$$

т. е.

$$f^1 = f, \quad f^0 = Q \quad \text{и} \quad \dot{f}^t = \frac{df^t}{dt} = f - Q.$$

Мы будем строить однопараметрическое семейство диффеоморфизмов φ^t, для которых

$$f^t \circ \varphi^t = f^0. \tag{I.1}$$

Тогда ясно, что φ^1 обладает нужным свойством. Пусть ξ^t — векторное поле, тангенциальное к φ^t, т. е.

$$\xi^t(\varphi^t(x)) = \frac{d\varphi^t}{dt}(x).$$

Дифференцируя (I.1), получаем

$$(\dot{f}^t + \xi^t f^t) \circ \varphi^t = 0.$$

Если бы мы смогли найти векторное поле ξ^t, зависящее от времени и такое, что $\dot{f}^t + \xi^t f^t \equiv 0$, то мы могли бы проинтегрировать его и получить однопараметрическое семейство диффеоморфизмов, удовлетворяющих (I.1). Таким образом, мы ищем векторное поле, удовлетворяющее условию $f^1 - f^0 + \xi^t f^t = 0$ или

$$df^t(\xi^t) = f^0 - f^1. \tag{I.2}$$

Далее, для любого x вблизи 0 и любого $v \in V$ имеем

$$df_x^t(v) = \int_0^1 \frac{d}{ds} df_{sx}^t(v)\, ds,$$

поскольку $df_0^t = 0$. Таким образом,

$$df_x^t(v) = \int_0^1 \frac{d}{ds} df_{sx}^t(v)\, ds = \int_0^1 d^2 f_{sx}^t(x,\ v)\, ds = B_x^t(x,\ v),$$

где B_x^t — квадратичная форма, определяемая равенством

$$B_x^t(u,\ v) = \int_0^1 d^2 f_{sx}^t(u,\ v)\, ds,$$

так что

$$B_x^t = B_x^0 + t\,(B_x^1 - B_x^0),$$

где $B_x^0 = 2Q$ не зависит от x. Далее, при $x = 0$ форма $B_0^t = 2Q$ невырожденна для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поэтому форма B_x^t невырожденна для всех x из некоторой окрестности точки 0 и всех $0 \leqslant t \leqslant 1$. Мы можем переписать (I.2) в виде

$$B_x^t(x,\ \xi^t) = f^0 - f^1. \tag{I.3}$$

Далее, $(f^0 - f^1)(0) = 0$ и $(df^0 - df^1)(0) = 0$. Значит, полагая $g = f^0 - f^1$, получаем

$$f^0 - f^1 = \int_0^1 \frac{d}{ds} g(sx)\, ds = \int_0^1 dg_{sx}(x)\, ds =$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 d^2 g_{rsx}(sx,\ x)\, dr\, ds = C_x(x,\ x),$$

где C_x — квадратичная форма

$$C_x(u,\ v) = \int_0^1 \int_0^1 d^2 g_{rsx}(su,\ v)\, dr\, ds.$$

Выберем теперь в качестве ξ^t единственное общее решение уравнений

$$B_x^t(u,\ \xi^t) = C_x(u,\ x)$$

для всех $u \in V$. Полученное таким образом поле ξ^t является гладким и $\xi^t(0)=0$ для всех t. Ограничивая, если потребуется, поле на меньшую окрестность начала, мы можем проинтегрировать ξ^t и получить нужное семейство φ^t. Отметим, что наша процедура такова, что если f гладко зависит от каких-то параметров, то φ также будет гладко зависеть от этих параметров.

Воспользуемся тем же доказательством, чтобы получить следующее очень полезное обобщение леммы Морса; см. Голубицкий и Гийемин [9].

Лемма. *Пусть f и g — гладкие функции, обращающиеся в нуль вместе со всеми первыми производными в точке $0 \in \mathbf{R}^n$. Предположим, что*

$$g = f + \sum h_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

где $h_{ij} = h_{ji}$ — гладкие функции, определенные около 0, и где

$$\sum_i h_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_k}(0) = 0, \quad i, k = 1, \ldots, n.$$

Тогда на $\mathbf{R}^n$ существует такой локально определенный диффеоморфизм φ, что $\varphi(0)=0$ и

$$\varphi^* f = g.$$

Если f, g и h гладко зависят от параметров, то тем же свойством обладает φ.

Доказательство. Как и прежде, положим

$$f^t = f + t \sum h_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

и будем искать такое векторное поле $\xi^t = (w_t^1, \ldots, w_t^n)$, что $\xi^t(0)=0$ и $f' + \xi^t f^t = 0$. Далее,

$$\frac{\partial f^t}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + t \sum_j \left[\sum_i \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} + 2 \sum_i h_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_k} \right] \frac{\partial f}{\partial x_j} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_k} + t \sum b_{kj} \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

где через b_{kj} обозначены выражения в скобках. В силу предположений, $b_{kj}(0)=0$. Поэтому если обозначить через B матрицу (b_{kj}), то матрица $I+tB$ будет обратимой для малых значений x. Пусть $C=(I+tB)^{-1}$, где $C=(c_{ij})$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum c_{ij} \frac{\partial f^t}{\partial x_j},$$

т. е.

$$f' = \sum_{l,i} h_{li} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{l,i,j} h_{li} \frac{\partial f}{\partial x_l} c_{ij} \frac{\partial f^t}{\partial x_j}.$$

Значит, если положить

$$w_t^j = -\sum_{l,\, i} h_{li} \frac{\partial f}{\partial x_l} c_{ij}$$

и $\xi^t = (w_t^1, \ldots, w_t^n)$, то $\xi^t(0) \equiv 0$ и $\dot{f}^t + \xi^t f^t = 0$. Поскольку ξ^t явно выражается через h и f, мы получаем гладкую зависимость от параметров, и лемма доказана.

Легко проверить, что если взять в качестве f вырожденную квадратичную форму, то мы придем к стандартной лемме Морса. Укажем еще несколько применений. Обозначим через m максимальный идеал кольца ростков C^∞-функций, состоящий из ростков, обращающихся в нуль в начале. Он порождается координатными функциями $x_1, \ldots, x_n$. Росток функции f имеет невырожденную критическую точку в 0 тогда и только тогда, когда идеал

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

совпадает с m. Здесь через $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ обозначен идеал, порожденный первыми производными f. Более общо, будем говорить, что функция f, имеющая 0 критической точкой, удовлетворяет условию Милнора порядка s, если

$$m^s \subset \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Имеет место следующий результат:

(Мезер, Тужрон) *Пусть f удовлетворяет условию Милнора порядка s, и пусть $g = f + u$, где $u \in m^{2s+1}$. Тогда существует такой локальный диффеоморфизм φ, что $\varphi^* g = f$.*

Доказательство. Поскольку

$$u \in m^{2s+1} \subset m \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2,$$

мы можем написать

$$u = \sum h_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

где $h_{ij}(0) = 0$, и применить лемму.

Заметим, что отсюда, в частности, следует, что любая функция f, удовлетворяющая условию Милнора, эквивалентна полиному. Голоморфная версия леммы связана с известным результатом В. И. Арнольда о том, что голоморфная функция с изолированной критической точкой эквивалентна полиному.

С другими применениями этой леммы мы встретимся в гл. IV

Глава II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

§ 1. Дифференциальные операторы

В предыдущей главе мы рассматривали решения стационарного волнового уравнения в высокочастотном приближении. При этом мы находили точное решение уравнения, а затем при помощи метода стационарной фазы строили аппроксимацию этого решения. Для общего линейного дифференциального уравнения нельзя рассчитывать найти решение в замкнутой форме. Однако можно надеяться найти «высокочастотную аппроксимацию» решения, не предъявляя самого решения. Реализацией этой идеи мы и будем заниматься в течение некоторого времени.

Начнем с того, что напомним понятие линейного дифференциального оператора. Пусть E и F — векторные расслоения на дифференцируемом многообразии M. Гладкое отображение векторного расслоения E в векторное расслоение F — это, по определению, гладкое сечение расслоения $\mathrm{Hom}(E, F)$ на M. Если T — такое отображение векторных расслоений и s — гладкое сечение расслоения E, то Ts — гладкое сечение расслоения F. Таким образом, T индуцирует отображение $L\colon C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ (где $C^\infty(E)$ — пространство гладких сечений расслоения E). Заметим, что L удовлетворяет условию

$$L(fu) = fLu$$

для любой функции f. Обратно, всякое отображение $L\colon C^\infty(E) \to C^\infty(F)$, коммутирующее с умножением на функции в указанном выше смысле, определяет сечение $\mathrm{Hom}(E, F)$. В самом деле, если $u(x) = 0$, то $u = \sum f_i v_i$, где $f_i(x) = 0$, а потому $(Lu)(x) = \sum f_i(x)(Lv_i)(x) = 0$. Таким образом, значение Lw в точке x зависит только от $w(x)$. Отображение $w(x) \longmapsto (Lw)(x)$ — элемент $\mathrm{Hom}(E, F)_x$, а значит, L определяет сечение расслоения $\mathrm{Hom}(E, F)$. Легко проверить, что это сечение гладкое.

Мы будем обозначать через f отображение $C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ (и $C^\infty(F) \to C^\infty(F)$), задаваемое умножением на f. Тогда сформулированное выше условие на L можно переписать так:

$$[L, f] = L\cdot f - f\cdot L = 0.$$

Будем называть такие операторы L *дифференциальными операторами степени нуль*; смысл этого названия вскоре прояснится. Будем обозначать пространство таких операторов через $\mathscr{D}_0(E, F)$.

Дифференциальным оператором степени (не выше) 1 называется линейный оператор

$$L\colon C^\infty(E) \to C^\infty(F),$$

для которого

$$[L, f] \in \mathscr{D}_0(E, F).$$

Заметим, что $[L, f]$ определяет сечение расслоения $\mathrm{Hom}(E, F)$. Обозначим это сечение через $\sigma(f)$. Поскольку оператор L линеен, $[L, c] = 0$ для любой константы c. Таким образом, $\sigma L(f+c) = \sigma L(f)$. Отметим также, что

$$[L, fg] = L\circ fg - fg\circ L = (L\circ f - f\circ L)\circ g + f\circ(L\circ g - g\circ L) = \\ = [L, f]g + f[L, g],$$

а поскольку $[L, f] \in \mathscr{D}_0(E, F)$, последнее выражение равно $g[L, f] + f[L, g]$. Значит, если f и g обращаются в нуль в точке x, то $\sigma L(fg)(x) = 0$. Отсюда следует, что если df обращается в нуль в точке x, то $\sigma L(f)(x) = 0$. Значит, $\sigma L(f)(x)$ зависит только от $df(x)$. Поэтому корректно определено отображение $\sigma(L)$: $T^*M_x \to \mathrm{Hom}(E, F)_x$. Это отображение принято называть *символом* дифференциального оператора L. Пусть $u_1, \ldots, u_m$ и $v_1, \ldots, v_n$ — локальные сечения, дающие базисы в E и F вблизи x, и пусть $x_1, \ldots, x_k$ — координаты на M в окрестности x. Тогда

$$L\left(\sum s_j u_j\right) = \sum A^r_{ij}\frac{\partial s_j}{\partial x_r} v_i + \sum B_{ij} s_j v_i.$$

Если ввести обозначения A^r для матрицы $\left(A^r_{ij}\right)$ и B для матрицы (B_{ij}), то можно записать это соотношение короче:

$$Ls = \sum A^r \frac{\partial s}{\partial x_r} + Bs,$$

и мы получаем матричное представление для $\sigma(L)(df)$:

$$\sigma(L)(df) = \sum A^r \frac{\partial f}{\partial x_r}.$$

В терминах локальных координат и тривиализаций ясно, что

$$Lu = \sum A^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Bu,$$

где A^i и B — сечения $\mathrm{Hom}(E, F)$, и

$$\sigma(L)(df) = \sum A^i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Дифференциальные операторы *степени* k можно определить по индукции. Линейное отображение $L\colon C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ называется *дифференциальным оператором степени* (не выше) $k+1$, если

$$[L,\ f] \in \mathscr{D}_k(E,\ F),$$

где через $\mathscr{D}_k(E,\ F)$ обозначено пространство дифференциальных операторов степени k. Ясно, что $\mathscr{D}_k(E,\ F) \subset \mathscr{D}_{k+1}(E, F)$; положим

$$\mathscr{D}(E,\ F) = \bigcup_k \mathscr{D}_k(E,\ F).$$

Рассматривая композицию операторов $K \in \mathscr{D}_l(F,\ G)$ и $L \in \in \mathscr{D}_k(E,\ F)$, получаем

$$K \circ L \in \mathscr{D}_{k+l}(E,\ G),$$

где E, F и G — три векторных расслоения над M.

Пусть $L \in \mathscr{D}(E,\ F)$, и пусть f, g — функции класса C^∞. Тогда

$$[[L,\ f],\ g] = [[L,\ g],\ f] + [L,\ [f,\ g]] = [[L,\ g],\ f],$$

поскольку $[f,\ g] = 0$. Значит, если $L \in \mathscr{D}_k(E,\ F)$ и $f_1,\ \ldots,\ f_k$ — функции класса C^∞, то $[\ldots[L,\ f_1],\ \ldots,\ f_k]$ — оператор степени нуль, симметрично зависящий от $f_1,\ \ldots,\ f_k$. Если рассматривать его как функцию от f_k, то можно воспользоваться результатом для дифференциальных операторов первого порядка и показать, что оператор зависит только от df_k. По симметрии он зависит только от $df_1,\ \ldots,\ df_k$. Таким образом мы определили симметрическую линейную функцию на

$$T^* \otimes \ldots \otimes T^*$$

со значениями в $\operatorname{Hom}(E,\ F)$. Соответствующий однородный полином на T^* называется *символом* оператора L и обозначается через $\sigma(L)$; значит,

$$\sigma(L)(df) = \frac{1}{k!}[\ldots[L,\ f],\ \ldots,\ f \qquad (k \text{ скобок}),$$

или, если обозначить $[L,\ f]$ через $(\operatorname{ad} f)L$, можно написать

$$\sigma(L)(df) = \frac{1}{k!}(\operatorname{ad} f)^k L.$$

Теперь воспользуемся стандартным рассуждением из элементарной теории алгебр Ли. Пусть s — (вещественное или комплексное) переменное; рассмотрим выражение $e^{-sf}Le^{sf}$ как функцию от s. Дифференцируя по s, получаем

$$\frac{d}{ds}(e^{-sf}Le^{sf}) = e^{-sf}(Lf - fL)e^{sf} = e^{-sf}[L,\ f]e^{sf}.$$

Далее, $[L,\ f]$ — снова дифференциальный оператор, и мы можем повторить процедуру. Таким образом,

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^l (e^{-sf}Le^{sf}) = e^{-sf}((\operatorname{ad} f)^l L)e^{sf}.$$

Если степень L равна k, $l > k$, то правая часть равна нулю. Значит, $e^{-sf}Le^{sf}$ — полином от s, и, применяя формулу Тейлора, получаем

$$e^{-sf}Le^{sf} = \sum_{0}^{k} \frac{(\operatorname{ad} f)^j L}{j!} s^j. \tag{1.1}$$

Исходя из этой формулы, можно найти явное выражение для $\sigma(L)(df)$ через локальные координаты. Предположим, что выбраны локальные тривиализации расслоений E и F и локальные координаты на M, так что L имеет вид

$$L = \int_{|\alpha| \leqslant k} A_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x_n)^{\alpha_n}}.$$

Здесь $E|_U \sim V \times U$, $F|_U \sim W \times U$, где U — некоторая окрестность на M, а A_α — функция из U в $\operatorname{Hom}(V, W)$. В выражении для $e^{-sf}Le^{sf}$ слагаемые, содержащие s^k, могут получиться только из членов с такими α, что $|\alpha| = k$. Значит,

$$\sigma(L)(df) = \sum_{|\alpha| = k} A_\alpha (df)^\alpha, \quad \text{где} \quad (df)^\alpha = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$$

или

$$\sigma(L)(\xi) = \sum_{|\alpha| = k} A_\alpha \xi^\alpha. \tag{1.2}$$

Вычислим $(\operatorname{ad} f)^{k-1}L/(k-1)!$. Соответствующий вклад будут давать члены степеней $k-1$ и k в L. Мы утверждаем, что имеет место равенство

$$\frac{(\operatorname{ad} f)^{k-1}L}{(k-1)!} = \left(\sum \frac{\partial \sigma(L)}{\partial \xi^i} (df) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \sigma(L)}{\partial \xi^i \partial \xi^j} (df) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \right.$$
$$\left. + \sum_{|\beta| = k-1} A_\beta (df)^\beta \right). \tag{1.3}$$

Третье слагаемое отвечает вкладу от компонент порядка $k-1$ в локальном представлении оператора L. Мы приведем два доказательства (1.3). Первое проводится по индукции (по k). При $k=1$ формула очевидна (в этом случае средний член в правой части равен нулю). Предположим, что формула справедлива для операторов степени k; докажем, что тогда она имеет место для операторов степени $k+1$ В силу линейности мы можем предполагать, что наш оператор имеет вид

$$A \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}, \qquad \text{где} \quad |\alpha| = k,$$

а поскольку A не существенно, можно считать, что мы имеем дело с оператором $(\partial/\partial x_r)(\partial^\alpha/\partial x^\alpha)$. Итак, мы ищем коэффициент при s^k в выражении

$$e^{-sf}\left(\frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)e^{sf} = e^{-sf}\left(\frac{\partial}{\partial x_r}\right)e^{sf}e^{-sf}\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)e^{sf} =$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_r} + s\frac{\partial f}{\partial x_r}\right]e^{-sf}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}e^{sf}.$$

Далее, по индукции,

$$e^{-sf}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}e^{sf} = (df)^\alpha s^k + \Bigl(\sum \alpha_i (df)^{\alpha-\delta_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + $$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j}\alpha_i(\alpha_j - \delta_{ij})(df)^{\alpha-\delta_i-\delta_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\Bigr)s^{k-1} + \ldots,$$

где точками отмечены члены более низкой степени по s. Здесь $\delta_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где 1 стоит на i-м месте, а на остальных местах — нули. Подставляя в предыдущее уравнение и выделяя коэффициент при s^k, получаем

$$(df)^\alpha\frac{\partial}{\partial x_r} + \frac{\partial}{\partial x_r}(df)^\alpha + \sum \alpha_i (df)^{\alpha-\delta_i+\delta_r}\frac{\partial}{\partial x_i} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum \alpha_i(\alpha_j - \delta_{ij})(df)^{\alpha-\delta_i+\delta_r-\delta_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} =$$
$$= \sum(\alpha + \delta_r)_i (df)^{\alpha+\delta_r-\delta_i}\frac{\partial}{\partial x_i} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum(\alpha+\delta_r)_i((\alpha+\delta_r)_j - \delta_{ij})\,df^{\alpha+\delta_r-\delta_i-\delta_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j},$$

откуда следует доказываемый результат.

Во втором доказательстве используется преобразование Фурье; оно дает формулы для всех членов в (1.1). При применении преобразования Фурье удобно пользоваться несколько иным представлением дифференциального оператора в локальных координатах. Положим

$$D^\alpha = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$$

т. е.

$$D^\alpha e^{i\xi\cdot x} = \xi^\alpha e^{i\xi\cdot x}.$$

Для любой C^∞-функции f с компактным носителем или для любой функции из пространства Шварца $\mathcal{S}$ определено ее преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-i\xi\cdot x} f(x)\,dx;$$

имеем

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)\,d\xi, \quad D^\alpha f = (2\pi)^{-n}\int e^{i\xi\cdot x}\xi^\alpha\hat{f}(\xi)\,d\xi.$$

Наиболее общий линейный дифференциальный оператор локально можно записать в виде

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(x) D^\alpha = \sum_{j=1}^{k} P_j(x, D),$$

где P_j — однородные полиномы от D:

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha D^\alpha,$$

т. е.

$$P_j(x, D) f = (2\pi)^{-n} \int e^{i\xi \cdot x} P_j(x, \xi) \hat{f}(\xi) \, d\xi,$$

$$P(x, D) f = (2\pi)^{-n} \int e^{i\xi \cdot x} P(x, \xi) \hat{f}(\xi) \, d\xi.$$

Положим

$$P^\gamma = \frac{\partial^\gamma}{\partial \xi^\gamma} P,$$

так что, в частности, $P^\gamma = 0$ при $|\gamma| > k$. Для каждой гладкой функции φ положим

$$h_\varphi(x, z) = \varphi(z) - \varphi(x) - \sum (z_j - x_j) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x).$$

Мы утверждаем, что

$$[e^{-i\tau\varphi} P(x, D) e^{i\tau\varphi}] u = \sum_{\gamma} \frac{1}{\gamma!} P^\gamma(x, \tau\, d\varphi) \left[D_z^\gamma \left(e^{i\tau h_\varphi(x, z)} u(z) \right] \right|_{z=x}, \qquad (1.4)$$

где через D_z^γ обозначен оператор D^γ по переменным z. Прежде чем доказывать (1.4), заметим, что коэффициент при $(i\tau)^j$ в левой части (1.4) в точности совпадает с j-м коэффициентом в (1.1). Кроме того, h_φ квадратично обращается в нуль при $z = x$. Значит, члены, отвечающие γ с $|\gamma| = 1$, в которых экспонента дифференцируется, обратятся в нуль при $z = x$. Таким образом, коэффициент при τ^k в (1.4) равен $P_k(x, d\varphi) u$, а коэффициент при τ^{k-1} имеет вид

$$P_{k-1}(x, d\varphi) u + \sum_{|\gamma|=1} P_k^\gamma(x, d\varphi) D^\gamma u + \sum_{|\gamma|=2} \frac{1}{\gamma!} P_k^\gamma(x, d\varphi) D^\gamma \varphi(x) u.$$

(Последний член имеет такой вид, поскольку $h_\varphi(x, z)$ и $\varphi(z)$ различаются на константу и линейные члены, а значит, имеют одинаковые вторые производные.) Если мы учтем множители с i, то получим (1.3).

Доказательство равенства (1.4) основывается на формуле Тейлора. Положим

$$v(x) = e^{i\tau\varphi(x)} u(x),$$

так что

$$P(x, D)(e^{i\tau\varphi}u) = P(x, D)v = (2\pi)^{-n}\int e^{i\xi\cdot x}P(x, \xi)\hat{v}(\xi)\,d\xi,$$

где $\hat{v}(\xi) = \int e^{-i\xi\cdot y}e^{i\tau\varphi(y)}u(y)\,dy$. Значит,

$$e^{-i\tau\varphi(x)}P(x, D)(e^{i\tau\varphi(x)}u) = (2\pi)^{-n}\int\int e^{i\xi\cdot(x-y)}e^{i\tau[\varphi(y)-\varphi(x)]}\times$$
$$\times P(x, \xi)u(y)\,dy\,d\xi =$$
$$= (2\pi)^{-n}\int\int e^{i(\xi-\tau\,d\varphi(x))\cdot(x-y)}P(x, \xi)e^{i\tau h(x, y)}u(y)\,dy\,d\xi.$$

Сделаем замену переменных $\eta = \xi - \tau\,d\varphi(x)$. Тогда последнее выражение примет вид

$$(2\pi)^{-n}\int e^{i\eta\cdot(x-y)}P(x, \eta+\tau\,d\varphi)e^{i\tau h(x, y)}u(y)\,dy\,d\eta$$

и, применяя формулу Тейлора к P в точке $\tau\,d\varphi(x)$, мы получим (1.4).

§ 2. Асимптотические сечения

Прежде чем переходить к рассмотрению понятия асимптотического решения дифференциального уравнения в частных производных, стоит напомнить несколько основных фактов из теории асимптотических рядов и переформулировать некоторые стандартные определения на геометрическом языке. Пусть f и g — две вещественнозначные функции на $\mathbf{R}^+$. Говорят, что f и g асимптотически равны (на бесконечности), если для любого $N > 0$ имеем

$$\lim_{\tau\to\infty}\tau^N(f(\tau) - g(\tau)) = 0. \tag{2.1}$$

Ясно, что это отношение эквивалентности; будем называть такие классы эквивалентности $[f]$ *асимптотическими числами*. Будем говорить, что асимптотическое число $[f]$ имеет асимптотическое разложение $[f] \sim \sum a_n\tau^{-n}$, если a_n — вещественные числа и для любого целого $N > 0$

$$\tau^N\left(f(\tau) - \sum_{n\leqslant N} a_n\tau^{-n}\right) \to 0. \tag{2.2}$$

Здесь все n предполагаются целыми. Ясно, что коэффициенты a_n полностью определяются классом $[f]$. Но, конечно, не всякое асимптотическое число $[f]$ имеет асимптотическое разложение. С другой стороны, по заданной последовательности $\{a_n\}$ всегда можно найти такую гладкую функцию f, что $[f] \sim \sum a_n\tau^{-n}$. Это старая теорема Э. Бореля, которая доказывается следующим образом. Выберем какую-нибудь C^∞-функцию ρ так, что $\rho(\tau) = 0$ при $\tau \leqslant 1$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ и $\rho(\tau) = 1$ при $\tau \geqslant 2$. Затем положим $f(\tau) = \sum a_n\rho(2^{-n-|a_n|}\tau)\tau^{-n}$ при $\tau \geqslant 1$. Заметим, что

$$\left|a_n\rho\left(2^{-n-|a_n|}\tau\right)\tau^{-n}\right| \leqslant \frac{|a_n|}{2^{n+|a_n|}},$$

поскольку левая часть обращается в нуль при $\tau < 2^{n+|a_n|}$. Это показывает, что ряд сходится для всех τ и что (2.2) имеет место.

Заметим, что (2.1) имеет смысл и тогда, когда в качестве f и g вместо вещественнозначных функций рассматриваются функции со значениями в каком-нибудь топологическом векторном пространстве V. Тогда мы будем говорить об асимптотических векторах, а не об асимптотических числах. Аналогично, мы будем говорить, что $[f]$ обладает асимптотическим разложением, если имеет место (2.2), где a_n — векторы из V. Например, можно рассматривать $V = C_0^\infty(E)$, где E — векторное расслоение над некоторым многообразием M, а в $C_0^\infty(E)$ вводится стандартная топология (в которой последовательность сечений сходится, если они имеют общий фиксированный носитель и равномерно сходятся вместе с производными до любого конечного порядка относительно некоторого — а значит, любого — выбора локальных тривиализаций и координат).

Пусть V и W — топологические векторные пространства и L: $V \to W$ — непрерывное линейное отображение. Тогда ясно, что L индуцирует линейное отображение асимптотических векторов на V в асимптотические векторы на W. Например, если V — пространство гладких плотностей с компактным носителем на многообразии M, то имеется линейное отображение $\int$: $V \to \mathbf{R}$, задаваемое интегрированием. Таким образом, если $[\rho]$ — асимптотическая плотность, то $\int[\rho] = [\int\rho]$ — асимптотическое число. Пусть L: $C_0^\infty(E) \to C_0^\infty(F)$ — дифференциальный оператор и $[s]$ — асимптотическое сечение расслоения E; тогда $L[s] = [Ls]$ — асимптотическое сечение расслоения F, и мы будем говорить, что $[s]$ — асимптотическое решение соответствующего однородного уравнения, если $L[s] = 0$. Пусть L: $V \to W$ — непрерывное отображение и $[f]$ имеет асимптотическое разложение $[f] \sim \sum a_n\tau^{-n}$; тогда $L[f]$ имеет асимптотическое разложение $[Lf] \sim \sum (La_n)\tau^{-n}$.

Если U, V и W — топологические векторные пространства и B: $U \times V \to W$ — непрерывное билинейное отображение, то предыдущие рассмотрения показывают, что $B([u], [v]) = [B(u, v)]$ — корректно определенный асимптотический элемент W, где $[u]$ и $[v]$ — асимптотические элементы в U и V соответственно. Если $u \sim \sum a_n\tau^{-n}$ и $v \sim \sum b_n\tau^{-n}$, то $B(u, v) \sim \sum c_n\tau^{-n}$, где

$$c_n = \sum_{i+j=n} B(a_i, b_j).$$

В частности, если через $L(V, W)$ обозначить пространство непрерывных линейных отображений из V в W, снабженное сильной топологией, то отображение перехода к образу: $L(V, W) \times V \to W$ непрерывно. Тогда асимптотический элемент $[A]$ из $L(V, W)$ можно называть асимптотическим оператором из V в W, и элемент

$[A][v]=[w]$ корректно определен, если $[v]$ — асимптотический элемент из V.

Пусть E и F — гладкие векторные расслоения над M. Под асимптотическим дифференциальным оператором из E в F мы будем понимать асимптотический оператор из $C_0^\infty(E)$ в $C_0^\infty(F)$, допускающий разложение

$$[L] \sim \sum \frac{L_k}{(i\tau)^k},$$

где L_k — дифференциальные операторы из E в F. Уравнение вида $[L][u]=[v]$, где $[u]$ и $[v]$ — асимптотические сечения расслоений E и F, называется *асимптотическим дифференциальным уравнением*. Например, стационарное волновое уравнение

$$(\Delta^2+\tau^2)\,u=0$$

можно рассматривать как асимптотическое дифференциальное уравнение, если записать его в виде

$$\left(1+\frac{1}{\tau^2}\,\Delta^2\right)u=0.$$

Отметим, что в наших математических рассмотрениях τ будет считаться параметром, используемым для введения отношения эквивалентности. В реальной ситуации (например, для волнового уравнения) интересуются большими, но фиксированными значениями τ.

В нашем определении асимптотического дифференциального оператора мы введем некоторые дополнительные ограничения на L_k. Мы потребуем, чтобы выполнялись условия

$$\deg L_k \leqslant k \tag{2.3}$$

и для всякого l

$$\deg L_k < k-l \quad \text{\textit{при всех } } k\text{\textit{, кроме конечного числа.}} \tag{2.4}$$

Условие (2.3) наложено лишь для удобства вычислений. Условие (2.4) несколько более существенно для рекуррентной процедуры построения асимптотического решения уравнения $[L][u]=0$, которая будет описана в следующем параграфе.

Пусть

$$D_{\tau j}=\frac{1}{i\tau}\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad D_\tau^\alpha=\left(\frac{1}{i\tau}\right)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}.$$

Тогда асимптотический дифференциальный оператор локально можно записать в виде

$$\sum_\alpha a_\alpha(x,\ \tau)\,D_\tau^\alpha, \tag{2.5}$$

где $a_\alpha(x, \tau) \sim \sum A_{\alpha j}(x)\tau^{-j}$. Условие (2.4) означает, что в (2.5) при всяком фиксированном j только конечное число $A_{\alpha j}$ не равно нулю.

§ 3. Метод Люнебурга — Лакса — Людвига

Мы не станем искать наиболее общие асимптотические сечения, удовлетворяющие асимптотическим дифференциальным уравнениям, а ограничимся подклассом асимптотических сечений, обладающих довольно хорошими геометрическими свойствами. В этом параграфе мы будем рассматривать еще более узкий класс асимптотических сечений — простые асимптотики. Общие асимптотики из указанного подкласса являются их естественными обобщениями. Будем говорить, что $[u]$ — *простое асимптотическое сечение* векторного расслоения E, если существуют функция φ и сечения u_n, для которых

$$[u] \sim e^{i\tau\varphi} \sum \frac{u_n}{(i\tau)^n}. \tag{3.1}$$

Функция φ называется *фазовой функцией* асимптотического сечения $[u]$. Предположим, что мы имеем асимптотический дифференциальный оператор $[L]$ из E в F и хотим найти для него простое асимптотическое решение. Значит, нам надо найти $[u]$ вида (3.1), удовлетворяющее уравнению $[L][u] = 0$. Далее, очевидно, что $[L][u]$ — простое асимптотическое сечение расслоения F с той же фазовой функцией φ:

$$[L][u] = e^{i\tau\varphi} \sum \frac{v_n}{(i\tau)^n},$$

и мы можем пытаться находить u_j рекуррентно, исходя из того, что $v_n = 0$. Определим $\sigma([L])$ формулой

$$\sigma([L]) = \sum_k \sigma(L_k), \quad \textit{где } L_k \textit{ рассматриваются как операторы порядка } k. \tag{3.2}$$

Таким образом, в (3.2) если $\deg L_k < k$, то $\sigma(L_k) = 0$. В силу (2.4) сумма в правой части (3.2) конечна. Ясно, что

$$v_0 = \sigma([L])(d\varphi)\, u_0,$$

а значит, сечение u_0 должно удовлетворять алгебраическому уравнению

$$\sigma([L])(d\varphi)\, u_0 = 0. \tag{3.3}$$

Далее, $\sigma([L])(d\varphi)$ — отображение векторного расслоения E в векторное расслоение F, и нет оснований ожидать, что для φ общего положения имеется нетривиальное ядро. Если мы хотим для каждой точки $m \in M$ уметь находить решения (3.3), отличные от нуля в окрестности m, то мы должны потребовать, чтобы

$$\ker \sigma([L])(d\varphi) \neq 0 \quad \text{для любого} \quad x. \tag{3.4}$$

Заметим, что это эквивалентно (нелинейному) дифференциальному уравнению первого порядка в частных производных относительно φ. Оно называется *характеристическим уравнением* для $[L]$. Например, в случае стационарного волнового уравнения (когда $[L]$ — скалярный оператор) характеристическое уравнение имеет вид

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right)^2 - 1 = 0.$$

Таким образом, первый шаг в нашем построении состоит в выборе функции φ, являющейся решением характеристического уравнения. Мы опишем процедуру нахождения решений таких уравнений в следующем параграфе. Оказывается, при помощи геометрических соображений можно найти только локальные решения φ. Предположим, что мы нашли решение φ уравнения (3.4). Следующий шаг состоит в выборе u_0, являющегося сечением из $\ker \sigma([L])(d\varphi)$.

Для дальнейшего заметим, что, как и в § 1,

$$e^{-i\tau\varphi}[L]e^{i\tau\varphi} \sim \sum_k \sum_j \frac{(\operatorname{ad}\varphi)^j L_k (i\tau)^j}{j!\,(i\tau)^k},$$

где коэффициент при $(i\tau)^{-l}$ содержит только конечное число слагаемых ввиду (2.4). Собирая коэффициенты при $(i\tau)^{-l}$, получаем

$$e^{-i\tau\varphi}[L]e^{i\tau\varphi} \sim \sum \frac{A_l([L],\ \varphi)}{(i\tau)^l}, \tag{3.5}$$

где $A_l([L],\ \varphi)$ — дифференциальный оператор порядка l, имеющий вид

$$A_l([L],\ \varphi) = \sum_k \frac{(\operatorname{ad}\varphi)^{k-l} L_k}{(k-l)!}, \tag{3.6}$$

где сумма, как мы только что отметили, конечна. При этом

$$A_0([L],\ \varphi) = \sigma([L])(d\varphi)$$

и в силу (1.3) A_1 имеет следующее локальное представление:

$$A_1([L],\ d\varphi) = \sum \frac{\partial \sigma([L])}{\partial \xi^i}(d\varphi)\frac{\partial}{\partial x^i} + \text{члены нулевого порядка}. \tag{3.7}$$

Далее,

$$[L]\left(e^{i\tau\varphi}\sum u_j (i\tau)^{-j}\right) = e^{i\tau\varphi}\sum_{l,\,j} A_l([L],\ \varphi)\, u_j\,(i\tau)^{-(j+l)},$$

так что из уравнения $[L][u]=0$ получаем

$$\begin{aligned} A_0([L],\ \varphi)\,u_0 &= 0,\\ A_0([L],\ \varphi)\,u_1 + A_1([L],\ \varphi)\,u_0 &= 0,\\ A_0([L],\ \varphi)\,u_2 + A_1([L],\ \varphi)\,u_1 + A_2([L],\ \varphi)\,u_0 &= 0, \end{aligned}$$

и т. д.

Мы уже обсудили первое из этих уравнений. Чтобы проанализировать второе, сделаем дополнительное предположение о $\sigma([L])(d\varphi)$, а именно что $\ker \sigma([L])(d\varphi)$ — векторное подрасслоение в E. (В частности, мы хотим, чтобы ранг $\sigma([L])(d\varphi)$ не менялся.) Обозначим через K_φ это ядро, а через C_φ — коядро, которое также является векторным расслоением. Итак, имеется точная последовательность

$$0 \to K_\varphi \xrightarrow{\iota_\varphi} E \xrightarrow{A_0([L],\ \varphi)} F \xrightarrow{\rho_\varphi} C_\varphi \to 0,$$

где ι_φ и ρ_φ — обычные вложение и проекция. Применим проекцию ρ_φ ко второму из выписанных уравнений. Получим

$$\rho_\varphi A_1([L],\ \varphi)\, u_0 = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных относительно u_0; оно называется *транспортным уравнением*. Более точно, определим линейный дифференциальный оператор первого порядка $R_\varphi\colon K_\varphi \to C_\varphi$ формулой

$$R_\varphi = \rho_\varphi \circ A_1([L],\ \varphi) \circ \iota_\varphi. \tag{3.8}$$

Тогда u_0 должно удовлетворять алгебраическому ограничению

$$u_0 \text{ — сечение расслоения } K_\varphi$$

и однородному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка

$$R_\varphi u_0 = 0.$$

Если u_0 удовлетворяет этим требованиям, то $A_1([L],\ \varphi)\, u_0$ лежит в образе оператора $A_0([L],\ \varphi)$, а значит, мы можем найти такое сечение $\bar{u}_1$ расслоения E, что

$$A_0([L],\ \varphi)\, \bar{u}_1 + A_1([L],\ \varphi)\, u_0 = 0.$$

Заметим, что $\bar{u}_1$ определяется с точностью до прибавления произвольного сечения $\bar{\bar{u}}_1$ расслоения K_φ. Положим $u_1 = \bar{u}_1 + \bar{\bar{u}}_1$ и проанализируем следующее уравнение

$$A_0([L],\ \varphi)\, u_2 + A_1([L],\ \varphi)\, u_1 + A_2([L],\ \varphi)\, u_0 = 0.$$

Применяя ρ_φ, получаем

$$R_\varphi \bar{\bar{u}}_1 + \rho_\varphi (A_1([L],\ \varphi)\, \bar{u}_1 + A_2([L],\ \varphi)\, u_0) = 0.$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка относительно $\bar{\bar{u}}_1$; оно называется *транспортным уравнением второго порядка*. Теперь ясно, как индуктивно продолжить эту процедуру. На каждом шаге мы решаем дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных вида

$$R_\varphi \bar{\bar{u}}_k + (\ldots) = 0,$$

где точками обозначены члены, содержащие u_j с индексами меньше k и $\bar{u}_k$. Это позволяет алгебраически найти сечение $\bar{u}_{k+1}$, которое определено с точностью до сечения $\bar{\bar{u}}_{k+1}$ расслоения K_φ; $\bar{\bar{u}}_{k+1}$ определяется из транспортного уравнения следующего порядка. В результате мы получаем процедуру для нахождения асимптотического решения. Более того, как мы увидим в нескольких следующих параграфах, при некоторых естественных предположениях на $[L]$ решение характеристического уравнения и транспортных уравнений сводится к решению *обыкновенных* дифференциальных уравнений.

Прежде чем перейти к рассмотрению характеристического уравнения, мы хотим объяснить, как можно применить описанную процедуру к вопросу о распространении разрывов решений уравнений в частных производных. Мы дадим здесь лишь короткие пояснения, поскольку позднее будем подробно обсуждать связь асимптотик и разрывных решений. Предполагается, что читатель свободно владеет элементарными понятиями теории распределений и, в частности, понятием обобщенного решения дифференциального уравнения в частных производных. Об этом будет подробно говориться в дальнейшем, а пока читатель может временно пропустить текст до конца параграфа.

Пусть L: $E \to F$ — линейный дифференциальный оператор первого порядка, и пусть u — обобщенное сечение расслоения E, имеющее разрыв в виде скачка. Более точно, предположим, что

$$u = H(\varphi)\, u_+ + H(-\varphi)\, u_-,$$

где u_+ и u_- — гладкие сечения расслоения E, φ — такая гладкая функция, что $d\varphi \neq 0$, когда $\varphi = 0$, и H — функция Хевисайда: $H(x) = 0$ при $x < 0$ и $H(x) = 1$ при $x > 0$. Таким образом, u претерпевает скачок с u_- в u_+ при переходе через поверхность $\varphi = 0$. Тогда

$$Lu = \sigma(L)(dH(\varphi))\, u_+ + \sigma(L)(dH(-\varphi))\, u_- + H(\varphi)\, Lu_+ + H(-\varphi)\, Lu_- =$$
$$= \delta(\varphi)\, \sigma(L)(d\varphi)(u_+ - u_-) + H(\varphi)\, Lu_+ + H(-\varphi)\, Lu_-.$$

Если $Lu = 0$, то должно быть $Lu_+ = 0$ при $\varphi > 0$, $Lu_- = 0$ при $\varphi < 0$ и, кроме того,

$$\sigma(L)(d\varphi)(u_+ - u_-) = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0.$$

Из этого уравнения можно вывести два сорта следствий. Во-первых, оно дает условия на допустимые скачки:

$$u_+ - u_- \in \ker \sigma(L)(d\varphi) \quad \text{при} \quad \varphi = 0.$$

Во-вторых, поверхность разрыва $\varphi = 0$ должна удовлетворять условию

$$\ker \sigma(L)(d\varphi) \neq \{0\} \quad \text{при} \quad \varphi = 0.$$

Заметим, что это не есть дифференциальное уравнение на φ, поскольку требуется, чтобы $\ker \sigma(L)(d\varphi) \neq \{0\}$ лишь при $\varphi = 0$.

Однако имеется важный случай, когда задача сводится к характеристическому уравнению. Пусть $X = M \times \mathbb{R}$ и расслоение E тривиально в $\mathbb{R}$-направлении; пусть

$$L = A \frac{\partial}{\partial t} + K,$$

где K: $E \to F$ — дифференциальный оператор, символ которого не зависит от t, и A также не зависит от t. Кроме того, предположим, что $\varphi = \psi - t$, где ψ не зависит от t. Тогда

$$\sigma(L)(d\varphi) = \sigma(K)(d\psi) - A$$

и уравнение

$$\ker(\sigma(K)(d\psi) - A) \neq \{0\} \tag{3.9}$$

не содержит t. Значит, если оно имеет место при $t = \psi$, то оно удовлетворяется тождественно. Таким образом, если скачки распространяются по времени вдоль поверхностей $t = \psi$, то ψ должна удовлетворять уравнению (3.9), которое называется уравнением *эйконала*. В частности, если $F = E$ и $A = \mathrm{id}$, то (3.9) можно переписать в виде

$$\det(\sigma(K)(d\psi) - \mathrm{id}) = 0.$$

§ 4. *Метод характеристик*

В этом параграфе мы приведем обзор теории интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, подобных (3.4). Обозначим через $\mathrm{Ch}([L])$ множество ковекторов γ, для которых $\sigma([L])(\gamma)$ имеет нетривиальное ядро. Значит, $\mathrm{Ch}([L])$ — подмножество в кокасательном расслоении:

$$\mathrm{Ch}([L]) \subset T^*M;$$

оно называется *характеристическим многообразием* оператора $[L]$. Тогда (3.4) можно переписать в виде

$$(d\varphi)(m) \in \mathrm{Ch}([L]) \quad \text{для всех} \quad m.$$

Если рассматривать $d\varphi$ как отображение из M в T^*M, то это уравнение означает, что образ отображения $d\varphi$ целиком лежит в $\mathrm{Ch}([L])$. Аналогично можно интерпретировать наиболее общее дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка: задано некоторое подмножество $\mathscr{V}$ в T^*M и ищется такая функция φ, что $d\varphi(M) \subset \mathscr{V}$. Далее, отображение $d\varphi$: $M \to T^*M$ является сечением T^*M, но не самого общего вида.

Разобьем анализ нашего дифференциального уравнения на две части:

(A) Ищем такое сечение $s: M \to T^*M$, что $s(M) \subset \mathscr{V}$.

(B) Сечение s должно иметь вид $s(m) = d\varphi(m)$ для всех m, где φ — некоторая функция.

Условие (B) допускает много эквивалентных переформулировок. Напомним (Люмис — Стернберг [4, гл. 13]), что на кокасательном расслоении имеется естественная линейная дифференциальная форма α, определяемая следующим образом. Пусть $\pi: T^*M \to M$ — естественная проекция и $\eta_\gamma \in T_\gamma(T^*M)$, где $\pi\gamma = m$. Тогда

$$\langle \eta_\gamma, \alpha_\gamma \rangle = \langle d\pi_\gamma \eta_\gamma, \gamma \rangle.$$

В частности, если s — сечение расслоения T^*M, т. е. $\pi \cdot s = \mathrm{Id}$, то при $\zeta_m \in T_m(M)$

$$\langle \zeta_m, (s^*\alpha)_m \rangle = \langle d\pi \cdot ds(\zeta_m), s(m) \rangle = \langle \zeta_m, s(m) \rangle$$

или, короче,

$$s^*\alpha = s.$$

В частности, $s = d\varphi$ тогда и только тогда, когда

$$s^*\alpha = d\varphi.$$

Мы можем двумя способами ослабить это условие. Во-первых, воспользуемся более слабым дифференциальным условием $ds^*\alpha = 0$ или $s^*\,d\alpha = 0$. Если положить $\omega = d\alpha$, то это уравнение примет вид $s^*\omega = 0$. Разумеется, локально это то же самое, что $s^*\alpha = d\varphi$. Во-вторых, ослабим требование, что s — отображение M в T^*M. Пусть Y — многообразие и $s: Y \to T^*M$. Будем говорить, что s *изотропно*, если $s^*\omega = 0$. Если $\dim Y = \dim M$ и s — иммерсия (т. е. ds инъективен во всех точках), то будем говорить, что Y (вместе с s) есть (*иммерсированное*) *лагранжево подмногообразие* в T^*M.

Заметим, что лагранжево подмногообразие — *максимальное изотропное* подмногообразие. Другими словами, если $z = s(y)$ и $\xi_z \in T(T^*M)_z$, причем $\langle \xi_z \wedge \eta_z, \omega_z \rangle = 0$ для всех $\eta_z \in ds_y TY_y$, то $\xi_z \in ds_y TY_y$. Действительно, поскольку форма ω_z невырожденна, она не может обращаться в нуль ни на каком $(n+1)$-мерном подпространстве $(n = \dim M)$, а по предположению она равна нулю на $ds_y TY_y$.

Заметим, что если $\iota: \Lambda \to T^*M$ — иммерсированное лагранжево подмногообразие и $\pi \cdot \iota$ — диффеоморфизм, то $\iota \cdot (\pi \cdot \iota)^{-1} = s$ — сечение расслоения T^*M, удовлетворяющее условию $s^*\omega = 0$. В результате мы можем исследовать проблему решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка следующим образом. Задается множество $\mathscr{V} \subset T^*M$. (Обычно $\mathscr{V}$ будет подмногообразием вблизи интересующих нас точек.) Ищется такое лагранжево подмногообразие $\iota\colon \Lambda \to T^*M$, что:

(i) $\iota(\Lambda) \subset \mathcal{V}$;

(ii) $\pi \circ \iota$ — диффеоморфизм;

(iii) $\iota^*\alpha = d\varphi$.

Метод характеристик Гамильтона — Якоби, который мы вскоре опишем, дает способ решить (i). Будет показано также, что можно *локально* решить (ii). Невозможность глобально решить (ii) объясняется явлением, обобщающим наличие фокальных точек и, следовательно, присущим самой геометрии задачи. Для (iii) опять-таки всегда существуют локальные решения, поскольку из $d\iota^*\alpha = 0$ следует, что локально $\iota^*\alpha = d\varphi$. Однако глобальная задача, вообще говоря, неразрешима. Как мы увидим в § 7, модифицированная версия глобальной задачи тесно связана с известными условиями квантования Бора — Зоммерфельда.

Перед тем как переходить к дальнейшему изложению, приведем несколько примеров лагранжевых подмногообразий в $X = T^*M$.

(a) Как мы уже отмечали, если φ — любая C^∞-функция, то $\Lambda = d\varphi(M)$ — лагранжево подмногообразие, поскольку $(d\varphi)^*\alpha = d\varphi$.

(b) Пусть $W \subset M$ — подмногообразие. Тогда $N(W) \subset T^*M$ — лагранжево подмногообразие. В действительности не только $\iota^*d\alpha = 0$, но и $\iota^*\alpha = 0$. В самом деле, если $z \in N(W)$, то $\langle \zeta_x, z\rangle = 0$ при $\zeta_x \in TW_x$, где $x = \pi z$. Поскольку $d\pi\eta_z \in TW_x$ при $\eta_z \in \in TN(W)_z$, получаем $\langle \eta_z, \alpha_z\rangle = \langle d\pi\eta_z, z\rangle = 0$.

Более общо, пусть Λ — *однородное* лагранжево подмногообразие, т. е. оно сохраняется при умножении на положительные вещественные числа. Через μ_t обозначим однопараметрическую группу отображений T^*M в себя, отвечающих умножению на t, и пусть η — соответствующее векторное поле. Поскольку $\pi \circ \mu_t = \pi$, имеем $\mu_t^*\alpha = t\alpha$, а потому

$$D_\eta\alpha = \frac{d}{dt}\mu_t^*\alpha\,|_{t=0} = \alpha.$$

Но

$$D_\eta\alpha = \eta \,\lrcorner\, d\alpha + d(\eta \,\lrcorner\, \alpha).$$

Поскольку $d\pi\eta = 0$, последнее слагаемое обращается в нуль и

$$\eta \,\lrcorner\, \omega = \alpha.$$

Далее, инвариантность Λ относительно μ_t означает, что поле η касается образа Λ, т. е. $\iota^*\eta$ — корректно определенное векторное поле на Λ и $\iota^*\alpha = \iota^*\eta \,\lrcorner\, \iota^*\omega = 0$. Итак, доказано, что

если Λ — однородное лагранжево подмногообразие, то $\iota^*\alpha = 0$.

Пусть, например, W — подмногообразие в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. В главе I мы отождествили $N(W)$ с множеством всех таких $(y, v) \in \mathbf{R}^m + \mathbf{R}^m$, что $y \in W$ и $v \cdot dy = 0$. На $\mathbf{R}^m + \mathbf{R}^m$ форма α задается формулой $\alpha_{(y,v)} = v \cdot dy$, так что $\alpha|_{N(W)} = 0$.

Рассмотрим в $\mathbf{R}^m$ образ $N(W)$ при экспоненциальном отображении E. Экспоненциальное отображение можно интерпретировать следующим образом. Обозначим через $N_1(W)$ расслоение, состоящее из таких пар (y, v), что вектор v ортогонален W в точке y и $\|v\| = 1$. Пусть отображение G: $N_1(W) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m + \mathbf{R}^m$ задается так: $G(y, v, t) = (y + tv, v)$. Тогда G — иммерсия. Кроме того,

$$G^*\alpha = v \cdot d(y + tv) = v \cdot dy + dt + tv \cdot dv.$$

Но $v \cdot dy = 0$ по определению и $v \cdot dv = 0$, поскольку $v \cdot v \equiv 1$. Значит,

$$G^*\alpha = dt,$$

откуда следует, что G: $N_1(W) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m + \mathbf{R}^m$ — лагранжево подмногообразие. Заметим, что экспоненциальное отображение можно рассматривать как композицию $\pi \cdot G$, где π — проекция $T^*\mathbf{R}^m$ на $\mathbf{R}^m$. Фокальные точки — это в точности критические точки отображения $\pi \cdot G$.

До конца параграфа мы будем вести рассмотрения в несколько более широких рамках *симплектических многообразий*. Многообразие X называется *симплектическим*, если X снабжено невырожденной замкнутой 2-формой ω. Другими словами, на X задана такая 2-форма ω, что $d\omega = 0$ и отображение векторов в ковекторы вида $\xi_x \mapsto \xi_x \lrcorner \omega$ является изоморфизмом в каждой точке $x \in X$. Например, форма $\omega = d\alpha$ на T^*M превращает T^*M в симплектическое многообразие. (Это легко проверить, воспользовавшись выражением α в локальных координатах. Если $q^1, \ldots, q^n$ — координаты на M, а $p^1, \ldots, p^n$ — соответствующие координаты в T^*M, то $\alpha = p^1\, dq^1 + \ldots + p^n\, dq^n$ и форма

$$\omega = dp^1 \wedge dq^1 + \ldots + dp^n \wedge dq^n,$$

разумеется, замкнута и невырожденна.) Симплектические многообразия будут подробно изучены в гл. IV. Понятия изотропного подмногообразия и лагранжева подмногообразия сохраняют смысл в контексте симплектических многообразий.

Теперь обобщим конструкцию предыдущего примера. Пусть X — симплектическое многообразие. Для каждой гладкой функции f определим векторное поле ξ_f следующим образом: $\xi_f \lrcorner \omega = -df$. Пусть, далее, H — такая гладкая функция, что $dH \neq 0$, если $H = 0$. (В предыдущем примере $X = T^*\mathbf{R}^m$ и $H(x, v) = v \cdot v - 1$.) Пусть φ — поток, порождаемый полем ξ_H, и $\mathcal{V}$ — подмногообразие, задаваемое уравнением $H = 0$.

Предложение 4.1. *Пусть $Y \subset \mathcal{V}$ — изотропное подмногообразие, трансверсальное векторному полю ξ_H (т. е. ξ_H нигде не касается Y). Тогда отображение*

$$\varphi\colon Y \times \mathbf{R} \to X,$$

имеющее вид $\varphi(y, t) = \varphi_t(y)$, *является изотропной иммерсией* $Y \times \mathbf{R}$ *в* $\mathcal{V}$.

Доказательство. Из того что $\xi_H H = 0$, следует, что ξ_H касается $\mathcal{V}$ и $\varphi_t \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$, а значит, $\varphi(Y \times \mathbf{R}) \subset \mathcal{V}$. Далее,

$$d\varphi_{(y,t)}\left(\eta_y + c\frac{\partial}{\partial t}\right) = d\varphi_t \eta_y + c\xi_H(\varphi(y, t)) = d\varphi_t(\eta_y + c\xi_H(y)).$$

Поскольку φ_t — диффеоморфизм, обращение в нуль последнего выражения означает, что $\eta_y + c\xi_H(y) = 0$. По предположению, этого не может быть, если только не верно, что $\eta_y = 0$ и $c = 0$. Таким образом, φ — иммерсия. Наконец, мы должны показать, что

$$\langle \zeta \wedge \eta, \varphi^* \omega \rangle = 0$$

для всех касательных векторов ζ и η к $Y \times \mathbf{R}$. Ясно, что достаточно рассмотреть два случая:

(i) ζ и η оба касаются Y;

(ii) $\zeta = \partial/\partial t$ и η касается Y.

В случае (i) имеем при $\zeta, \eta \in T(Y \times \mathbf{R})_{y,t}$

$$\langle \zeta \wedge \eta, \varphi^* \omega \rangle = \langle d\varphi_{(y,t)}\zeta \wedge d\varphi_{(y,t)}\eta, \omega \rangle = \langle d\varphi_t \zeta \wedge d\varphi_t \eta, \omega \rangle = \\ = \langle \zeta \wedge \eta, \varphi_t^* \omega \rangle = \langle \zeta \wedge \eta, \iota^* \omega \rangle = 0,$$

поскольку Y изотропно. В случае (ii) получаем

$$\langle \xi_H(\varphi) \wedge d\varphi_t \eta, \omega \rangle = \langle \xi_H \wedge \eta, \varphi_t^* \omega \rangle = \langle \xi_H \wedge \eta, \iota^* \omega \rangle = \\ = \langle \eta, \iota^*(\xi_H \lrcorner\, \omega) \rangle = \langle \eta, dH \rangle = 0,$$

поскольку $H = 0$ на $\mathcal{V}$ и $Y \subset \mathcal{V}$; предложение доказано.

Индуктивное повторение предыдущего рассуждения позволяет получить основную теорему об интегрировании для лагранжевых подмногообразий. Введем вначале некоторые обозначения.

На всяком симплектическом многообразии можно ввести антикоммутативную операцию на гладких функциях, известную как *скобка Пуассона*. Для гладких функций f и g положим

$$\{f, g\} = \xi_f g.$$

Поскольку $\xi_f g = \langle \xi_f, dg \rangle = \langle \xi_f, \xi_g \lrcorner\, \omega \rangle = \langle \xi_g \wedge \xi_f, \omega \rangle$, мы видим, что $\{f, g\} = -\{g, f\}$. Ясно также, что

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g.$$

Далее, если применить производную Ли относительно ξ_f к уравнению $\xi_g \lrcorner\, \omega = -dg$, то мы получим

$$[\xi_f, \xi_g] \lrcorner\, \omega + \xi_g \lrcorner\, D_{\xi_f}\omega = -d(\xi_f g) = -d\{f, g\}.$$

Но $D_{\xi_f}\omega = \xi_f \lrcorner\, d\omega + d(\xi_f \lrcorner\, \omega) = 0$, поэтому

$$[\xi_f, \xi_g] = \xi_{\{f, g\}}.$$

Пусть $\mathcal{V}$ — подмногообразие симплектического многообразия X, и пусть z — точка $\mathcal{V}$. Будем говорить, что $\mathcal{V}$ *интегрируемо в точке* z, если для любой пары функций f и g, равных нулю на $\mathcal{V}$, имеем $\{f, g\}(z)=0$. Другими словами, если обозначить через $\mathcal{J}(\mathcal{V})$ идеал, состоящий из всех гладких функций, равных нулю на $\mathcal{V}$, то из $f \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$ и $g \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$ следует, что $\{f, g\}(z)=0$. Будем говорить, что $\mathcal{V}$ *интегрируемо*, если оно интегрируемо во всех своих точках. Другими словами, интегрируемость $\mathcal{V}$ означает, что $\{\mathcal{J}(\mathcal{V}), \mathcal{J}(\mathcal{V})\} \subset \mathcal{J}(\mathcal{V})$. Чтобы пояснить значение понятия интегрируемости, отметим следующее.

Предположим, что существует такое лагранжево многообразие Λ, *что* $z \in \Lambda \subset \mathcal{V}$. *Тогда* $\mathcal{V}$ *интегрируемо в точке* z.

В самом деле, если $f \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$, то $df|_V=0$ и, значит, $df|_\Lambda=0$. Таким образом, $\xi_f \lrcorner\, \omega$ равно нулю на всех касательных векторах к Λ. Поскольку $T\Lambda$ максимальное изотропное (во всех точках), отсюда следует, что ξ_f касается Λ. Но тогда если $g \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$, то $\{f, g\}=\langle \xi_f, dg\rangle=0$ во всех точках Λ и, в частности, в точке z.

Пусть $\mathcal{V}$ — интегрируемое подмногообразие в X. Если $f \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$, то $\langle \xi_f, dg\rangle_z=0$ для всех $g \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$ и для всех $z \in \mathcal{V}$. Поскольку такие dg порождают весь аннулятор в $T\mathcal{V}_z$, получаем

если подмногообразие $\mathcal{V}$ *интегрируемо, то* ξ_f — *касательное поле к* $\mathcal{V}$ *для всех* $f \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$.

Поскольку $[\xi_f, \xi_g]=\xi_{\{f, g\}}$, векторные поля вида ξ_f, $f \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$, образуют алгебру Ли. Если $\mathcal{V}$ имеет коразмерность k, то такие ξ_f порождают k-мерное подпространство в $T\mathcal{V}_z$ при каждом z. В результате имеет место

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathcal{V}$ — *интегрируемое подмногообразие коразмерности* k *в симплектическом многообразии* X *размерности* $2n$. *Пусть, далее,* $\Lambda_0 \subset \mathcal{V}$ — *изотропное подмногообразие размерности* $n-k$, *трансверсальное полям* ξ_f *для всех* $f \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$. *Тогда существует такое лагранжево подмногообразие* Λ, *что* $\Lambda_0 \subset \Lambda \subset \mathcal{V}$.

Доказательство. Как мы уже отмечали, каждое лагранжево подмногообразие $\mathcal{V}$ должно касаться всех ξ_f. На языке слоений ξ_f определяет слоение на $\mathcal{V}$, и мы должны взять в качестве Λ объединение листов слоения, проходящих через Λ_0. Лагранжевость Λ следует тогда из предложения 4.1, примененного несколько раз. Подробнее, допустим, что мы можем найти такие $f_1, \ldots, f_k$, что $\xi_{f_1}, \ldots, \xi_{f_k}$ линейно независимы на $\mathcal{V}$. (Это всегда можно сделать локально. Переход от локальной конструкции к глобальной мы предоставляем читателю.) Пусть тогда Λ_1 — подмногообразие, получающееся из Λ_0 под действием потока, порожденного ξ_{f_1}. По предложению 4.1 оно изотропно. Пусть, далее, Λ_2 — подмногообразие, полученное из Λ_1 под действием потока, порожденного ξ_{f_2}, и т. д. Построенное в результате подмногообразие $\Lambda=\Lambda_k$ будет лагранжевым.

Теорема 4.1 позволяет строить лагранжевы подмногообразия, отправляясь от изотропных подмногообразий. Обсудим коротко вопрос о проектировании на M. Предположим, что $\mathcal{V}$ локально задается уравнениями $f_1=0, \ldots, f_k=0$. Кроме того, предположим, что векторные поля

$$\xi_1=\xi_{f_1}, \ldots, \xi_k=\xi_{f_k}$$

таковы, что $d\pi_z\xi_{1z}, \ldots, d\pi_z\xi_{kz}$ — линейно независимые векторы в TM_x, где $x=\pi z$. Если бы мы смогли так выбрать начальное изотропное подмногообразие Λ_0, чтобы

$$\{d\pi_z(T\Lambda_0)_z, d\pi_z\xi_{1z}, \ldots, d\pi_z\xi_{kz}\}=TM_x,$$

то по нашему построению Λ было бы $d\pi_z T\Lambda_z=TM_z$, т. е. $\pi\circ\iota$ — диффеоморфизм вблизи z.

Опишем эту процедуру в локальных координатах. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — локальные координаты на M, $q_i=x_i\circ\pi$ и p_i — соответствующие локальные координаты на T^*M. Если f — произвольная функция, то

$$\xi_f=\sum\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Предположим, что $\mathcal{V}$ задается системой уравнений $f_1=0, \ldots$ $\ldots, f_k=0$ и что эти уравнения разрешены относительно $p_1, \ldots, p_k$. Другими словами, предположим, что

$$f_1=p_1-g_1(q_1, \ldots, q_n, p_{k+1}, \ldots, p_n), \ldots,$$
$$f_k=p_k-g_k(q_1, \ldots, q_n, p_{k+1}, \ldots, p_n).$$

Тогда

$$\xi_{f_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}-\sum_{k+1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j}+\sum_{1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}.$$

Ясно, что $d\pi_z\xi_1, \ldots, d\pi_z\xi_k$ линейно независимы. Пусть, далее, $z=(q_1^0, \ldots, q_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0)$ — точка на $\mathcal{V}$. В качестве Λ_0 возьмем подмногообразие

$$q_1=q_1^0, \ldots, q_k=q_k^0; \quad p_{k+1}=p_{k+1}^0, \ldots, p_n=p_n^0;$$
$$p_l=g_i(q_1^0, \ldots, q_k^0, q_{k+1}, \ldots, q_n, p_{k+1}^0, \ldots, p_n^0),$$

$l=1, \ldots, k$, где $q_{k+1}, \ldots, q_n$ близки к $q_{k+1}^0, \ldots, q_n^0$. Значит, Λ_0 — подмногообразие размерности $n-k$ в $\mathcal{V}$, трансверсальное к $\xi_{f_1}, \ldots, \xi_{f_k}$ и удовлетворяющее требуемым условиям относительно проектирования на M. Для доказательства того, что Λ_0 изотропно, заметим, что $\omega=\sum dp_i\wedge dq_i$ и ограничение на Λ_0 дает $dq_1=\ldots=dq_k=0$, $dp_{k+1}=\ldots=dp_n=0$. Отсюда $\iota^*\omega=0$.

§ 5. Бихарактеристики

Мы хотим применить технику предыдущего параграфа к характеристическому уравнению и транспортным уравнениям. Наш основной результат состоит в том, что (по крайней мере локально) исследование этих уравнений сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих дифференцирование вдоль поля линейных элементов на характеристическом многообразии. Эта редукция имеет место, если $[L]$ имеет вещественные «простые характеристики». Этот термин будет объяснен ниже. (Грубо говоря, условие состоит в том, что характеристическое многообразие является хорошим подмногообразием коразмерности 1 в довольно сильном смысле.)

Напомним ситуацию, рассмотренную в § 3. В каждой точке $z \in T^*M$ задано линейное отображение $\sigma(z)$: $E_{\pi z} \to F_{\pi z}$, где $\sigma(z) = \sigma([L], z)$ — символ оператора $[L]$ в точке z. Мы можем считать векторные расслоения E и F поднятыми на $X = T^*M$ при помощи π. (Строго говоря, при этом следовало переменить обозначение.) Итак, имеется следующая ситуация: $X\ (=T^*M)$ — симплектическое многообразие и σ: $E \to F$ — морфизм векторных расслоений. Для каждой точки $z \in X$ имеется точная последовательность

$$0 \to K_z \to E_z \xrightarrow{\sigma(z)} F_z \to C_z \to 0,$$

где $K_z = \ker \sigma(z)$, $G_z = \operatorname{coker} \sigma(z)$. Характеристическое многообразие $\mathscr{V}$ состоит из таких z, что $K_z \neq \{0\}$. Тогда решение характеристического уравнения — это лагранжево подмногообразие в $\mathscr{V}$ (которое, кроме того, диффеоморфно проектируется на M). Мы утверждаем, что для каждой точки z корректно определено линейное отображение

$$\mathscr{R}_z\colon\ K_z \otimes T_z^* \to C_z,$$

называемое *бихарактеристическим символом, ассоциированным с* σ. Оно определяется при помощи понятия *внутреннего дифференцирования*, имеющего смысл на любом многообразии X. Мы его сейчас определим. После довольно длинного обсуждения понятия внутреннего дифференцирования мы вернемся к определению $\mathscr{R}_z$. Пусть σ: $E \to F$ — отображение векторных расслоений над X и $z \in X$. Выберем тривиализации $E \sim E_z \times U$ и $F \sim F_z \times U$ в окрестности z. На языке тривиализаций σ определяет отображение A: $E_z \to F_z$ при каждом $z \in U$. Для произвольного $e \in E_z$ выберем функцию s: $U \to E_z$, для которой $s(z) = e$. Тогда As — функция со значениями в векторном пространстве F_z. Мы можем сосчитать ее дифференциал в точке z. Пусть ρ_z — проекция F_z на C_z. Для любого касательного вектора ξ в точке z положим

$$I_z(e \otimes \xi) = \rho_z(\langle \xi,\ d(As)\rangle).$$

Мы утверждаем, что если $e \in K_z$, то правая часть не зависит от выбора s и тривиализаций, а значит, определено отображение

$$I_z: K_z \otimes T_z \to C_z,$$

называемое *внутренним дифференцированием*.

(i) *Независимость от выбора* s. Выберем какую-нибудь другую функцию s'. Тогда $s - s' = \sum s_i e_i$, где $s_i(z) = 0$. Значит, $A(s - s') = \sum s_i A e_i$, так что

$$d(A(s - s'))_z = \sum (ds_i)_z (Ae_i)_z$$

и

$$\rho_z \langle \xi, dA(s - s') \rangle = \rho_z (\sum \langle \xi, ds_i \rangle Ae_i) = \rho_z A (\sum \langle \xi, ds_i \rangle e_i) = 0.$$

(ii) *Независимость от выбора тривиализации*. Изменение тривиализации означает замену A на BAC, где C — функция в окрестности z со значениями в $\operatorname{Hom}(E_z, E_z)$, а B со значениями в $\operatorname{Hom}(F_z, F_z)$, причем $C(z) = \mathrm{id}$ и $B(z) = \mathrm{id}$. В силу (i) мы можем предполагать, что $s \equiv e$ — константа. Тогда

$$d(BACs)_z = (dB)_z A_z e + dA_z e + A_z (dC)_z e.$$

Первое слагаемое равно нулю, так как $e \in \ker \sigma_z = \ker A_z$. Третье слагаемое лежит в F_z и после проектирования на C_z обращается в нуль. Таким образом, $\rho_z d(BACe)_z = \rho_z dA_z e$. В результате понятие внутреннего дифференцирования корректно определено.

Например, если E и F — линейные расслоения, то, выбирая ненулевые сечения в E и F (к этому сводится тривиализация), мы представляем σ в виде умножения на функцию f. При изменении сечений функция f заменяется на fg, где $g \neq 0$. Далее, в точках, где $f(z) = 0$, ядро и коядро одномерны и внутреннее дифференцирование имеет вид df, т. е. для любого ξ на языке тривиализаций имеем $I_z(e, \xi) = \langle \xi, df \rangle e$. (Здесь $E_z = K_z$ и $F_z = C_z$.) Заметим, что если $df_z \neq 0$, то $\mathcal{V}$ является подмногообразием в окрестности z, причем нормальное расслоение порождается df.

Этот пример можно обобщить. Пусть $\dim E = \dim F$ и $\dim K_z = 1$, $I_z \neq 0$. Мы утверждаем, что *тогда* $\mathcal{V}$ — *подмногообразие коразмерности* 1 *в окрестности* z *и* $\dim K_x = 1$ *при* $x \in \mathcal{V}$ *в окрестности* z. Тогда ясно, что $\dim C_x = 1$ и $I_x \in \operatorname{Hom}(K_x \otimes T_x, C_x)$, что изоморфно $T_x^* \otimes \operatorname{Hom}(K_x, C_x)$. Значит, поскольку $I_x \neq 0$ и $\dim \operatorname{Hom}(K_x, C_x) = 1$, I_x определяет прямую в T_x^*, и мы утверждаем, что *эти прямые образуют нормальное расслоение к* $\mathcal{V}$.

Для доказательства этих утверждений выберем дополнение L_z к K_z и включим его в окрестности точки z в подрасслоение

$L \subset E$. Тогда ограничение σ на L несингулярно и определяет подрасслоение $Q = \sigma L$ в F. Отображение σ индуцирует отображение σ': $E/L \to F/Q$, где E/L и F/Q — уже линейные расслоения. Ясно, что в точке z имеем $K_z \sim E_z/L_z$ и $C_z \sim F_z/Q_z$ и при этом отождествлении σ и σ' имеют одну и ту же внутреннюю производную в точке z. Значит, внутренняя производная для σ' не равна нулю в точке z, и мы можем применить предыдущий результат к σ' и получить, что множество точек, в которых $\sigma'(x) = 0$, является подмногообразием в окрестности z. Теперь заметим, что если $\sigma'(x) = 0$, то $\sigma'(x)$, а значит, и $\sigma(x)$ не являются сюръективными. Поскольку $\dim E = \dim F$, это означает, что $K_x \neq \{0\}$, т. е. $x \in \mathscr{V}$. Таким образом, $\mathscr{V}$ — подмногообразие в окрестности z, а остальные утверждения легко доказываются аналогичным образом.

Если $\dim E = \dim F$ и $\dim K_z = 1$, $I_z \neq 0$, то будем говорить, что символ σ является *простым* в точке z. Будем говорить, что асимптотический дифференциальный оператор $[L]$ имеет *вещественные простые характеристики*, если его символ $\sigma([L])$ является простым для всех z. Для дифференциальных операторов (когда символ σ однороден) мы ослабим это условие, потребовав, чтобы σ был простым при $z \neq 0$.

Заметим, что если $\mathscr{V}$ — подмногообразие в окрестности z и K' — подрасслоение в E, для которого $K'_x \subset K_x$ при $x \in \mathscr{V}$ (в окрестности z), то $I(k \otimes \xi) = 0$ для векторов ξ, касательных к $\mathscr{V}$, и $k \in K'_z$. Действительно, мы можем выбрать s так, чтобы $As \equiv 0$ на $\mathscr{V}$.

Как мы отмечали, понятие внутреннего дифференцирования имеет смысл для произвольного многообразия. Теперь предположим, что многообразие X симплектично. Тогда 2-форма ω отождествляет TX и T^*X: если $\xi \in TX_z$ — касательный вектор, то $-\xi \lrcorner \omega$ — ковектор в точке z, причем это отображение является изоморфизмом ввиду невырожденности ω. Таким образом, I_z: $K_z \otimes T_z \to C_z$ определяет отображение $\mathscr{R}_z$: $K_z \otimes T^*_z \to C_z$, которое и есть упомянутый выше *бихарактеристический символ*. Предположим, что E и F — линейные расслоения и $\mathscr{R}_z \neq 0$. Тогда $\mathscr{R}_z$ определяет сечение $\mathrm{Hom}(K \otimes T^*, C) \simeq T \otimes \mathrm{Hom}(K, C)$ вдоль $\mathscr{V}$. Поскольку $\mathrm{Hom}(K, C)$ — линейное расслоение, это сечение определяет одномерное подрасслоение в T вдоль $\mathscr{V}$, т. е. поле линейных элементов. Если локально представить σ как умножение на некоторую функцию f, то $\mathscr{V}$ будет задаваться локально уравнением $f = 0$, нормальное расслоение к $\mathscr{V}$ будет порождаться df, а соответствующее линейное поле на $\mathscr{V}$ будет порождаться ξ_f. Так как $\mathscr{V}$ имеет коразмерность 1, оно автоматически интегрируемо, причем ξ_f — это в точности то поле, которое участвовало в построениях § 4. Конечно, само ξ_f не определяется инвариантно, но порождаемое им линейное поле уже обладает этим свойством. Это линейное поле называется *бихарактеристическим полем.* Все те же рассмотрения применимы и к случаю простых характеристик. В более общем случае, когда $\operatorname{codim} \mathscr{V} > 1$, к предположениям надо добавить интегрируемость. Вопрос о связи между интегрируемостью $\mathscr{V}$ и свойствами оператора L очень интересен; см. по этому поводу Гийемин, Квиллен и Стернберг [5].

Предположим, что мы решили характеристическое уравнение. Тогда мы имеем лагранжево многообразие $\Lambda \subset \mathscr{V}$, которое диффеоморфно проектируется на M, т. е. локально $\Lambda = d\varphi(M)$. Заметим, что в силу (предположения и) определения из § 3

$$(K_\varphi)_m = K_{d\varphi(m)},$$

т. е. $K|_\Lambda$ — векторное расслоение, которое фактически есть результат поднятия на Λ расслоения K_φ при помощи π; аналогичное утверждение имеет место для C_φ. Далее, (3.8) определяет дифференциальный оператор первого порядка R_φ. Пусть $\sigma(R_\varphi)$ — его символ. Значит,

$$\sigma(R_\varphi)\colon K_\varphi \otimes T^*M \to C_\varphi.$$

Мы утверждаем, что для любых $\gamma \in T_m^* M$ и $k \in K_{d\varphi(m)}$

$$\sigma(R_\varphi)(k \otimes \gamma) = \mathscr{R}_{d\varphi(m)}(k \otimes d\pi^*\gamma), \tag{5.1}$$

где $K_{d\varphi(m)}$ отождествлено с $(K|_\Lambda)_{d\varphi(m)}$ и аналогично для C.

Чтобы убедиться в этом, тривиализуем расслоения E и F в окрестности U точки m, т. е. тривиализуем их над $\pi^{-1}(U)$. Пусть x — координаты на U, а x, ξ — индуцированные координаты на $\pi^{-1}(U)$. Пусть k — элемент K_z (где $z = d\varphi(m)$), рассматриваемый как постоянная функция. Если

$$\eta = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial \xi} = \sum\left(a_i\frac{\partial}{\partial x_i} + b_i\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)$$

— касательный вектор в точке z, то

$$I_z(k \otimes \eta) = \rho\left(a\frac{\partial \sigma}{\partial x}k + b\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}k\right).$$

Поскольку $-\eta \lrcorner\, \omega = -bdx + ad\xi$, имеем

$$\mathscr{R}_z(k \otimes (bdx - ad\xi)) = \rho\left(a\frac{\partial \sigma}{\partial x}k + b\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}k\right).$$

Если положить $\gamma = df$, то $\pi^*\gamma = \frac{\partial f}{\partial x}dx$ и верхняя формула приобретает вид

$$\mathscr{R}_z(k \otimes \pi^*\gamma) = \rho\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}\frac{\partial f}{\partial x}k\right).$$

Сравнение этого выражения с локальным выражением для R_φ:

$$\rho\circ\left[\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x}+\ldots\right]$$

доказывает (5.1).

Заметим, что дифференциальный оператор R_φ зависит по своему определению от функции φ, а значит, и от того факта, что Λ диффеоморфно проектируется на M. С другой стороны, $\mathscr{R}$ определяется для всех точек $\mathscr{V}$, а значит, символ оператора R_φ корректно определен во всех точках Λ. В то же время члены нулевого порядка *зависят* от существования φ. Как разрешить эту проблему, мы увидим в следующем параграфе.

В случае простых вещественных характеристик K и C — линейные расслоения и $\mathscr{R}$ определяет бихарактеристическое поле на $\mathscr{V}$. Доказанное нами означает, что *исследование транспортных уравнений сводится к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений*. Тем самым локально решена задача нахождения асимптотических решений в случае простых вещественных характеристик. Решение лишь локально, поскольку решение характеристического уравнения строится лишь до точек, в которых Λ перестает диффеоморфно проектироваться на M.

Опишем теперь эти результаты в локальных координатах для случая дифференциальных операторов. Предположим, что E и F — тривиальные векторные расслоения и что на M введены координаты t, x_1, ..., x_m. Пусть дифференциальный оператор L имеет вид

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_1^n A_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Bu,$$

где $A_i=A_i(t,\ x)$. (Для этого достаточно ввести предположение, что коэффициент при $\partial/\partial t$ в L невырожден, т. е. что невырожден $\sigma(L)(dt)$, или, другими словами, что dt нигде не является характеристическим.) Если τ, ξ^1, ..., ξ^n — дуальные координаты, то

$$\sigma(L)=\tau I-\sum\xi^i A_i$$

и характеристическое многообразие задается уравнением

$$\det(\tau I-\sum\xi^i A_i)=0.$$

Дифференциальный оператор L называется *строго гиперболическим*, если для каждого $\xi=(\xi^1,\ \ldots,\ \xi^n)\neq 0$ матрица $\sum\xi^i A_i$ имеет n различных вещественных собственных значений $\tau_1(t,\ x,\ \xi)$, ..., $\tau_n(t,\ x,\ \xi)$; тогда

$$\det\sigma(L)=(\tau-\tau_1(t,\ x,\ \xi))\ldots(\tau-\tau_n(t,\ x,\ \xi))$$

и характеристическое многообразие (лежащая вне нуля его часть) распадается на n компонент: $\tau=\tau_j$.

Все ненулевые характеристики символа $\sigma(L)$ простые. Действительно, при $\xi\neq 0$ имеем

$$E=E_1\oplus\ldots\oplus E_n, \tag{5.2}$$

где $E_j=E_j(t,\ x,\ \xi)$ — подпространство, отвечающее j-му собственному значению матрицы $\sum\xi^i A_i$. Тогда при $z=(t,\ x,\ \tau_j,\ \xi)$ имеем $\ker\sigma(L)=\operatorname{coker}\sigma(L)=E_j$. Если выбрать ненулевое сечение $s=e_j$ в E_j, то $\sigma(L)\,e_j=(\tau-\tau_j(t,\ x,\ \xi))\,e_j$,

$$I_z=d(\tau-\tau_j(t,\ x,\ \xi))\neq 0.$$

(Здесь выбран базис $e_j(z)$ в K_z и C_z, а значит, I_z отождествляется с линейной дифференциальной формой.) Тогда j-е поле бихарактеристических линейных элементов порождается векторным полем

$$\eta_j=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial\tau_j}{\partial\xi^i}\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial\tau_j}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial\tau_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\xi^i}.$$

Заметим, что поле η_j всегда трансверсально гиперповерхности $t=\mathrm{const}$. Значит, если $\Lambda_{j,0}$ — изотропное подмногообразие размерности n, содержащееся в j-й компоненте характеристического многообразия, то под действием потока, порожденного η_j, будет заметаться лагранжево многообразие Λ_j, лежащее в j-й компоненте характеристического многообразия. В частности, пусть функция $\varphi(x)$ определяет начальное изотропное подмногообразие $\Lambda_{j,0}$:

$$t=0,\quad \xi^i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},\quad \tau=\tau_j(x,\ 0,\ \xi).$$

Тогда для малых значений t лагранжево многообразие Λ_j будет диффеоморфно проектироваться на M (для любого компактного множества по x). В результате определяется решение $\varphi_j(t,\ x)$ характеристического уравнения с начальными условиями $\varphi_j(0,\ x)=\varphi(x)$.

Для дальнейших применений нам важно при подходящих условиях иметь возможность выбирать φ_j линейной по t, т. е.

$$\varphi_j(t,\ x)=\varphi(x)-ct \tag{5.3}$$

для какой-то константы c. (Мы уже сталкивались с решениями такого типа при изучении распространения особенностей.) Будем писать ψ вместо φ_j. Утверждение, что ψ имеет указанный вид (с точностью до несущественной аддитивной константы), означает, что

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial x_i}=0\quad\text{для всех}\quad i\quad\text{и}\quad\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0. \tag{5.4}$$

Далее, при отображении $d\psi\colon M \to T^*M$ векторное поле $\partial/\partial t$ переходит в

$$\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial \tau}+\sum\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi^i}.$$

Если Λ диффеоморфно проектируется на M, то это единственное векторное поле, касательное к Λ и проектирующееся в $\partial/\partial t$. Если (5.4) имеет место, то это векторное поле совпадает с $\partial/\partial t$. Значит, (5.3) эквивалентно предположению о том, что если рассматривать $\partial/\partial t$ как векторное поле на T^*M, то

$$\frac{\partial}{\partial t}\ \text{ касается }\ \Lambda. \tag{5.5}$$

Отметим, что условие (5.5) имеет смысл и тогда, когда Λ не проектируется диффеоморфно на M. Далее, векторное поле η_j касается $\Lambda=\Lambda_j$ по построению. Предположим, что τ_j не зависит от t. Тогда

$$\eta_j=\frac{\partial}{\partial t}-\sum\left(\frac{\partial\tau_j}{\partial\xi^i}\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial\tau_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\xi^i}\right)\quad\text{и}\quad\left[\eta_j,\ \frac{\partial}{\partial t}\right]=0=\left[\eta_j,\ \eta_j-\frac{\partial}{\partial t}\right].$$

Значит, $\partial/\partial t$ будет касаться Λ, если $\eta_j-\partial/\partial t$ касается Λ при $t=0$, а это будет иметь место, если

$$\zeta=-\sum\left(\frac{\partial\tau_j}{\partial\xi^i}\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial\tau_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\xi^i}\right)$$

касается Λ_0. Это, разумеется, ограничивает наш выбор начального многообразия Λ_0. Например, если $\partial\tau_j/\partial\xi=0$ и $\partial\tau_j/\partial x\neq 0$, то $\zeta\neq 0$, в то время как $d\pi\zeta=0$. Этого можно избежать, если выбрать Λ_0 так, чтобы поле ζ касалось Λ_0 и $\pi|_{\Lambda_0}$ было иммерсией. Отметим, что τ_j — однородная функция от ξ. Поэтому по теореме Эйлера

$$\tau_j=\sum\frac{\partial\tau_j}{\partial\xi^i}\xi^i\quad\text{и}\quad\frac{\partial\tau_j}{\partial\xi}=0\Longrightarrow\tau_j(x,\ \xi)=0.$$

Предположим, что это не так, т. е. что $\tau(x,\ \xi)\neq 0$ при $\xi\neq 0$. Тогда $d\pi\zeta\neq 0$ и мы можем, применив метод характеристик, найти Λ_0, лежащее в множестве $t=0$, $\tau_j=\text{const}$. Заметим кстати, что это позволяет фиксировать константу в (5.3):

$$c=\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}=\tau=\tau_j.$$

Таким образом, доказано, что *если собственное значение $\tau_j(x,\ \xi)\neq 0$ при $\xi\neq 0$ и не зависит от t, то j-е характеристическое уравнение имеет решение вида $\varphi_j(t,\ x)=\varphi(x)-\tau_j t$.*

Пусть задано начальное асимптотическое сечение

$$u\sim\sum\frac{b_k}{\tau^k}e^{i\tau\varphi(x)},\quad d\varphi\neq 0.$$

Мы можем найти n решений $\varphi_1(t, x), \ldots, \varphi_n(t, x)$ характеристического уравнения, соответствующих различным компонентам характеристического многообразия; во всех случаях $\varphi_j(0, x) = \varphi(x)$. Далее, можно положить $u(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$ в соответствии с разложением E в прямую сумму и применить описанную выше процедуру к каждой компоненте, решая обыкновенные дифференциальные уравнения с такими начальными условиями, чтобы $b_k(x) = b_{k_1}(x) + \ldots + b_{k_n}(x)$. Это дает асимптотическое решение задачи Коши. Разумеется, оно ограничивается малыми значениями t.

Коротко наметим, как наше построение асимптотических решений задачи Коши для гиперболических уравнений можно использовать для доказательства существования и единственности настоящих решений (для малых значений t). После того как мы несколько разовьем соответствующую технику, теорема существования и единственности для всех t окажется следствием некоторых довольно общих результатов. Пусть

$$u(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \hat{u}(\xi)\, e^{i\xi\cdot x}\, d\xi$$

— начальные данные, где $\hat{u}$ — преобразование Фурье u. Это можно переписать так:

$$u(x) = c_n \int_0^\infty \tau^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} \hat{u}(\tau\eta)\, e^{i\tau\eta\cdot x}\, dS \right) d\tau.$$

Далее, для всякого постоянного вектора v можно найти асимптотическое решение задачи Коши с начальным условием $ve^{i\tau\eta\cdot x}$. Другими словами, можно найти такую функцию $w(t, x; v, \eta, \tau)$, что

$$Lw = O(\tau^{-N}) \text{ для любого } N \quad \text{и} \quad w(0, x; v, \eta, \tau) = ve^{i\tau\eta\cdot x}.$$

Из построения ясно, что w можно считать гладко зависящей от v и η. (Хотя описанная процедура определяет w для больших τ, легко доопределить w для всех $\tau \geqslant 0$ так, чтобы выполнялось второе из указанных условий.) Выберем базис $v_1, \ldots, v_n$ и положим

$$\hat{u}(\tau\eta) = \sum a_i(\tau\eta)\, v_i.$$

Рассмотрим

$$\bar{u}(t, x) = c_n \sum_i \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} a_i(\tau\eta)\, w(t, x, v_i, \eta, \tau)\, \tau^{n-1}\, dS\, d\tau \overset{\text{def}}{=} V(t)\, u.$$

Тогда ясно, что

$$\bar{u}(0, x) = u(x) \quad \text{и} \quad L\bar{u} = Ku,$$

где

$$K(t)\, u = c_n \sum_i \iint a_i(\tau\eta)\, z_i(t, x, \eta, \tau)\, dS\, d\tau,$$

причем $z_l = O(\tau^{-N})$ для всех N. Значит, K — сглаживающий оператор, так как в силу формулы обращения для преобразования Фурье $K(t)$ задается гладким ядром. В частности, $K(t)$ — компактный оператор. Если положить

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - A(t),$$

то наше построение дает такой оператор V, что

$$LV = V' - AV = K, \quad V' = AV + K, \quad V(0) = I.$$

Для получения решения нам нужно найти U из

$$U' = AU, \quad U(0) = I.$$

Предположим, что мы нашли $U(t)$ и нам задано $K(t)$, а хотим определить V. Попытаемся добиться этого, варьируя постоянные, т. е. положим $V = UB$, так что

$$V' = U'B + UB' = AV + UB',$$

т. е.

$$B' = U^{-1}K, \quad B(0) = I, \quad \text{или} \quad B = I + \int_0^t U^{-1}(s)\, K(s)\, ds$$

и

$$V(t) = U(t)\left[I + \int_0^t U^{-1}(s)\, K(s)\, ds\right].$$

Итак, нам задано V, а мы хотим определить U. Непосредственное дифференцирование показывает, что (для достаточно малых t, когда оператор в скобках обратим) если мы имеем $U(t)$, удовлетворяющее последнему уравнению, то $U' = AU$ и $U(0) = I$. Перепишем это уравнение в виде

$$U^{-1}(t) = \left[I + \int_0^t U^{-1}(s)\, K(s)\, ds\right] V^{-1}(t).$$

Явный вид оператора V показывает, что он обратим для малых t. Это последнее уравнение можно решить итерациями и получить в результате решение задачи Коши. Единственность можно доказать, применяя теорему существования к сопряженному оператору. Поскольку подобные вопросы не относятся к тем, которые нас в первую очередь интересуют, мы предоставляем проведение деталей читателю и отсылаем его к оригинальным статьям Лакса [2] и Людвига [3], где этот материал изложен в ясной и доступной форме.

Сделаем теперь несколько замечаний об обобщениях метода высокочастотной аппроксимации, предложенного Людвигом. Тот факт, что мы ищем решения вида

$$u \sim \sum u_k \frac{e^{i\tau\varphi}}{(i\tau)^k},$$

можно переформулировать следующим образом. Рассмотрим последовательность функций $\{\gamma_k\}$ на $\mathbf{R}^1$:

$$\gamma_k(s) = \frac{e^{i\tau s}}{(i\tau)^k}.$$

Тогда

$$\gamma'_{k+1} = \gamma_k \quad \text{и} \quad u \sim \sum u_k \varphi^* \gamma_k,$$

где $\varphi^*\gamma_k = \gamma_k(\varphi)$.

Далее, предположим, что мы заменили функции $e^{i\tau s}/(i\tau)^k$ произвольной последовательностью функций (или, быть может, распределений) на $\mathbf{R}^1$, удовлетворяющих условию $\gamma'_{k+1} = \gamma_k$. Попытаемся применить предыдущий метод. Для этого необходимо:

(a) придать смысл символу $\sim$ в записи $u \sim \sum u_k \varphi^* \gamma_k$,

(b) быть уверенными, что равенство $u = 0$ влечет за собой равенство нулю всех индивидуальных коэффициентов при $\varphi^*\gamma_k$.

Вот несколько примеров применения данного метода.

(1) Сумма конечна (т. е. только конечное число коэффициентов u_k отлично от нуля). При этом $\sim$ означает $=$. Конечно, мы можем рассчитывать найти решения такого вида лишь для специальных уравнений. Однако интересные примеры существуют; например, в такой форме можно записывать сферически симметричные решения волнового уравнения в нечетномерном пространстве.

(2) $\gamma_k = s^k/k!$ и $\sim$ означает $=$. Если рассматривается уравнение с аналитическими коэффициентами, то это дает метод (восходящий к Адамару) получения аналитических решений в случае гиперболических уравнений. Доказательство сходимости см. в работе Людвига [3].

(3) Пусть $x_+ = 0$ при $x < 0$ и $x_+ = x$ при $x > 0$. Тогда (в смысле распределений)

$$\left(\frac{x_+^{k+1}}{(k+1)!}\right)' = \frac{x_+^k}{k!}$$

и, значит, $\gamma_k = x_+^k/k!$ — подходящий кандидат. Пусть для пары обобщенных сечений u и v запись $u \sim v$ означает, что сечение $u - v$ гладкое. Тогда из того, что $u \sim \sum u_k \varphi^* \gamma_k$ в этом случае, следует, что особенности u сосредоточены на поверхности $\varphi = 0$. По существу, мы рассмотрели старшие члены для этой ситуации в конце § 3. Как и прежде, простейший способ состоит в том, чтобы искать φ в виде $t - \psi$. Мы оставляем это читателю в качестве весьма поучительного упражнения. В частности, интересно отметить тот факт, что особенности распространяются вдоль бихарактеристик и не могут исчезнуть.

§ 6. *Транспортное уравнение*

В этом параграфе мы подробнее изучим транспортное уравнение

$$R_\varphi u = 0,$$

где транспортный оператор R_φ определен в (3.8) и (3.7). В предыдущем параграфе мы видели, что *символ* дифференциального оператора первого порядка R_φ является в действительности инвариантно определенным объектом на характеристическом многообразии. Предположим, что Λ — лагранжево многообразие, отвечающее исходному асимптотическому дифференциальному оператору, и что $\pi|_\Lambda$ не является диффеоморфизмом в точке z, $\pi z = x$. Будем предполагать, что z лежит на границе некоторой области U на Λ, которая диффеоморфно проектируется на открытое множество $\pi U = \mathcal{O}$ в M. Тогда U можно представить как график $d\varphi$, так что оператор R_φ определен на $\mathcal{O}$. При подходе к x член нулевого порядка в R_φ становится сингулярным. Цель этого параграфа — корректно определить R_φ как дифференциальный оператор на Λ так, чтобы он имел смысл и в тех точках, где проекция π сингулярна. Перед тем как обсуждать общий случай, рассмотрим поучительный пример. Обсудим вариант «уравнения Трикоми». Рассмотрим дифференциальный оператор D вида

$$D = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (x^2 - 1)\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\right]. \tag{6.1}$$

Соответствующее уравнение можно рассматривать как волновое уравнение при $|x| < 1$, причем «показатель преломления» стремится к нулю при $|x| \to 1$. Его можно рассматривать как грубую одномерную модель «света, целиком преломляемого двумя параллельнымм прямыми». Символ имеет вид

$$\sigma = \frac{1}{2}[\xi^2 + (x^2 - 1)\xi_0^2],$$

а для соответствующего гамильтонова векторного поля имеем

$$\xi_\sigma = (x^2 - 1)\xi_0\frac{\partial}{\partial x_0} + \xi\frac{\partial}{\partial x} - x\xi_0^2\frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{6.2}$$

В этой ситуации M двумерно, и в качестве Λ_0 можно выбрать прямую

$$(x_0,\ x,\ \xi_0,\ \xi) = (l,\ 0,\ 1,\ 1).$$

Таким образом, характеристические кривые задаются как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями:

$$\frac{d\xi_0}{dt}=0,\quad \xi_0(0)=1,\quad \frac{d\xi}{dt}=-x\xi_0^2,\qquad \xi(0)=1,$$
$$\frac{dx}{dt}=\xi,\quad x(0)=0,\quad \frac{dx_0}{dt}=(x^2-1)\,\xi_0,\quad x_0(0)=l,$$

откуда

$$\xi_0\equiv 1,\qquad \xi=\cos t,$$
$$x=\sin t,\quad x_0=-\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)+l.$$

Значит, многообразие Λ — это цилиндр

$$x^2+\xi^2=1,\quad \xi_0=1,$$

лежащий над полосой $|x|\leqslant 1$ в $(x_0,\ x)$-плоскости. Заметим, что проекция π имеет особенности над прямыми $x=\pm 1$. Поскольку мы имеем дело с тривиальным линейным расслоением, выражение для транспортного уравнения дается формулой (1.3). В операторе нет членов первого порядка, а члены со смешанными вторыми производными $\sigma(L)$ (т. е. во втором слагаемом в правой части (1.3)) равны нулю. Кроме того, $d\varphi=\xi_0\,dx_0+\xi\,dx=dx_0\pm\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx$ при $|x|<1$. Значит, при $\xi>0$ (1.3) имеет вид

$$(x^2-1)\frac{\partial u_0}{\partial x_0}+\xi\frac{\partial u_0}{\partial x}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)u_0$$

или, если считать $u_0(x_0,\ x)$ функцией всех четырех переменных, зависящей только от первых двух,

$$\xi_\sigma u_0=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)u_0,$$

где ξ_σ — гамильтоново векторное поле (6.2). Это обыкновенное дифференциальное уравнение относительно u вдоль каждой траектории, и его можно записать так:

$$\frac{d(\log u_0)}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\sin t}{\cos t}.$$

Аналогичное уравнение имеет место при $\xi<0$. Решая уравнения, получаем

$$\log u_0=-\frac{1}{2}\log|\cos t|+f,$$

где константа f может зависеть от траектории, т. е. от l. Итак,

$$u_0(t)=\frac{f(l)}{\sqrt{|\cos t|}}=\frac{f(l)}{\sqrt[4]{1-x^2}},$$

где (как мы увидим) f периодична с периодом 2π. Для того чтобы интерпретировать полученное выражение, введем угловую переменную $\theta = \arcsin x$, так что (l, θ) можно выбрать в качестве координат на цилиндре Λ. Тогда

$$|d\theta| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} |dx|,$$

и формально

$$|d\theta|^{1/2} = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}} |dx|^{1/2}.$$

Заметим, что и транспортное уравнение и его решение теряют смысл при $x = \pm 1$. Рассмотрим, однако, выражение

$$u_0(x_0, x) = \frac{f(l)}{\sqrt[4]{1-x^2}}$$

как коэффициент в формальном выражении $u_0(x_0, x) |dx_0\, dx|^{1/2}$. Введя координаты l, θ на цилиндре Λ, можно рассматривать наше решение как «полуплотность» на цилиндре:

$$f(l) |dl\, d\theta|^{1/2}.$$

Поскольку одна и та же траектория пересекает l-ось в точках l и $l+2\pi$, мы видим, что f должна быть периодической с периодом 2π. Из этого примера можно извлечь два важных наблюдения: (i) транспортное уравнение по x имеет особенности в каустиках, и (ii) если мы интерпретируем транспортное уравнение как уравнение для «полуплотностей» на Λ, то оно уже не будет иметь особенностей.

Итак, наша задача состоит в обобщении метода § 3 на каустики, по крайней мере в том, что касается первого члена разложения. Как мы увидим, при подходящей интерпретации транспортное уравнение становится корректным всюду на Λ. После этого мы займемся задачей переноса информации, имеющейся «наверху», на Λ, — вниз, на M.

Исследуем теперь транспортное уравнение для общих скалярных операторов. Для упрощения обозначений будем писать σ вместо $\sigma(L)$, а через χ обозначим символ, отвечающий членам порядка на 1 меньшего, чем порядок L, в локальном выражении L:

$$\sigma = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha \xi^\alpha \quad \text{и} \quad \chi = \sum_{|\alpha|=k-1} A_\alpha \xi^\alpha,$$

где

$$L = \sum_{|\alpha| \leqslant k} A_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha.$$

Транспортное уравнение $R_\varphi u=0$ принимает вид (для всякого решения φ характеристического уравнения)

$$\sum \frac{\partial\sigma}{\partial\xi^i}(x,\ d\varphi(x))\frac{\partial u}{\partial x^i}+\left[\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi^i\,\partial\xi^j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\,\partial x^j}+\chi(x,\ d\varphi(x))\right]u=0.$$

Здесь u считается функцией только x. Если считать u функцией на T^*M (и постоянной в ξ-направлении), то можно записать транспортное уравнение в виде

$$D_{\xi_\sigma}u+\left[\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi^i\,\partial\xi^j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\,\partial x^j}+\chi\right]u=0 \tag{6.3}$$

на $\Lambda=\operatorname{graph} d\varphi$. Чтобы пояснить смысл (6.3), рассмотрим вначале локальную ситуацию, когда Λ и M оба ориентированы и $\pi|_\Lambda$ — диффеоморфизм.

Напомним некоторые основные факты о плотностях. Плотность ρ порядка s — это правило, по которому каждому набору из n векторов $\eta^1, \ldots, \eta^n$ относится число $\rho(\eta^1, \ldots, \eta^n)$ в каждой точке Λ, причем

$$\rho(A\eta^1, \ldots, A\eta^n)=|\det A|^s\rho(\eta^1, \ldots, \eta^n)$$

для любого линейного преобразования A. Если $F\colon \Lambda\to M$ — диффеоморфизм и ρ — плотность на M, то $F^*\rho$ определяется формулой

$$(F^*\rho)(\eta^1, \ldots, \eta^n)=\rho(dF\eta^1, \ldots, dF\eta^n).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}F^*\rho)(A\eta^1, \ldots, A\eta^n)&=\rho(dF(A\eta^1), \ldots, dF(A\eta^n))=\\&=\rho(dF\circ A\circ dF^{-1}dF\eta^1, \ldots, dF\circ A\circ dF^{-1}dF\eta^n)=\\&=|\det A|^s F^*\rho(\eta^1, \ldots, \eta^n).\end{aligned}$$

Таким образом, $F^*\rho$ — снова плотность. Для гладкого векторного поля ξ и гладкой плотности ρ порядка s следующим образом определяется *производная Ли* $D_\xi\rho$:

$$D_\xi\rho=\frac{d}{dt}(\exp t\xi)^*\rho|_{t=0}.$$

Пространство плотностей, вычисляемых в одной точке, одномерно, и имеет смысл говорить, что плотность не обращается в нуль в данной точке. Если ρ ни в одной точке не обращается в нуль, то

$$D_\xi\rho=f\rho$$

для некоторой функции f, и мы будем называть f *логарифмической производной* плотности ρ и обозначать

$$f=D_\xi(\log\rho).$$

Если ρ_1 — плотность порядка s_1, а ρ_2 — плотность порядка s_2, то $\rho_1\rho_2$ — плотность порядка s_1+s_2, где

$$(\rho_1\rho_2)(\eta^1, \ldots, \eta^n) = \rho_1(\eta^1, \ldots, \eta^n)\,\rho_2(\eta^1, \ldots, \eta^n).$$

Поскольку $F^*(\rho_1\rho_2) = F^*(\rho_1)\,F^*(\rho_2)$, имеем

$$D_\xi(\rho_1\rho_2) = (D_\xi\rho_1)\,\rho_2 + \rho_1 D_\xi\rho_2,$$

а если обе плотности ρ_1 и ρ_2 нигде не обращаются в нуль, то

$$D_\xi(\log(\rho_1\rho_2)) = D_\xi \log\rho_1 + D_\xi \log\rho_2.$$

Проделаем теперь следующее локальное вычисление. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — координаты; через $|dx|^s$ обозначим плотность порядка s на M, принимающую значение 1 на наборе $(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n)$ в каждой точке M. Тогда $u\,|dx|^{1/2}$ — полуплотность (плотность порядка 1/2) на M. Пусть $\iota\colon \Lambda \to T^*(M)$ — иммерсия Λ как подмногообразия в $T^*(M)$, так что $\pi\circ\iota$ совпадает с ограничением π на Λ. Тогда $\pi\circ\iota$ — диффеоморфизм и

$$\rho = (\pi\circ\iota)^*\,(u\,|dx|^{1/2})$$

— полуплотность на Λ. Мы хотим вычислить $D_\xi(\log\rho)$, где ξ — ограничение ξ_σ на Λ. Имеем

$$D_\xi \log\rho = \frac{1}{2} D_\xi \log\rho^2 = \frac{1}{2} D_\xi \log\left[(\pi\circ\iota)^*\,u^2\,|dx|\right] =$$
$$= D_\xi(\log(\pi\circ\iota)^*\,u) + \frac{1}{2} D_\xi \log((\pi\circ\iota)^*\,|dx|).$$

Далее, векторное поле ξ_σ определено всюду на $T^*(M)$ и функция $\pi^*\log u$ (мы пишем просто $\log u$) также определена всюду на $T^*(M)$. Поэтому первое слагаемое в полученном выражении — это просто $D_{\xi_\sigma}(\log u)\,|_\Lambda$. Для вычисления второго слагаемого мы должны принять во внимание ориентации на Λ и M.

Если $\pi\circ\iota$ сохраняет ориентацию, то, идентифицируя n-формы и плотности, получаем

$$(\pi\circ\iota)^*\,|dx| = (\pi\circ\iota)^*\,(dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n) =$$
$$= \iota^*\pi^*\,(dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n).$$

Опять-таки $\pi^*(dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n)$ — корректно определенная n-форма на $T^*(M)$, а потому мы можем написать

$$D_{\xi_\sigma}(\iota^*\pi^*\,(dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n)) = \iota^* D_{\xi_\sigma}(dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n),$$

где справа ξ_σ рассматривается как векторное поле на $T^*(M)$ и мы пишем $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ вместо $\pi^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)$. Тогда

$$\begin{aligned} D_{\xi_\sigma}(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) &= \sum_i dx^1 \wedge \ldots \wedge D_{\xi_\sigma} dx^i \wedge \ldots \wedge dx^n = \\ &= \sum_i dx^1 \wedge \ldots \wedge d\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_i} \wedge \ldots \wedge dx^n = \\ &= \sum_i \frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi_i\,\partial x^i}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n + \\ &+ \sum_{i,j} dx^1 \wedge \ldots \wedge \frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi_i \partial x^j}\, d\xi_j \wedge \ldots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Беря ограничение на Λ, мы должны подставить $d\xi_i = d(\partial\varphi/\partial x^i)$; в результате

$$\iota^*\left(D_{\xi_\sigma}(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)\right) = \left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\,\partial x^j} + \sum \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^i\,\partial\xi_i}\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Значит,

$$D_{\xi_\sigma} \log(\pi \circ \iota)^* u\,|dx|^{1/2} = D_{\xi_\sigma} \log u + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\,\partial x^j} + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi_i\,\partial x^i},$$

в предположении, что ориентации на Λ и M согласованы. Сравнивая полученное соотношение с (6.3), получаем, что транспортное уравнение можно переписать в виде

$$D_{\xi_\sigma} \log\rho = -\chi + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi_i\,\partial x^i}. \tag{6.4}$$

В случае если ориентации Λ и M противоположны, проходят те же рассуждения. В этом случае

$$\begin{aligned} D_{\xi_\sigma} \log(\pi \circ \iota)^*(u\,|dx|^{1/2}) &= \iota^* D_{\xi_\sigma} \log u + \frac{1}{2} D_{\xi_\sigma} \log \pi^*\iota^*\,|dx| = \\ &= \iota^* D_{\xi_\sigma} \log u + \frac{1}{2} D_{\xi_\sigma} \log(-\pi^*\iota^*\,|dx|), \end{aligned}$$

так как логарифмическая производная, очевидно, не меняется при умножении на константу.

Сказанное наводит на мысль следующим образом изменить точку зрения на исходное дифференциальное уравнение. Будем воспринимать u как коэффициент в полуплотности $u(x)\,|dx|^{1/2}$ и будем рассматривать D как оператор на полуплотностях. Тогда

$$\rho = (\pi \circ \iota)^*(u\,|dx|^{1/2})$$

— полуплотность на Λ. Значит, транспортное уравнение мы будем рассматривать как уравнение для полуплотностей на Λ. Кроме того, мы увидим, что правая часть (6.4) — инвариантно определенная функция на T^*M, если L рассматривать как оператор на полуплотностях. (Мы признательны Кейсу Ханнабусу за помощь при обсуждении излагаемых ниже вопросов.)

В самом деле, пусть $|\mathbf{A}^n|^{1/2}(M)$ — пространство гладких полуплотностей на M и $|\mathbf{A}^n|_c^{1/2}(M)$ — пространство гладких полуплотностей с компактным носителем. Заметим, что $|\mathbf{A}^n|_c^{1/2}(M)$ имеет структуру предгильбертова пространства. А именно если ρ_1, ρ_2 — полуплотности с компактными носителями, то $\rho_1\bar{\rho}_2$ — плотность с компактным носителем, а значит, ее можно проинтегрировать. Поэтому мы можем положить

$$(\rho_1, \rho_2) = \int \rho_1\bar{\rho}_2$$

(где $\bar{\rho}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \overline{\rho(\xi_1, \ldots, \xi_n)}$). Тогда каждый дифференциальный оператор D имеет формально сопряженный D^*; он определяется как единственный дифференциальный оператор, удовлетворяющий условию

$$(D\rho_1, \rho_2) = (\rho_1, D^*\rho_2).$$

Заметим, что если D — дифференциальный оператор порядка m (с вещественными коэффициентами), то

$$\sigma(D) = (-1)^m \sigma(D^*),$$

так что

$$B = \frac{1}{2}(D - (-1)^m D^*) \tag{6.5}$$

— дифференциальный оператор порядка $m-1$. Значит, его символ — глобально определенная функция на $T^*(M)$. Мы утверждаем, что в локальных координатах он имеет вид

$$\sigma(B) = \chi - \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi_i\,\partial x^i}. \tag{6.6}$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что B линеен по D и что $\sigma(B)$ может зависеть только от двух старших членов из D. Отметим, что если $\sigma(D) = 0$, то $D - (-1)^m D^* = 2\chi + \ldots$. Для завершения доказательства надо только проверить доказываемый результат для оператора D, имеющего локальное представление

$$D = a(x)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}, \quad |\alpha| = m.$$

Мы можем считать, что $\rho_1 = f|dx|^{1/2}$ и $\rho_2 = g|dx|^{1/2}$. Тогда

$$(D\rho_1, \rho_2) = \int\left(a(x)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}f\right)\bar{g}\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int f\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(\overline{ag})\,dx$$

и непосредственное вычисление показывает, что

$$\sigma(B) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi_i\,\partial x^i}.$$

При такой интерпретации (6.6) есть в самом деле корректно определенная функция на T^*M; она называется *субглавным символом* исходного дифференциального оператора.

Определение субглавного символа как функции на всем T^*M основывается на том, что мы рассматриваем дифференциальный оператор как оператор на полуплотностях. Другими словами, мы предполагаем, что имеется некоторый дифференциальный оператор на полуплотностях, который отождествляется с нашим исходным дифференциальным оператором путем выбора тривиализации, задаваемой полуплотностью $|dx|^{1/2}$. Пусть $|\bigwedge|^{1/2}M$ — расслоение полуплотностей. Если D: $|\bigwedge|^{1/2}M \to |\bigwedge|^{1/2}M$ — дифференциальный оператор, то $\sigma(D)$ — корректно определенная функция на T^*M. Действительно, поскольку $\operatorname{Hom}(E, E)$ — канонически тривиальное расслоение для всякого линейного расслоения E, в частности для $E = |\bigwedge|^{1/2}M$ (рассматриваемого как расслоение над T^*M), то символ $\sigma(D)$, который является сечением $\operatorname{Hom}(|\bigwedge|^{1/2}M, |\bigwedge|^{1/2}M)$, корректно определен как функция на T^*M. Как мы только что убедились, тогда субглавный символ также есть корректно определенная функция на T^*M, и получена интерпретация транспортного уравнения.

Теперь исследуем ситуацию, когда L — дифференциальный оператор из $E_1 \otimes |\bigwedge|^{1/2}$ в $E_2 \otimes |\bigwedge|^{1/2}$, где E_1 и E_2 — линейные расслоения. Тогда L^* — дифференциальный оператор из $E_2^* \otimes |\bigwedge|^{1/2}$ в $E_1^* \otimes |\bigwedge|^{1/2}$ и выражение (6.6) теряет смысл. Тем не менее можно дать инвариантиую интерпретацию транспортного оператора. Чтобы убедиться в этом, предположим, что s и s' — два ненулевых сечения расслоения E_1, $s' = fs$ и $t' = gt$, где t и t' — ненулевые сечения расслоения E_2.

Пусть L — дифференциальный оператор из $E_1 \otimes |\bigwedge|^{1/2}$ в $E_2 \otimes \otimes |\bigwedge|^{1/2}$. Если r — сечение расслоения E_1, то $r = us = u's'$, где $u = u'f$, и мы можем аналогично написать $z = wt = w't'$, где $w = w'g$, если z — сечение расслоения E_2. Выбором s и t определяется дифференциальный оператор D: $|\bigwedge|^{1/2} \to |\bigwedge|^{1/2}$ из $L(s \otimes \rho) = t \otimes D(\rho)$, а выбором s', t' задается оператор D'. Ясно, что эти два оператора связаны соотношением

$$D' = g^{-1} \circ D \circ f.$$

Значит,

$$\sigma' = g^{-1}\sigma f, \quad \text{так что} \quad \xi' = g^{-1} f \xi, \quad \text{если} \quad \sigma = 0,$$

и

$$\chi' = g^{-1}\chi f + g^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_i} \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Таким образом, если c и c' — субглавные части D и D', то

$$c' = g^{-1}\chi f + g^{-1}\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_i}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{1}{2}g^{-1}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi_i\,\partial x^i}f - \frac{1}{2}\frac{\partial g^{-1}}{\partial x^i}\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_i}f - \frac{1}{2}g\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_i}\frac{\partial f}{\partial x^i} =$$
$$= g^{-1}cf + \frac{1}{2}g^{-1}(\xi f) - \frac{1}{2}f(\xi g^{-1}).$$

Далее, если η — векторное поле, Ω — полуплотность и h — функция, то имеет место формула

$$D_{h\eta}\Omega = hD_\eta\Omega + \frac{1}{2}(D_\eta h)\,\Omega. \tag{6.7}$$

Следовательно, для полуплотностей на Λ имеем

$$D_{\xi'} = g^{-1}fD_\xi + \frac{1}{2}fD_\xi g^{-1} + \frac{1}{2}g^{-1}D_\xi f$$

и

$$D_{\xi'} + c' = g^{-1}fD_\xi + g^{-1}cf + g^{-1}D_\xi f = g^{-1}\circ[D_\xi + c]\circ f.$$

Это в точности правило преобразования, которое требуется при определении дифференциального оператора в частных производных (первого порядка) на Λ из $E_1\otimes|\bigwedge|^{1/2}\Lambda$ в $E_2\otimes|\bigwedge|^{1/2}\Lambda$.

§ 7. Цикл Маслова и условия квантования Бора — Зоммерфельда

Воспользуемся результатами нескольких последних параграфов с тем, чтобы исследовать первый член асимптотического решения (3.1) асимптотического дифференциального оператора в частных производных, описанного в § 3. Для простоты будем предполагать, что рассматриваемый асимптотический дифференциальный оператор действует из $|\bigwedge|^{1/2}M$ в $|\bigwedge|^{1/2}M$, как это было в предыдущем параграфе. Предположим, что мы решили характеристическое уравнение, т. е. построили лагранжево подмногообразие Λ в характеристическом многообразии. Предположим также, что мы решили транспортное уравнение на Λ, т. е. имеем полуплотность v, определенную на Λ. Вопрос состоит в том, как опустить v в виде полуплотности на M.

Пусть $\iota\colon \Lambda\to T^*M$ — иммерсия Λ как подмногообразия, и пусть отображение $\pi\circ\iota$ собственное. Если x — регулярное значение отображения $\pi\circ\iota$, то

$$(\pi\circ\iota)^{-1}(x) = \{y_1, \ldots, y_k\},$$

где каждая точка y_i обладает окрестностью W_j, диффеоморфно отображаемой на окрестность U_j точки x. Предположим, что $k\neq 0$, т. е. $(\pi\circ\iota)^{-1}x\neq\varnothing$. Для каждого j имеем $W_j = \operatorname{graph} d\varphi_j$, где функции φ_j определены на U_j с точностью до аддитивной постоянной. Мы можем воспользоваться диффеоморфизмом $\pi \circ \iota|_{W_j}$ и отождествить $v|_{W_j}$ с полуплотностью u_j на U_j. В соответствии с процедурой § 3 она должна дать вклад $u_j e^{i\tau\varphi_j}$. Если же $U = \bigcap U_j$, то естественно ожидать, что на U получится сумма

$$u_1 e^{i\tau\varphi_1} + \ldots + u_k e^{i\tau\varphi_k}. \tag{7.1}$$

Трудность заключается в том, что это выражение неоднозначно из-за произвола в выборе фаз для φ_j. Если бы в сумме был только один член, то этот произвол привел бы лишь к (довольно безобидному) фазовому множителю. Однако если в сумме несколько слагаемых, то выбор относительных фаз имеет существенное значение.

Этот вопрос проще изучать на Λ. В каждой точке $\lambda \in \Lambda$, регулярной для $\pi \circ \iota$, функция $\varphi \circ (\pi \circ \iota)$ определена с точностью до произвольного фазового множителя, где $\operatorname{graph} d\varphi$ — локальная параметризация Λ в окрестности λ. Если фиксировать фазу в точке λ, то она будет фиксирована в любой односвязной окрестности точки λ, в которой $\pi \circ \iota$ остается регулярным. В самом деле, по определению, $d[\varphi \circ \pi \circ \iota] = \iota^* \alpha$, где α — фундаментальная форма на T^*M. Проблема состоит в том, как меняется фаза при прохождении через сингулярное множество.

Для решения этой задачи мы применим метод стационарной фазы. Мы зададим параметризацию лагранжева многообразия Λ, которая имеет смысл в окрестности точки сингулярного множества, и построим на M асимптотическую полуплотность u', которая также имеет смысл в окрестности образа сингулярного множества (и, в частности, не имеет особенностей в каустике). Эта полуплотность совпадает с выражением типа (7.1) при регулярных значениях с точностью до членов порядка τ^{-1}, а значит, фиксирует относительные фазы. Оказывается, эта процедура не зависит от выбора u'. Мы приведем здесь лишь набросок этой схемы. Подробное обоснование отдельных шагов опирается на некоторые факты из симплектической геометрии, которой посвящена гл. IV.

Метод состоит в следующем. Пусть $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — координаты на M. Введем несколько вспомогательных переменных θ и функцию $\varphi = \varphi(x, \theta)$. Предположим, что множество $C_\varphi = \{(x, \theta) \mid d_\theta \varphi = 0\}$ является подмногообразием и что дифференциалы $d(\partial\varphi/\partial\theta^j)$ линейно независимы на C_φ. На C_φ дифференциал $d_x\varphi$ корректно определен, и мы предположим, что *отображение*

$$\mu\colon (x, \theta) \longmapsto d_x\varphi(x, \theta)$$

переводит C_φ *в* Λ. Из линейной независимости дифференциалов $d(\partial\varphi/\partial\theta^j)$ следует, что это отображение — *иммерсия*. Действительно, в локальных координатах оно является ограничением отображения

$$(x,\ \theta) \longmapsto \left(x,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \left(x^1,\ \ldots,\ x^n,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x^1},\ \ldots,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\right)$$

на C_φ. Таким образом, никакой касательный вектор, $\partial/\partial x$-компонента которого отлична от нуля, не может переходить в нуль. С другой стороны, образом вектора $\eta = \sum c_j \partial/\partial\theta^j$ является

$$\sum c_j \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^j\,\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\xi_i}.$$

Если этот вектор равен нулю и если η касается C_φ, имеем

$$0 = \left\langle \eta,\ d\frac{\partial\varphi}{\partial\theta^k}\right\rangle = \sum c_j \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^j\,\partial\theta^k}.$$

Так как $d(\partial\varphi/\partial\theta^j)$ по предположению независимы, отсюда следует, что $c_j = 0$.

Существование φ с такими свойствами следует из результатов симплектической геометрии, которые будут приведены в гл. IV. (Мы увидим, что всегда можно выбрать в качестве θ некоторые ξ_j и добиться, чтобы $C_\varphi = \Lambda$.)

Выбор φ вместе с плотностью $|dx\,d\theta|$ индуцирует положительную плотность на C_φ. Это единственная плотность σ, для которой

$$\left|\det\left(\left\langle \eta_j,\ d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta^j}\right)\right\rangle\right)\right| \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n) = |dx\,d\theta|(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_k), \quad (7.2)$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — касательные векторы к C_φ, а $\eta_1, \ldots, \eta_k$ — дополнительные векторы к $T(C_\varphi)$. Далее, пусть функция a определена на C_φ условием

$$a\sigma^{1/2} = \mu^* v,$$

где v — рассматриваемая полуплотность на Λ. Здесь a — гладкая функция на C_φ. Продолжим ее до C^∞-функции от $(x,\ \theta)$ с компактным носителем по θ. Далее, рассмотрим полуплотность

$$\left[(\tau/2\pi)^{k/2}\int e^{i\tau\varphi(x,\ \theta)} a(x,\ \theta)\, d\theta\right] |dx|^{1/2}, \quad (7.3)$$

где k — число переменных θ. Ясно, что эта полуплотность непрерывна по x. Мы покажем, что *в регулярных значениях* $\pi \circ \iota$ *эта полуплотность отличается от решения типа* (7.1) *на члены порядка* τ^{-1}. Тем самым будет определен выбор фаз в (7.1). Доказательство этого факта состоит в прямом применении метода стационарной фазы.

Более инвариантную интерпретацию этой процедуры мы дадим в гл. VII. А сейчас просто применим метод стационарной фазы к интегралу (7.3) для регулярного значения x. Пусть $(x,\ \theta)$ — точка C_φ, лежащая над регулярным значением x. Тогда ни один из векторов $\partial/\partial\theta^i$ не касается C_φ в точке (x, θ) и мы можем выбрать их в качестве η_i в (7.2). Значит, в силу (7.2)

$$\sigma = \frac{\pi^* \, | dx |}{\left| \det \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial\theta^i \, \partial\theta^j} \right|},$$

где $\pi\colon C_\varphi \to M$. Допуская вольность в обозначениях, мы будем писать $|dx|$ вместо $\pi^* |dx|$, и тогда (7.2) показывает, что

$$\sigma = \frac{| dx |}{\left| \det \left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial\theta^i \, \partial\theta^j} \right) \right|} = \frac{| dx |}{| \det H_\theta (x, \theta) |},$$

где H_θ — гессиан φ по θ. Далее, $v = (\pi \circ \iota)^* u$. Пусть $u = A \, | dx |^{1/2}$. Тогда из определения a следует, что

$$a(x, \theta) = A(x) \, | \det H_\theta (x, \theta) |^{1/2}$$

при $(x, \theta) \in C_\varphi$. Продолжим функцию a на окрестность C_φ. Вблизи (x, θ) мы можем выразить θ как функцию x на C_φ, скажем $\theta = G(x)$. Пусть

$$F(x) = \varphi(x, G(x)).$$

Тогда

$$dF(x) = (d_x\varphi)(x, G(x)) + (d_\theta\varphi)(x, G(x)) \circ dG = (d_x\varphi)(x, G(x)) \in \Lambda,$$

поскольку $(x, G(x)) \in C_\varphi$, так что $d_\theta\varphi = 0$ в точках $(x, G(x))$. Значит, F — подходящая фазовая функция для Λ. Это построение применяется к каждому листу C_φ, лежащему над x. Применяя метод стационарной фазы, получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{k/2} \int e^{i\tau\varphi} a(x, \theta) \, d\theta &= \sum A_j(x) \, e^{i[\tau F_j + \sigma_j \pi/4]} + O(\tau^{-1}) = \\ &= \sum A_j(x) \, e^{i\sigma_j \pi/4} e^{i\tau F_j} + O(\tau^{-1}), \end{aligned} \tag{7.4}$$

где $\sigma_j = \operatorname{sign} H_\theta (x, \theta_j)$.

Сделаем два вывода из (7.4). Во-первых, мы видим, что A_j заменились на $A_j e^{i\sigma_j\pi/4}$. Таким образом, правильные коэффициенты при осциллирующих членах в (7.1) получаются из проекций полуплотности v, являющейся решением транспортного уравнения, умножением на постоянные фазовые множители; эти множители отличаются друг от друга на степени i. Как мы увидим в дальнейшем, выбор правильных коэффициентов удобно осуществить, интерпретируя транспортное уравнение как уравнение на Λ для «полуформ» со значениями в некотором локально постоянном линейном расслоении, а не для полуплотностей. Необходимый аппарат для работы с этими понятиями будет развит в гл. V.

Сделаем несколько упрощающих предположений о природе сингулярного множества на Λ. Предположим, что отображение $\pi\circ\iota$ имеет ранг $n-1$ на подмногообразии Z коразмерности 1 в Λ и ранг, меньший $n-1$, на подмножестве размерности не больше $n-3$. В гл. VII мы увидим, что эта ситуация имеет место для лагранжевых многообразий «общего положения» в T^*M. Таким образом, каждую гладкую кривую, пересекающую сингулярное множество, можно продеформировать в классе гомотопных кривых так, чтобы она не пересекала указанное подмножество коразмерности 3, и можно предполагать, что она пересекает Z трансверсально. Простое вычисление показывает, что σ_j изменяется на ± 2 при пересечении Z. Это означает, что на Z имеется предпочтительная относительная ориентация в Λ (кривая пересекает Z в «положительном» направлении, когда σ_j возрастает). Подмногообразие Z с этой ориентацией называется *циклом Маслова.* Мы обстоятельно исследуем его (и проведем упомянутое вычисление) в гл. IV.

Заметим, что мы получили теперь обобщение оптического феномена, описанного в гл. I и состоящего в том, что при прохождении через каустику свет претерпевает фазовый сдвиг на $\pi/2$.

Описанная процедура дает метод выбора фаз φ_j во всех регулярных точках x, лежащих под связным открытым множеством $U\subset\Lambda$, если $U=\mu(C_\varphi)$ для подходящей фазовой функции $\varphi=\varphi(x,\ \theta)$. Действительно, мы положили $F_j(x)=\varphi\circ\mu^{-1}(\lambda_j)$, где $\pi(\lambda_j)=x$. Теперь мы утверждаем, что функция $\varphi\circ\mu^{-1}$ удовлетворяет условию

$$d(\varphi\circ\mu^{-1})=\alpha\,|_U, \tag{7.5}$$

где $\alpha=\sum\xi_j\,dx^j$ — каноническая форма (действия). Из (7.5) следует, что функция $\varphi\circ\mu^{-1}$ с точностью до аддитивной постоянной определена на U независимо от выбора φ. Тем самым фиксируются относительные фазы у F_j, т. е. F_j фиксируются с точностью до общей аддитивной константы. Чтобы доказать (7.5), рассмотрим произвольный вектор η, касающийся Λ в точке $z=\mu(x,\ \theta)$. Тогда, по определению,

$$\langle\eta,\ \alpha\rangle=\langle d\pi\eta,\ z\rangle=\langle d\pi\eta,\ \mu(x,\ \theta)\rangle.$$

С другой стороны, $\pi\circ\mu(x,\ \theta)=x$, так что если $\xi=d\mu^{-1}\eta$, то

$$\begin{aligned}\langle\eta,\ d(\varphi\circ\mu^{-1})\rangle&=\langle\xi,\ d\varphi\rangle=\langle\xi,\ d_x\varphi\rangle=\\&=\langle d\pi\xi,\ \mu(x,\ \theta)\rangle=\langle d\pi\eta,\ \mu(x,\ \theta)\rangle,\end{aligned}$$

поскольку $d_\theta\varphi=0$ в $(x,\ \theta)$.

Мы обсудили вопрос о локальном решении транспортного уравнения. Теперь остается склеить локальные решения, с тем чтобы получить глобальное решение. В гл. IV будет доказано, что Λ всегда можно покрыть такими стягиваемыми открытыми множествами U_j, что каждое U_j определяется φ_j. Можно добиться также, чтобы $U_i \cap U_j$ были стягиваемыми. Далее, φ_j в каждой регулярной точке $\lambda \in U_j$ дает вклад в глобальную полуплотность, равный

$$e^{i[\tau\varphi_j(\lambda) + (\pi/4)\operatorname{sign} H_j(\lambda)]} v(\lambda),$$

где H_j — гессиан φ_j относительно θ в точке $\mu^{-1}(\lambda)$. Чтобы вклады от φ_j и φ_k были согласованы, $\tau\varphi_j + (\pi/4)\operatorname{sign} H_j$ должно равняться $\tau\varphi_k + (\pi/4)\operatorname{sign} H_k \pmod{2\pi\mathbf{Z}}$ в регулярных точках $U_j \cap U_k$. Положим $g_{jk} = \varphi_j - \varphi_k$ и $h_{jk} = {}^1/_2(\operatorname{sign} H_j - \operatorname{sign} H_k)$. Из (7.5) следует, что g_{jk} — константы в регулярных точках $U_j \cap U_k$, а значит, они продолжаются константами на все точки $U_j \cap U_k$. Имеем $h_{jk} \in \mathbf{Z}$. Поскольку h_{jk} — коцикл, получается класс $\mathfrak{M} \in H^1(\Lambda, \mathbf{Z})$, класс Маслова лагранжева многообразия Λ. (Конструкция $\mathfrak{M}$ была впервые предложена Келлером [6] и определена Масловым [7].) Мы даем здесь определение класса когомологий по Чеху, двойственного описанному выше геометрическому циклу.

Другими словами, если сделать указанные выше предположения об общем положении, то значение класса $\mathfrak{M}$ на классе некоторой гладкой кривой C, пересекающей Z трансверсально, равно числу точек пересечения C с Z с учетом их кратностей.

С другой стороны, коцикл g_{jk} определяет класс $\beta \in H^1(\Lambda, S)$, где S — пучок ростков локально постоянных C^∞-функций на Λ. Поскольку $d\varphi_j|_\Lambda = \alpha|_\Lambda$ на U_j, класс β — это образ класса де Рама $[\alpha|_\Lambda]$ при каноническом изоморфизме когомологий де Рама на когомологии Чеха. (Отметим, что $d(\alpha|_\Lambda) = 0$, поскольку Λ — лагранжево многообразие.) Будем писать $\beta = [\alpha|_\Lambda]$. Обозначая через γ каноническое отображение $H^1(\Lambda, \mathbf{Z})$ в $H^1(\Lambda, \mathbf{R})$, получаем, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы можно было найти глобальную полуплотность на M, отвечающую v, является условие

$$\frac{\tau}{2\pi}\beta + \frac{1}{4}\mathfrak{M} \in \gamma H^1(\Lambda, \mathbf{Z}). \tag{7.6}$$

Это условие на τ и Λ не зависит от v и известно как *условие квантования Бора — Зоммерфельда.* (Эта аргументация была первоначально предложена Бриллюэном в случае уравнения Шредингера для объяснения старой квантовой теории при помощи квантовой механики.) В гл. VII мы дадим иную интерпретацию условий квантования Бора — Зоммерфельда, пользуясь понятием полуформы и «дискретными» асимптотиками.

На языке геометрической интерпретации классов β и $\mathfrak{M}$ наши требования состоят в том, что полное изменение фазы при обходе по любой замкнутой кривой есть целое кратное 2π. При этом мы получаем вклад от α и от каждого из пересечений с Z. Очевидно, что целочисленность этого полного изменения — необходимое и достаточное условие для того, чтобы можно было придать $e^{i\tau\varphi}v$ глобальное значение в регулярных точках Λ.

Подведем итоги. Если Λ удовлетворяет условиям квантования Бора — Зоммерфельда, то у нас есть способ связывать с асимптотической полуплотностью ρ на Λ асимптотическую полуплотность u на M, где u определяется с точностью до члена порядка τ^{-1}. Если ρ удовлетворяет транспортному уравнению для оператора L, то $Lu = O(\tau^{-2})$.

Отображение, ставящее ρ в соответствие (класс эквивалентности) u, называется каноническим оператором Маслова. Он унитарен с точностью до $O(\tau^{-1})$, т. е.

$$\int_{\Lambda} |\rho|^2 = \int_{M} |u|^2 + O(\tau^{-1}),$$

если ρ (а значит, и u) имеет компактный носитель, например если Λ компактно.

Заметим, что если ρ обращается в нуль в окрестности цикла Маслова, т. е. если глобально

$$u = \sum e^{i\tau\varphi_j} \rho_j,$$

где сумма берется по различным листам Λ, то

$$u\bar{u} = \sum e^{i\tau(\varphi_j - \varphi_k)} \rho_j \rho_k \quad \text{и} \quad \int e^{i\tau(\varphi_j - \varphi_k)} \rho_j \rho_k = O(\tau^{-N}) \quad \text{для всех} \quad N$$

при $j \neq k$ по методу стационарной фазы. Таким образом, $\int |u|^2 \sim \sim \int |\rho|^2$ для всех порядков. Общее рассуждение, принадлежащее Дёйстермату [8], состоит лишь в несколько более тонком применении метода стационарной фазы и проводится вполне непосредственно.

Теперь при помощи красивого рассуждения, также принадлежащего Дёйстермату, мы можем связать условия Бора — Зоммерфельда со спектром оператора L. Предположим, что L — самосопряженный оператор. Если заданы полуплотность ρ с нормой $\|\rho\| = c > 0$, удовлетворяющая транспортному уравнению на Λ, и τ, удовлетворяющее условиям Бора — Зоммерфельда, то существует такая полуплотность u, что

$$\|u\|_{L^2} = c + O(\tau^{-1}) \quad \text{и} \quad \|Lu\| < C\tau^{-2}\|u\| \quad \text{для некоторого} \quad C.$$

Отсюда следует существование такой константы C, что спектр оператора L пересекается с интервалом $(-C\tau^{-2}, C\tau^{-2})$, ибо в противном случае $\|Lu\| \geqslant C\tau^{-2}\|u\|$. Применительно к оператору Шредингера

$$-\hbar^2\Delta + (V - E)$$

это означает, что спектр пересекается с интервалом диаметра $\hbar^2$ с центром в E, если для данного значения E удовлетворяются условия Бора — Зоммерфельда.

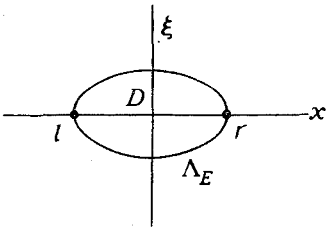
Исследуем смысл условия квантования Бора — Зоммерфельда в классическом случае стационарного (т. е. не зависящего от времени) одномерного уравнения Шредингера

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{1}{\hbar^2}(E-V(x))\psi=0,$$

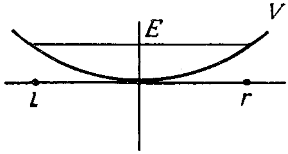
где $\hbar^{-1}$ играет роль асимптотического параметра. Символ оператора равен

$$\sigma=-\xi^2+(E-V(x)) \quad \text{и} \quad \xi_\sigma=2\xi\frac{\partial}{\partial x}-V'(x)\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

Характеристическое многообразие $\sigma=0$ задается уравнением $\xi^2+V(x)=E$:



На этом рисунке предполагается, что функция V имеет примерно такой вид:



Характеристическое многообразие в этом случае одномерно, а значит, совпадает с лагранжевым многообразием. Ясно, что цикл Маслова Z состоит из точек пересечения кривой $\sigma=0$ с осью x, а значение класса Маслова на фундаментальном цикле (представляющем собой указанную кривую, проходимую один раз против часовой стрелки) равно $+2$. Значит, из (7.6) получаем

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{\Lambda_E}\alpha+\frac{1}{2}=n.$$

Далее, $\alpha=\xi\,dx$ и $\int\limits_{\Lambda_E}\alpha=\iint\limits_{D_E}d\xi\wedge dx$ — не что иное, как площадь

$A(E)$ области, заключенной внутри кривой Λ_E. Таким образом, условия Бора — Зоммерфельда в этом случае сводятся к

$$A(E)=2\pi\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right), \qquad n=0,\ 1,\ \dots .$$

В этом случае можно также явно выписать решение транспортного уравнения. Будем искать полуплотность на Λ_E, инвариантную относительно векторного поля ξ_σ. Легко указать 1-форму (определенную вне Z), инвариантную относительно ξ_σ, а именно $\iota^*\,dx/\xi$. Действительно,

$$D_{\xi_\sigma}\left(\frac{dx}{\xi}\right)=d\left(\xi_\sigma \lrcorner \frac{dx}{\xi}\right)+\xi_\sigma \lrcorner\, d\left(\frac{dx}{\xi}\right)=d\,(2)-\xi_\sigma \lrcorner \frac{d\alpha}{\xi^2}=\frac{d\sigma}{\xi^2}$$

и $\iota^*\,d\sigma=0$, поскольку σ — константа на Λ_E. Значит, поскольку $\xi=\sqrt{E-V}$ на Λ_E, полуплотность имеет вид

$$\frac{|\,dx\,|^{1/2}}{\sqrt[4]{E-V}}.$$

Функция φ определяется из $(d\varphi/dx)^2+V=E$, т. е. $\varphi=\pm\int\sqrt{E-V}$. Решение вне сингулярных значений (которые в этом случае называются «точками поворота», а не «каустиками») имеет вид

$$\frac{c}{\sqrt[4]{E-V}}\left[\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\sqrt{E-V}\,dx\right)+\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left[\int\sqrt{E-V}\,dx-\frac{1}{4}\right]\right)\right].$$

Это стандартное приближенное решение уравнения Шредингера, полученное методом ВКБ.

Вернемся к более общим рассмотрениям. Предположим, что условия квантования Бора — Зоммерфельда выполняются для Λ и для заданного множества значений τ. (Например, если $\beta=0$ и $\mathfrak{M}=0$, то можно брать все τ. В противном случае это налагает на τ некоторые ограничения.) До конца параграфа будем предполагать, что τ принадлежит множеству, для которого условия Бора — Зоммерфельда выполняются. Тогда описанная выше процедура дает способ переносить полуплотности на Λ в полуплотности на множестве регулярных точек M. Этот метод можно сформулировать следующим образом. Выберем регулярную точку x на M, и пусть $y_1, \dots, y_k$ — прообразы x. Тогда (в предположении, что Λ связно), поскольку $d\varphi=\alpha$, явное определение фаз в (7.1) дает

$$\sum_j u_j \exp\left[i\left(\tau\int_{\gamma_j}\alpha+\#_j\pi/4+\tau\varphi(z_0)\right)\right], \tag{7.7}$$

где γ_j — любая кривая, соединяющая z_0 с y_j и пересекающая Z трансверсально, $\#_j$ — индекс пересечения γ_j с Z и $\varphi(z_0)$ — произвольная константа.

Заметим, что тот факт, что выражение (7.7) не зависит от выбора γ_j, в точности равносилен условиям квантования Бора — Зоммерфельда.

Иногда для некоторых кривых γ_i (7.7) имеет смысл, хотя условие Бора — Зоммерфельда не удовлетворяется. Например, предположим, что Λ получается из подмногообразия Λ_0 под действием потока, порожденного векторным полем ξ, причем предполагается, что каждая интегральная кривая пересекает Λ_0 в точности в одной точке. Предположим также, что $\alpha|_{\Lambda_0}$ — точная форма. Тогда (с точностью до произвольной константы) возможен корректный выбор фазовой функции на Λ_0, и можно взять в качестве γ_j в (7.7) траектории ξ, соединяющие y_j с Λ_0.

Рассмотрим, например, нестационарное уравнение Шредингера

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2}\sum\frac{\partial^2\psi}{(\partial x_i)^2} + V(x)\,\psi$$

на $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$. Здесь $1/\hbar$ играет роль параметра τ. Если обозначить через ξ_0 переменную, дуальную t, а через ξ_i — переменные, дуальные x^i, то символ оператора равен

$$\xi_0 - \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\xi_i^2 - V(x) = \sigma,$$

а соответствующее векторное поле имеет вид

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \sum\frac{\partial V}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\xi_i} - \sum\xi_i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

в то время как

$$\langle\xi,\ \alpha\rangle = \xi_0 - \sum\xi_i^2,$$

т. е. на характеристическом многообразии $\{\sigma = 0\}$ имеем

$$\langle\xi,\ \alpha\rangle = V(x) - \frac{1}{2}\sum\xi_i^2 = -L,$$

где L — классический лагранжиан. Поскольку все члены в операторе Шредингера самосопряжены, субглавный символ равен нулю и транспортное уравнение принимает вид

$$D_\xi\rho = 0$$

относительно полуплотности ρ.

Пусть $\Lambda\subset T^*(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R})$ — лагранжево многообразие, полученное из $\Lambda_0\times\{0\}$ под действием потока f_t, порожденного векторным полем ξ, где $\Lambda_0 = \operatorname{graph} d\varphi_0$ — лагранжево подмногообразие в $T^*\mathbf{R}^n$. Рассмотрим отображение F_t: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ вида

$$F_t(x) = \pi f_t(d\varphi_0(x)).$$

Если v_0 — начальная полуплотность на Λ_0, то $f_{-t}^* v_0$ — полуплотность на $f_t\Lambda_0$ и полуплотность

$$v = |f_{-t}^* v_0| \otimes |dt|^{1/2},$$

разумеется, инвариантна относительно потока, т. е. удовлетворяет транспортному уравнению. Если $v_0 = \pi^* u_0$, то соответствующая полуплотность u на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ задается в точке z формулой

$$u(z) = \left[\sum \left|\det \frac{\partial F_t}{\partial x}\right|^{-1/2} (x_i)\, u_0(x_i)\right] \otimes |dt|^{1/2},$$

где суммирование ведется по прообразам z (предполагается, что z — регулярное значение F_t). Значит, если $u_0 = a\,|dx|^{1/2}$, то полный член первого порядка в асимптотическом решении уравнения Шредингера имеет вид

$$\sum_{x_j \in F_t^{-1}(x)} \left|\det \frac{\partial F_t}{\partial x}(x_i)\right|^{-1/2} a(x_i) \exp\left[i\left(-\hbar^{-1}\int_{\gamma_j} L + H_j + \hbar^{-1}\varphi_j\right)\right],$$

где γ_j — классический путь, H_j — индекс пересечения соответствующей кривой на Λ с циклом Маслова и φ_j — начальные фазы.

Найденным выражением и методом стационарной фазы можно воспользоваться для получения асимптотического выражения для фундаментального решения уравнения Шредингера. Напишем

$$\delta(x - x_0) = a(x)\int e^{i\eta\cdot(x - x_0)}\, d\eta,$$

где $a(x)$ — функция с компактным носителем в окрестности точки x_0, принимающая значение 1 в точке x_0. Полагая $\xi = \hbar\eta$, это можно переписать так:

$$\delta(x - x_0) = \frac{a(x)}{\hbar^n}\int \exp i\left[\frac{\xi}{\hbar}(x - x_0)\right] d\xi.$$

Предположим, что существует только конечное число классических траекторий, соединяющих x_0 с заданной точкой y в момент времени t, и что y не является сопряженной точкой для x_0, т. е. что y — регулярное значение проекции многообразия всех траекторий, выходящих из x_0. То же будет верно для всех траекторий, соединяющих x с y, где x достаточно близко к x_0. Таким образом, можно предполагать, что это имеет место для всех x из носителя a. Рассмотрим теперь задачу Коши для каждой частоты, т. е. уравнение Шредингера с начальным условием

$$\frac{a(x)}{\hbar^n}\exp\left[i\frac{\xi}{\hbar}(x - x_0)\right].$$

Соответствующее начальное изотропное многообразие — это $\operatorname{graph} d(\xi\cdot(x - x_0))$, который является множеством точек (x, ξ) (где ξ фиксировано, а x пробегает $\mathbf{R}^n$). Тогда мы получаем соответствующее Λ, и из наших предположений следует, что имеется только конечное число траекторий $\gamma_{j,\xi}$, лежащих в Λ и соединяющих точки из носителя a с y. Пусть $(x_j(\xi),\ \xi)$ — начальная точка траектории $\gamma_{j,\xi}$. Тогда асимптотическое решение с начальной фазой $\xi\cdot(x-x_0)$ имеет вид

$$\sum a(x_j(\xi))\left|\frac{\partial y}{\partial x}(x_j(\xi))\right|^{-1/2}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[\int\limits_{\gamma_{j,\xi}}\alpha+\xi\cdot(x_j(\xi)-x_0)\right]+\frac{\pi i}{4}\#_j\right).$$

Интегрируя это выражение по ξ, получаем

$$G(y,\ t,\ x_0)=\sum_j\frac{1}{\hbar^n}\int a(x_j(\xi))\left|\frac{\partial y}{\partial x}(x_j(\xi))\right|^{-1/2}\times$$
$$\times\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[\int\alpha+\xi\cdot(x_j(\xi)-x_0)\right]+\frac{\pi i}{4}\#_j\right)d\xi.$$

Для того чтобы вычислить этот интеграл по методу стационарной фазы, мы должны прежде всего найти критические точки фазовой функции

$$\varphi(\xi)=\int\limits_{\gamma_{j,\xi}}\alpha+\xi\cdot(x(\xi)-x_0)$$

как функции от ξ. Для этого нам потребуются некоторые общие факты из симплектической геометрии.

Пусть M — многообразие и Λ — лагранжево подмногообразие в T^*M. Пусть, далее, α — каноническая форма действия. Для каждого $s\in\mathbf{R}$ пусть γ_s — гладкая кривая на Λ, причем γ_s гладко зависит от s. Обозначим через $a(s)$ и $b(s)$ начальную и конечную точки γ_s. Тогда

$$\frac{d}{ds}\int\limits_{\gamma_s}\alpha=\alpha\left(\frac{db}{ds}\right)-\alpha\left(\frac{da}{ds}\right).\tag{7.8}$$

Доказательство. Существует трубчатая окрестность U на Λ кривой γ_s, в которой форма α точна, т. е. $\alpha=df$ на U. Значит,

$$\int\limits_{\gamma_s}\alpha=f(\beta(s))-f(\alpha(s)).$$

Дифференцирование по s дает доказываемое утверждение. Мы еще встретимся с этой формулой много раз. Например, в гл. III мы увидим, что из нее следует условие синуса Аббе в микроскопии.

Теперь вычислим

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}\int\limits_{\gamma_{j,\xi}}\alpha.$$

Заметим, что все кривые $\gamma_{j,\xi}$ лежат на фиксированном лагранжевом многообразии в $T^*(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R})$; они принадлежат множеству траекторий, которые в момент времени t лежат над точкой (y, t). Пусть η_i и ζ_i — касательные векторы к кривым из начальных и конечных точек для $\gamma_{j,\xi}$, которые получаются, если менять ξ_i, не меняя остальных координат ξ. Согласно (7.8),

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \int\limits_{\gamma_{j,\xi}} \alpha = \langle \eta_i, \alpha \rangle - \langle \zeta_i, \alpha \rangle.$$

Конечная точка $\gamma_{j,\xi}$ проектируется в фиксированную точку (y, t) базы для всех ξ, т. е. $(d\pi)\eta_i = 0$, а значит, $\langle \eta_i, \alpha \rangle = 0$. С другой стороны,

$$(d\pi)\zeta_i = \frac{\partial x^j(\xi)}{\partial \xi_i}, \quad \text{т. е.} \quad \langle \zeta_i, \alpha \rangle = \xi \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \xi_i}$$

в точке $(x(\xi), \xi)$. Поэтому получаем

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \int\limits_{\gamma_{j,\xi}} \alpha = -\xi \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \xi_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \xi_i} \varphi(\xi) = (x(\xi) - x_0)_i.$$

Это доказывает, что *критические точки фазовой функции в интегральном представлении для G — это в точности те ξ, для которых $x(\xi) = x_0$*, т. е. для которых интегральная кривая $\gamma_{j,\xi}$ соединяет x_0 и y.

Применяя метод стационарной фазы и пользуясь тем фактом, что $a(x_0) = 1$, получаем следующую асимптотическую формулу для G:

$$G(y, t, x_0) \sim$$
$$\sim \sum_{\alpha} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \left| \frac{\partial y}{\partial \xi} \right|^{-1/2} (x_0, \xi_\alpha) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int\limits_0^t L(x_\alpha, \dot{x}_\alpha, s)\, ds + \frac{\pi i}{4} \#_j \right),$$

где $x_\alpha(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, — классическая траектория, идущая из x_0 в y. Это асимптотическая аппроксимация Маслова фундаментального решения уравнения Шредингера.

В. П. Маслов дал другое «доказательство» этой формулы, пользуясь интегралами Фейнмана. Он начинает с представления Фейнмана фундаментального решения оператора Шредингера:

$$G(y, t, x_0) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int\limits_0^t L(x, \dot{x}, \tau)\, d\tau \right) d\mu,$$

где $x(\tau)$ — *путь, соединяющий* x_0 *с* y, а μ — мера Фейнмана на пространстве путей; см. [9].

Применим метод стационарной фазы к этому интегралу (игнорируя тот факт, что интеграл берется по бесконечномерному множеству). Критические точки фазовой функции — это те пути, на которых первая вариация $\delta\int L=0$, т. е. по принципу наименьшего действия это классические траектории $x_\alpha(\tau)$, рассмотренные выше. Сигнатура второй вариации $\delta^2\int L$ в каждой из этих траекторий формально вычисляется как значение $\#_f$ вдоль траектории. Поэтому мы получаем асимптотическую формулу для стоящего справа интеграла Фейнмана:

$$G(x, y, t)\sim\sum K_\alpha \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^t L(x_\alpha, \dot{x}_\alpha, s)\,ds+i\frac{\pi}{4}\#_f\right).$$

Здесь K_α — отношение двух бесконечных величин, а именно $(2\pi\hbar)^{\infty/2}$ и $|\det\delta^2 L|$, но они компенсируют друг друга и дают конечный ответ, вычисленный выше. Было бы интересно изучить эту формулу подробнее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Luneburg R. K. Mathematical theory of optics.—Univ. of California Press, Berkeley, Calif., 1964.
2. Lax P.—*Duke Math. J.*, 24 (1957), 627—646.
3. Ludwig D.—*Comm. Pure Appl. Math.*, 13 (1960), 473—508.
4. Loomis L. H., Sternberg S. Advanced calculus.—Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.
5. Guillemin V., Quillen D., Sternberg S.—*Comm. Pure Appl. Math.*, 23 (1970).
6. Keller J. B.—*Ann. Physics*, 4 (1958), 180—188.
7. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы.—М.: Изд-во МГУ, 1965.
8. Duistermaat J. J.—*Comm. Pure Appl. Math.*, 27 (1974), 207—281.
9. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Пер. с англ.—М.: Мир, 1968.

10*. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.—М.: Наука, 1976.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

В этой главе мы проиллюстрируем методы предыдущей главы на примере некоторых применений к оптике. Мы дадим здесь лишь краткий очерк предмета, отсылая читателя к существующим прекрасным учебникам, таким, как Борн и Вольф [1], Каратеодори [2], Люнебург [3], Зоммерфельд [4] и Синг [5].

§ 1. Законы преломления и отражения

Если мы описываем распространение электромагнитных волн при помощи уравнений Максвелла, то на геометрическую оптику можно смотреть как на изучение соответствующего характеристического уравнения, а «световые лучи» — это соответствующие бихарактеристические кривые, т. е. проекции бихарактеристик на базу. Таким образом, в геометрической оптике мы имеем дело с «аппроксимацией нулевого порядка» в асимптотическом разложении, если в качестве большого параметра τ берется частота. Возможна другая интерпретация, при которой исследуется уравнение, описывающее распространение разрывов электромагнитного поля.

Пусть x, y, z — декартовы координаты в $\mathbf{R}^3$. Тогда характеристическое уравнение для системы уравнений Максвелла в изотропной среде имеет вид

$$\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\varphi_t^2=0, \tag{1.1}$$

где c — скорость света (константа, равная приблизительно $3\cdot10^{10}$ см/с), $\varepsilon=\varepsilon(x,\ y,\ z)$ — диэлектрическая проницаемость, а $\mu=\mu(x,\ y,\ z)$ — магнитная проницаемость; обе величины являются функциями среды. Короткое обсуждение уравнений Максвелла и вывод (1.1) см. в § 6. Мы ищем решение вида

$$\varphi=\psi-ct,$$

где $\psi=\psi(x,\ y,\ z)$; получаем уравнение

$$\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2=n^2, \tag{1.2}$$

где величина $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ называется *показателем преломления*. Уравнение (1.2) называется *уравнением эйконала*.

Обозначим через p, q, r координаты, дуальные к x, y, z, так что (x, y, z, p, q, r) — координаты в $T^*\mathbf{R}^3$. Мы можем переписать (1.2) в виде

$$H(d\psi)=\frac{1}{2}, \quad \text{где} \quad H=\frac{1}{2n^2}(p^2+q^2+r^2).$$

Бихарактеристическое векторное поле имеет вид

$$\xi_H=\frac{1}{n^2}\left(p\frac{\partial}{\partial x}+q\frac{\partial}{\partial y}+r\frac{\partial}{\partial z}\right)+\frac{(p^2+q^2+r^2)}{n^3}\left(\frac{\partial n}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}+\frac{\partial n}{\partial y}\frac{\partial}{\partial q}+\frac{\partial n}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\right). \quad (1.3)$$

Далее, H — это гамильтониан, отвечающий лагранжиану

$$L=\frac{1}{2}n^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2),$$

и он представляет собой кинетическую энергию, соответствующую римановой метрике

$$n\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=n\,ds.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения, задаваемые векторным полем (1.3), — это в точности дифференциальные уравнения для геодезических в соответствующей римановой метрике, т. е. уравнения Эйлера — Лагранжа (в форме Гамильтона; см. Люмис — Стернберг [6], стр. 535). Далее, геодезические — это кривые, на которых достигает экстремума длина дуги относительно этой метрики. Эта длина дуги называется *оптической длиной пути*. В результате мы получаем *принцип Ферма*, состоящий в том, что световые лучи можно охарактеризовать как кривые, на которых экстремальна оптическая длина $\int n\,ds$.

Если рассматривать характеристическое уравнение как уравнение, описывающее распространение разрывов, то поверхности

$$\psi-ct=0$$

являются поверхностями разрывов. Ясно, что относительно *евклидовой* метрики при увеличении $|d\psi|^2=(\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2)$ поверхности $\psi=\text{const}$ сближаются. Значит, ввиду (1.2) *в областях с большим показателем преломления разрывы распространяются медленнее*. Функция ψ задает сечение $d\psi$ кокасательного расслоения. Пользуясь евклидовой метрикой, отождествим ковекторы с векторами и рассмотрим $d\psi$ как векторное поле. Частица, движение которой задается этим векторным полем, имеет скорость $|d\psi|$. В этой интерпретации частица будет двигаться *быстрее* в области с бо̀льшим показателем преломления.

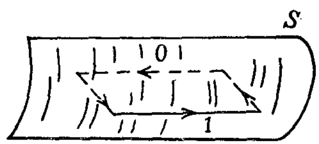
Выведем теперь элементарные законы преломления и отражения. Предположим, что показатель преломления принимает значения n_0 и n_1 в каждой из двух областей 0 и 1, исключая узкую полосу около поверхности S, разграничивающей области, где n

гладко меняется от n_1 до n_0. В каждой из этих областей напишем

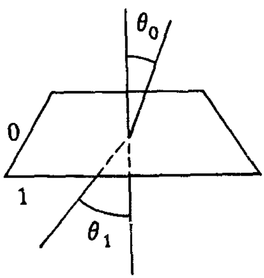
$$d\psi = nu,$$

где u — единичное векторное поле в направлении $d\psi$. Мы снова воспользовались евклидовой метрикой для отождествления векторных полей с ковекторными полями.

Решение ψ уравнения (1.2) отвечает лагранжеву многообразию Λ, лежащему в характеристическом многообразии $H = 1/2$. Каждая кривая на Λ проектируется в кривую на $\mathbf{R}^3$. Если $\alpha = p\,dx + q\,dy + r\,dz$ — фундаментальная 1-форма на $T^*\mathbf{R}^3$, то интеграл α по пути, ограничивающему произвольную область на Λ, равен нулю по теореме Стокса. Рассмотрим решение ψ, которое продолжается через границу областей, и проинтегрируем $d\psi$ по замкнутому пути, показанному на рисунке; большие звенья пути являются кривыми, параллельными поверхности S, но лежащими в областях, где n — константа.



Значения $d\psi$ на кривых, параллельных S, равны $n_1 u_1$ и $-n_0 u_0$, а вклад от коротких трансверсальных кривых незначителен. Полный интеграл должен быть равен нулю. Рассмотрим предельный случай, когда n претерпевает разрыв при переходе через S. Мы получаем, что $n_1 u_1 - n_0 u_0$ имеет нулевое скалярное произведение с любым касательным вектором к поверхности. Значит, вектор $n_1 u_1 - n_0 u_0$ нормален к поверхности. Пусть e — единичный нормальный вектор к S. Получаем



$$e \wedge (n_1 u_1 - n_0 u_0) = 0.$$

Значит, e, u_1, u_0 лежат в одной плоскости. Пусть θ_0 и θ_1 — углы u_0 и u_1 с e. В результате получаем

Закон Снеллиуса. *Падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с нормалью и*

$$n_1 \sin\theta_1 = n_0 \sin\theta_0. \tag{1.4}$$

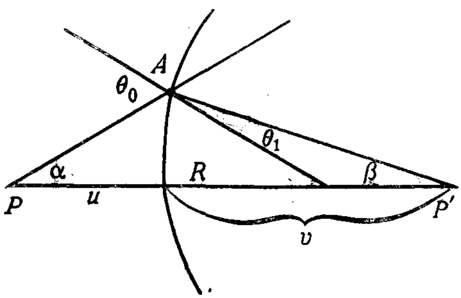
На самом деле Снеллиус (1580 — 1626) не имел в своем распоряжении независимых измерений n_1 или n_0, но он экспериментально показал, что

$$\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_0} = \text{const}. \tag{1.5}$$

Мы отсылаем читателя к книге Маха [7, гл. III и V], где он найдет очень интересное обсуждение ранней истории законов преломления и отражения. Закон Снеллиуса был усовершенствованием закона Кеплера, который в свою очередь на основе остроумных опытов усовершенствовал самую раннюю из известных количественных формулировок закона преломления, принадлежавшую Птолемею (II столетие н. э.):

$$\frac{\theta_1}{\theta_0} = \text{const}. \tag{1.6}$$

Заметим, что при малых углах падения, когда $\sin\theta \sim \theta$, (1.5) сводится к (1.6). Эта аппроксимация, при которой $\sin\theta$ или $\operatorname{tg}\theta$ для малых углов θ заменяется на θ, будет постоянно появляться в дальнейшем.



Например, предположим, что область 1 (частично) ограничена куском сферы радиуса R. Тогда из рассмотрения треугольников получаем

$$\frac{\sin(\pi - \theta_0)}{\sin\alpha} = \frac{R+u}{R} \quad \text{и} \quad \frac{\sin\theta_1}{\sin\beta} = \frac{v-R}{R},$$

а по закону Снеллиуса

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_0} = \frac{n_0}{n_1}.$$

Из треугольника PAP' имеем

$$\alpha + [(\pi - \theta_0) + \theta_1] + \beta = \pi, \quad \text{или} \quad \beta = \theta_0 - \theta_1 - \alpha.$$

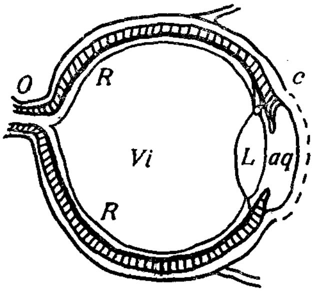
Если угол α мал, то углы θ_0, θ_1 и β также будут малыми. Если заменить синус каждого из этих углов на сам угол во всех предыдущих равенствах, то, исключая углы, мы получим (после несложных алгебраических манипуляций)

$$\frac{n_0}{u} + \frac{n_1}{v} = \frac{n_1 - n_0}{R}. \tag{1.7}$$

Заметим, что в этом выражении v не зависит от угла α. Другими словами, все лучи, под небольшими углами выходящие из P, сходятся в P'. Иначе говоря, P' — «образ» (изображение) точки P. Конечно, это верно только в указанном выше приближении. Если взять $u = \infty$, то соответствующее значение

$$v_\infty = \left(\frac{n_1}{n_1 - n_0}\right) R$$

называется *фокусным расстоянием* системы и представляет собой расстояние от поверхности S до образа очень далекой точки. Рассмотрим, например, человеческий глаз. В нем область за роговицей заполнена жидкостью, называемой водянистой влагой, а область позади хрусталика заполнена средой, называемой стекловидным телом. Обе эти среды имеют показатель преломления

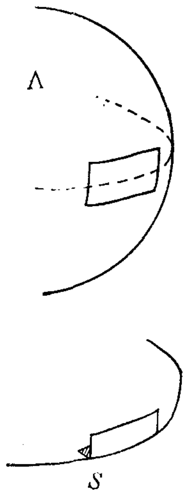


c роговица
aq водянистая влага
L хрусталик
Vi стекловидное тело
R сетчатка
O зрительный нерв

примерно тот же, что и вода, а именно 1,336. Значит, если пренебречь хрусталиком, то $v_\infty = 3{,}98R$. Благодаря тому, что роговица имеет бóльшую кривизну (а значит, меньший радиус R), чем остальное глазное яблоко, фокусное расстояние примерно равно диаметру глаза и изображение лежит на сетчатке. Таким образом, во многих случаях сфокусированное изображение получается без участия хрусталика. Хрусталик производит коррекцию — так называемую аккомодацию, регулируя свой радиус кривизны, т. е. фокусирует на сетчатку изображение точек, не лежащих на бесконечности. Законы, позволяющие находить изображения точек для линз, выполненных в виде сферических поверхностей, получаются при помощи повторного применения (1.7). Мы отсылаем читателя к любому элементарному учебнику. Кроме того, мы вернемся к этому вопросу позднее.

Перейдем к отражению. Предположим опять, что имеется небольшой граничный слой около поверхности S, в котором n меняется от n_0 до n_1. Однако на этот раз предположим, что имеется решение в виде лагранжева многообразия, которое «возвращается назад» около S (как это было в некоторых примерах в предыдущей главе). Итак, мы имеем решение Λ и рассматриваем замкнутую кривую на Λ, у которой основные компоненты проектируются на $\mathbf{R}^3$ в виде кривых, параллельных S.

Поскольку Λ лагранжево, интеграл от α по этой кривой равен нулю. Далее, Λ разбивается на две ветви вне S; одна отвечает



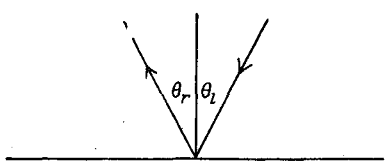
«падающему лучу» и задается уравнением $d\psi_i = n_0 u_i$, а вторая имеет вид $d\psi_r = n_0 u_r$. Как и прежде, делаем вывод, что

$$e \wedge (u_i - u_r) = 0.$$

Итак, получаем

падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с нормалью и составляют с ней равные углы. (1.8)

Этот закон был известен Герону из Александрии (около 100 г. н. э.).

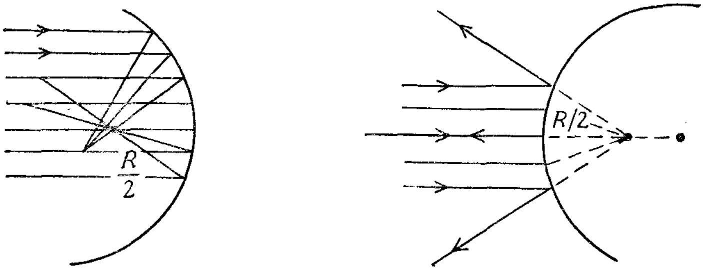


(Заметим, что в пределе мы получаем для отражения и для преломления разрывные лагранжевы многообразия.)

Применяя те же соображения, что и выше, к случаю сферического зеркала, получаем

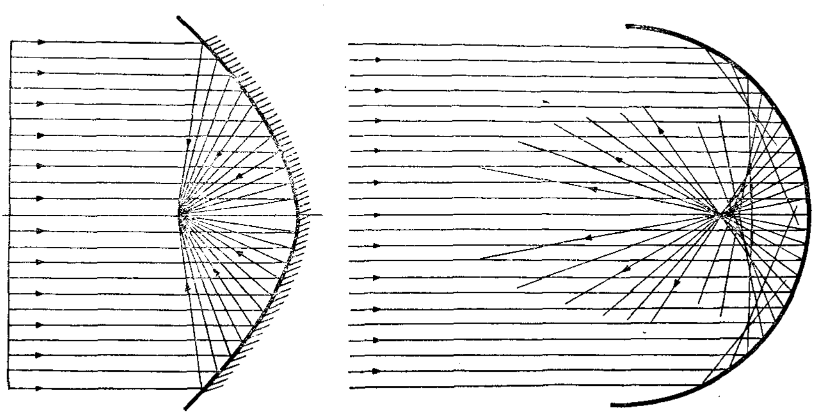
$$\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{2}{R}. \tag{1.9}$$

Договоримся, что при изображении сферических поверхностей мы будем считать свет приходящим слева, будем пользоваться одной и той же ориентацией в пространстве предметов и пространстве изображений и выбирать знак радиуса кривизны в зависимости от относительного положения центра. Таким образом, например, если положить $u = \infty$ в (1.9), то возможны два типа сферических зеркал:



вогнутое зеркало выпуклое зеркало

Заметим, что даже в случае сферического зеркала, когда $\theta_l = \theta_r$, фокусировка только приближенно является правильной, поскольку в уравнениях, полученных из рассмотрения треугольников, мы заменяли $\sin\alpha$ на α и т. д. Более аккуратная картина того, как происходит отражение от вогнутого зеркала, приведена на следующем рисунке. Огибающая лучей — это каустика. Если бы мы имели параболическое зеркало и свет падал с бесконечности параллельно оси, то получилась бы правильная фокусировка. Отклонение от правильной фокусировки при использовании сферических поверхностей называется *сферической аберрацией*. Позднее мы рассмотрим ее вместе с другими аберрациями.



параболическое зеркало сферическое зеркало

Мы закончим этот параграф описанием алгоритма Люнебурга, который позволяет проследить путь лучей в системе плоских отражающих или преломляющих поверхностей. Пусть $v_i = d\psi(s_i) = n_i u_i$ — векторы лучей в i-й области. Пусть, далее, e_i — единичная нормаль, проведенная в $(i+1)$-ю область. Пусть, наконец, θ_i есть i-й угол падения и

$$\rho_i = n_i \cos\theta_i = v \cdot e_i.$$

Тогда из (1.4), (1.7) получаем

$$v_{i+1} = v_i + \Gamma_i(\rho_i)\, e_i, \tag{1.10}$$

где

$$\Gamma_i(\rho_i) = \begin{cases} -2\rho_i & \text{для отражения,} \\ \sqrt{n_{i+1}^2 - n_i^2 + \rho_i^2} - \rho_i & \text{для преломления.} \end{cases}$$

Итак, для окончательного (выходящего) луча имеем

$$v_R = v_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Gamma_i(\rho_i)\, e_i. \tag{1.11}$$

Пусть e_i заданы, и мы хотим найти простую рекуррентную формулу для ρ_i. Возьмем скалярное произведение (1.10) с e_j. Тогда

$$v_{i+1} \cdot e_j - v_i \cdot e_j = \Gamma_i(\rho_i)\,(e_i \cdot e_j).$$

Суммирование от $i=0$ до $i=j-1$ дает рекуррентную формулу

$$\rho_j = v_0 \cdot e_j + \sum_{i=0}^{j-1} \Gamma_i(\rho_i)\,(e_i \cdot e_j).$$

Например, в том случае, когда все поверхности отражающие, получаем

$$\rho_j = (v_0 \cdot e_j) - 2 \sum_{i=1}^{j-1} (e_i \cdot e_j)\, \rho_i;$$

это система линейных рекуррентных формул.

§ 2. *Фокусировка и увеличение*

Предположим, что задана кривая γ на римановом многообразии M. Обозначим через γ' кривую на TM, относящую каждой точке t касательный вектор γ'. Отождествляя TM с T^*M при помощи римановой метрики, мы получаем кривую $\hat\gamma$ на T^*M. Итак, имеем: $\hat\gamma$: $I \to T^*M$, где I — интервал на $\mathbf{R}$ и

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \hat\gamma^*\alpha \right\rangle = \left\langle d\hat\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \alpha \right\rangle = \left\langle d\pi \cdot d\hat\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \hat\gamma(t) \right\rangle =$$
$$= \left\langle d\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \hat\gamma(t) \right\rangle = \langle \gamma'(t), \hat\gamma(t) \rangle = \|\gamma'(t)\|^2.$$

Предположим, что γ параметризуется длиной дуги. Тогда $\|\gamma'(t)\|=1$ и мы получаем

$$\text{длина } \gamma=\int_{\hat{\gamma}}\alpha. \tag{2.1}$$

Если взять произвольную кривую на T^*M, то она необязательно происходит из некоторой кривой на M. Однако если рассмотреть кривую, отвечающую решению половины гамильтоновых дифференциальных уравнений (уравнений $dx/dt=\partial H/\partial\xi$), то она будет соответствовать кривой на M. В частности, каждой траектории для ξ_H отвечает кривая на M. (Здесь H — энергия, $H(\xi)=$ $=\frac{1}{2}\|\xi\|^2$. Для нашего оптического примера H указана в § 1.) Кривая γ на M параметризуется длиной дуги тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2}\|\hat{\gamma}(t)\|^2=\frac{1}{2}$, т. е. тогда и только тогда, когда $\hat{\gamma}$ лежит на характеристическом многообразии $H=\frac{1}{2}$. Но бихарактеристика — это в точности траектория для ξ_H, лежащая в $\{H=\frac{1}{2}\}$. В результате получаем

Пусть $C\colon I\to T^*$ — бихарактеристика и $\gamma=$ $=\pi\circ C$ — соответствующая кривая в M. Тогда (оптическая) длина γ равна $\int_C\alpha$. (2.2)

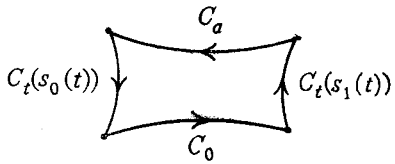
Рассмотрим теперь проблему фокусировки. Предположим, что мы фиксировали точку P и рассматриваем сферу $\Lambda_{P,0}$ всех единичных ковекторов над P. (Это пересечение T_P^* с характеристическим многообразием.) Ясно, что многообразие $\Lambda_{P,0}$ изотропно (поскольку $\alpha|_{\Lambda_{P,0}}=0$) и трансверсально ξ_H. Поэтому все лучи, начинающиеся в P, заметают лагранжево многообразие Λ_P. В $\pi^{-1}P$ максимальный возможный порядок особенности отображения π равен $n-1$ (т. е. 2, если мы рассматриваем $\mathbb{R}^3$); при ограничении на Λ_P все точки сферы $\Lambda_{P,0}$ проектируются в P. Будем говорить, что P имеет идеальный фокус P', если все лучи, выходящие из P, встречаются в P'. Другими словами, мы говорим, что P имеет идеальный фокус в P', если

$$\Lambda_P\cap T_{P'}^*=\Lambda_{P',0}.$$

Поскольку Λ_P — иммерсированное подмногообразие, нам следовало бы сформулировать это определение несколько более точно. Мы говорим, что P имеет *идеальный фокус*, если существует такая сфера $\Lambda'\subset\Lambda_P$, что $\iota\Lambda'=\Lambda_{P',0}$, где $\iota\colon\Lambda_P\to T^*M$ — иммерсия. Будем говорить, что P имеет *сильный фокус* в P', если открытое подмножество лучей, выходящих из P, проходит через P', т. е. имеется подмногообразие Λ' размерности $n-1$ в Λ_P, для которого $\iota\Lambda'\subset\Lambda_{P',0}$. Теперь сделаем важное наблюдение:

Предложение 2.1. *Пусть γ_t — гладкое однопараметрическое семейство лучей, соединяющих P и P'. Тогда все эти лучи имеют одну и ту же оптическую длину.*

Действительно, мы можем написать $\gamma_t = \pi C_t$, где C_t: $I_t \to \Lambda_P$, $0 \leqslant t \leqslant a$, и где I_t — интервал $s_0(t) \leqslant s \leqslant s_1(t)$, а длина дуги γ_t равна $\int_{C_t} \alpha$. Применим теорему Стокса к замкнутой кривой, образованной C_0, $C_t(s_1(t))$, C_a и $C_t(s_0(t))$ (две последние проходятся



в противоположном направлении). Далее, $\pi \cdot C_t(s_0(t)) = P$ и $\pi \cdot C_t(s_1(t)) = P'$, т. е. α равно нулю вдоль «концевых» кривых, и мы получаем, поскольку $d\alpha = 0$ на Λ, что

$$\int_{C_0} \alpha = \int_{C_a} \alpha,$$

а значит, длина дуги γ_0 та же, что и длина дуги γ_a. Аналогичные соображения приводят к следующей формуле. Пусть C_t: $I_t \to \Lambda$ — гладкое семейство кривых на лагранжевом многообразии Λ, где I_t — интервал $s_0(t) \leqslant s \leqslant s_1(t)$. Пусть при $t = 0$

η_1 — касательный вектор к кривой $C_t(s_1(t))$,

η_0 — касательный вектор к $C_t(s_0(t))$.

Тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} \alpha = \langle d\pi\eta_1, C_t(s_1(t)) \rangle - \langle d\pi\eta_0, C_t(s_0(t)) \rangle. \tag{2.3}$$

(Эта формула, как мы увидим позднее в этом параграфе, является основой для условия синусов Аббе. Мы уже доказали ее в несколько ином контексте в § 7 гл. II.)

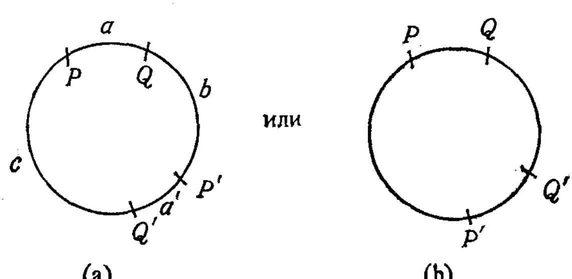
В частности, в случае идеального фокуса, все пути из P в P' (отвечающие одному и тому же Λ') имеют одинаковую оптическую длину. Имеется несколько интересных теоретических рассмотрений, касающихся идеальной фокусировки, которые будут существенны для нас в следующих главах. Эти вопросы были первоначально изучены Максвеллом. *Абсолютный инструмент* — это оптическая система (т. е., с нашей точки зрения, произвольное риманово многообразие), для которого имеются такие открытые множества U и U', что каждая точка $P \in U$ имеет идеальный фокус $P' \in U'$. Мы можем предполагать, не уменьшая общности, что отображение $U \to U'$, переводящее P в P', непрерывно. (Мы предлагаем читателю либо доказать это, либо принять за дополнительное предположение.) Теорема Максвелла утверждает:

Теорема 2.1. *В абсолютном инструменте отображение $U \to U'$ является изометрией, т. е. сохраняет оптическую длину.*

(Значит, например, если показатель преломления в U' тот же, что и в U, то в абсолютном инструменте невозможно увеличение.)

Доказательство. Поскольку каждая дуга в U может быть аппроксимирована геодезической ломаной (т. е. кривой, составленной из отрезков лучей), то достаточно показать, что всякая геодезическая дуга переходит в геодезическую дугу той же длины. Предлагаемое ниже доказательство принадлежит Ленцу [8]. В нем предполагается, что каждая точка U фокусируется идеально (т. е. лучи, идущие во всех направлениях, сходятся — «360-градусная линза»). Теорема верна также и в случае сильной фокусировки и для этого более общего случая была доказана Каратеодори [2]. (Читателя, желающего ознакомиться с доказательством общего случая, мы отсылаем к книге Каратеодори [2].)

Пусть P и Q — две близкие точки в U. Тогда (см. Люмис — Стернберг [6, стр. 541]) имеется единственная кратчайшая геодезическая, соединяющая P и Q. Поскольку мы имеем дело с абсолютным инструментом, эту геодезическую можно продолжить до точек P' и Q'. Геодезическая из Q в P вдоль той же кривой, но в противоположном направлении, после продолжения также должна проходить через Q' и P'. Если P и Q близки настолько, что P' и Q' соединяются единственной геодезической, мы заключаем, что геодезическая из Q в P должна совпадать с геодезической из P в Q, т. е. имеется замкнутая геодезическая. Тогда возможны две конфигурации:



Мы утверждаем, что вторая альтернатива не имеет места. Действительно, по предложению 2.1 геодезическая PP' имеет ту же длину, что и $PQQ'P'$. Но QQ' тоже имеет ту же длину, что и $QPP'Q'$, а это, разумеется, невозможно. В случае (а) длина PQP' та же, что и длина $PQ'P'$, или (a, a', b и c обозначают длины, указанные на рисунке)

$$a+b=a'+c,$$

и аналогично $QP'Q'$ имеет одинаковую длину с QPQ', т. е.

$$a+c=a'+b.$$

Эти два равенства дают

$$a=a',$$

что и требовалось доказать.

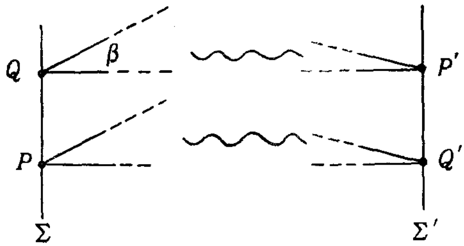
Заметим, что мы доказали одновременно, что $a+b=b+a'$, или (если U связно) что *длина геодезической, соединяющей P с P', не зависит от P.*

Имеется очевидный пример абсолютного инструмента: это сфера. Все геодезические на сфере, выходящие из фиксированной точки на сфере, проходят через антиподальную точку. Поскольку стереографическая проекция конформно отображает сферу (с выколотой точкой) на евклидово пространство, мы можем рассмотреть (индуцированную) сферическую метрику на $\mathbf{R}^3$. Эта система называется «рыбьим глазом» Максвелла; см. Борн и Вольф [1, стр. 176]. Это абсолютный инструмент (если пренебречь лучами, идущими в бесконечность).

Имеется гипотеза Бляшке, что это единственный пример абсолютного инструмента, для которого U — все многообразие. Более точно, назовем риманово многообразие *многообразием свиданий* (wiedersehen manifold; этот термин предложен нам профессором Чжэнем), если M связно и все геодезические, проходящие через любую точку P, проходят также через ее первую сопряженную точку P'. Гипотеза Бляшке состоит в том, что все многообразия свиданий изометричны сферам.

Гипотеза Бляшке была доказана Грином [9] в двумерном случае. До настоящего времени для более высоких размерностей она не доказана.

Теперь вместо фокусировки точек в трехмерной области исследуем условия, необходимые для фокусировки точек, лежащих на плоскости. Рассмотрим следующую ситуацию. Для всех точек P, Q и т. д., лежащих в плоскости Σ, лучи, нормальные к этой плоскости, и лучи, образующие углы, не превосходящие β, с нормалью, пересекаются снова в точках P', Q' и т. д. на некоторой плоскости Σ'. Предположим, что нормальный луч, проходящий через P, пересекает Σ' нормально, а группа лучей, составляющих угол β с нормалью к Σ, составляет угол β' с Σ'. Например, Σ можно считать плоскостью объектов, а Σ' — плоскостью изображений в микроскопе с точкой P в центре объектива.



Для каждого единичного вектора u обозначим через Λ_u лагранжево многообразие, состоящее из тех лучей, которые выходят из Σ по направлению u. Для u, достаточно близких к нормали, эти лучи пересекают Σ' в направлении u' (где u' может зависеть как от начальной точки, так и от u). Если показатель преломления в Σ равен n, то ковектор из Λ_u, лежащий над P, равен nu, а ковектор, лежащий над P', равен $n'u'$, где n' — показатель преломления в Σ'. Пусть, далее, P_t — кривая на Σ, для которой $P_0=P$ и ξ — касательный вектор в точке P; пусть P'_t — соответствующее семейство кривых на Σ' с касательным вектором ξ' в точке P'. На Λ_u лучи γ_t, соединяющие P_t с P'_t, соответствуют кривым C_t, причем γ_t и C_t зависят, конечно, и от u. Обозначим через L_t оптическую длину γ_t. Тогда по (2.1) и (2.3)

$$\frac{d}{dt}L_t=\langle\xi',\ n'u'\rangle-\langle\xi,\ nu\rangle.$$

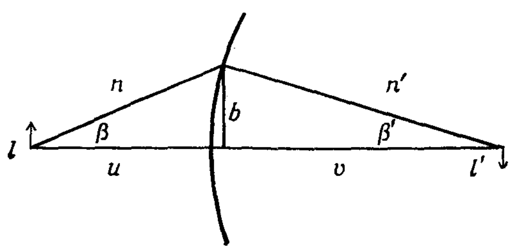
С другой стороны, в силу предложения 2.1, *L_t не зависит от u*. Если выбрать вектор u нормальным, то оба члена справа обратятся в нуль. Таким образом получается *условие синусов Аббе*:

$$n'l'\sin\beta'=nl\sin\beta, \tag{2.4}$$

где $l=\|\xi\|$ и $l'=\|\xi'\|$. Это дает формулу для увеличения

$$m=l'/l.$$

Рассмотрим, например, систему двух сред, разграниченных сферической поверхностью (как в предыдущем параграфе). Для



малых углов мы можем заменить синус на тангенс, так что $\sin\beta \sim h/u$ и $\sin\beta' \sim h/v$. В этом приближении (2.4) приобретает вид

$$m = l'/l = (v/u)(n/n'). \tag{2.5}$$

§ 3. *Метод Гамильтона*

В этом параграфе мы рассмотрим метод, развитый Гамильтоном для исследования задач геометрической оптики. Интересно отметить, что Гамильтон развил свой знаменитый метод, имея в виду именно применения к оптике. Только гораздо позднее он применил те же методы к механике — те самые методы, которые затем были расширены Якоби и привели к формулировкам основ классической аналитической механики, а много позднее и к ключевым понятиям квантовой механики. Интересно также отметить, что Гамильтон опубликовал свою основную статью в 1828 г., через целых десять лет после того, как опыты Френеля окончательно доказали корректность волновой теории света и тем самым сильно ослабили позиции геометрической оптики как точной физической теории. Мы следуем здесь изложению Люнебурга.

Особенно нас будет интересовать следующая ситуация. Свет уходит с некоторой плоскости, проходит некоторую оптическую систему и попадает на другую плоскость. Будем предполагать, что оптическая система лежит в некотором цилиндре, скажем вокруг оси z, и что все интересующие нас световые лучи диффеоморфно проектируются на ось z, а значит, их можно описывать функциями $x(z)$ и $y(z)$. (Тем самым мы исключаем отражения из нашей системы. Эту возможность нетрудно предусмотреть, но изложение усложнится.) Начальная и конечная плоскости будут задаваться значениями z_0 и z_1 (измеренными от какого-то начала). Пространство начальных положений и направлений четырехмерно (оно параметризуется переменными x_0, y_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, где $\dot{x}_0 = (dx/dz)(z_0)$ и т. д.), так же как и пространство конечных положений и направлений (оно параметризуется переменными x_1, y_1, $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$). Мы получаем преобразование начальных условий в конечные условия, задаваемое световыми лучами. *Это преобразование F_{z_0, z_1} зависит от z_0 и z_1.* Мы увидим, что (после применения преобразования Лежандра, которое приводит к нужной симплектической структуре) преобразования F_{z_0, z_1} гамильтоновы, т. е. сохраняют симплектическую структуру. Таким образом, построение геометрической оптики приводит к изучению гамильтоновых (или «канонических») преобразований. *Оптика первого порядка* (в которой мы делаем аппроксимации $\sin x \sim x$ и т. д.) состоит в изучении соответствующих касательных преобразований (якобиевых матриц), а значит, приводит к изучению (линейной) симплектической группы. *Гауссова оптика* — это частный случай оптики первого порядка, когда система симметрична относительно вращений вокруг оси z. Зависимость от z_0 и z_1 очень существенна для нас, поскольку мы хотим знать, какие плоскости являются (приближенно) взаимно фокальными и т. д. Переходим теперь к деталям.

Всякая кривая γ, задаваемая функциями $x(z)$, $y(z)$, имеет оптическую длину

$$L(\gamma)=\int_{z_0}^{z_1} n\sqrt{1+\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dz=\int_{z_0}^{z_1}\mathscr{L}\,dz,$$

где

$$\mathscr{L}(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y},\ z)=n(x,\ y,\ z)\sqrt{1+\dot{x}^2+\dot{y}^2}.$$

Сделаем преобразование Лежандра

$$p=\partial\mathscr{L}/\partial\dot{x}=\frac{\dot{x}n(x,\ y,\ z)}{\sqrt{1+\dot{x}^2+\dot{y}^2}},$$

$$q=\partial\mathscr{L}/\partial\dot{y}=\frac{\dot{y}n(x,\ y,\ z)}{\sqrt{1+\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

и будем считать x, y, p, q координатами. Заметим, что $np=a/c$ и $nq=b/c$, где a, b и c — направляющие косинусы луча, т. е. p и q имеют простую геометрическую интерпретацию. Из общей теории мы знаем, что световые лучи являются решениями системы уравнений Гамильтона

$$\frac{dx}{dz}=\frac{\partial H}{\partial p},\qquad \frac{dy}{dz}=\frac{\partial H}{\partial q},$$

$$\frac{dp}{dz}=-\frac{\partial H}{\partial x},\qquad \frac{dq}{dz}=-\frac{\partial H}{\partial y},$$

где

$$H=p\dot{x}+q\dot{y}-\mathscr{L}=\frac{-n}{\sqrt{1+\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=-\sqrt{n^2-p^2-q^2},$$

поскольку

$$n^2-p^2-q^2=\frac{n^2}{1+\dot{x}^2+\dot{y}^2}.$$

(Читатель может непосредственно проверить, что выписанные выше дифференциальные уравнения действительно являются уравнениями Эйлера — Лагранжа для оптической длины.) Мы знаем также из общей теории, что оптическая длина задается формулой

$$L(\gamma)=\int_C p\,dx+q\,dy-H\,dz=\int_C \alpha-H\,dz,\quad \alpha=p\,dx+q\,dy, \tag{3.1}$$

где $C(z)=(x(z),\ y(z),\ p(z),\ q(z))$,

$$p(z)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}}(x(z),\ y(z),\ \dot{x}(z),\ \dot{y}(z)),$$

и т. д. Формула (3.1) в нашем случае также проверяется непосредственно. Мы будем воспринимать пространство, параметризованное координатами x, y, p, q, как $T^*\mathbf{R}^2$. Приведенные выше дифференциальные уравнения означают, что имеется (зависящее от времени) гамильтоново векторное поле ξ_H, где

$$\xi_H \lrcorner \omega = -dH,$$
$$\omega = dp \wedge dx + dq \wedge dy = d\alpha.$$

Если проинтегрировать это векторное поле от z_0 до z_1, то получится преобразование F_{z_0, z_1}, которое мы будем записывать в виде

$$(x_0, y_0, p_0, q_0; z_0) \longmapsto (x_1, y_1, p_1, q_1; z_1);$$

получаем

$$F^*_{z_0, z_1}\omega = \omega,$$

т. е. F_{z_0, z_1} — гамильтоново преобразование. Мы можем описать эту ситуацию также следующим образом. Введем на $T^*\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ векторное поле

$$\eta = \xi_H + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда

$$\eta \lrcorner (d\alpha - dH \wedge dz) = 0, \quad \langle \eta, dz \rangle \equiv 1,$$

и легко видеть, что этими условиями η однозначно характеризуется. Световые лучи — это проекции на пространство x, y, z кривых, отвечающих векторному полю η. Каждая кривая пересекает каждую из гиперплоскостей $z = z_0$ и $z = z_1$ в единственной точке и тем самым определяет преобразование F_{z_0, z_1}.

Пусть γ_t — однопараметрическое семейство световых лучей, т. е. $\gamma_t(s)$ идет из $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ в $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$, и пусть C_t — соответствующее однопараметрическое семейство кривых в $T^*\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$. Пусть

ζ_0 — касательный вектор к $C_t(\ldots, z_0(t))$,

ζ_1 — касательный вектор к $C_t(\ldots, z_1(t))$.

Тогда, применяя, как и при доказательстве (2.3), теорему Стокса, получаем

$$\frac{d}{dt} L(\gamma_t) = \frac{d}{dt} \int\limits_{C_t} \alpha - H\,dz =$$
$$= \langle \zeta_1, \alpha - H\,dz \rangle - \langle \zeta_0, \alpha - H\,dz \rangle - \int \dot{C}_t \lrcorner (d\alpha - dH \wedge dz) =$$
$$= \langle \zeta_1, \alpha - H\,dz \rangle - \langle \zeta_0, \alpha - H\,dz \rangle, \tag{3.2}$$

поскольку $\dot{C}_t \lrcorner d(\alpha - H\,dz) = 0$, так как C_t — экстремаль. Эти результаты можно переформулировать следующим образом. Рассмотрим два экземпляра $T^*\mathbf{R}^2$ с формами ω_0 и ω_1. Зададим подмногообразие Λ в $T^*\mathbf{R}^2\times T^*\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, пересечение $\Lambda_{z_0,\,z_1}$ которого с $T^*\mathbf{R}^2\times T^*\mathbf{R}^2\times\{z_0\}\times\{z_1\}$ является графиком $F_{z_0,\,z_1}$. Зададим на $T^*\mathbf{R}^2\times T^*\mathbf{R}^2$ симплектическую структуру формой

$$\omega_1-\omega_0=dp_1\wedge dx_1+dq_1\wedge dy_1-dp_0\wedge dx_0-dq_0\wedge dy_0,$$

так что $\Lambda_{z_0,\,z_1}$ — лагранжево многообразие. Каждая точка Λ соответствует единственному световому лучу. Поэтому длина луча становится функцией L на Λ. Таким образом, мы можем переписать (3.2) в виде

$$\begin{aligned}dL&=\alpha_1-H\,dz_1-\alpha_0+H\,dz_0=\\&=p_1\,dx_1+q_1\,dy_1-H(x_1,\ y_1,\ p_1,\ q_1;\ z_1)\,dz_1-p_0\,dx_0-q_0\,dy_0+\\&\quad+H(x_0,\ y_0,\ p_0,\ q_0;\ z_0)\,dz_0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Это уравнение является *основным уравнением гамильтоновой оптики*. Применяется оно следующим образом. Мы имеем проекцию $\pi\colon T^*\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, которая индуцирует проекцию

$$\pi_0\times\pi_1\colon\ T^*\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}\times T^*\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R},$$

где мы пишем $\pi_0\times\pi_1$ вместо $\pi_0\times\mathrm{id}\times\pi_1\times\mathrm{id}$.

Предположим, что ограничение проекции $\pi_0\times\pi_1$ на открытую окрестность в Λ является диффеоморфизмом. (Значит, мы предполагаем, что имеется единственный луч, соединяющий $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ с $(x_1,\ y_1,\ z_1)$.) Тогда мы можем, по определению, положить

$$V=L\circ(\pi_0\times\pi_1)^{-1}|_\Lambda.\tag{3.4}$$

Из (3.3) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_0}&=-p_0, &\quad \frac{\partial V}{\partial y_0}&=-q_0,\\ \frac{\partial V}{\partial x_1}&=p_1, &\quad \frac{\partial V}{\partial y_1}&=q_1.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Если мы знаем $V=V(x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_1,\ y_1,\ z_1)$, то мы можем определить направления световых лучей в $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и $(x_1,\ y_1,\ z_1)$. Гамильтон назвал функцию V *характеристической функцией* или *точечной характеристикой* системы.

Мы можем отождествить $T^*\mathbf{R}^2$ с $\mathbf{R}^2+\mathbf{R}^{2*}$ и рассмотреть проекцию $\rho\colon T^*\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^{2*}$, $\rho(x,\ y,\ p,\ q)=(p,\ q)$. Предположим, что $\rho_1\times\rho_2\colon T^*\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}\times T^*\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^{2*}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{2*}\times\mathbf{R}$ отображает (открытое подмножество в) Λ диффеоморфно на область в $\mathbf{R}^{2*}\times\mathbf{R}\times\times\mathbf{R}^{2*}\times\mathbf{R}$. (Таким образом, мы предполагаем, что имеется единственный луч, пересекающий z_0- и z_1-плоскости под заданными углами.) Определим функцию T формулой

$$T=(L-(p_1x_1+q_1y_1)+(p_0x_0+q_0y_0))\circ(\rho_0\times\rho_1)^{-1}|_\Lambda.\tag{3.6}$$

Тогда

$$T = T(p_0, q_0, z_0; p_1, q_1, z_1)$$

и из (3.3) следует, что

$$\frac{\partial T}{\partial p_0} = x_0, \qquad \frac{\partial T}{\partial p_1} = -x_1,$$
$$\frac{\partial T}{\partial q_0} = y_0, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_1} = -y_1. \tag{3.7}$$

Функция T называется *угловой характеристикой*. Она позволяет определять начальное и конечное положения, если известны начальное и конечное направления луча.

Наконец, если $\pi_0 \times \rho_1$ ограничить до диффеоморфизма на Λ, то мы можем определить

$$W = (L - (p_1 x_1 + q_1 y_1)) \circ (\pi_0 \times \rho_1)^{-1}|_\Lambda, \tag{3.8}$$

где $W = W(x_0, y_0, z_0; p_1, q_1, z_1)$ и

$$\frac{\partial W}{\partial x_0} = -p_0, \qquad \frac{\partial W}{\partial y_0} = -q_0,$$
$$\frac{\partial W}{\partial p_1} = -x_1, \qquad \frac{\partial W}{\partial q_1} = -y_1. \tag{3.9}$$

Функция W называется *смешанной характеристикой*. Если мы знаем W, то мы можем определить конечное положение и начальный угол по начальному положению и конечному углу.

Предположим, что $(x_0, y_0, p_0, q_0, z_0; x_1, y_1, p_1, q_1, z_1)$ и $(x_1, y_1, p_1, q_1, z_1; x_2, y_2, p_2, q_2, z_2)$ принадлежат Λ. Ясно, что тогда $(x_0, y_0, p_0, q_0, z_0; x_2, y_2, p_2, q_2, z_2) \in \Lambda$, и непосредственно из определения следует, что

$$L(x_0, y_0, p_0, q_0, z_0; x_2, y_2, p_2, q_2, z_2) = \\ = L(x_0, y_0, p_0, q_0, z_0; x_1, y_1, p_1, q_1, z_1) + \\ + L(x_1, y_1, p_1, q_1, z_1; x_2, y_2, p_2, q_2, z_2).$$

Поэтому

$$V(x_0, y_0, z_0; x_2, y_2, z_2) = V(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1) + \\ + V(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) \tag{3.10}$$

и

$$T(p_0, q_0, z_0; p_2, q_2, z_2) = T(p_0, q_0, z_0; p_1, q_1, z_1) + \\ + T(p_1, q_1, z_1; p_2, q_2, z_2), \tag{3.11}$$

если только обе части равенства имеют смысл.

Часто мы будем применять эти функции в ситуации, когда и z_0 и z_1 лежат в области, где n — константа. Далее, из (3.3) имеем

$$\frac{\partial L}{\partial z_0} = H = -\sqrt{n^2 - p_0^2 - q_0^2},$$
$$\frac{\partial L}{\partial z_1} = -H = \sqrt{n^2 - p_1^2 - q_1^2};$$

значит, *если для z, близких к z_0 и z_1, n не зависит от z, то для $G = V$, W или T*

$$G = G_0 + z_0\sqrt{n^2 - p_0^2 - q_0^2} - z_1\sqrt{n^2 - p_1^2 - q_1^2}. \tag{3.12}$$

(В случае V или W мы подставляем p, q из (3.5) *или* (3.7).) *Здесь G_0 не зависит от z_0 и z_1.*

§ 4. Оптика первого порядка

Применим методы предыдущего параграфа к изучению оптики первого порядка. Мы выведем основные результаты в предположении, что можно пользоваться угловой характеристикой, т. е. $\rho_0 \times \rho_1$ — диффеоморфизм на Λ. Общий случай можно получить затем предельным переходом.

Предположим, что луч $x(z) \equiv 0 \equiv y(z)$ имеется в нашей системе, т. е. $(0, 0, 0, 0, z_0; 0, 0, 0, 0, z_1) \in \Lambda$ для всех z_0 и z_1. Значит, согласно (3.7), первые производные от T равны нулю в $(0, 0, z_0; 0, 0, z_1)$. Предположим, что в интересующих нас областях n — константа. Тогда ввиду (3.11) имеем

$$T = C + T_0\,(p_0, q_0;\ q_1,\ p_1) + z_1\sqrt{n_1 - p_1^2 - q_1^2} - z_0\sqrt{n_0^2 - p_0^2 - q_0^2},$$

где C — константа, а T_0 начинается с квадратичных членов. Если нас интересуют отображения F_{z_0, z_1}, определяемые функцией T, в линейном приближении, то мы должны оставить только члены, квадратичные по p и q. Это приближение оптики первого порядка.

Члены, содержащие z, получаются из приближения

$$z\sqrt{n^2 - p^2 - q^2} = nz - \frac{1}{2}\frac{z}{n}(p^2 + q^2) + \ldots.$$

Значит, опуская несущественные константы, мы получаем следующее выражение для «линеаризованной» T_0:

$$T_0 = Q_A(p_0,\ q_0) + Q_C(p_1,\ q_1) + B_F(q_0,\ p_0;\ p_1,\ q_1),$$

где Q_A, Q_C — квадратичные формы, а B_F — билинейная форма:

$$Q_A(p_0, q_0) = \frac{1}{2}(A_{11}p_0^2 + 2A_{12}p_0q_0 + A_{22}q_0^2) = \\ = \frac{1}{2}(p_0, q_0)\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix},$$

$$Q_C(p_1, q_1) = \frac{1}{2}(p_1, q_1)\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix},$$

$$B_F(p_0, q_0, p_1, q_1) = \frac{1}{2}(p_0, q_0)\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда из (3.7) получаем

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \left[\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \frac{z_0}{n_0}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix},$$

$$-\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = -\begin{bmatrix} F_{11} & F_{21} \\ F_{12} & F_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} + \left[\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} - \frac{z_1}{n_1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}.$$

Это уравнения оптики первого порядка. В *гауссовой оптике* предполагается, что система инвариантна относительно вращений вокруг оси z. Все квадратичные формы, инвариантные относительно вращения, отличаются от квадрата длины постоянным множителем, т. е. $Q_A(p_0, q_0) = \frac{1}{2}a(p_0^2 + q_0^2)$ и аналогично для Q_C. Кроме того, всякая инвариантная билинейная форма кратна скалярному произведению, так что $B_F(p_0, q_0, p_1, q_1) = f\cdot(p_0p_1 + q_0q_1)$. Итак, в приведенном выше уравнении все матрицы становятся скалярными кратными единичной матрицы. Уравнения для x и y распадаются на отдельные (одинаковые) уравнения для x и для y, и достаточно рассмотреть уравнения, например, только для x, которые принимают вид

$$\begin{aligned} x_0 &= \left(a + \frac{z_0}{n_0}\right)p_0 - fp_1, \\ -x_1 &= -fp_0 + \left(c - \frac{z_1}{n_1}\right)p_1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Выразим x_1 и p_1 через x_0 и p_0:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{f}\left(\left(c - \frac{z_1}{n_1}\right)x_0 - \left[\left(a + \frac{z_0}{n_0}\right)\left(c - \frac{z_1}{n_1}\right) - f^2\right]p_0\right), \\ p_1 &= -\frac{1}{f}\left(x_0 - \left(a + \frac{z_0}{n_0}\right)p_0\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Условие того, что плоскости z_0 и z_1 будут в фокусе, состоит в том, что все лучи, выходящие из x_0, оканчиваются в x_1, т. е. что x_1 не зависит от p_0. Полагая коэффициент при p_0 в верхнем уравнении равным нулю, получаем условие

$$\left(a+\frac{z_0}{n_0}\right)\left(c-\frac{z_1}{n_1}\right)=f^2. \tag{4.3}$$

Если (4.3) удовлетворяется, то (4.2) дает

$$x_1=\frac{c-z_1/n_1}{f}x_0, \tag{4.4}$$

где $m=(c-z_1/n_1)/f$ — увеличение в нашей системе. Заметим, что мы свободны в выборе начала отсчета для z_0 и z_1 (что повлечет за собой соответствующие изменения в a и c). Предположим, что начала отсчета выбраны так, что $z_0=0$ и $z_1=0$ сопряжены. (Это фиксирует положение начала для z_1 относительно начала для z_0; свобода в выборе начала для z_0 все еще остается.) Это означает, что (4.3) имеет место при $z_0=0=z_1$, т. е.

$$ac=f^{2\prime}. \tag{4.3$'$}$$

Пусть

$$m_0=\frac{c}{f}=\frac{f}{a}$$

обозначает увеличение для этой пары плоскостей. Тогда для любой другой пары сопряженных плоскостей (т. е. удовлетворяющих (4.3)) мы можем переписать (4.3) в виде

$$\left(\frac{f}{m_0}+\frac{z_0}{n_0}\right)\left(fm_0-\frac{z_1}{n_1}\right)=f^2, \tag{4.5}$$

или

$$m_0\frac{n_1}{z_1}-\frac{1}{m_0}\frac{n_0}{z_0}=\frac{1}{f}, \tag{4.6}$$

а из (4.4) получаем $x_1=mx_0$, где $m=m_0-\dfrac{1}{f}\dfrac{z_1}{n_1}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{m_0}+\dfrac{1}{f}\dfrac{z_0}{n_0}}$,

откуда

$$mm_0=\frac{z_1/n_1}{z_0/n_0}. \tag{4.7}$$

Единичными плоскостями будем называть сопряженные плоскости, для которых увеличение равно единице. Для них (4.6) и (4.7) упрощаются и принимают вид

$$\frac{n_1}{z_1}-\frac{n_0}{z_0}=\frac{1}{f}, \tag{4.8}$$

$$m=\frac{z_1}{z_0}\frac{n_0}{n_1}. \tag{4.9}$$

Напомним, что эти уравнения уже были получены для одной преломляющей сферической поверхности (1.7), (2.5) более элементарными средствами. Теперь мы видим, что эти уравнения являются следствиями симметрии относительно вращений и аппроксимации первого порядка. Конечно, для случая сферической преломляющей поверхности мы получили еще дополнительную информацию, а именно формулу для f:

$$f = R/(n_1 - n_0). \tag{4.10}$$

Фокальные точки системы получаются при $z_0 = F_0$, когда $z_1 = \infty$, и при $z_1 = F_1$, когда $z_0 = \infty$, или

$$F_0 = -n_0 f, \qquad F_1 = n_1 f,$$

если мы измеряем расстояние до единичной плоскости. Мы можем переписать (4.5) (с $m_0 = 1$) в виде

$$(z_0 - F_0)(z_1 - F_1) = -n_0 n_1 f^2,$$

или, полагая

$$Z_0 = z_0 - F_0, \qquad Z_1 = z_1 - F_1,$$

в принадлежащем Ньютону виде

$$Z_0 Z_1 = -n_0 n_1 f^2. \tag{4.11}$$

Из выражения $x_1 = m x_0$ и

$$m = \frac{n_0 f}{n_0 f + z} = \frac{n_0 f}{Z_0}$$

получаем

$$x_1 = \frac{n_0 f}{Z_0}, \qquad Z_1 = \frac{-n_0 n f^2}{Z_0}.$$

Это отображение пространства (x_0, y_0, z_0) в пространство (x_1, y_1, z_1) является *проективным* преобразованием.

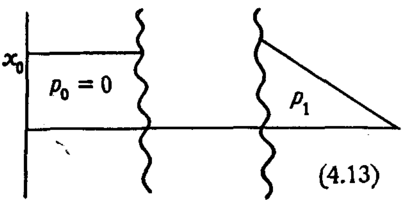
Обращаясь к уравнениям (4.1), мы видим, что для пары сопряженных плоскостей их можно записать так:

$$x_0 = \frac{f}{m} p_0 - f p_1, \quad -x_1 = -f p_0 + m f p_1. \tag{4.12}$$

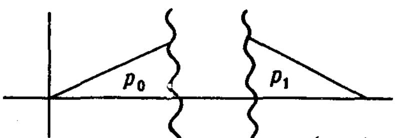
В частности,

$$\text{если} \quad p_0 = 0, \quad \text{то} \quad -x_0/p_1 = f; \tag{4.13}$$

$$\text{если} \quad x_0 = 0, \quad \text{то} \quad m = p_0/p_1. \tag{4.14}$$

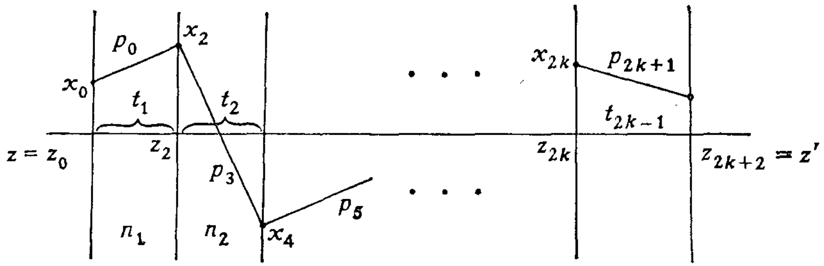


(4.13)



(4.14)

В принципе мы полностью построили оптику первого порядка. Если, например, задана последовательность концентрических сферических преломляющих поверхностей, то повторное применение (4.8), (4.9) и (4.10) позволит найти необходимые данные (f, m и положение единичных плоскостей) для системы в целом. Интересно отметить (следуя Люнебургу), что соответствующая процедура сводится к проблеме решения системы линейных разностных уравнений вида, аналогичного гамильтоновым дифференциальным уравнениям. Введем несколько иные обозначения, чем использованные ранее. Пусть k преломляющих поверхностей пересекают ось z в точках z_2, z_4, ..., z_{2k} и имеют радиусы кривизны R_2, R_4, ..., R_{2k}. Пусть t_3, t_5, ..., t_{2k-1} — расстояния между этими поверхностями и n_1, n_3, ..., n_{2k+1} — показатели преломления



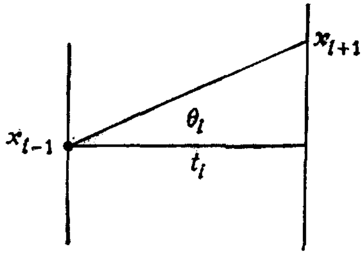
в областях, разделяемых этими поверхностями. Пусть $z = z_0$ — начальная плоскость, а $z_{2k+2} = z'$ — конечная плоскость. Луч, проходящий через систему, пересекает эти плоскости в точках $x = x_0$, x_2, ..., x_{2k}, $x_{2k+2} = x'$, а его направления в областях между плоскостями определяются значениями p_1, p_3, ..., p_{2k+1}. Пусть t_1 — (переменное) расстояние между z_0, z_1 и z_{2k}, z_{2k+2}. Мы утверждаем, что имеют место следующие разностные уравнения:

$$\begin{aligned} &x_{i+1} - x_{i-1} = \delta_i p_i, \quad \text{где} \quad \delta_i = \frac{t_i}{n_i}, \quad i = 1, 3, 5, \ldots, 2k-1, \\ &p_{i+1} - p_{i-1} = D_i x_i, \quad \text{где} \quad D_i = \frac{n_{i+1} - n_{i-1}}{R_i}, \quad i = 2, 4, 6, \ldots, 2k. \end{aligned} \tag{4.15}$$

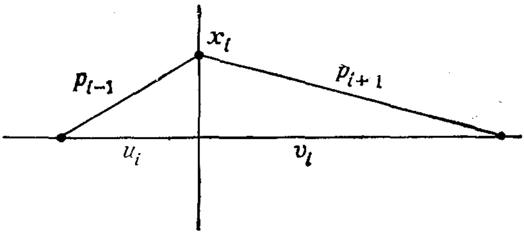
Действительно,

$$\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_i} = \frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i} = \frac{a_i}{c_i} = n_i\, p_i$$

где a и c — ковариантны направлений, даваемые первым из уравнений (4.15).



Чтобы получить второе соотношение, применим (1.4) к i-й поверхности. Пусть u_i и v_i — расстояния от i-й плоскости до точек пересечения $(i-1)$-го и $(i+1)$-го лучей с осью z.



Тогда $x_i/u_i = -p_{i-1}/n_{i-1}$, т. е.

$$\frac{n_{i-1}}{u_i} = \frac{-p_{i-1}}{x_i}, \quad \frac{n_{i+1}}{v_i} = \frac{-p_{i+1}}{x_i},$$

а в силу (1.4)

$$\frac{n_{i+1}}{u_i} - \frac{n_{i-1}}{v_i} = \frac{n_{i+1} - n_{i-1}}{R_i} = D_i.$$

Это дает второе из уравнений (4.15). Мы предоставляем читателю проверить, что (4.15) представляют собой «уравнения Эйлера» для нахождения экстремума «лагранжиана»

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1,\,3,\,\ldots} \frac{1}{\delta_i} (x_{i+1} - x_i)^2 - \frac{1}{2} \sum D_i x_i^2,$$

или, после «преобразования Лежандра»

$$p_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{\delta_i},$$

для нахождения экстремума аналога $\alpha - H\,dt$, а именно

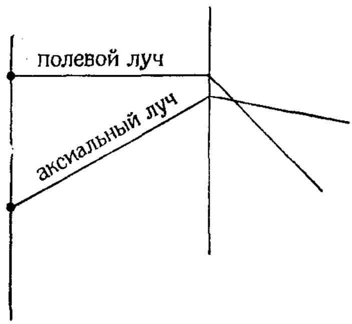
$$\sum (x_{i+1} - x_{i-1})\, p_i - \frac{1}{2} \sum \delta_i p_i^2 - \frac{1}{2} \sum D_i x_i^2.$$

Уравнения (4.15) имеют два линейно независимых решения, которые выделяются заданием начальных условий. *Аксиальный луч* x^A, p^A отвечает начальным условиям

$$x_0^A = 0, \quad p_1^A = 1,$$

а *полевой луч* x^F, p^F задается начальными условиями

$$x_0^F = 1, \quad p_1^F = 0.$$



По определению, плоскости z_0 и z_{2k+2} сопряжены, если $x_{2k+2}^A = 0$. Тогда из (4.13) и (4.14) (или непосредственно из (4.15)) следует, что увеличение и фокусное расстояние системы равны

$$m = x_{2k+2}^F = 1/p_{2k-1}^A, \quad f = -1/p_{2k-1}^F.$$

Отправляясь от произвольного решения x, p системы (4.15), мы можем найти δ_i и D_i. Если, кроме того, задать n_i, то этим определятся t_i и R_i. Итак, луч и n_i определяют оптическую систему. Значения x_i, p_{i+1} для лучей вместе с n_i — параметры, часто используемые при рассмотрении реальных оптических систем.

§ 5. Аберрации Зейделя

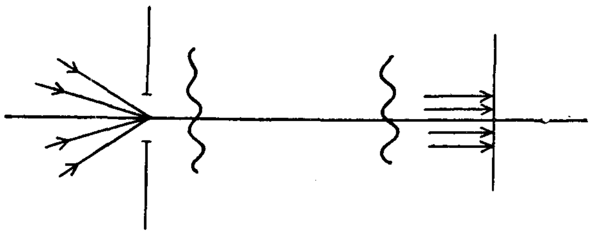
В этом параграфе мы воспользуемся методом Гамильтона для описания следующего члена в разложении F_{z_0, z_1} для системы, симметричной относительно вращений. Будем предполагать, что плоскости z_0 и z_1 сопряжены в линейном приближении. Отклонения

$$\Delta x_1 = x_1 - m x_0, \quad \Delta y_1 = y_1 - m y_0$$

называются *аберрациями* системы. Для изучения аберраций удобно воспользоваться смешанной характеристикой W. Уравнения

$$x_1 = -\frac{\partial W}{\partial p_1}, \quad y_1 = -\frac{\partial W}{\partial q_1}$$

выражают x_1, y_1 через x_0, y_0, p_1 и q_1, т. е. конечные положения через начальные положения и конечные направления. Геометрическая интерпретация этой процедуры такова. Представим себе



оптический инструмент с диафрагмой, помещенной в первой фокальной точке F_0 системы. Любой луч, который проходит через фокальную точку, будет выходить параллельно оси, т. е. $p_1 = q_1 = 0$. Значит, выражение x_1 и y_1 через p_1 и q_1 отвечает наблюдению эффекта открывания диафрагмы.

Далее, $W = W(x_0, y_0, z_0; p_1, q_1, z_1)$. Ввиду симметрии относительно вращений система W может зависеть только от следующих комбинаций x_0, y_0; p_1, q_1:

$$u = x_0^2 + y_0^2, \quad v = p_1^2 + q_1^2, \quad w = 2(x_0p_1 + y_0q_1),$$

т. е.

$$W = W(u, v, w; z_0, z_1).$$

Отсюда видно, что в выражении для W вблизи $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $p_1 = 0$, $q_1 = 0$ нет членов третьего порядка и, значит, аберрации Δx_1 и Δy_1 начинаются с членов третьего порядка, получающихся из квадратичных членов в W, рассматриваемой как функция от u, v и w. Эти члены третьего порядка называют *аберрациями Зейделя*, и цель этого параграфа — описать их. Итак, мы можем пренебречь членами более высокого порядка в W, так что

$$W = W_0 + W_1 + W_2, \quad W_2 = W_2(u, v, w)$$

и (2.7) дает

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= -2\left(\frac{\partial W_2}{\partial w} x_0 + \frac{\partial W_2}{\partial v} p_1\right), \quad \Delta y_1 = -2\left(\frac{\partial W_2}{\partial w} y_0 + \frac{\partial W_2}{\partial v} q_1\right), \\ \Delta p_0 &= -2\left(\frac{\partial W_2}{\partial u} y_0 + \frac{\partial W_2}{\partial w} p_1\right), \quad \Delta q_0 = -2\left(\frac{\partial W_2}{\partial u} y_0 + \frac{\partial W_2}{\partial w} q_1\right). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Общая квадратичная форма от трех переменных зависит от шести параметров. Имея в виду дальнейшую интерпретацию, положим

$$W_2 = -\left[\frac{1}{4} Fu^2 + \frac{1}{4} Av^2 + \frac{(C-D)}{8} w^2 + \frac{1}{2} Duv + \frac{1}{2} Euw + \frac{1}{6} Bvw\right].$$

Тогда (5.1) приобретает вид

$$\begin{aligned}\Delta x_1&=\left[Eu+\frac{1}{3}Bv+\frac{1}{2}(C-D)w\right]x_0+\left[Av+Du+\frac{1}{3}Bw\right]p_1,\\ \Delta y_1&=\left[Eu+\frac{1}{3}Bv+\frac{1}{2}(C-D)w\right]y_0+\left[Av+Du+\frac{1}{3}Bw\right]q_1.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Для того чтобы уяснить смысл этих уравнений, рассмотрим падающие лучи с $y_0=0$ и введем полярные координаты

$$p_1=\rho\cos\varphi,\quad q_1=\rho\sin\varphi,$$

так что

$$u=x_0^2,\quad v=\rho^2,\quad w=2x_0\rho\cos\varphi$$

и из (5.2) получаем

$$\begin{aligned}\Delta x_1&=A\rho^3\cos\varphi+\frac{1}{3}B\rho^2(3\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)x_0+\\ &\qquad+C(\rho\cos\varphi)x_0^2+Ex_0^3,\\ \Delta y_1&=A\rho^3\sin\varphi+\frac{2}{3}B\rho^2(\sin\varphi\cos\varphi)x_0+D(\rho\sin\varphi)x_0^2,\end{aligned}\tag{5.3}$$

т. е. A, B, C, D и E — коэффициенты в членах, содержащих возрастающие степени x_0. При $x_0=0$ появляется только первый член. Это отвечает случаю, когда точка не идеально фокусируется, а переходит в круг радиуса $A\rho^3$, где $\rho^2=p_1^2+q_1^2$ определяется, как указано выше, при помощи открывания диафрагмы. Это *сферическая аберрация.*

Предположим, что мы скорректировали сферическую аберрацию (или готовы пренебречь ею) и рассматриваем вклад от второго члена. При фиксированных ρ и x кривая

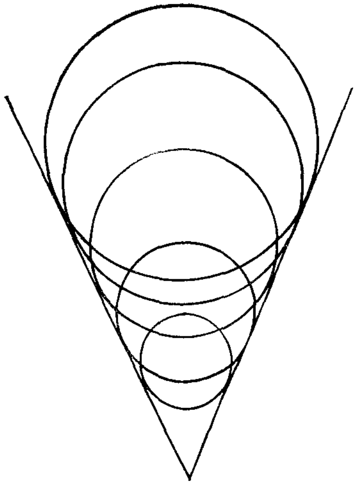
$$\Delta_B x_1=\frac{1}{3}B\rho^2x_0(3\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\frac{1}{2}B\rho^2x_0(2+\cos 2\varphi),$$

$$\Delta_B y_1=\frac{2}{3}B\rho^2x_0\sin\varphi\cos\varphi=\frac{1}{3}B\rho^2x_0\sin 2\varphi$$

дважды описывает

$$\text{окружность с центром в } \frac{2}{3}B\rho^2x_0 \text{ радиуса } \frac{1}{3}B\rho^2x_0,\tag{5.4}$$

когда φ меняется от 0 до 2π. Если мы теперь поставим в фокальной плоскости кольцевую диафрагму (которая задерживает все лучи, за исключением проходящих через круговое кольцо), то симметрия относительно вращений гарантирует, что для соответствующих лучей $p_1^2+q_1^2$ — константа, а значит, их образы — это какие-то из указанных выше окружностей. Эти окружности имеют такой вид:



В результате лучи, исходящие из x, образуют плоскую картину, напоминающую комету, отсюда и название этой аберрации — *кома.*

Предположим, что в нашей системе сферическая аберрация и кома скорректированы, т. е. $A = B = 0$, и рассмотрим эффекты, связанные с C и D:

$$\begin{aligned} \Delta_{C,D} x_1 &= C x_0^2 \rho \cos\varphi, \\ \Delta_{C,D} y_1 &= D x_0^2 \rho \sin\varphi. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Значит, лучи, проходящие через кольцевую диафрагму, образуют эллипс на плоскости изображений. Чтобы уяснить этот эффект, посмотрим, что произойдет, если мы попытаемся улучшить фокусировку, сдвигая плоскость $z = z_1$ на некоторое расстояние s. Итак, мы хотим рассмотреть F_{z_0, z_1+s}. Предположим, что n_1 — константа. Тогда луч, задаваемый $(x_0, 0; p_1, q_1)$, пересечет плоскость $z = z_1 + s$ в точке $(x_1(s), y_1(s))$, где

$$x_1(s) = x_1 + s\frac{p_1}{n_1} = mx_0 + \left(Cx_0^2 + \frac{s}{n_1}\right)\rho\cos\varphi,$$

$$y_1(s) = y_1 + s\frac{q_1}{n_1} = \left(Dx_0^2 + \frac{s}{n_1}\right)\rho\sin\varphi;$$

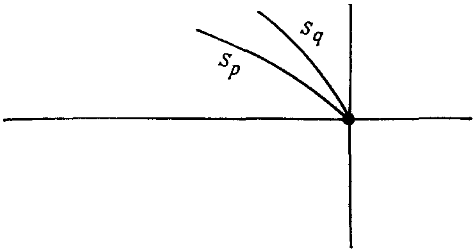
в результате около mx_0 описывается эллипс с осями $Cx_0^2 + s/n_1$, $Dx_0^2 + s/n_1$. Мы можем обратить первую из осей в нуль, полагая (с точностью до членов более высокого порядка)

$$s_p = -n_1 C x_0^2 = -\frac{n_1}{m^2} C x_1^2;$$

вторая ось станет нулевой, если положить

$$s_q = -n_1 D x_0^2 = -\frac{n_1}{m^2} D x_1^2 + \ldots .$$

Значит, s_p не будет совпадать с s_q при $x_0 \neq 0$, кроме случая $C = D$, т. е. лучи, выходящие из $(x_0, 0)$, не будут собираться в фокусе и вместо одного фокуса мы имеем две фокальные прямые. Этот тип аберрации называется *астигматизмом.* Тот факт,



что фокусировка происходит не на плоскости, а вдоль поверхностей вращения, образованных кривыми s_p и s_q, известен как *кривизна поля.* Разность $s_q - s_p - (n_1/m^2)(D - C)x_1^2$ называется *астигматизмом*, а среднее значение

$$\frac{1}{2}(s_p + s_q) = -\frac{1}{2}\frac{n_1}{m^2}(D + C)x_1^2$$

называется *кривизной поля.*

Предположим, что A, B, C и D все равны нулю. Тогда

$$\Delta_E x_1 = E x_0^3,$$

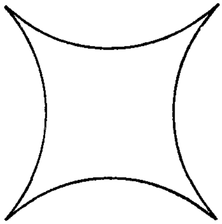
$$\Delta_E y_1 = 0.$$

В этом случае (с точностью до этого порядка аппроксимации) все точки x_0, y_0 идеально фокусируются. Но отображение (x_0, y_0) в (x_1, y_1) нелинейно. Действительно, $(x_0, 0)$ переходит в $m x_0 + E x_0^3$, а значит, по симметрии

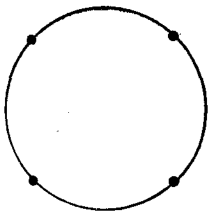
$$x_1 = m x_0 + E x_0 (x_0^2 + y_0^2),$$

$$y_1 = m y_0 + E y_0 (x_0^2 + y_0^2).$$

Этот тип аберрации называется *дисторсией.* Если E и m имеют одинаковый знак, то точка удаляется от начала тем больше, чем дальше она находится от него; например, квадрат с центром в начале перейдет в такую фигуру:



Этот эффект называют *подушкообразной дисторсией*. Если E и m имеют разные знаки, то образ квадрата с центром в начале выглядит так:



В этом случае говорят о *бочкообразной дисторсии*.

Итак, мы описали все пять аберраций Зейделя. Можно пойти дальше и изучить аберрации пятого и более высокого порядка. Кроме того, имеется *хроматическая аберрация*, которая происходит потому, что показатель преломления зависит от длины волны, т. е. свет разных частот фокусируется по-разному.

Определение аберраций Зейделя через характеристики оптической системы (формулы Зейделя) читатель найдет у Борна и Вольфа [1, гл. V] или у Люнебурга [3, гл. V]. Там описаны также методы устранения различных аберраций при помощи комбинаций диафрагм и линз.

Все, о чем шла речь выше, основывалось на приближении нулевого порядка, даваемом геометрической оптикой. Нужно также принять во внимание эффекты интерференции и дифракции, связанные с приближениями следующего порядка для системы Максвелла.

Теперь коротко остановимся на предложенном Дебаем и Люнебургом методе исследования дифракции оптического инструмента. Основная идея состоит в том, чтобы ввести некое «физическое условие», которое, грубо говоря, означает, что мы интересуемся таким решением системы Максвелла (при данной частоте света), которое ведет себя на бесконечности так, как если бы лучи в пространстве изображений были обусловлены единственным источником света, находящимся в нашем инструменте, а все остальное представляло собой «уходящее излучение». В некотором смысле это условие обобщает условие излучения Зоммерфельда. Мы считаем, что решение геометрической оптики в пространстве изображений распространяется на идеальную бесконечность во всех направлениях из данных на некоторой фиксированной фазовой плоскости $\psi=\mathrm{const}$ при помощи решения транспортного уравнения в $\mathbf{R}^3$ с постоянным n_1 (идеальное продолжение на пространство изображений). Это дает вполне определенную функцию u_0, и мы ищем решение системы Максвелла, удовлетворяющее условию $\lim\limits_{R\to\infty} R(u-u_0)=0$. Чтобы решить эту задачу, применим методы гл. I и перейдем к пределу по все более и более далеким поверхностям. Подробно предположения и выводы разбираются в книгах Зоммерфельда [4, стр. 420—424], Люнебурга [3, стр. 304—353] и Клайна и Кэя [10, гл. XI]. Природа этих предположений еще не выяснена, а сами они не сформулированы в столь общем виде, как условие излучения Зоммерфельда у Лакса и Филлипса [11]. Для нас особенно интересна форма окончательного ответа, которая состоит в том, что дифракционная картина для света, выходящего из точки (x_0, y_0, z_0), дается интегралом вида

$$\frac{ik}{2\pi}\int ue^{ik[W+xp+yq+zr]}\,dp\,dq,$$

где W — смешанная характеристика системы, а u интерпретируется как (векторнозначная) полуплотность. Далее, W определяет лагранжево многообразие Λ, параметризованное координатами p, q, где Λ — это лагранжево многообразие геометрической оптики, и в некотором смысле (см. § 5 гл. IV) каждое лагранжево подмногообразие в T^*M имеет такую параметризацию. Нетрудно также показать, что при применении метода стационарной фазы к указанному интегралу определяется полуплотность на Λ, а два интеграла, которые определяют одну и ту же полуплотность, отличаются на члены порядка $1/k$. Тогда можно воспользоваться следующей процедурой. Выберем полуплотность на Λ, которая является решением транспортного уравнения. Затем выберем произвольную параметризацию Φ для Λ (как описано коротко в гл. II и подробно в гл. IV) и любой интеграл вида

$$\frac{ik}{2\pi}\int ue^{ik\Phi},$$

определяющий предписанную полуплотность на Λ. Тогда члены старшего порядка в асимптотическом разложении полностью определяются геометрией Λ и полуплотностью на Λ. Это процедура Маслова. В ней члены старшего порядка не зависят от выбора продолжений и, значит, не зависят от требований типа «условия излучения». Вблизи регулярных точек мы уже установили это в гл. II при помощи непосредственного применения метода стационарной фазы. Поведение интеграла около каустик будет изучено при помощи методов теории особенностей в гл. VII.

§ 6. *Асимптотическое решение уравнений Максвелла*

Для описания уравнений Максвелла введем в пространстве $\mathbf{R}^4$ координаты x^1, x^2, x^3, t, ортогональные относительно метрики Лоренца:

$$(dx^i,\ dx^j)=\delta_{ij},\quad (dx^i,\ dt)=0,\quad (c\,dt,\ c\,dt)=-1.$$

Имеется четырехмерный оператор $*$: $\bigwedge^k(\mathbf{R}^4)\to\bigwedge^{4-k}(\mathbf{R}^4)$, который определяется формулой

$$\omega_1\wedge\omega_2=(*\,\omega_1,\ \omega_2)\,(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\wedge c\,dt)$$

при $\omega_1\in\bigwedge^k$ и $\omega_2\in\bigwedge^{4-k}$, где (,) — индуцированная метрика на $\bigwedge^{4-k}$. Таким образом, например,

$$\begin{aligned}
*\,dx^1&=-dx^2\wedge dx^3\wedge c\,dt,\\
*\,dx^2&=dx^1\wedge dx^3\wedge c\,dt,\\
*\,dx^3&=-dx^1\wedge dx^2\wedge c\,dt,\\
*\,c\,dt&=dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
*\,(dx^1\wedge dx^2)&=-dx^3\wedge c\,dt,\\
*\,(dx^1\wedge c\,dt)&=-dx^2\wedge dx^3 \quad \text{и т. д.;}
\end{aligned}$$

при этом

$$**\,\omega=-(-1)^{k(4-k)}\,\omega \quad \text{для} \quad \omega\in\bigwedge^k.$$

Введем также трехмерный оператор $\circledast$: $\bigwedge^k(\mathbf{R}^3)\to\bigwedge^{3-k}(\mathbf{R}^3)$, полагая

$$(\circledast\,\omega_1,\ \omega_2)\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3=\omega_1\wedge\omega_2$$

при $\omega_1\in\bigwedge^k(\mathbf{R}^3)$ и $\omega_2\in\bigwedge^{3-k}(\mathbf{R}^3)$, так что

$$\circledast\,dx^1=dx^2\wedge dx^3 \quad \text{и т. д.}$$

и

$$\circledast\circledast=\mathrm{id}.$$

Обозначим через d обычное внешнее дифференцирование на $\mathbf{R}^4$, а через d_x — внешнее дифференцирование только по переменным x. Основные объекты в теории Максвелла следующие [12]:

ρ — плотность электрического заряда — зависящая от времени функция на $\mathbf{R}^3$; 3-форма $\circledast\,\rho=\rho\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$ — это такая 3-форма на $\mathbf{R}^3$, интеграл которой по любой заданной трехмерной области дает полный заряд, сосредоточенный в этой области. (Мы предполагаем, что выбрана единица измерения заряда, скажем кулон. В противном случае ρ пришлось бы рассматривать как сечение линейного расслоения.)

J — плотность электрического тока — зависящее от времени векторное поле на $\mathbf{R}^3$, такое, что $\circledast J$ — это 2-форма, интеграл которой по любой фиксированной поверхности в пространстве равен потоку заряда через эту поверхность.

D — диэлектрическое смещение (индукция) — зависящее от времени векторное поле на $\mathbf{R}^3$, для которого

$$d_x \circledast D = 4\pi\rho\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

E — напряженность электрического поля — зависящее от времени векторное поле на $\mathbf{R}^3$.

B — магнитная индукция — зависящее от времени векторное поле на $\mathbf{R}^3$.

H — напряженность магнитного поля — зависящее от времени векторное поле на $\mathbf{R}^3$.

Пусть Σ — поверхность в $\mathbf{R}^3$, ограниченная кривой γ. Идентифицируем формы и векторные поля на $\mathbf{R}^3$ при помощи евклидовой метрики. Тогда $\int_\gamma E$ называется электрическим напряжением в петле, а $\int_\gamma H$ — магнитным напряжением в петле. Закон Фарадея об индукции утверждает, что

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_\Sigma \circledast B = -\int_\gamma E,$$

а закон Ампера формулируется так:

$$\int_\Sigma \left(\frac{1}{c} \circledast \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \circledast J\right) = \int_\gamma H.$$

В дифференциальной форме получаем

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt} \circledast B = -d_x E, \tag{6.1}$$

$$\circledast \left[\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J\right] = d_x H. \tag{6.2}$$

Из (6.1) следует, что $(d/dt)\, d_x \circledast B = 0$. Это соотношение усиливается: имеет место закон

$$d_x \circledast B = 0, \tag{6.3}$$

и мы повторяем, что одним из определяющих свойств D является

$$d_x \circledast D = 4\pi\rho\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{6.4}$$

Если определить на $\mathbf{R}^4$ формы

$$\beta = E \wedge c\,dt + \circledast B,$$
$$\delta = -H \wedge c\,dt + \circledast D$$

и

$$\Omega = \circledast J \wedge dt - \rho\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

то (6.1) и (6.3) превращаются в

$$d\beta = 0, \tag{6.5}$$

а (6.2), (6.4) дают

$$d\delta + 4\pi\Omega = 0. \tag{6.6}$$

Есть много преимуществ в записи уравнений Максвелла в виде (6.5) и (6.6). Одно из них состоит в том, что в вакууме (когда в подходящей системе единиц $\varepsilon = \mu = 1$ и $\Omega = 0$) уравнения сводятся к $d\beta = 0$ и $d*\beta = 0$, которые инвариантны относительно конформных преобразований в метрике Лоренца (а значит, в частности, относительно неоднородной группы Лоренца). Действительно, мы утверждаем, что оператор $*$: $\bigwedge^2(\mathbf{R}^4) \to \bigwedge^2(\mathbf{R}^4)$ конформно инвариантен. Пусть S_λ — умножение на скаляр λ в $\mathbf{R}^4$. Тогда индуцированное линейное преобразование S_λ на $\bigwedge^k$ — это умножение на λ^k. Значит, поскольку $*$ отображает $\bigwedge^k \to \bigwedge^{n-k}$, мы получаем, что $S_\lambda * S_\lambda^{-1}$ — умножение на λ^{n-2k}. Мы видим, что если $k = n/2$, то оператор $*$ инвариантен относительно изменения масштаба. Таким образом, если f — конформное преобразование, то $d * f * \beta = f * d * \beta = 0$ при $d * \beta = 0$. Второе преимущество в том, что законы сами по себе приобретают более простую и более общую форму.

Мы можем также вывести из (6.5), (6.6) существование векторного потенциала для односвязных областей. Действительно, из $d\beta = 0$ следует, что $\beta = dA$ для некоторого $A \in \bigwedge^1(\mathbf{R}^4)$, а из (6.6) вытекает, что $d * dA + 4\pi\Omega = 0$. В вакууме это уравнение принимает вид $d * dA = 0$. Векторный потенциал A, разумеется, не определен однозначно условием $dA = \beta$. Обычно на A налагают дополнительное условие $d * A = 0$. Интересно отметить, что пара уравнений

$$d * A = 0, \quad d * dA = 0$$

может быть «почти» выведена из простого вариационного принципа. (Это замечание не потребуется в дальнейшем, и при желании его можно пропустить.) Действительно, рассмотрим (четырехмерный) лагранжиан

$$\mathbf{L}(A)=\frac{1}{2}\langle dA,\ dA\rangle+\frac{m^2}{2}\langle A,\ A\rangle.$$

(Это означает приписывание некоторой «массы» m электромагнитному полю.) Легко проверить, что уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид

$$d*dA-mA=0,$$

где $d*$ — оператор, сопряженный к d, который лишь знаком отличается от $*d*$. Тогда

$$d*A=\frac{1}{m}d*d*(dA)=0,$$

$$\text{т. е.}\quad d*A=0\quad\text{и}\quad d*dA=mA.$$

Устремляя m к 0, получаем нужные уравнения

$$d*A=0\quad\text{и}\quad d*dA=0.$$

Несмотря на преимущества релятивистской формулировки, мы вернемся к нерелятивистским обозначениям и продолжим рассмотрение уравнений Максвелла в материальной среде. Если материальная среда изотропна, то между различными векторными полями имеются соотношения:

$$J=\sigma E\ \text{— закон Ома,}\tag{6.7}$$

$$D=\varepsilon E,\tag{6.8}$$

$$B=\mu H,\tag{6.9}$$

где σ называется *удельной проводимостью*, ε — *диэлектрической проницаемостью*, а μ — *магнитной проницаемостью*. Если $\psi=\psi(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t)$ — фазовая функция, то символы уравнений (6.1) — (6.4) имеют вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\circledast B+d_x\psi\wedge E,\tag{6.10}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\circledast D-d_x\psi\wedge H,\tag{6.11}$$

$$d_x\psi\wedge\circledast B,\tag{6.12}$$

$$d_x\psi\wedge\circledast D.\tag{6.13}$$

Подставив (6.8) и (6.9) в (6.10) — (6.13), получим

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\circledast H+d_x\psi\wedge E,$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\circledast E-d_x\psi\wedge H,$$

$$\mu\, d_x\psi\wedge\circledast H,$$

$$\varepsilon\, d_x\psi\wedge\circledast E.$$

Если E и H принадлежат ядру символа, то из $d_x\psi \wedge ⊛ H = 0$ следует, что $d_x\psi$ ортогонален H, и аналогично $d_x\psi$ ортогонален E. (Значит, E и H *поперечны*; например, если $\psi = ct - \varphi$, то E и H ортогональны направлению распространения, определяемому $d\varphi$.)

Поскольку $d_x\psi$ ортогонален H, имеем

$$d_x\psi \wedge ⊛ (d_x\psi \wedge H) = |d_x\psi|^2 ⊛ H.$$

(Действительно, поскольку обе части квадратичны по $d_x\psi$ и линейны по H, достаточно показать, что $i \wedge ⊛ (i \wedge j) = -⊛ j$ для любого ориентированного ортогонального базиса i, j, k. Но $⊛ (i \wedge j) = k$ и $i \wedge k = -⊛ j$.)

Применяя ⊛ ко второй из четырех приведенных выше строк, получаем

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} E - ⊛ (d_x\psi \wedge H);$$

внешнее умножение на $d_x\psi$ дает

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} d_x\psi \wedge E + |d_x\psi|^2 ⊛ H = 0.$$

Умножая первую строку на $(\varepsilon/c)\, \partial\psi/\partial t$ и подставляя, получаем

$$\left[\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - |d_x\psi|^2\right] ⊛ H = 0;$$

аналогично

$$\left[\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - |d_x\psi|^2\right] ⊛ E = 0.$$

Значит, ψ должна удовлетворять характеристическому уравнению

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^3}\right)^2\right] = 0. \tag{6.14}$$

Для исследования особенностей электромагнитного поля мы можем применить метод, рассмотренный в конце § 3 гл. II. Предположим, что E и H имеют разрыв в виде скачка вдоль поверхности $\psi = 0$ и что ρ и J имеют (возможно) разрывы в виде δ-функции вдоль $\psi = 0$, задаваемые выражениями $\hat{\rho}\, |d\psi|\, \delta(\psi)$ и $\hat{J}\, |d\psi|\, \delta(\psi)$. Обозначим через ΔE скачок E вдоль $\psi = 0$ и т. д. Тогда (3.8) из гл. II и (6.1)—(6.4) дают

$$d_x\psi \wedge \Delta E + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} ⊛ \Delta B = 0, \tag{6.15}$$

$$d_x\psi \wedge \Delta H - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} ⊛ \Delta D = \frac{4\pi}{c} |d\psi| ⊛ \hat{J}, \tag{6.16}$$

$$d_x\psi \wedge ⊛ \Delta B = 0, \tag{6.17}$$

$$d_x\psi \wedge ⊛ \Delta D = 4\pi |d\psi| ⊛ \hat{\rho} \tag{6.18}$$

вдоль $\psi=0$. Имеется ряд важных следствий из (6.15)—(6.18); мы упомянем два из них. Если взять в качестве ψ функцию только от x^1, x^2, x^3, то (6.15)—(6.18) дают граничные условия для электромагнитного поля на поверхности разрыва среды. Члены, содержащие $\partial\psi/\partial t$, исчезают. Из уравнения (6.15) следует, что скачок E должен быть всюду нормален, т. е. тангенциальные компоненты E должны быть непрерывными в окрестности $\psi=0$; в то же время из (6.17) следует, что нормальные компоненты B должны быть непрерывными. Уравнения (6.16) и (6.18) выражают скачок тангенциальных компонент H и нормальных компонент D через распределения тока и заряда на поверхности.

Рассмотрим случай, когда $\psi=\varphi-ct$ (с $\hat{J}=0$ и $\hat{\rho}=0$). Воспользуемся (6.8) и (6.9) и положим $\mathbf{e}=\Delta E$ и $\mathbf{h}=\Delta H$. Тогда

$$
\begin{aligned}
d_x\varphi \wedge \mathbf{e} - \mu \circledast \mathbf{h} &= 0,\\
d_x\varphi \wedge \mathbf{h} + \varepsilon \circledast \mathbf{e} &= 0,\\
d_x\varphi \wedge \circledast \mathbf{e} &= 0,\\
d_x\varphi \wedge \circledast \mathbf{h} &= 0.
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

Это аналоги уравнений (3.3) из гл. II. Если $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ — разрывы электромагнитного поля, то в дополнение к (6.19) они должны удовлетворять транспортному уравнению. За подробностями мы отсылаем читателя к Люнебургу [3] или Клайну и Кэю [10]. Как и прежде, из (6.19) следует уравнение эйконала $\|d\varphi\|^2=n^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Пер. с англ. — М.: Наука, 1970.
2. Carathéodory C. Geometrische Optik — Springer, Berlin, 1937.
3. Luneburg R. K. Mathematical theory of optics. — Univ. of California Press. Berkeley, Calif., 1964.
4. Зоммерфельд А. Оптика. Пер. с нем. — М.: ИЛ, 1953.
5. Synge J. L. Geometrical optics. — Cambridge Univ. Press, New York, 1937.
6. Loomis L. H., Sternberg S. Advanced calculus. — Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.
7. Mach E. The principles of physical optics. — Dover, New York, 1949 (пер. с нем.; первое немецкое изд. 1913 г.).
8. Lenz W. Probleme der Modernen Physik. — Herzel, Leipzig, 1929.
9. Green L. W. — *Ann. of Math.* (2) 78 (1963), 289—299.
10. Kline M., Kay I. W. Electromagnetic theory and geometric optics. — Pure and Appl. Math., vol. 12, Interscience, New York and London, 1965.
11. Лакс П. Д., Филлипс Р. С. Теория рассеяния. Пер. с англ. — М.: Мир, 1971.
12. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 5, 6, 7. Пер. с англ. — 2-е изд. — М.: Мир, 1977.

Глава IV

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Теорема Дарбу — Вейнстейна

В этой главе мы соберем различные факты геометрии симплектических многообразий и их лагранжевых подмногообразий, которые нам потребуются в дальнейшем. Напомним, что *симплектическое многообразие — это многообразие X вместе с невырожденной замкнутой 2-формой* ω. Первый основной факт о симплектических многообразиях состоит в том, что локально все симплектические многообразия одной и той же конечной размерности n одинаковы. Прекрасное доказательство этой теоремы вместе с сильным ее обобщением было недавно дано Вейнстейном [8]. Метод доказательства напоминает способ, которым выше была доказана лемма Морса и которым мы будем неоднократно пользоваться.

Пусть X — многообразие и Y — вложенное подмногообразие. Если σ — дифференциальная форма на X, то через $\sigma|_Y$ будем обозначать ограничение σ на $(\bigwedge TX)|_Y$. (Это означает, что $\sigma|_Y$ можно вычислять не только на векторах, касательных к Y.)

Теорема 1.1 (Дарбу — Вейнстейн). *Пусть Y — подмногообразие в X, и пусть ω_0, ω_1 — две такие невырожденные замкнутые 2-формы на X, что $\omega_0|_Y = \omega_1|_Y$. Тогда у Y имеется такая окрестность U в X и такой диффеоморфизм f: $U \to X$, что:*

(i) *$f(y) = y$ для всех $y \in Y$,*

(ii) *$f^*\omega_1 = \omega_0$.*

Если в качестве Y взять точку, то теорема утверждает, что 2-формы, совпадающие на касательном пространстве в некоторой точке, совпадают с точностью до диффеоморфизма f в некоторой окрестности этой точки. На конечномерном векторном пространстве все невырожденные кососимметрические формы эквивалентны относительно линейного преобразования (см., например, [2, гл. I]). Продолжим это линейное преобразование на некоторую окрестность (например, при помощи экспоненциального отображения, т. е. пользуясь линейными координатами в некоторой окрестности). Тогда из теоремы следует, что если задана любая пара форм ω_0 и ω_1, определяющих симплектическую структуру на X, то в окрестности любой точки p имеется диффеоморфизм g, для которого $g(p)=p$ и $g^*\omega_1=\omega_0$. Это утверждение и есть теорема Дарбу.

Для доказательства теоремы 1.1 нам потребуется основная формула дифференциального исчисления, которую мы сейчас напомним. Пусть W, Z — дифференцируемые многообразия и φ_t: $W\to Z$ — гладкое однопараметрическое семейство отображений из W в Z. Другими словами, отображение φ: $W\times I\to Z$ вида $\varphi(w, t)=\varphi_t(w)$ гладкое. Обозначим через ξ_t касательное поле к φ_t, т. е. ξ_t: $W\to TZ$ — это отображение, при котором $\xi_t(w)$ — касательный вектор к кривой $\varphi(w, \cdot)$ в точке t. Если σ — дифференциальная $(k+1)$-форма на Z, то $\varphi_t^*(\xi_t \lrcorner \sigma)$ — корректно определенная дифференциальная k-форма на W, имеющая вид

$$\varphi_t^*(\xi_t \lrcorner \sigma)(\eta_1, \ldots, \eta_k)=(\xi_t(\omega) \lrcorner \sigma)(d\varphi_t\eta_1, \ldots, d\varphi_t\eta_k).$$

(Заметим, что, поскольку ξ_t не является векторным полем на Z, выражение $\xi_t \lrcorner \sigma$ не есть дифференциальная форма на Z.)

Пусть σ_t — гладкое однопараметрическое семейство форм на Z. Тогда $\varphi_t^*\sigma_t$ — гладкое семейство форм на W, и основная формула дифференциального исчисления форм утверждает, что

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\sigma_t=\varphi_t^*\frac{d\sigma_t}{dt}+\varphi_t^*(\xi_t \lrcorner d\sigma_t)+d\varphi_t^*(\xi_t \lrcorner \sigma_t). \tag{1.1}$$

Для полноты мы приведем доказательство этой формулы в конце параграфа.

Пусть $Y\subset X$ — вложенное подмногообразие, и предположим, что существует гладкое стягивание φ_t многообразия X на Y. Значит, мы предполагаем, что φ_t — гладкое семейство таких отображений $X\to X$, что

$$\varphi_0\colon X\to Y,\quad \varphi_1=\mathrm{id}\quad \text{и}$$
$$\varphi_t y=y\quad \text{для всех}\quad y\in Y\quad \text{и всех}\ t.$$

(Заметим, что если X — векторное расслоение, а Y — нулевое сечение, то умножение на t является таким стягиванием. Так же обстоит дело, если X — выпуклая открытая окрестность нулевого сечения. Выбирая риманову метрику и пользуясь экспоненциальным отображением на нормальном расслоении к $Y\subset X$, мы можем таким образом показать, что на некоторой окрестности Y имеется гладкое стягивание на Y.) Тогда для всякой формы σ на X имеем (в некоторой окрестности Y)

$$\sigma-\varphi_0^*\sigma=\int_0^1\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\sigma)\,dt=\int_0^1(\varphi_t^*(\xi_t \lrcorner d\sigma))\,dt+d\int_0^1(\varphi_t^*(\xi_t \lrcorner \sigma))\,dt=$$
$$=I\,d\sigma+dI\sigma,$$

где мы положили

$$I\beta=\int_0^1[\varphi_t^*(\xi_t \lrcorner \beta)]\,dt$$

для всякой формы β на X. Другими словами, I: $\bigwedge^k(X) \to \bigwedge^{k-1}(X)$ и

$$\sigma - \varphi_0^* \sigma = dI\sigma + I\, d\sigma. \tag{1.2}$$

Доказательство теоремы Дарбу — Вейнстейна. Положим

$$\omega_t = (1-t)\,\omega_0 + t\omega_1 = \omega_0 + t\sigma, \quad \text{где} \quad \sigma = \omega_1 - \omega_0.$$

Заметим, что $\sigma|_Y = 0$ и, в частности, $\varphi_0^*\sigma = 0$. Кроме того, $d\sigma = 0$. Значит, согласно (1.2),

$$\sigma = d\beta, \quad \text{где} \quad \beta = I\sigma.$$

Заметим, что $\beta|_Y = 0$. Далее, $\omega_t|_Y = \omega_0|_Y = \omega_1|_Y$, и, значит, $\omega_t|_Y$ невырожденны при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поэтому существует окрестность Y, на которой формы ω_t невырожденны для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$. Отсюда в свою очередь следует, что существует такое векторное поле η_t, что

$$\eta_t \rfloor \omega_t = -\beta. \tag{1.3}$$

Интегрируя векторное поле η_t, мы получим однопараметрическое семейство отображений f_t, для которых касательным векторным полем является η_t. Отметим, что $f_t|_Y = \mathrm{id}$. Ограничивая f_t на меньшую окрестность подмногообразия Y, мы можем предполагать, что f_t определены также для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$. (Строго говоря, при доказательстве этого факта мы можем требовать, чтобы η_t и т. д. были определены на некотором интервале, включающем $[0, 1]$.) Тогда $f_0 = \mathrm{id}$ и в силу (1.1) и того факта, что $\frac{d}{dt}\omega_t = \sigma$, мы получаем, что

$$f_1^*\omega_1 - \omega_0 = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f_t^*\omega_t)\,dt = \int_0^1 f_t^*(\sigma + d(\eta_t \rfloor \omega_t))\,dt = 0,$$

поскольку $d\omega_t = 0$. Значит, f_1 является нужным диффеоморфизмом и теорема доказана.

Пусть Λ — лагранжево подмногообразие, вложенное в симплектическое многообразие X. Примером могут служить $X = T^*M$ и Λ — нулевое сечение в T^*M. По наблюдению Костанта, локально других примеров не существует.

Предложение 1.1 (Костант). *Пусть Λ — вложенное лагранжево подмногообразие в симплектическом многообразии X с симплектической формой ω. Рассмотрим Λ как нулевое сечение в $T^*\Lambda$, и пусть ω' — симплектическая форма на $T^*\Lambda$. Тогда у Λ существует такая окрестность U в X и такой диффеоморфизм h: $U \to T^*\Lambda$, что $h|_\Lambda = \mathrm{id}$ и $h^*\omega' = \omega$.*

Для доказательства мы воспользуемся теоремой 1.1 и одним алгебраическим фактом о лагранжевых подпространствах симплектического векторного пространства, который будет доказан в § 2. Этот алгебраический факт состоит в следующем. Пусть V — симплектическое векторное пространство и Z — лагранжево подпространство в V. Тогда множество всех таких лагранжевых подпространств W, что $W \cap Z = \{0\}$, является аффинным пространством. Точное утверждение см. ниже, в предложении 2.3. Из этого факта следует, что

существует гладкое расслоение E над Λ лагранжевых подпространств в $TX|_\Lambda$, для которого $E_\lambda \cap T\Lambda_\lambda = \{0\}$ при всех $\lambda \in \Lambda$.

Действительно, расслоение *всех* лагранжевых подпространств в $TX|_\Lambda$, имеющих нулевое пересечение с $T\Lambda$, является в силу приведенного алгебраического факта аффинным расслоением, а значит, имеет гладкое сечение. (Достаточно выбрать сечения локально и построить глобальное сечение, пользуясь разбиением единицы, т. е. задать локально s_i и положить $s = \sum \varphi_i s_i$, где (φ_i) — подходящее разбиение единицы. Эта процедура имеет смысл в аффинном пространстве.) Если теперь фиксировано E, то для каждого $\lambda \in \Lambda$ определен изоморфизм между $T\Lambda_\lambda \oplus T^*\Lambda_\lambda$ и TX_λ, поскольку E_λ естественным образом двойственно $T\Lambda_\lambda$. Далее, если мы рассмотрим Λ как нулевое сечение $T^*\Lambda$, то касательное пространство к $T^*\Lambda$ в точке λ разлагается в прямую сумму подпространства, касательного к слою, и подпространства, касательного к нулевому сечению. Поскольку слой — векторное пространство, мы можем отождествить касательное подпространство к слою с $T^*\Lambda_\lambda$. В результате получается отождествление

$$T(T^*\Lambda)_\lambda = T\Lambda_\lambda \oplus T^*\Lambda_\lambda.$$

Таким образом, имеет место изоморфизм между TX_λ и $T(T^*\Lambda)_\lambda$, сохраняющий, разумеется, симплектическую структуру и гладко зависящий от λ. Другими словами, имеется отображение векторных расслоений, являющееся изоморфизмом симплектических структур. Возьмем теперь диффеоморфизм g, отображающий в $T^*\Lambda$ некоторую окрестность Λ в X и такой, что $g|_\Lambda = \mathrm{id}$, а dg — построенный выше изоморфизм на $TX|_\Lambda$. (Это всегда можно сделать, воспользовавшись экспоненциальным отображением. Заметим, что мы не требуем, чтобы g обладал какими-нибудь свойствами, связанными с симплектической структурой.) Тогда $\omega_1 = g^*\omega'$. По построению,

$$\omega_1|_\Lambda = \omega|_\Lambda,$$

и по теореме 1.1 существует такой диффеоморфизм некоторой окрестности $\Lambda \subset X$ в X, что $f^*\omega_1 = \omega$. Таким образом, $f^*g^*\omega' = \omega$ и $h = g \circ f$ — нужный диффеоморфизм.

Теперь докажем (1.1). Вначале докажем формулу для частного случая, когда $W = Z = M \times I$, а φ_t — отображения $\psi_t\colon M \times I \to$

$\to M\times I$, определяемые формулой

$$\psi_t(x,\ s)=(x,\ s+t).$$

Произвольная дифференциальная форма на $M\times I$ может быть представлена в виде

$$ds\wedge a+b,$$

где a и b — формы на M, которые могут зависеть от x и s. (В локальных координатах $s,\ x^1,\ \ldots,\ x^k$ эти формы являются суммами членов вида

$$c\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k},$$

где c — функция от t, s и x.) Чтобы подчеркнуть зависимость от x и s, перепишем рассматриваемое выражение:

$$\sigma_t=ds\wedge a(x,\ s,\ t)\,dx+b(x,\ s,\ t)\,dx.$$

В этих обозначениях ясно, что

$$\psi_t^*\sigma_t=ds\wedge a(x,\ s+t,\ t)\,dx+b(x,\ s+t,\ t)\,dx,$$

и потому

$$\frac{d\psi_t^*\sigma_t}{dt}=ds\wedge\frac{\partial a}{\partial s}(x,\ s+t,\ t)\,dx+\frac{\partial b}{\partial s}(x,\ s+t,\ t)\,dx+$$
$$+ds\wedge\frac{\partial a}{\partial t}(x,\ s+t,\ t)\,dx+\frac{\partial b}{\partial t}(x,\ s+t,\ t)\,dx,$$

т. е.

$$\frac{d\psi_t^*\sigma_t}{dt}-\psi_t^*\left(\frac{d\sigma_t}{dt}\right)=ds\wedge\frac{\partial a}{\partial s}(x,\ s+t,\ t)\,dx+\frac{\partial b}{\partial s}(x,\ s+t,\ t)\,dx. \qquad \text{(a)}$$

Ясно также, что в этом случае касательным полем к $\psi_t(x,\ s)$ будет $\partial/\partial s$ в точке $(x,\ s+t)$. Тогда $\partial/\partial s$ — векторное поле и $\frac{\partial}{\partial s}\lrcorner\,\sigma_t=a\,dx$, так что

$$\psi_t^*\left(\frac{\partial}{\partial s}\lrcorner\,\sigma_t\right)=a(x,\ s+t,\ t)\,dx,$$

а потому

$$d\psi_t^*\left(\frac{\partial}{\partial s}\lrcorner\,\sigma_t\right)=\frac{\partial a}{\partial s}(x,\ s+t,\ t)\,ds\wedge dx+d_xa(x,\ \ +t,\ t)\,dx \qquad \text{(b)}$$

(где через d_x обозначена внешняя производная формы $a(x,\ s+t,\ t)\,dx$ на многообразии M при фиксированном s). Аналогично,

$$d\sigma_t=-ds\wedge d_xa\,dx+\frac{\partial b}{\partial s}\,ds\wedge dx+d_xb\,dx,$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial s}\lrcorner\,d\sigma_t=-d_xa\,dx+\frac{\partial b}{\partial s}\,dx$$

и

$$\psi_t^* \frac{\partial}{\partial s} \rfloor d\sigma_t = -d_x a(x, s+t, t)\,dx + \frac{\partial b}{\partial s}(x, s+t, t)\,dx. \qquad \text{(c)}$$

Складывая (a), (b), (c), мы получаем (1.1) для ψ_t.

Пусть, далее, φ: $W \times I \to Z$ имеет вид

$$\varphi(w, s) = \varphi_s(w).$$

Тогда образы при φ прямых, проходящих через w в $W \times I$ и параллельных I, — это кривые $\varphi_s(w)$ в Z. Другими словами,

$$d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(w,t)} = \xi_t(w).$$

Если определить ι: $W \to W \times I$ формулой $\iota(w) = (w, 0)$, то можно записать отображение φ_t в виде $\varphi \circ \psi_t \circ \iota$. Значит, $\varphi_t^* \sigma_t = \iota^* \psi_t^* \varphi^* \sigma_t$ и, поскольку ι и φ не зависят от t,

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^* \sigma_t = \iota^* \frac{d}{dt}\psi_t^* (\varphi^* \sigma_t).$$

В точке $(w, t) \in W \times I$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial s} \rfloor \varphi^* \sigma_t = \varphi^* \left\{\left(d\varphi \frac{\partial}{\partial s} \rfloor \sigma_t\right)\right\} = \varphi^* (\xi_t \rfloor \sigma_t)$$

и, значит,

$$\iota^* \psi_t^* \left(\frac{\partial}{\partial s} \rfloor \varphi^* \sigma_t\right) = \iota^* \psi_t^* \varphi^* (\xi_t \rfloor \sigma_t) = \varphi_t^* (\xi_t \rfloor \sigma_t).$$

Подставляя соответствующее выражение в формулу для $\frac{d}{dt}\psi_t^* (\varphi^* \sigma_t)$, получаем (1.1).

§ 2. *Симплектические векторные пространства*

В этом параграфе мы приведем разные факты о геометрии симплектических векторных пространств. Пусть V — векторное пространство и $(\, , \,)$ — кососимметрическая билинейная форма на V. Если форма $(\, , \,)$ невырожденна, то V вместе с $(\, , \,)$ называется *симплектическим векторным пространством*. Если форма $(\, , \,)$ вырожденна, то полагаем

$$V^\perp = \{v \mid (v, w) = 0 \quad \text{для всех} \quad w \in V\} = \\ = \{v \mid (w, v) = 0 \quad \text{для всех} \quad w \in V\},$$

и ясно, что на $V/V^\perp$ индуцируется билинейная форма и что относительно этой формы $V/V^\perp$ — симплектическое векторное пространство.

Пусть V — симплектическое векторное пространство. Симплектическая группа $Sp(V)$ состоит из всех таких невырожденных линейных преобразований B, что

$$(Bu, Bv) = (u, v)$$

для всех $u, v \in V$. Конформная симплектическая группа $CSp(V)$ состоит из невырожденных линейных преобразований, удовлетворяющих условию

$$(Bu, Bv) = \mu_B(u, v) \qquad \forall u, v \in V,$$

где μ_B — скаляр, зависящий от B. Им соответствуют следующие алгебры Ли: симплектическая алгебра Ли $sp(V)$, состоящая из $A \in \operatorname{Hom}(V, V)$, удовлетворяющих условию

$$(Au, v) + (u, Av) = 0 \qquad \forall u, v \in V,$$

и конформная симплектическая алгебра Ли $csp(V)$, состоящая из тех A, для которых

$$(Au, v) + (u, Av) = \mu_A(u, v) \qquad \forall u, v \in V. \tag{2.1}$$

Если $A \in csp(V)$, то $A - {}^1/_2\mu_A I \in sp(V)$, так что $csp(V) = sp(V) + Z$, где центр Z состоит из всех кратных единичного преобразования.

Если V — вещественное симплектическое векторное пространство, то его комплексификация $V^{\mathbf{C}} = V \otimes \mathbf{C}$, как легко заметить, является комплексным симплектическим векторным пространством с билинейной формой

$$(x + iy, u + iv) = (x, u) - (y, v) + i\{(x, v) + (y, u)\}.$$

Пусть $A \in sp(V)$, где V — конечномерное симплектическое векторное пространство. Тогда для всякого скаляра λ имеем

$$([A - \lambda]u, v) = -(u, [A + \lambda]v) \qquad \forall u, v \in V,$$

а потому

$$([A - \lambda]^k u, v) = (-1)^k (u, [A + \lambda]^k v) \qquad \forall u, v \in V.$$

Пусть V_λ — обобщенное собственное подпространство для A, отвечающее собственному значению λ. Таким образом, V_λ состоит из всех таких $u \in V$, что

$$[A - \lambda]^k u = 0$$

для достаточно большого k. Значит, $u \in V_\lambda$ тогда и только тогда, когда $u \in ([A + \lambda]^k V)^\perp$. В частности, $\dim V_\lambda = \dim([A + \lambda]^k V)^\perp = \dim V_{-\lambda}$. Кроме того, если $0 \neq u$ — собственный вектор:

$$(A - \lambda)u = 0,$$

то $u \in ((A + \lambda)V)^\perp$ и множество собственных векторов с собственным значением λ спаривается относительно формы $(\ ,\ )$ с множеством собственных векторов с собственным значением $-\lambda$. Если λ комплексно, а V вещественно, то мы можем применить те же результаты к A, действующему на $V^{\mathbf{C}}$. Если $A \in csp(V)$, то мы можем применить полученный результат к $A - {}^1/_2\mu_A I \in sp(V)$. Таким образом, имеет место

Предложение 2.1. *Пусть $A \in csp(V)$. Тогда собственные значения A симметричны относительно $^1/_2\mu_A$. Это означает, что если λ — собственное значение A, то этим свойством обладает и $\mu_A - \lambda$ и*

$$\dim V_\lambda^{\mathbf{C}} = \dim V_{\mu_A-\lambda}^{\mathbf{C}}.$$

При этом V_λ и $V_{\mu_A-\lambda}$ невырожденно спарены относительно (,). Собственные подпространства, отвечающие λ и $\mu_A - \lambda$, также невырожденно спарены относительно (,).

Подпространство $X \subset V$ называется *лагранжевым*, если оно максимальное изотропное. Таким образом, $(u_1, u_2) = 0$ при $u_i \in X$ и X максимально относительно этого свойства.

Пусть X — фиксированное лагранжево подпространство и Y — такое другое лагранжево подпространство, что $X \cap Y = \{0\}$. Тогда X и Y невырожденно спарены относительно (,). Обозначим через P проекцию V на Y с ядром X, так что

$$0 \to X \to V \xrightarrow{P} Y \to 0.$$

Тогда $P \in csp(V)$ и $\mu_P = 1$. Действительно, мы должны показать, что

$$(Pu, v) + (u, Pv) = (u, v).$$

Так как X и Y порождают V, нам нужно рассмотреть только три случая: $u, v \in X$; $u \in X$, $v \in Y$; $u, v \in Y$. Если $u, v \in X$, то $Pu = Pv = 0$, а правая часть равна нулю ввиду изотропности X. Если $u \in X$ и $v \in Y$, то получается равенство $(u, v) = (u, v)$; если же и u и v лежат в Y, то обе части равны нулю. Обратно, пусть $P \in csp(V)$, причем $\mu_P = 1$ и $P|_X \equiv 0$. Тогда, в силу предложения 2.1, P должно иметь собственное подпространство Y, отвечающее собственному значению $\lambda = 1$, причем его размерность равна $\dim X$. Очевидно, что $X \cap Y = \{0\}$, и если $u, v \in Y$, то $(u, v) = (Pu, v) + (u, Pv) = 2(u, v)$, т. е. $(u, v) = 0$; значит, подпространство Y лагранжево. В результате множество лагранжевых подпространств Y, для которых $Y \cap X = \{0\}$, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством таких $P \in csp(V)$, что $\mu_P = 1$ и $P|_X \equiv 0$.

Если задан любой элемент $P \in csp(V)$, то, полагая

$$Q_P(x, y) = (Px, y) - \frac{1}{2}\mu_P(x, y), \qquad (2.2)$$

мы получаем симметрическую билинейную форму Q_P на V. В самом деле,

$$Q_P(y, x) = (Py, x) - \frac{1}{2}\mu_P(y, x) = -(x, Py) + \frac{1}{2}\mu_P(x, y) =$$

$$= (Px, y) - \frac{1}{2}\mu_P(x, y) = Q_P(x, y).$$

Обратно, если заданы Q и μ_P, то это уравнение определяет $P \in csp(V)$.

Если $Px = 0$ при $x \in X$, то $Q_P(x, x) = 0$ при $x \in X$; при этом $Q_P(x, y) = -{}^1/_2(x, y)$ — невырожденное спаривание между X и Y, если $X \cap Y = \{0\}$ и $\mu_P = 1$. Значит, Q_P имеет ранг n. Обратно, пусть Q_P — произвольная симметрическая квадратичная форма, для которой

$$Q_P(x, v) = -\frac{1}{2}(x, v) \qquad \forall x \in X, \ v \in V.$$

Тогда мы получаем, что $P \in csp(V)$ с $\mu_P = 1$ и $(Px, y) \equiv 0$ при $x \in X$ и любом y, т. е. $Px = 0$ при $x \in X$. Таким образом, доказано

Предложение 2.2. *Пусть X — фиксированное лагранжево подпространство. Тогда следующие множества находятся во взаимно однозначном соответствии:*

(i) *Множество всех таких лагранжевых подпространств Y, что $Y \cap X = \{0\}$.*

(ii) *Множество всех таких $P \in csp(V)$, что $\mu_P = 1$ и $P|_X \equiv 0$.*

(iii) *Множество всех таких симметрических квадратичных форм Q на V, что*

$$Q(x, v) = -\frac{1}{2}(x, v) \qquad \forall x \in X, \qquad v \in V. \tag{2.3}$$

Здесь $Y = \ker(P - I)$, а P и Q связаны соотношением (2.2). *Пространство* (i) *обозначим через $\mathscr{L}_X$.*

Третье описание показывает, что рассматриваемое пространство имеет структуру аффинного пространства, для которого ассоциированное векторное пространство — это $S^2(V/X)$. Действительно, пусть Q_1 и Q_2 — две симметрические формы на V, удовлетворяющие (2.3). Тогда $Q_1 - Q_2 = H$ — такая симметрическая форма на V, что $H(x, v) \equiv 0$ при $x \in X$ и всех v. Значит, H определяет симметрическую билинейную форму на V/X. Обратно, $S^2(V/X)$ можно рассматривать как пространство симметрических билинейных форм H на V, для которых $H(x, v) \equiv 0$ при $x \in X$. Тогда $Q + H$ удовлетворяет (2.3), если этим свойством обладает Q. Итак, мы доказали

Предложение 2.3. *Пусть X — фиксированное лагранжево подпространство. Тогда пространство всех лагранжевых подпространств, трансверсальных X, является аффинным пространством, ассоциированное к которому линейное пространство — это $S^2(V/X)$. В частности, если фиксировать трансверсальное лагранжево подпространство Y, то $\mathscr{L}_X$ отождествляется с $S^2(Y)$, поскольку можно отождествить V/X и Y. Если W — некоторый другой элемент $\mathscr{L}_X$, то квадратичная форма, ассоциированная с W на Y,* *имеет вид*

$$H(y_1, y_2) = (P_W y_1, y_2), \tag{2.4}$$

где P_W — проекция V на W с ядром X.

Элемент P_W, фигурирующий в предложении 2.3, — это проекция из точной последовательности

$$0 \to X \to V \xrightarrow{P_W} W \to 0.$$

Квадратичная форма P_Y, ассоциированная с Y по предложению 2.2, равна нулю на Y, поэтому H, определяемая формулой (2.4), на самом деле удовлетворяет равенству

$$H = (Q_W - Q_Y)|_Y.$$

Заметим, что

H невырожденна тогда и только тогда, когда $Y \cap W = \{0\}$. (2.5)

Действительно, если $y \in W \cap Y$, то $P_W y = P_Y y = y$, значит, $Q_W(y, v) = Q_Y(y, v)$ при всех $v \in V$; в результате $H(y, v) \equiv 0$. С другой стороны, поскольку $X \cap Y = \{0\}$, мы знаем, что $P\colon Y \to W$ — изоморфизм. Если $W \cap Y = \{0\}$, то W и Y невырожденно спарены относительно (,). Значит, (2.4) определяет невырожденное спаривание.

Поскольку в $S^2(Y)$ много невырожденных элементов, мы всегда можем выбрать лагранжево подпространство W, трансверсальное двум заданным лагранжевым подпространствам X и Y, по крайней мере если X и Y трансверсальны друг другу. Разумеется, если X и Y не трансверсальны друг другу, построить для них общее трансверсальное W даже «легче». Действительно, рассмотрим подпространство $X+Y$ и ограничение на него формы (,). В $X \cap Y$ лежат лишь те элементы V, которые ортогональны и X и Y, так что $(X+Y)/(X \cap Y)$ — симплектическое векторное пространство. Поэтому мы можем найти подпространство $W_0 \subset X+Y$, размерность которого равна размерности $X/(X \cap Y)$, причем W_0 изотропно и $W_0 \cap X = W_0 \cap Y = \{0\}$. Если выбрать базис $q_1, \ldots, q_r$ в $X \cap Y$ и базис $p_{r+1}, \ldots, p_n$ в W_0, то $q_1, \ldots, q_r$, $p_{r+1}, \ldots, p_n$ порождают лагранжево подпространство. Мы можем выбрать дуальный базис $p_1, \ldots, p_r, q_{r+1}, \ldots, q_n$. Тогда ясно, что подпространство W, порожденное $p_1, \ldots, p_n$, обладает нужными свойствами. Итак, мы доказали

Предложение 2.4. *Для заданной пары лагранжевых подпространств X и Y всегда можно найти третье лагранжево подпространство, трансверсальное им обоим.*

Вернемся к ситуации, определяемой парой трансверсальных лагранжевых подпространств X и W. Если Y — еще одно лагранжево подпространство, трансверсальное X, то

$$P_Y - P_W \in sp(V),$$

поскольку и P_Y и P_W принадлежат $csp(V)$ и $\mu_{P_Y} = \mu_{P_W} = 1$. Кроме того, мы утверждаем, что

$$(P_Y - P_W)^2 = 0. \tag{2.6}$$

Действительно, при $x \in X$ имеем $P_Y x = P_W x = 0$; при $w \in W$

$$(P_Y - P_W)\, w = P_Y w - w \in X.$$

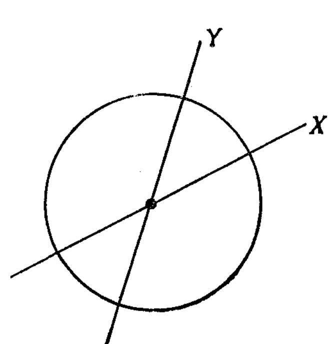
Поскольку X и W порождают V, это доказывает (2.6). Значит,

$$\exp(P_Y - P_W) = 1 + (P_Y - P_W) \in Sp(V) \tag{2.7}$$

— преобразование, которое тождественно на X и отображает W в Y. В (2.7) мы пользуемся экспоненциальным отображением в симплектическую группу. По причинам, которые выяснятся позднее, мы хотим рассматривать накрывающие группы для симплектической группы (в частности, двулистное накрытие). Экспоненциальное отображение тогда также определено (но не дается правой частью (2.7)). Сформулируем эти результаты.

Предложение 2.5. *Пусть X — лагранжево подпространство. Если лагранжевы подпространства W и Y трансверсальны X, то $P_Y - P_W \in sp(V)$ и $(P_Y - P_W)^2 = 0$ (где через P_Z обозначена проекция на Z вдоль X; $Z = Y$ или W). Отображение $1 + P_Y - P_W$ тождественно на X, переводит W в Y и лежит в $Sp(V)$. Если G — какая-либо накрывающая группа для $Sp(V)$, то $\mathrm{Exp}(P_Y - P_W)$ лежит в G и накрывает $1 + P_Y - P_W$; здесь Exp — экспоненциальное отображение $sp(V) \to G$ для группы G. Таким образом мы связываем элемент группы G с каждой парой лагранжевых подпространств, трансверсальных X.*

Изучим теперь структуру пространства всех лагранжевых подпространств вещественного симплектического пространства V. Обозначим множество всех лагранжевых подпространств через $L(V)$. При $\dim V = 2$ всякое одномерное подпространство лагранжево. Значит, $L(V)$ в этом случае — одномерное проективное пространство, которое топологически является окружностью. В частности, $H^1(L(V)) = \mathbf{Z}$.



Заметим, что если выделить одно лагранжево подпространство X, то $L(V) - \{X\} = \mathscr{L}_X$ представляет собой проективную прямую с выброшенной точкой, а если считать X «бесконечно удаленной точкой», то $\mathscr{L}_X$ превращается в аффинную прямую. Фиксация другого лагранжева подпространства Y определяет начало на этой аффинной прямой, а значит, линейную структуру. Для того чтобы превратить $L(V)$ в окружность, введем риманову метрику и ориентацию на V. Это превращает V в одномерное комплексное векторное пространство. Тогда каждая прямая определяет две точки на единичной окружности. Пусть $U(1)$ — одномерная унитарная группа, действующая на единичной окружности, и $O(1) = \{+1, -1\}$ — подгруппа в $U(1)$, являющаяся ортогональной группой прямой (т. е. вещественная унитарная группа); тогда

$$L(\mathbf{R}^2) \sim U(1)/O(1).$$

Это отождествление, конечно, зависит от выбора римановой метрики.

Эту конструкцию можно перенести на общий случай. Пусть V — комплексное векторное пространство с эрмитовым скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$. Положим

$$\langle v, w\rangle_R = \operatorname{Re}\langle v, w\rangle,$$
$$\langle v, w\rangle_I = \operatorname{Im}\langle v, w\rangle.$$

Тогда, если рассматривать V как $2n$-мерное вещественное векторное пространство, ясно, что $\langle v, w\rangle_I$ — кососимметрическая форма, которая невырожденна, а значит, является симплектической формой. Мы утверждаем, что если Z — лагранжево подпространство в V, то Z ортогонально iZ относительно $\langle\ ,\ \rangle_R$. Действительно, если v и w принадлежат Z, то

$$\operatorname{Re}\langle v, iw\rangle = -\operatorname{Re}\langle iv, w\rangle = -\langle v, w\rangle_I = 0.$$

Если V — произвольное унитарное преобразование, то, по определению, оно сохраняет $\langle\ ,\ \rangle$, а значит, и $\langle\ ,\ \rangle_I$ и потому определяет симплектическое преобразование. В результате U действует на $L(V)$. Покажем, что унитарная группа действует на $L(V)$ транзитивно. В самом деле, пусть X и X' — лагранжевы подпространства и $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{e_1', \ldots, e_n'\}$ — ортонормированные базисы в X и X' относительно формы $\langle\ ,\ \rangle_R$. Поскольку $\langle e_i, e_j\rangle_I = 0$, мы получаем, что $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис также и относительно эрмитовой структуры и тем же свойством обладает $\{e_1', \ldots, e_n'\}$. Значит, имеется унитарное преобразование, при котором $U(e_i) = e_i'$ при всех i, а потому $UX = X'$. Множество унитарных преобразований, сохраняющих X, состоит из таких унитарных преобразований, что $Ue_i = \sum a_{ij}e_j$, где все a_{ij} вещественны; следовательно, $U \in O(n)$. Значит,

$$L(V) = U(n)/O(n). \tag{2.8}$$

Мы получили этот результат, отправляясь от некоторой эрмитовой структуры на V. Теперь мы покажем, как ввести эрмитову структуру на симплектическом векторном пространстве V (так, что ее мнимая часть даст исходную симплектическую форму), и при этом мы параметризуем все такие эрмитовы структуры.

Фиксируем лагранжево подпространство X. Предположим, что заданы трансверсальное лагранжево подпространство Y и положительно определенное скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle_R$ на X. Тогда $\langle\ ,\ \rangle_R$ определяет изоморфизм $X \to X^*$, а Y можно идентифицировать с X^* при помощи симплектической формы. Таким образом, задано отображение

$$X \to Y.$$

Назовем это отображение умножением на i. Тогда, полагая $i(ix) = -x$, мы определим умножение на i всюду на V и превратим V в комплексное пространство. Положим также

$$\begin{aligned} \langle u,\ v\rangle &= \langle u,\ v\rangle_R, & u,\ v &\in X, \\ \langle u,\ y\rangle &= i(u,\ y), & u &\in X,\ y \in Y, \\ \langle y,\ z\rangle &= \langle iy,\ iz\rangle_R, & y,\ z &\in Y, \end{aligned}$$

и, продолжая по линейности, определим эрмитову форму $\langle\ ,\ \rangle$ на V; при этом

$$\langle\ ,\ \rangle_I = (\ ,\ ).$$

Обратно, если задана эрмитова форма $\langle\ ,\ \rangle$ на V, то, как мы уже видели, iX — лагранжево подпространство, трансверсальное X, и ограничение $\langle\ ,\ \rangle_R$ на X положительно определено. Итак, доказано

Предложение 2.6. *Пусть V — конечномерное вещественное симплектическое векторное пространство с формой $(\ ,\ )$. Пусть, далее, H — пространство эрмитовых форм $\langle\ ,\ \rangle$ (и комплексных структур), для которых $\langle\ ,\ \rangle_I = (\ ,\ )$. Тогда*

$$H \cong \mathscr{L}_X \times P_X,$$

где X — некоторое лагранжево подпространство в V, а P_X — пространство положительно определенных квадратичных форм на X. В частности, поскольку и $\mathscr{L}_X$ и P_X диффеоморфны клеткам, мы получаем, что H — клетка.

Обозначим через det отображение $U(n) \to S^1$, ставящее в соответствие преобразованию его детерминант. При этом отображении $O(n) \to \{\pm 1\}$; последнее множество обозначим через S^0. Рассмотрим, далее, функцию $\det^2$: $U(n)/O(n) \to S^1$. Пусть $S[U(n)/O(n)] = (\det^2)^{-1}(1)$. Если $\det U = \pm 1$, то можно найти такое $O \in O(n)$, что $\det UO = 1$. Таким образом, $SU(n)$ транзитивно действует на $S[U(n)/O(n)]$, а группа изотропии совпадает с $SO(n)$. В результате имеется расслоение

$$U(n)/O(n) \xrightarrow{\det^2} S^1,$$

слои которого во всех точках диффеоморфны $SU(n)/SO(n)$. Далее, группа $SU(n)$ односвязна, а группа $SO(n)$ связна. Поэтому однородное пространство $SU(n)/SO(n)$ односвязно. (Действительно, в $SU(n)/SO(n)$ каждая кривая с началом и концом в $SO(n)$ гомотопна образу некоторой кривой с началом и концом в единичном элементе группы $SU(n)$, поскольку $SO(n)$ связна. Но всякая замкнутая кривая в $SU(n)$ гомотопна тривиальной кривой, а значит, это имеет место и для ее образа.) Итак,

$$\pi_1(L(V)) = \mathbf{Z} \tag{2.9}$$

и, в частности,

$$H^1(L(V),\ \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}. \tag{2.10}$$

В следующем параграфе мы приведем независимое доказательство этих фактов. Далее, $dz/2\pi iz$ — форма на S^1, порождающая $H^1(S^1)$. Значит,

$$(\det{}^2)^* \frac{dz}{2\pi iz}$$

определяет на $L(V)$ форму, порождающую $H^1(L(V))$. Функция $\det^2$ определена на $U(n)/O(n)$ и, значит, задает отображение на $L(V)$, если только мы отождествим $L(V)$ с $U(n)/O(n)$ при помощи выбора эрмитовой метрики и лагранжева подпространства. Однако по предложению 2.6 все такие пары гладко деформируются одна в другую, а потому класс когомологий не зависит от этого выбора. Этот класс называется *классом Маслова*.

Переходим к явному описанию универсального накрывающего пространства $\tilde{L}(V)$ для пространства лагранжевых подпространств $L(V)$ симплектического векторного пространства V. Мы покажем, следуя Лере, что для всякой пары трансверсальных элементов u и u' из $\tilde{L}(V)$ существует инвариант $m(u, u')$. (При этом элементы u и u' называются трансверсальными, если πu и $\pi u'$ — трансверсальные лагранжевы подпространства, где через π обозначена проекция $\tilde{L}(V)$ на $L(V)$.) Мы свяжем инварианты тройки трансверсальных элементов u, u' и u'' с сигнатурой квадратичной формы, ассоциированной с тройкой лагранжевых подпространств πu, $\pi u'$ и $\pi u''$, и воспользуемся полученным инвариантом m для другого описания класса Маслова. Для этого вернемся к выбору эрмитовой метрики на V (и выбору ортонормированного базиса), который позволяет отождествить V и $\mathbf{C}^n$. Каждое лагранжево подпространство X имеет вид $X = A\mathbf{R}^n$ для некоторого $A \in U(n)$ и

$$A\mathbf{R}^n = B\mathbf{R}^n \quad \textit{тогда и только тогда, когда} \quad A\bar{A}^{-1} = B\bar{B}^{-1},$$

где через $\bar{A}$ обозначена матрица, элементы которой комплексно сопряжены элементам A. Тем самым определено отображение v:

$L(V) \to U(n)$, при котором

$$v(X) = A\bar{A}^{-1} \quad \text{для} \quad X = A\mathbf{R}^n. \tag{2.11}$$

Отметим, что если $B \in U(n)$, то

$$v(BX) = Bv(X)\bar{B}^{-1}. \tag{2.12}$$

Если $z \in \mathbf{C}^n$, то $z = Ar$ для $r \in \mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда $z = A\bar{A}^{-1}\bar{z}$. Значит,

$$z \in X \quad \textit{тогда и только тогда, когда} \quad z = v(X)\bar{z}. \tag{2.13}$$

Если $X \cap Y \neq \{0\}$, то пара уравнений $z = v(X)\bar{z}$ и $z = v(Y)\bar{z}$ имеет нетривиальное решение, так что матрица $v(X) - v(Y)$ необратима. Обратно, применив подходящий элемент из $U(n)$, мы можем считать, что $X = \mathbf{R}^n$ и $Y = A\mathbf{R}^n$. Если $u = A\bar{A}^{-1}\bar{u}$, то $\bar{u} = A\bar{A}^{-1}u$, и мы можем найти такое $\nu \in \mathbf{R}^n$, что $\nu = A\bar{A}^{-1}\bar{\nu}$, т. е. $\nu \in X \cap Y$. Значит,

$$\begin{gathered}\textit{X и Y трансверсальны тогда и только тогда,}\\ \textit{когда матрица } v(X) - v(Y) \textit{ обратима.}\end{gathered} \tag{2.14}$$

Обозначим через $\tilde{U}(n)$ пространство пар

$$(A, \varphi), \quad A \in U(n), \quad \varphi \in \mathbf{R}, \quad \textit{где} \quad \det A = e^{i\varphi}. \tag{2.15}$$

Умножение $(A, \varphi)\cdot(A', \varphi') = (AA', \varphi + \varphi')$ превращает $\tilde{U}(n)$ в группу, а отображение $\tilde{U}(n) \to U(n)$, при котором (A, φ) переходит в A, показывает, что $\tilde{U}(n)$ — накрывающая группа для $U(n)$. Отображение

$$SU(n) \times \mathbf{R} \to \tilde{U}(n), \quad \text{переводящее} \quad (B, \psi) \quad \text{в} \quad (Be^{i\psi}, n\psi),$$

как легко видеть, является изоморфизмом. Поскольку группа $SU(n)$ односвязна, отсюда следует, что $\tilde{U}(n)$ — универсальная накрывающая группа для $U(n)$. Это показывает, что для $U(n)$ фундаментальной группой является $\mathbf{Z}$. Отсюда следует также, что $\mathbf{Z}$ является фундаментальной группой и для $Sp(V)$. Мы наметим здесь доказательство этого факта, отсылая читателя к § 5 гл. V, где доказаны факты из теории групп, которыми мы будем пользоваться. Вначале отметим следующий факт об алгебре Ли $sp(V)$. Обозначим через J оператор умножения на i (относительно введенной на V комплексной структуры).

Как векторное пространство $sp(V)$ *разлагается в прямую сумму* $sp(V) = u(n) \oplus \mathcal{P}$, *где* $u(n) = \{A \in sp(V) \mid JAJ^{-1} = A\}$ *и* $\mathcal{P} = \{B \in sp(V) \mid JBJ^{-1} = -B\}$. *Каждый элемент из* $\mathcal{P}$ *имеет вид* $B = SC$, *где через* C *обозначено преобразование комплексного сопряжения, а* S — *комплексная симметрическая* $(n \times n)$-*матрица, т. е.* $Bz = S\bar{z}$ *для всех* $z \in V \sim \mathbf{C}^n$.

Доказательство. Поскольку $J^2=-1$, оператор Θ на $sp(V)$ сопряжения при помощи J, т. е. оператор $\Theta(A)=JAJ^{-1}$, удовлетворяет условию $\Theta^2=1$. Таким образом, указанная прямая сумма — это просто разложение $sp(V)$ в прямую сумму собственных подпространств для Θ, отвечающих собственным значениям $+1$ и -1. Тот факт, что $u(n)$ совпадает с собственным подпространством для собственного значения $+1$, характеризует $U(n)$ как подгруппу симплектической группы, сохраняющую комплексную (а значит, и эрмитову) структуру. Ясно, что комплексное сопряжение C удовлетворяет условию $JCJ^{-1}=-C$. Поскольку S комплексно линейно, $JSJ^{-1}=S$ и, значит, $JBJ^{-1}=-B$ при $B=SC$. Покажем, что все такие B принадлежат $sp(V)$. Мы должны показать, что

$$\operatorname{Im}(\langle Bu, v\rangle+\langle u, Bv\rangle)=0.$$

Имеем $\langle Bu, v\rangle=\langle S\bar{u}, v\rangle$ и $\langle u, Bv\rangle=\langle u, S\bar{v}\rangle=\langle S^*u, \bar{v}\rangle=\langle \bar{S}u, \bar{v}\rangle$, поскольку S — симметрическая матрица. Но $\langle \bar{S}u, \bar{v}\rangle$ комплексно сопряжено $\langle S\bar{u}, v\rangle$, поэтому доказываемое равенство имеет место. Далее, размерность над полем вещественных чисел пространства комплексных симметрических матриц равна $n(n+1)$, в то время как $\dim u(n)=n^2$ и $\dim sp(V)=n(2n+1)$. Таким образом, из сопоставления размерностей мы получаем, что все элементы $\mathscr{P}$ имеют указанный вид.

Отсюда следует (ср. § 5 гл. V) существование полярного разложения: каждый элемент группы $Sp(V)$ может быть единственным образом представлен в виде произведения

$$a=u\cdot\exp B,\quad u\in U(n),\quad B\in\mathscr{P},$$

где $\exp$: $sp(V)\to Sp(V)$ — экспоненциальное отображение. Поскольку $\mathscr{P}$ стягиваемо, это показывает, что $Sp(V)$ и $U(n)$ имеют одну и ту же фундаментальную группу. Действительно, если обозначить через $\widetilde{Sp}(V)$ универсальную накрывающую группу для $Sp(V)$, то теорема о полярном разложении для $\widetilde{Sp}(V)$ утверждает, что каждый элемент $\widetilde{Sp}(V)$ можно представить в виде

$$\tilde{a}=\tilde{u}\cdot\operatorname{Exp}B,\quad \tilde{u}\in\tilde{U}(n),\quad B\in\mathscr{P},$$

где Exp: $sp(V)\to\widetilde{Sp}(V)$ — экспоненциальное отображение для $\widetilde{Sp}(V)$. Отождествим элемент $g=(I, 2\pi)\in\tilde{U}(n)$ с образующей фундаментальной группы для $Sp(V)$.

Обозначим через $\tilde{L}(V)$ множество всех пар (X, θ), $X\in L(V)$, $\theta\in\mathbf{R}$, удовлетворяющих условию

$$\det v(X)=e^{i\theta}. \tag{2.16}$$

Группа $\mathbf{Z}$ действует на $\tilde{L}(V)$:

$$k(X,\ \theta)=(X,\ \theta+2\pi k),\quad k\in\mathbf{Z},$$

и

$$\tilde{L}(V)/\mathbf{Z}=L(V).$$

В результате $\tilde{L}(V)$ превращается в накрывающее пространство для $L(V)$. Группа $\tilde{U}(n)$ действует на $\tilde{L}(V)$ транзитивно:

$$(A,\ \varphi)\cdot(X,\ \theta)=(AX,\ \theta+2\varphi). \tag{2.17}$$

Ввиду (2.12) это действие корректно определено. Подгруппа, оставляющая неподвижным элемент $(\mathbf{R}^n,\ 0)\in\tilde{L}(V)$, состоит из всех таких $(A,\ 0)$, что $A=\bar{A}$ и $\det A=1$, т. е. $A\in SO(n)$. Значит,

$$\tilde{L}(V)=\tilde{U}(n)/SO(n).$$

Поскольку группа $\tilde{U}(n)$ односвязна, а подгруппа $SO(n)$ связна, однородное пространство $\tilde{L}(V)$ односвязно. Таким образом,

$\tilde{L}(V)$ — *универсальное накрывающее пространство для* $L(V)$.

Пусть $\tilde{\gamma}$ — путь в $\tilde{L}(V)$, у которого $\tilde{\gamma}(0)=(X,\ \theta)$ и $\tilde{\gamma}(1)=(X,\ \theta+2\pi)$. Пусть, далее, γ — соответствующая кривая на $L(V)$, т. е. γ — замкнутый путь, начинающийся и кончающийся в X. Из (2.13) и (2.15) следует, что

$$\int\limits_{\gamma}(\det{}^2)^*\,\frac{dz}{2\pi iz}=1. \tag{2.18}$$

Пусть $u=(X,\ \theta)$ и $u'=(X',\ \theta')$ — два элемента из $\tilde{L}(V)$. Назовем u и u' трансверсальными, если X и X' — трансверсальные лагранжевы подпространства. Теперь мы хотим определить индекс Маслова $m(u,\ u')$, ассоциированный с парой $u,\ u'$ трансверсальных элементов $\tilde{L}(V)$. С этой целью определим логарифм элемента $A\in GL(n,\ \mathbf{C})$ по формуле

$$\operatorname{Log}A=\int\limits_{-\infty}^{0}\{(sI-A)^{-1}-(s-1)^{-1}I\}\,ds,$$

где I — единичная матрица. Это определение имеет смысл для всех $A\in GL(n,\ \mathbf{C})$, не имеющих собственных значений на отрицательной вещественной оси. Легко проверить, что

$$\exp(\operatorname{Log}A)=A,\quad \text{если только } \operatorname{Log}A \text{ определен},$$

$$e^{\operatorname{tr}(\operatorname{Log}A)}=\det A,$$

$$\operatorname{Log}A^{-1}=-\operatorname{Log}A.$$

Если $u=(X, \theta)$ и $u'=(X', \theta')$ трансверсальны, то, следуя Сурьо [25], положим

$$m(u, u')=\frac{1}{2\pi}\{\theta-\theta'+i\operatorname{tr}\operatorname{Log}(-v(X)v(X')^{-1})\}. \tag{2.19}$$

Согласно (2.14), матрица $v(X)-v(X')$ обратима, поэтому $-v(X)v(X')^{-1}$ не может иметь -1 собственным значением, а следовательно, ввиду унитарности, вообще не может иметь вещественных отрицательных собственных значений. Таким образом, (2.19) имеет смысл, если u и u' трансверсальны. Поскольку $e^{\operatorname{tr}\operatorname{Log} A}=\det A$, отсюда следует, что

$$e^{2\pi i m(u, u')}=(-1)^n=e^{in\pi}, \quad \text{где} \quad \dim V=2n.$$

Итак,

$$\begin{gathered} m(u, u')\in \mathbf{Z}, \textit{ если } n \textit{ четно}, \\ \textit{и } m(u, u')\in \mathbf{Z}+\frac{1}{2}, \textit{ если } n \textit{ нечетно}. \end{gathered} \tag{2.20}$$

Заметим, что

$$m(k\cdot u, k'\cdot u')=k-k'+m(u, u') \quad \text{при} \quad k, k'\in \mathbf{Z}, \tag{2.21}$$

т. е. все значения, допускаемые (2.20), действительно принимаются.

Группа $Sp(V)$ связна и действует на $L(V)$; значит, это действие единственным образом накрывается действием $\widetilde{Sp}(V)$ на $\tilde{L}(V)$. Если u и u' трансверсальны, то при $\tilde{a}\in \widetilde{Sp}(V)$ трансверсальны $\tilde{a}u$ и $\tilde{a}u'$. Отображение $\tilde{a}\mapsto m(\tilde{a}u, \tilde{a}u')$ корректно определено, непрерывно и принимает значения в дискретном множестве, а значит, постоянно. Таким образом,

$$m(\tilde{a}u, \tilde{a}u')=m(u, u') \quad \text{для всех} \quad a\in \widetilde{Sp}(V). \tag{2.22}$$

Другими словами, $m(u, u')$ не зависит от выбора комплексной структуры и является инвариантом $\widetilde{Sp}(V)$. Из определения ясно, что

$$m(u, u')+m(u', u)=0. \tag{2.23}$$

Пусть X, X' и X'' — три трансверсальных лагранжевых подпространства. По предложению 2.3 пара X, X'' определяет на X' квадратичную форму вида

$$H(y_1, y_2)=(P_{X''}y_1, y_2), \quad y_1, y_2\in X',$$

где через $P_{X''}$ обозначена проекция на X'' вдоль X. Положим

$$\iota(X, X', X'')=\frac{1}{2}\operatorname{sign} H. \tag{2.24}$$

Это симплектический инвариант тройки лагранжевых подпространств, т. е.

$$i(aX,\ aX',\ aX'') = i(X,\ X',\ X'') \qquad (2.25)$$

для всех $a \in Sp(V)$. (Напомним, что для пары трансверсальных лагранжевых подпространств инвариантов *не существует*: группа $Sp(V)$ транзитивно действует на множестве всех пар трансверсальных лагранжевых подпространств.)

Пусть $u = (X,\ \theta)$, $u' = (X',\ \theta')$ и $u'' = (X'',\ \theta'')$ — точки $\tilde{L}(V)$, лежащие над X, X', X''. Мы утверждаем, что имеет место следующая формула, принадлежащая Лере [23]:

$$m(u,\ u') + m(u',\ u'') + m(u'',\ u) = i(X,\ X',\ X''). \qquad (2.26)$$

При доказательстве этой формулы мы можем применить любое $\tilde{a} \in \widetilde{Sp}(V)$ к u, u' и u'' в левой части и соответствующее $a \in Sp(V)$ к X, X', X'' в правой части. Таким образом, мы можем считать, что $X = \mathbf{R}^n$, $X' = i\mathbf{R}^n$ и $X'' = b\mathbf{R}^n$, где $b \in Sp(V)$ имеет вид

$$b = \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

в базисе, отвечающем представлению $V \sim \mathbf{R}^n \oplus i\mathbf{R}^n$; S — симметрическая матрица. Из (2.4) и (2.24) следует, что

$$i(X,\ X',\ X'') = \frac{1}{2}\operatorname{sign} S.$$

Наконец, применяя элемент $c \in Sp(n)$ вида

$$c = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}, \qquad A \in GL(n),$$

мы можем считать, что S — диагональная матрица с элементами ± 1 на диагонали, т. е.

$$S = \operatorname{diag}(+1,\ \ldots,\ +1,\ -1,\ \ldots,\ -1),$$

где имеется k плюсов и $n-k$ минусов. Значит, $\operatorname{sign} S = 2k - n$ и

$$i(X,\ X',\ X'') = \frac{1}{2}(2k-n).$$

Если через $\delta_1,\ \ldots,\ \delta_n$ обозначить стандартный базис в $\mathbf{R}^n$, то $i\delta_1,\ \ldots,\ i\delta_n$ — базис в X', а векторы $(1 \pm i)\,\delta_j$ образуют базис в X'', где взят знак $+$ для первых k векторов и знак $-$ для остальных $n-k$. Поскольку $\sqrt{2}\cdot e^{\pm\pi i/4} = 1 \pm i$, можно в качестве базисных векторов выбрать $e^{\pm\pi i/4}\,\delta_j$. Значит, $X'' = A\mathbf{R}^n$, где A — диагональная унитарная матрица:

$$A = \operatorname{diag}(e^{\pi i/4},\ \ldots,\ e^{\pi i/4},\ e^{-\pi i/4};\ \ldots,\ e^{-\pi i/4}).$$

Поэтому, в силу (2.11),

$$v(X'') = \operatorname{diag}(e^{\pi i/2}, \ldots, e^{\pi i/2}, e^{-\pi i/2}, \ldots, e^{-\pi i/2}),$$

где, как и ранее, берется k плюсов и $n-k$ минусов. Очевидно, что

$$v(X) = I \quad \text{и} \quad v(X') = -I.$$

Тогда при $u'' = (X'', \theta'')$, согласно (2.16), имеем

$$\theta'' = 2\pi \left[q'' + \frac{1}{4}(2k-n) \right]$$

с некоторым целым q''. Аналогично,

$$\theta = 2\pi q \quad \text{и} \quad \theta' = 2\pi [q' + n/2],$$

где q и q' — целые. Таким образом, по (2.19),

$$m(u, u') = q - q' - n/2.$$

Кроме того,

$$\operatorname{Log}(-v(X')v(X'')^{-1}) = \operatorname{Log}\operatorname{diag}(e^{-\pi i/2}, \ldots, e^{-\pi i/2}, e^{\pi i/2}, \ldots, e^{\pi i/2}) =$$
$$= \operatorname{diag}(-\pi i/2, \ldots, -\pi i/2, \pi i/2, \ldots, \pi i/2),$$

поскольку мы выбираем ту ветвь Log, которая получается аналитическим продолжением с вещественной положительной полуоси в верхнюю и нижнюю полуплоскости (т. е. $\operatorname{Log} e^{\pi i/2} = \pi i/2$ и $\operatorname{Log} e^{-\pi i/2} = -\pi i/2$). Значит,

$$i \operatorname{tr} \operatorname{Log}(-v(X')v(X'')^{-1}) = \frac{1}{2}\pi(2k-n)$$

и

$$m(u', u'') = q' + n/2.$$

Аналогично,

$$i \operatorname{tr} \operatorname{Log}(-v(X'')v(X)^{-1}) = \frac{1}{2}\pi(2k-n),$$

т. е.

$$m(u'', u) = q'' - q + \frac{1}{2}(2k-n).$$

Складывая три полученных выражения, мы докажем формулу Лере (2.26). Заметим, что из (2.26) следует, что $i(X, X', X'')$ — антисимметрическая функция от трех переменных. Из нее также следует, что если определить индекс пересечения Хёрмандера четверки трансверсальных лагранжевых подпространств X, Y, Z и W формулой

$$(X, Y, Z, W) = i(X, Y, Z) - i(X, Y, W),$$

то

$$(X, Y, Z, W) = -(Z, W, X, Y).$$

Ни один из этих фактов не является очевидным следствием определения (2.24). Мы обсудим их подробнее в следующем параграфе.

Теперь рассмотрим связь между классом Маслова, введенным ранее в этом параграфе, и циклом Маслова, введенным в § 7 гл. II. Пусть Y — фиксированное лагранжево подпространство. (Окончательно Y будет играть роль «касательного к вертикали» в T^*M в локальной системе координат.) Пусть $X(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — кривая из лагранжевых подпространств, причем $X(0)$ и $X(1)$ трансверсальны Y. Пусть $\tilde{Y}$ — точка $\tilde{L}(V)$, накрывающая Y, и пусть $u(t)$ — кривая в $\tilde{L}(V)$, накрывающая $X(t)$. Из (2.21) следует, что целое число

$$l = m(\tilde{Y},\ u(1)) - m(\tilde{Y},\ u(0))$$

не зависит от способа поднятия. Функция $m(\tilde{Y},\ u(\cdot))$ теряет смысл в точности для тех t, для которых подпространство $X(t)$ не трансверсально Y. Предположим, что s — изолированная точка, в которой это происходит, т. е. предположим, что $X(t')$ трансверсальны Y для всех $t' < s$, достаточно близких к s, и что $X(t'')$ трансверсальны к Y для всех $t'' > s$, достаточно близких к s. Для вычисления скачка $m(\tilde{Y},\ u(t))$ при переходе через значение s исходя из разности сигнатур квадратичных форм внизу на $L(V)$ можно воспользоваться формулой (2.26). Действительно, возьмем какое-нибудь другое лагранжево подпространство Z, трансверсальное Y и всем $X(t)$ при $t' \leqslant t \leqslant t''$. Ясно, что такое подпространство можно найти, если t' и t'' достаточно близки. Тогда, согласно (2.26),

$$\begin{aligned} i(Z,\ Y,\ X(t'')) - i(Z,\ Y,\ X(t')) = m(\tilde{Y},\ u(t'')) - m(\tilde{Y},\ u(t')) - \\ - (m(\tilde{Z},\ u(t'')) - m(\tilde{Z},\ u(t'))), \end{aligned}$$

где $\tilde{Z}$ лежит над Z. Но $m(\tilde{Z},\ u(t))$ — непрерывная функция на интервале $t' \leqslant t \leqslant t''$ с дискретными значениями, а значит, $m(\tilde{Z},\ u(t'')) = m(\tilde{Z},\ u(t'))$. Итак,

$$m(\tilde{Y},\ u(t'')) - m(\tilde{Y},\ u(t')) = i(Z, Y, X(t'')) - i(Z,\ Y,\ X(t')). \tag{2.27}$$

Теперь предположим, что $X(1) = X(0)$, т. е. что кривая замкнута. Из (2.21) следует, что $l \cdot u(0) = u(1)$ и, значит, в силу (2.18)

$$l = \int (\det{}^2)^* \frac{dz}{2\pi i z}. \tag{2.28}$$

Пусть Λ — лагранжево подмногообразие в V. Касательное пространство $T\Lambda_\lambda$ можно отождествить с лагранжевым подпространством в V, если мы обычным образом отождествим касательное пространство к векторному пространству с ним самим. Каждой кривой γ на Λ тогда отвечает кривая из лагранжевых подпространств $X(t) = T\Lambda_{\gamma(t)}$. Если γ — замкнутая кривая, то (2.28) определяет целое число, ассоциированное с γ. На самом деле мы определили элемент из $H^1(\Lambda,\ \mathbf{Z})$, который можно вычислить как интеграл (2.28), если выбрана комплексная структура, или как сумму «числа пересечений» (2.27) при фиксированном лагранжевом подпространстве Y. Фактически этот класс не зависит от выбора Y или комплексной структуры. Будем называть его *классом Лере лагранжева подмногообразия* Λ.

Аналогично, пусть M — дифференцируемое многообразие. Для каждого $z \in T^*M$ касательное пространство $T(T^*M)_z$ является симплектическим векторным пространством, и в нем можно взять лагранжево подпространство Y_z, касательное к вертикали, т. е. состоящее из таких касательных векторов ζ, что $d\pi_z\zeta = 0$, где через π обозначена стандартная проекция T^*M на M. Выбор римановой метрики на M индуцирует положительно определенное скалярное произведение на Y_z, позволяя отождествить $L(T(T^*M))$ с $U(n)/O(n)$. Значит, $(\det^2)^*(dz/2\pi iz)$ — корректно определенная дифференциальная форма на расслоении $L(T^*M)$, где через $L(T^*M)$ обозначено расслоение над T^*M, у которого слой над точкой z состоит из всех лагранжевых подпространств в $T(T^*M)_z$. Если Λ — лагранжево подмногообразие в T^*M, то опять-таки любая кривая γ на Λ определяет кривую на $L(T^*M)$, и мы можем, воспользовавшись (2.28), определить целое число; таким образом *мы определим элемент из* $H^1(\Lambda, \mathbf{Z})$, *который является классом Маслова подмногообразия* Λ. Этот класс не зависит от выбора римановой метрики, поскольку любые две римановы метрики можно непрерывно продеформировать одну в другую. При помощи локальных координат на M можно локально отождествить окрестность в T^*M с открытым подмножеством в симплектическом векторном пространстве V, в котором все Y_z отождествлены с фиксированным лагранжевым подпространством Y. Можно воспользоваться (2.27) для вычисления этого класса через локальные числа пересечений. В следующем параграфе мы приведем определение класса Маслова по Хёрмандеру, пользуясь чеховской теорией.

§ 3. *Индекс пересечения и класс Маслова*[1])

Начнем этот параграф с того, что дадим другое изложение вычисления группы $\pi_1(L(V))$ и класса, введенного в предыдущем параграфе. Мы будем проводить индукцию по размерности V, не вводя комплексную структуру, причем этот подход окажется полезен в дальнейшем.

Пусть R — изотропное подпространство в V. Тогда $R^\perp \supset R$, и, поскольку $R = (R^\perp)^\perp$, мы видим, что $W = R^\perp/R$ — снова симплектическое векторное пространство, причем

$$\dim R^\perp/R = \dim R^\perp - \dim R = \dim V - 2\dim R,$$

[1]) Этот параграф при первом чтении можно опустить.

так как

$$\dim R + \dim R^{\perp} = \dim V.$$

Пусть X — произвольное лагранжево подпространство в V. Тогда ясно, что $(X \cap R^{\perp})/(X \cap R)$ — изотропное подпространство в W. Мы утверждаем, что оно лагранжево, т. е. что

$$\dim((X \cap R^{\perp})/(X \cap R)) = \frac{1}{2}\dim W = \frac{1}{2}\dim V - \dim R.$$

Для доказательство этого заметим, что

$$\dim(X \cap R^{\perp}) = \dim V - \dim(X \cap R^{\perp})^{\perp} = \dim V - \dim(X + R)$$

и

$$\dim(X + R) + \dim(X \cap R) = \dim X + \dim R,$$

так что

$$\begin{aligned}\dim((X \cap R^{\perp})/(X \cap R)) &= \dim(X \cap R^{\perp}) - \dim(X \cap R) = \\ &= \dim V - [\dim(X + R) + \dim(X \cap R)] = \\ &= \dim V - [\dim X + \dim R] = \\ &= \frac{1}{2}\dim V - \dim R,\end{aligned}$$

поскольку $\dim X = {}^1/_2 \dim V$. Таким образом, доказано

Предложение 3.1. *Пусть R — изотропное подпространство в V. Тогда $W = R^{\perp}/R$ — симплектическое векторное пространство и формула*

$$\rho(X) = (X \cap R^{\perp})/(X \cap R)$$

задает отображение $L(V) \to L(W)$.

К сожалению, отображение ρ не будет непрерывным. Например, исследуем отображение ρ для случая $V = \mathbf{R}^4$ с базисом $\{e_1, e_2, f_1, f_2\}$, где

$$(e_1, e_2) = (f_1, f_2) = 0 \quad \text{и} \quad (e_i, f_j) = \delta_{ij}$$

и мы берем

$$R = \{e_1\}, \quad \text{т. е.} \quad R^{\perp} = \{e_1, e_2, f_2\}.$$

Опишем отображение ρ локально в координатной карте, состоящей из $X \in \mathscr{L}_{\{f_1, f_2\}}$. Для таких X проекция на $\{e_1, e_2\}$ несингулярна и X определяет симметрическое отображение $\{e_1, e_2\}$ в $\{f_1, f_2\}$. В частности, X порождается векторами

$$e_1 + a_{11}f_1 + a_{12}f_2 \quad \text{и} \quad e_2 + a_{21}f_1 + a_{22}f_2,$$

где $a_{12} = a_{21}$ и матрица $A = (a_{ij})$ однозначно определяет X и определяется им. Поэтому будем обозначать X через X_A. Далее, $X \cap R^{\perp}$ состоит из таких комбинаций указанных векторов, у которых коэффициент при f_1 равен нулю. Таким образом, надо рассмотреть два случая:

(i) $a_{11}=a_{21}=0$. Это соответствует предположению, что $X_A \subset R^\perp$. В этом случае $a_{12}=0$ и

$$\rho(X_A)=([e_2]+a_{22}[f_2]),$$

где $[e_2]=e_2/R$. Мы запишем это короче:

$$\rho(X_A)=(1,\ a_{22}).$$

(ii) $(a_{11},\ a_{21})\neq(0,\ 0)$. Тогда $\dim(X_A\cap R^\perp)=1$ и

$$\rho(X_A)=(a_{11},\ \det A).$$

Если положить

$$A=\begin{pmatrix}0 & s\\ s & 0\end{pmatrix},$$

то получаем

$$\rho(X_A)=\begin{cases}(1,\ 0) & \text{при}\quad s=0,\\ (0,\ s)=(0,\ 1)\ \text{проективно} & \text{при}\quad s\neq 0,\end{cases}$$

т. е. ρ не является непрерывным.

На этом примере видно, что неприятностей от ρ можно ожидать для тех X, для которых $X\cap R\neq 0$. Это и в самом деле те и только те подпространства, для которых отображение ρ портится. Выбирая базис в R, можно провести индукцию по размерности R. Проанализируем отображение ρ для случая, когда $R=\{e\}$ одномерно. Тогда $\dim V=2n$ и, полагая $W=R^\perp/R$, мы получаем $\dim W=2n-2$. Напомним, что $\dim L(V)=\dim(S^2(\mathbf{R}^n))=n(n+1)/2$. Положим

$$S_R=\{X\in L(V)\mid X\supset R\}=\{X\in L(V)\mid X\subset R^\perp\};$$

мы воспользовались тем, что $X=X^\perp$.

Предложение 3.2. *Множество S_R является подмногообразием коразмерности n в $L(V)$. Отображение ρ, ограниченное на S_R, является диффеоморфизмом S_R на $L(W)$. Отображение ρ, ограниченное на $L(V)-S_R$, является гладким отображением, превращающим $L(V)-S_R$ в расслоение над $L(W)$ со слоем $\mathbf{R}^n$.*

Заметим, что при $n>2$ из предложения следует, что вложение $L(V)-S_R$ в $L(V)$ индуцирует изоморфизм на π_1. Действительно, любую гладкую кривую можно продеформировать так, чтобы она не пересекала S_R, и то же можно сделать с любой гладкой гомотопией. Поскольку утверждается, что $L(V)-S_R$ является расслоением над $L(W)$ с гомотопически тривиальными слоями, мы получаем, что ρ индуцирует изоморфизм между $\pi_1(L(V))$ и $\pi_1(L(W))$. Позднее мы покажем прямым вычислением, что это справедливо также и в случае $\dim V=4$. Это даст другое доказательство того факта, что $\pi_1(L(V))=\mathbf{Z}$. Тогда образующая на плоскости определит образующую в $\pi_1(L(V))$. Дальнейшие вычисления покажут, что эта образующая совпадает с той, которая была получена при помощи эрмитовой структуры.

Доказательство предложения. Тот факт, что S_R имеет коразмерность n, почти очевиден. Достаточно убедиться, что $S_R \cap \mathscr{L}_X$ — подмногообразие коразмерности n для любого $X \in L(V)$. Выберем дополнительное подпространство $Y \in \mathscr{L}_X$, дающее разложение в прямую сумму: $V = X \oplus Y$; пусть π_X, π_Y — соответствующие проекции. Далее, если $S_R \cap \mathscr{L}_X \neq \emptyset$, то $\pi_Y e \neq 0$, где $R = \{e\}$. Каждому $Z \in \mathscr{L}_X$ соответствует симметрическое отображение A из Y в X и $Z \in S_R$ тогда и только тогда, когда $A\pi_Y e = \pi_X e$. Ясно, что тем самым заданы n линейных условий на A.

Чтобы убедиться в том, что $\rho|_{S_R}$ — биекция, заметим, что если $R \subset X \subset R^\perp$, то $\rho(X) = X/R$. Если X' — лагранжево подпространство в $R^\perp/R$, то его прообраз в $R^\perp$ — единственное лагранжево подпространство X, для которого $\rho(X) = X'$.

Исследуем теперь $L(V) - S_R$. При $X \not\subset R^\perp$ ясно, что отображение $X \to X \cap R^\perp$ гладкое и $X \cap R^\perp$ не содержит R. Значит, отображение $X \cap R^\perp \to (X \cap R^\perp)/(X \cap R)$ также гладкое, откуда следует гладкость ρ на $L(V) - S_R$. Исследуем прообраз. Пусть Z_1' и Z_2' — два $(n-1)$-мерных изотропных подпространства в $R^\perp$, для которых $Z_1'/R = Z_2'/R = Z''$. Тогда, задавая $z \in Z''$, мы получаем $z_1 \in Z_1'$ и $z_2 \in Z_2'$, причем $z_1 - z_2 \in R$. Отсюда видно, что прообраз Z'' — аффинное пространство, с которым ассоциировано линейное пространство $\mathrm{Hom}(Z'', R)$. Далее, для заданного $(n-1)$-мерного изотропного подпространства Z', лежащего в $R^\perp$, мы должны найти все возможные Z из $L(V)$, для которых $Z \cap R^\perp = Z'$. Такие Z должны лежать в $(Z')^\perp$, которое $(n+1)$-мерно. Значит, нас интересуют все прямые в $(Z')^\perp/Z'$, за исключением прямой $\{e + Z'\}$. Поскольку $\dim (Z')^\perp/Z' = 2$, мы по существу добавили аффинную прямую. Следовательно, полный прообраз Z'' в $L(V) - S_R$ диффеоморфен $\mathbf{R}^n$.

Теперь посмотрим, что происходит при $\dim V = 4$. В этом случае $L(V)$ диффеоморфно $U(2)/O(2)$. Далее, любую унитарную (2×2)-матрицу можно представить в виде $U = U'\Delta$, где Δ — диагональная матрица, а $U' \in SU(2)$. Это разложение единственно с точностью до умножения обоих сомножителей на $-I$. Заметим, что $-I \in SO(2)$. Значит,

$$U(2)/O(2) \sim SU(2)/SO(2) \times S^1/S^0,$$

где $S^0 = \{\pm I\}$. Далее, $SU(2)/SO(2)$ — компактное односвязное двумерное многообразие, а значит, это S^2. Таким образом,

$$L(V) = S^2 \times S^1.$$

Наметим непосредственный вывод этого результата. Мы можем предполагать, что $V = \mathbf{R}^4$. Если выбрать единичный вектор

$v=(a, b, c, d)$, то множество единичных векторов в $v^{\perp}$, которые одновременно ортогональны v относительно скалярного произведения, является окружностью. Отметив точку на окружности, мы определим лагранжево подпространство вместе с ортогональным базисом. Можно перевести один из таких базисов в другой поворотом, поэтому мы должны профакторизовать по S^1. Итак, имеем $(S^3\times S^1)/S^1$. На самом деле второе S^1 действует только на S^3, расслаивая S^3 над S^2 (так называемое расслоение Хопфа), так что окончательно получаем $S^2\times S^1$. Изложим это подробнее. Определим операторы E и F, действующие из $\mathbf{R}^4$ в $\mathbf{R}^4$, полагая

$$E(a, b, c, d)=(-c, d, a, -b),$$
$$F(a, b, c, d)=(d, c, -b, -a).$$

Тогда $(v, Ev)=0$ и $\langle v, Ev\rangle=0$, где через $\langle\ ,\ \rangle$ обозначено скалярное произведение; аналогичные соотношения имеют место для F. Кроме того, $E^2=-I=F^2$ и $EF=-FE$. Для любого заданного θ положим

$$E_\theta=\cos\theta\, E+\sin\theta F,\quad \text{так что}\quad E_\theta^2=-I.$$

Тогда v и $E_\theta v$ порождают все возможные лагранжевы плоскости, если v пробегает S^3, а θ пробегает S^1. С другой стороны, всякое двумерное ортогональное преобразование переводит v, $E_\theta v$ в векторы, порождающие ту же плоскость. Произвольный поворот будем записывать в виде

$$\begin{pmatrix} c & s\\ -s & c\end{pmatrix},\quad c^2+s^2=1.$$

Тогда

$$(cv+sE_\theta v, -sv+cE_\theta v)=(cv+sE_\theta v,\ E_\theta(cv+\ E_\theta v)).$$

(От отражений можно избавиться, отождествляя v, $E_\theta v$ и v, $-E_\theta v$.) Таким образом, при каждом θ имеется свое расслоение S^3 на большие круги над S^2. Из этой картины ясно, что для любого R множество S_R имеет вид $p\times S^1$, где p — точка S^2.

Поскольку выбрасывание точки из сферы не меняет фундаментальной группы, получаем, что $\pi_1(L(V)-S_R)\cong\pi_1(L(V))$. (В качестве побочного результата для этого случая мы получаем, что $L(V)-S_R=S^1\times\mathbf{R}^2$, как уже было доказано.)

Теперь мы хотим показать, как связать целое число (A, B, C, D) с четверкой лагранжевых подпространств, для которых

$$C\cap A=\{0\}=C\cap B,$$
$$D\cap A=\{0\}=D\cap B.$$

Оно определяется следующим образом. Пусть

$$R=A\cap B.$$

Тогда $\rho(A)$ и $\rho(B)$ — трансверсальные лагранжевы подпространства в $R^{\perp}/R$. По предложению 3.4 любому третьему лагранжеву подпространству в $R^{\perp}/R$, трансверсальному $\rho(A)$ и $\rho(B)$, соответствует квадратичная форма на $\rho(B)$. Поскольку C и D оба трансверсальны A и B, мы получаем, что и $\rho(C)$ и $\rho(D)$ определяют на $\rho(B)$ невырожденные квадратичные формы Q_C и Q_D. Квадратичная форма Q_C на $\rho(B)$ имеет вид $Q_C(b) = (P_A^C b, b)$, где P_A^C — проекция $\rho(B)$ на $\rho(A)$ вдоль $\rho(C)$. Положим

$$(A, B, C, D) = \frac{1}{2}[\operatorname{sign} Q_C - \operatorname{sign} Q_D] = \operatorname{ind} Q_D - \operatorname{ind} Q_C.$$

Введем обозначение: $i(A, B, C) = {}^1/_2 \operatorname{sign} Q_C$. Тогда

$$(A, B, C, D) = i(A, B, C) - i(A, B, D).$$

Ясно, что

$$(A, B, C, D) = -(A, B, D, C), \tag{3.1}$$

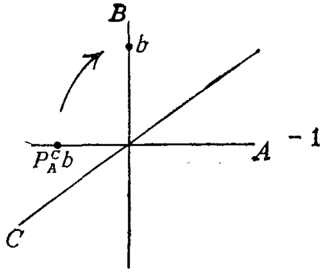
$$(A, B, C, D) + (A, B, D, E) + (A, B, E, C) = 0. \tag{3.2}$$

Если $A \cap B = \{0\}$, то для всех близких A, B, C и D условия трансверсальности сохранятся, а поскольку сигнатуры Q_C и Q_D не изменятся, мы получаем, что (A, B, C, D) локально постоянно. Мы хотим доказать, что это будет так даже и в том случае, когда $A \cap B \neq \{0\}$, если только C и D оба остаются трансверсальными A и B. С этой целью дадим другое определение числа (A, B, C, D). Напомним, что $\mathscr{L}_A$ — клетка. Поскольку C и D оба лежат в $\mathscr{L}_A$, найдется кривая γ_{CD}, соединяющая C и D в $\mathscr{L}_A$, и любые две такие кривые гомотопны. Аналогично, существует единственная (с точностью до гомотопии) кривая γ_{DC}, соединяющая D и C в $\mathscr{L}_B$. Тем самым определяется замкнутая кривая γ_{CDC} в $L(V)$ с точностью до гомотопии, т. е. элемент группы $\pi_1(L(V))$. Это некоторое кратное образующей. Мы утверждаем, что коэффициент в точности равен (A, B, C, D). Другими словами, что

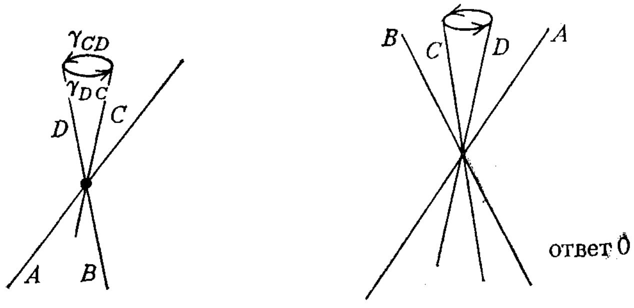
$$(A, B, C, D) = \int_{CDC} (\det{}^2)^* \frac{dz}{2\pi i z} \tag{3.3}$$

при некотором отождествлении $L(V)$ с $U(n)/O(n)$. Поскольку кривую γ_{CDC} можно считать гладко зависящей от A, B, C и D, если только C и D остаются трансверсальными A и B, то мы видим, что левая часть — и в самом деле непрерывная (а значит, постоянная) функция своих аргументов. Приводимое ниже доказательство формулы (3.3), по существу, принадлежит Костанту.

Прежде чем приводить это доказательство, посмотрим, какие возможны кривые γ_{CDC} при $\dim V = 2$. Начнем с геометрической картины для $i(A, B, C)$. При $A = B$ имеем $i(A, B, C) = 0$ по определению. При $A \neq B$ если $b \in B$ и $P_A^C b \in A$, то сигнатура Q_C равна ± 1 в зависимости от того, какую ориентацию плоскости задают векторы $P_A^C b$, b — положительную или отрицательную.

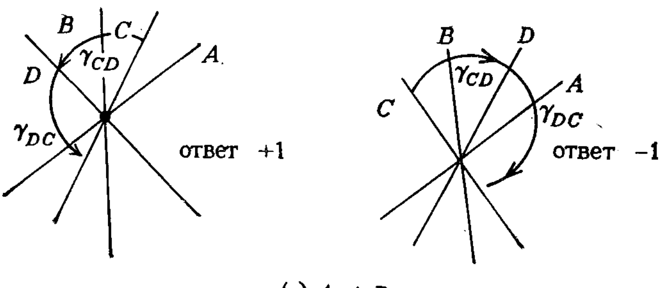


Далее, рассмотрим различные возможности для (A, B, C, D):



(a) $A = B$. (b) $A \neq B$.

В случае (a) имеем $\int\limits_{\gamma_{CDC}} (\det{}^2)^* \frac{dz}{2\pi i z} = 0$. В случае (b) подпространства D, C лежат в одной и той же компоненте $\mathscr{L}_A \cap \mathscr{L}_B$.



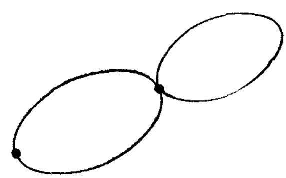
(c) $A \neq B$.

В случае (с) подпространства D, C лежат в различных компонентах $\mathcal{L}_A \cap \mathcal{L}_B$.

Таким образом, при $\dim V = 2$ справедливость формулы ясна из приведенных рисунков. (Скоро мы дадим аналитическое доказательство.) Для доказательства формулы в общем случае достаточно доказать ее в предположении, что $A \cap B = \{0\}$. В самом деле, предположим, что $A \cap B = R$. Поскольку γ_{DC} лежит в $\mathcal{L}_A$, а γ_{CD} лежит в $\mathcal{L}_B$, мы видим, что γ_{CDC} лежит в $L(V) - S_R$. Далее, отображение ρ: $L(V) - S_R \to L(R^\perp/R)$ определяет изоморфизм между $\pi_1(L(V))$ и $\pi_1(L(R^\perp/R))$. Значит, если класс кривой γ_{CDC} равен k-кратной образующей группы $\pi_1(L(V))$, то $\rho(\gamma_{CDC})$ определяет тоже k-кратную образующую группы $\pi_1(L(R^\perp/R))$. Но $\rho(A)$ и $\rho(B)$ трансверсальны в $R^\perp/R$. Тем самым мы свели доказательство к трансверсальному случаю.

Далее, обе части (3.3) не меняются при деформациях, если только сохраняется трансверсальность. Наша цель — продеформировать пространства так, чтобы формула стала очевидной.

Вначале выберем эрмитову структуру, для которой $B = iA$, и ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ в A. Это определяет двойственный базис $f_1, \ldots, f_n$ в B. Относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$ подпространство C определяет невырожденную симметрическую матрицу $C = (C_{ij})$. Далее, мы можем найти такую ортогональную матрицу $O \in SO(n)$, что матрица OCO^{-1} диагональна. Поскольку группа $SO(n)$ связна, существует такая кривая $O(t)$, что $O(0) = \mathrm{id}$ и $O(1) = O$. Тогда $O(t)CO(t)^{-1}$ деформирует C в диагональную матрицу. Делая дальнейшую деформацию, мы можем считать, что элементы C равны ± 1, и аналогично для D. Из (3.2) и из того факта, что можно выбирать $\gamma_{CE} = \gamma_{CD} \cdot \gamma_{DE}$ и т. д. (см. рисунок), ясно, что достаточно доказать формулу для того случая, когда C и D отличаются лишь одним элементом. При $C = D$ доказывать нечего. Предположим, что



$$C = \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pm 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{т. е.} \quad \operatorname{ind} D - \operatorname{ind} C = 1.$$

Таким образом, C порождается векторами

$$e_1 + f_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n, \quad \text{где} \quad g_i = e_i \pm f_i,$$

или, если угодно, векторами

$$\cos\frac{\pi}{4}\, e_1 + \sin\frac{\pi}{4}\, f_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n.$$

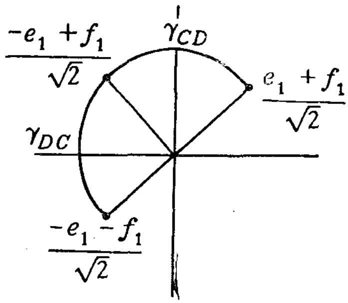
Аналогично, D порождается векторами

$$-e_1+f_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n$$

$$\text{или}\quad \cos\frac{3\pi}{4}e_1+\sin\frac{3\pi}{4}f_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n.$$

Теперь следующим образом зададим кривую γ_{CD}:

$$\gamma_{CD}(\theta)=(\cos\theta e_1+\sin\theta f_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n),\qquad \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}.$$



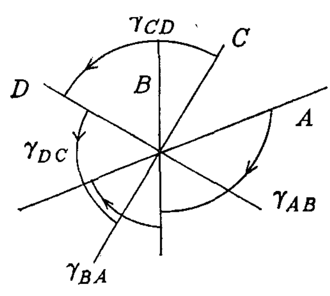
На этом множестве значений θ коэффициент при f_1 не обращается в нуль, т. е. γ_{CD} лежит в $\mathscr{L}_A$. Аналогично зададим кривую γ_{DC}, полагая

$$\gamma_{DC}(\theta)=(\cos\theta e_1+\sin\theta f_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n),\qquad \frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{4}.$$

Ясно, что проекция этой кривой на плоскость, задаваемую векторами e_1, f_1, будет проективной прямой с соответствующей ориентацией. В терминах $U(n)/O(n)$ кривая γ_{CDC} задается классом эквивалентности кривой из унитарных матриц

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & & & 0\\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_n\end{pmatrix},\qquad \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{4},$$

а значит, функция $\det^2$ переводит ее в окружность, проходимую один раз против часовой стрелки. Это доказывает формулу (3.3), а также согласованность индуктивного определения образующей в H^1 и определения, исходящего из $\det^2$.



Предложение 3.3. *Символ* (A, B, C, D) *удовлетворяет условию*

$$(A,\ B,\ C,\ D)=-(C,\ D,\ A,\ B). \tag{3.4}$$

При $\dim V=2$ мы можем получить этот результат, пользуясь приведенными выше рисунками. При $A=B$ можно продеформировать C в D, оставляя его трансверсальным A и B, так что обе части (3.4) равны нулю. Если C и D лежат в одной и той же компоненте $\mathscr{L}_A \cap \mathscr{L}_B$, то можно продеформировать C в D, а затем A в B и все сведется к предыдущему случаю. Если же C и D лежат в разных компонентах $\mathscr{L}_A \cap \mathscr{L}_B$, то из рисунка ясно, что γ_{CDC} и γ_{ABA} имеют противоположные ориентации.

В общем случае воспользуемся следующим наблюдением. Пусть V_1 и V_2 — два симплектических векторных пространства. Тогда $V_1 + V_2$ — также симплектическое векторное пространство, и если $X_1 \in L(V_1)$, $X_2 \in L(V_2)$, то $X_1 + X_2 \in L(V_1 + V_2)$. Значит, имеется отображение

$$L(V_1) \times L(V_2) \to L(V_1 + V_2).$$

Мы можем выбрать эрмитову структуру на $V_1 + V_2$ с учетом этого разложения в прямую сумму, и тогда указанному отображению отвечает блочно-диагональное вложение $U(n) \times U(m) \to$ $\to U(m+n)$. В результате получаем

$$(U(n) \times U(m))/(O(n) \times O(m)) \xrightarrow{f} U(n+m)/O(n+m) \xrightarrow{\det^2_{m+n}} S^1,$$

где в очевидных обозначениях

$$\det\nolimits^2_{m+n} \cdot f = \det\nolimits^2_m \det\nolimits^2_n.$$

Таким образом,

$$f^* (\det\nolimits^2_{m+n})^* \frac{d \log z}{2\pi i} = df^* \log \det\nolimits^2_{m+n} / 2\pi i =$$

$$= (\det\nolimits^2_m)^* \frac{dz}{2\pi i z} + (\det\nolimits^2_n)^* \frac{dz}{2\pi i z}.$$

Поэтому если при вычислении (A, B, C, D) удалось бы добиться того, что $A = A_1 + A_2$ и т. д., то мы получили бы, что

$$(A, B, C, D) = (A_1, B_1, C_1, D_1) + (A_2, B_2, C_2, D_2).$$

Далее, как показывают рассуждения с деформациями, которыми мы пользовались при доказательстве предыдущего предложения, можно считать, что $A = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $B = \{f_1, \ldots, f_n\}$, $C = \{g_1, \ldots, g_n\}$, $D = \{h_1, \ldots, h_n\}$, где $g_i = e_i \pm f_i$ и $h_j = e_j \pm f_j$ при подходящем выборе знаков $\pm$. Таким образом, мы свели все к двумерному случаю, который уже разобран.

Пусть, далее, $E \to N$ — симплектическое векторное расслоение. (Это означает, что E — векторное расслоение, каждый слой E_n которого имеет симплектическую структуру, гладко зависящую от n.) Наши основные применения будут относиться к случаю, когда $N = \Lambda$ — лагранжево подмногообразие в некотором кокасательном расслоении T^*M и когда $E_n = T_n(T^*M)$. Разумеется, тогда мы получаем расслоение $L(E) \to N$, где $L(E)_n$ состоит из всех лагранжевых подпространств в E_n. Предположим, что заданы два сечения A и B расслоения $L(E)$. (Например, если $N = \Lambda \subset$ $\subset T^*M$, то можно взять в качестве A_λ пространство $T_\lambda(\Lambda)$, а в качестве B_λ касательное пространство к слою проекции $T^*M \to M$.) По этим данным $\{E;\ A,\ B\}$ Хёрмандер определяет элемент в $H^1(N)$, который следующим образом строится в рамках чеховской теории. Всегда можно локально найти такие сечения C, D и т. д., заданные на открытых множествах U_C, U_D и т. д., что C_x трансверсально и A_x и B_x для всех $x \in U_C$. Если U образуют открытое покрытие многообразия N, то определим чеховский 1-коцикл

$$\mathscr{L}(U_C,\ U_D) = (A,\ B,\ C,\ D),$$

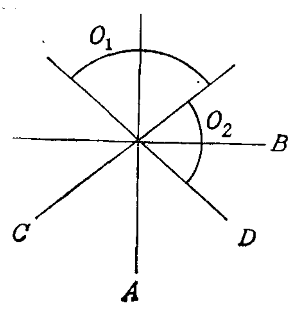
где справа берется функция $x \longmapsto (A_x,\ B_x,\ C_x,\ D_x)$, определенная на $U_C \cap U_D$. Поскольку функция $(A,\ B,\ C,\ D)$ непрерывна и принимает целочисленные значения, она определяет чеховскую коцепь $z(A,\ B)$ на N. Для каждого $x \in U_C \cap U_D$

$$(A_x,\ B_x,\ C_x,\ D_x) = i(A_x,\ B_x,\ C_x) - i(A_x,\ B_x,\ D_x),$$

поэтому $\delta z(A,\ B) = 0$. (Это есть не что иное, как соотношение (3.2).) Заметим, что функция $i(A,\ B,\ C)$ не обязана быть непрерывной, так что $z(A,\ B)$, вообще говоря, не является кограницей. Будем обозначать соответствующий класс когомологий через α или $\alpha(E;\ A,\ B)$.

Вычислим класс α в следующей ситуации. Пусть V — симплектическое векторное пространство и $N = L(V)$. Определим симплектическое векторное расслоение $E \to N$, относя каждой точке N экземпляр V. (Другими словами, E получается поднятием на N векторного расслоения «$V \to$ точка» относительно постоянного отображения.) Тогда $L(E)$ имеет каноническое сечение $B(n) = n$, где n рассматривается как подпространство в $E_n = V$. Пусть A — постоянное сечение расслоения E (т. е. поднятие «сечения» расслоения «$L(V) \to$ точка»). Тогда мы получаем элемент $\alpha(A,\ B) \in H^1(L(V))$. Мы утверждаем, что имеет место

Предложение 3.4 (Хёрмандер). *Класс $\alpha(A,\ B)$ совпадает с введенным выше фундаментальным образующим классом в $H^1(L(V))$.*



Как и раньше, достаточно проверить предложение в случае $\dim V = 2$. (Действительно, нужно только проверить, что значения двух классов совпадают на каком-нибудь нетривиальном цикле, поскольку $H^1(L(V)) = \mathbf{Z}$. В качестве этого цикла можно выбрать кривую $n(t)$, для которой $n(t) \cap A = F$ — фиксированное пространство размерности $n - 1$, где $\dim V = 2n$. Тогда все формулы получаются проектированием на двумерное подпространство.) Выберем фиксированное векторное пространство A. Тогда, если мы фиксируем две прямые C и D, трансверсальные A, то C трансверсальна A и B на $U_C = L(V) - \{C\}$, а D трансверсальна A и B на $U_D = L(V) - \{D\}$. (См. рисунок).

Далее, множество $V_C \cap V_D$ имеет две компоненты: одну O_1, содержащую A, и другую O_2, не содержащую A. Ясно, что

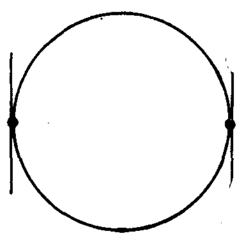
$$z(C, D) = (A, B, C, D) = \begin{cases} 0 & \text{на } O_1, \\ -1 & \text{на } O_2. \end{cases}$$

Легко проверить непосредственно, что это образующий класс когомологий. Поучительно вычислить этот класс при помощи перехода от теории Чеха к теории Де Рама. Напомним, что этот прием состоит в следующем. Выберем (гладкие) функции f_C, определенные на U_C (и f_D, определенные на U_D), так, что $f_C - f_D = z(C, D)$ на $U_C \cap U_D$. Тогда $df_C = df_D$ на $U_C \cap U_D$ и определена 1-форма β на всем пространстве. Интеграл этой 1-формы по циклу равен значению α на цикле. В нашем случае возьмем

$$f_C(B) = i(A, B, C) \quad \text{и} \quad f_D(B) = i(A, B, D).$$

Заметим, что функция f_C не будет всюду гладкой: у нее есть скачок с $-1/2$ на $+1/2$, когда B проходит через точку A. Можно было бы заменить f_C какой-нибудь гладкой функцией, совпадающей с ней в окрестности A. Проще перейти к дифференциальным формам, коэффициенты которых — распределения; в этом случае $df_C = \delta_A\, ds$, где δ_A — это δ-функция в точке A и ds — фундаментальная форма на S^1. Поскольку $\int \delta_A\, ds = +1$, мы получаем, что $\alpha(A, B)$ — в самом деле фундаментальный класс.

В том случае, когда $N = \Lambda \subset T^*M$ — лагранжево многообразие, $A(\lambda) = T_\lambda(\Lambda)$ и $B(\lambda)$ — касательное пространство к слою, соответствующий класс называется *классом Маслова* лагранжева многообразия Λ. Например, при помощи такого же вычисления, как только что проведенное, можно убедиться, что если Λ — простая замкнутая кривая на $\mathbf{R}^2 = T^*(\mathbf{R}^1)$, то класс Маслова в точности равен удвоенной фундаментальной образующей. Если Λ имеет только изолированные (невырожденные) вертикальные касания, то появляется вклад в виде δ-функций (с соответствующей ориентацией) в каждой точке касания, т. е. в каждой точке, где $d\pi$ не является инъективным, или, что то же самое, в каждой точке, где $A \cap B \neq \{0\}$.



Мы дадим аналогичную геометрическую интерпретацию класса Хёрмандера $\alpha(A, B)$ в общем случае. Для этого потребуется следующий факт, который найдет применения и в дальнейшем.

Предложение 3.5. *Пусть Y — лагранжево подпространство в V. Тогда множество*

$$L_k(V, Y) = \{W \mid \dim(W \cap Y) = k\}$$

является подмногообразием в $L(V)$ коразмерности $k(k+1)/2$.

Доказательство. Достаточно проверить предложение локально, т. е. можно предполагать, что Y и W лежат в $\mathscr{L}_X$. Тогда по предложению 2.3 все $W \in L(V)$ параметризуются точками $S^2(Y)$ и из доказательства предложения 2.3 ясно, что $L_k(V, Y) \cap \mathscr{L}_X$ соответствует симметрическим матрицам коранга k. Таким образом, надо доказать

Предложение 3.6. *Множество симметрических матриц коранга k является подмногообразием коразмерности $k(k+1)/2$ в пространстве всех симметрических матриц.*

Рассмотрим симметрическую матрицу

$$\begin{pmatrix} P_0 & Q_0 \\ R_0 & S_0 \end{pmatrix}$$

и будем, не уменьшая общности, предполагать, что ее верхний левый блок порядка $n-k$ невырожден. Тогда все близкие матрицы имеют вид

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

с невырожденным P. Далее,

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ -RP^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & P^{-1}Q \\ 0 & S-RP^{-1}Q \end{pmatrix},$$

и эта матрица имеет коранг k тогда и только тогда, когда симметрическая $(k \times k)$-матрица $S-RP^{-1}Q$ равна нулю. Это определяет $k(k+1)/2$ условий и доказывает предложение 3.6, а значит, и предложение 3.5.

Пусть E — симплектическое векторное расслоение над N и A, B — два сечения $L(E)$. Тогда для каждого целого k мы получаем подрасслоение $L_k(E, A)$, коразмерность которого в $L(E)$ равна $k(k+1)/2$. Будем говорить, что $(E; A, B)$ *в общем положении*, если B пересекает каждое из этих подрасслоений трансверсально. (Отметим, что по теореме трансверсальности Тома можно, сколь угодно мало меняя B, а значит, не меняя $\alpha(A, B)$, привести $(E; A, B)$ в общее положение.) Пусть $S_k(E; A, B) =$

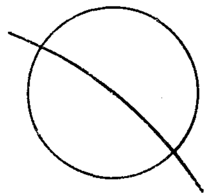
$= B^{-1}(L_k(E, A)) = \{n \in N \mid B_n \in L_k(E_n, A_n)\}$, т. е. если $(E; A, B)$ в общем положении, то $S_k(E; A, B)$ — подмногообразие в N коразмерности $k(k+1)/2$. Заметим, что

$$\bar{S}_k = S_k \cup S_{k+1} \cup \ldots \cup S_n.$$

В частности, если $(E; A, B)$ в общем положении, то

$$\bar{S}_1 = \{x \mid A(x) \cap B(x) \neq \{0\}\} = S_1 \cup \bar{S}_2,$$

где $\bar{S}_2$ — объединение подмногообразий коразмерности $\geqslant 3$. В частности, каждая (гладкая) кривая может быть продеформирована в кривую, трансверсально пересекающую S_1, и аналогичное верно для каждой гомотопии кривых. Далее, мы утверждаем, что S_1 ориентировано в N, т. е. имеет в N положительную и отрицательную стороны. Действительно, пусть x — любая точка в S_1. В некоторой окрестности U_C точки x можно найти C, трансверсальное A и B. Тогда во всех точках U_C, не принадлежащих S_1, пространства A и B пересекаются трансверсально, а значит, C определяет квадратичную форму Q_C на B. Мы можем считать, что множество U_C связно и что $U_C - (U_C \cap S_1)$ имеет две компоненты. Тогда ясно, что разность значений $\operatorname{sign} Q_C$ на разных компонентах не зависит от выбора C. Действительно, если D — другое сечение, трансверсальное A и B, то



$$\frac{1}{2}[\operatorname{sign} Q_C - \operatorname{sign} Q_D] = (A, B, C, D)$$

вне S_1, но (A, B, C, D) корректно определена и непрерывна также и в точках S_1. Далее, ясно, что можно выбрать такую тривиализацию E в окрестности x, что $A = \{e_1, \ldots, e_n\}$ и $C = \{f_1, \ldots, f_n\}$, где e_i и f_j образуют двойственные базисы. Мы можем также выбрать базис так, чтобы $B \cap A = \{e_1\}$ на S_1 в окрестности x. Тогда

$$B = \{e_1 + \varphi_1 f_1, e_2 + \varphi_2 f_2, \ldots, e_n + \varphi_n f_n\},$$

где $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ все не равны нулю в окрестности x, а S_1 локально задается уравнением $\varphi_1 = 0$. Трансверсальность требует, чтобы $d\varphi_1 \neq 0$, т. е. φ_1 изменяет знак при прохождении через S_1 и $\operatorname{sign} Q_C$ изменяется в точности на 2, когда мы пересекаем S_1. Далее, если γ — любая замкнутая гладкая ориентированная кривая, трансверсально пересекающая S_1, то, воспользовавшись теми же соображениями, что и при доказательстве предложения 3.4, можно получить

Предложение 3.7. *Если $(E; A, B)$ в общем положении, а γ — гладкая замкнутая кривая, трансверсально пересекающая S_1, то* *значение класса $\alpha(A, B)$ на γ равно числу пересечений γ с S_1, причем каждое пересечение считается со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, происходит оно в положительном или отрицательном направлении.*

В случае $\Lambda \subset T^*M$ множество $\bar{S}_1$ совпадает с циклом Маслова, введенным в гл. II, а класс Маслова — это класс когомологий, который там рассматривался. (Нужно еще доказать, что малым возмущением можно любое лагранжево многообразие перевести в общее положение, т. е. добиться того, чтобы вертикальное и тангенциальное сечения находились в общем положении.)

В заключение этого параграфа мы приведем другое описание (также принадлежащее Хёрмандеру) класса $\alpha(A, B)$ на симплектическом расслоении E. Рассмотрим поднятие $\tilde{E}$ расслоения E относительно $L(E) \to N$. Мы получим расслоение $L(\tilde{E}) \to L(E)$ и естественное сечение S, где $S(x) = x$ при $x \in L(E)_n$, если отождествим $\tilde{E}_x$ с E_n. Сечение A расслоения $L(E)$ поднимается до сечения $\tilde{A}$ расслоения $L(\tilde{E})$. Заметим, что если s: $N \to L(E)$ — сечение расслоения $L(E)$, то

$$s^*\tilde{A} = A \quad \text{и} \quad s^*S = s.$$

Наконец, имеем

$$\alpha(\tilde{A}, \tilde{B}) = \alpha(\tilde{A}, S) - \alpha(\tilde{B}, S) \in H^1(L(E)).$$

Далее, если g: $N_1 \to N_2$ — непрерывное отображение и E_1 — поднятие на N_1 симплектического расслоения E_2 над N_2, то $\alpha(g^*A, g^*B) = g^*\alpha(A, B)$; другими словами, сопоставление α тройке $(E;\ A, B)$ функториально. Поэтому, беря $B = s$, получаем

$$\alpha(A, B) = B^*\alpha(\tilde{A}, S).$$

Далее, каждое сечение A расслоения $L(E)$ определяет класс

$$\alpha(\tilde{A}, S) \overset{\text{def}}{=\!=} \alpha_A$$

расслоения $L(E)$. Этот класс обладает следующими свойствами.

(i) Его ограничение на любой слой — это в точности образующий класс этого слоя. В этом содержание предложения 3.4. Кроме того,

(ii) $A^*\alpha_A = 0$.

Из стандартной теоремы топологии расслоенных пространств (теорема Лере — Хирша; см., например, Спеньер [19, стр. 333]) следует, что любая 1-форма β на $L(E)$ имеет вид $\beta = \pi^*c + k\alpha_A$. При этом если β удовлетворяет (ii), то $A^*\beta = (\pi \circ A)^* c = c = 0$, а если она удовлетворяет (i), то $k = 1$. *Таким образом,* (i) *и* (ii) *полностью определяют* α_A.

Итак, если β_A — какая-либо форма, удовлетворяющая (i) и (ii), то

$$\alpha(A, B) = B^*\beta_A.$$

Например, по заданному A всегда можно выбрать сечение, всюду трансверсальное A, и риманову метрику на A. Это определяет эрмитову структуру на E, которая вместе с A позволяет отождествить слои $L(E)$ с $U(n)/O(n)$. Таким образом,

$$\sigma = (\det^2)^*\left(\frac{dz}{2\pi iz}\right)$$

— корректно определенная форма на $L(E)$, удовлетворяющая (i) и (ii). Значит, форма $B^*\sigma$ корректно определяет класс $\alpha(A, B)$ на N.

Пусть, как и выше, $E \to N$ — симплектическое векторное расслоение и A, B — сечения $L(E)$. Пусть, далее, $\{\mathcal{U}\}$ — стягиваемое открытое покрытие на N. Еще раз напомним определение $\alpha(A, B)$. Выбираются сечения

$$C_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \to L(E), \tag{3.5}$$

трансверсальные A и B. Коцикл Чеха, определяющий $\alpha(A, B)$, принимает значение $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = (A, B, C_{\mathcal{U}}, C_{\mathcal{V}})$ на паре открытых множеств $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Положим

$$\tau(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = e^{(i\pi/2)\,\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})}. \tag{3.6}$$

Мы можем рассматривать (3.6) как определение функций перехода для линейного расслоения на N, т. е. мы можем определить линейное расслоение на N требованием, чтобы оно имело локальные тривиализации $S_{\mathcal{U}}$ на $\mathcal{U}$, связанные соотношением $S_{\mathcal{U}} = \tau(\mathcal{U}, \mathcal{V})\, S_{\mathcal{V}}$ на $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Определенное таким образом линейное расслоение называется *расслоением Маслова*, ассоциированным с $(E; A, B)$, и обозначается через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{A, B}$. Это *локально постоянное* расслоение, т. е. мы называем сечение $\mathfrak{M}$ над подмножеством Z в N *постоянным*, если для любого $\mathcal{U}$, пересекающего Z, оно является постоянным кратным $S_{\mathcal{U}}$ на $\mathcal{U} \cap Z$. Поскольку функции перехода (3.6) — константы, это определение не зависит от выбора $\mathcal{U}$. Кроме того, локально постоянные сечения существуют (например, $S_{\mathcal{U}}$).

В [3] Хёрмандер дал другое определение $\mathfrak{M}$, не использующее функций перехода. Это определение строится следующим образом. Вначале задается фиксированное симплектическое векторное пространство V и фиксированные лагранжевы подпространства A и B. Мы строим по этим данным одномерное векторное пространство $\mathfrak{M}_{A, B}(V)$. Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество в $L(V)$, состоящее из всех таких C, что $C \cap A = C \cap B = \{0\}$.

Тогда $\mathfrak{M}_{A,B}(V)$ — это пространство всех функций

$$f\colon \mathscr{O}\to \mathbf{C}, \quad f(C)=e^{(i\pi/2)\,(A,\,B,\,C,\,D)}f(D) \tag{3.7}$$

при $C, D\in\mathscr{O}$. Эти функции определяются своим значением в одной точке, т. е. пространство $\mathfrak{M}_{A,B}(V)$ одномерно.

Пусть теперь $E\to N$ — симплектическое векторное расслоение и A, B — сечения расслоения $L(E)\to N$. Зададим линейное расслоение $\mathfrak{M}\to N$, считая его слоем в точке $p\in N$ векторное пространство $\mathfrak{M}_{A,B}(E_p)$. Покажем, что $\mathfrak{M}$ тождественно расслоению, задаваемому функциями перехода (3.6). Над открытым множеством $\mathscr{U}$ сечение $S_{\mathscr{U}}$ определено, если задать в качестве $S(p)$ функцию (3.7), принимающую значение 1 в точке $C_{\mathscr{U}}(p)$ на $L(E_p)$; $C_{\mathscr{U}}$ — сечение (3.5). Из (3.6) и (3.7) следует, что $S_{\mathscr{U}}=$ $=\tau(\mathscr{U}, \mathscr{V})\,S_{\mathscr{V}}$, т. е. $\mathfrak{M}_{A,B}$ — расслоение, определяемое формулой (3.6), что и утверждалось.

§ 4. *Функториальные свойства лагранжевых подмногообразий*

Пусть X и Y — симплектические многообразия с формами ω_X и ω_Y. Тогда $X\times Y$ превращается в симплектическое многообразие, если снабдить его 2-формой

$$\omega_{X\times Y}=\rho_X^*\omega_X+\rho_Y^*\omega_Y,$$

где $\rho_X\colon X\times Y\to X$ — проекция на X, а ρ_Y — проекция на Y. Пусть $\Lambda_X\subset X$ — лагранжево подмногообразие; положим

$$H=\Lambda_X\times Y.$$

Пусть, далее, $\iota_H\colon H\to X\times Y$ — иммерсия H в $X\times Y$. Заметим, что, поскольку подмногообразие Λ_X лагранжево,

$$\iota_H^*\omega_{X\times Y}=\iota_H^*\rho_Y^*\omega_Y. \tag{4.1}$$

Предположим теперь, что $\Lambda_{X\times Y}$ — лагранжево подмногообразие в $X\times Y$, которое пересекает H трансверсально. Заметим, что поскольку коразмерность H равна $^1/_2\dim X$, а $\dim\Lambda_{X\times Y}=$ $={}^1/_2(\dim X+\dim Y)$, то $\dim(H\cap\Lambda_{X\times Y})={}^1/_2\dim Y$. Мы утверждаем, что *проекция ρ_Y превращает это пересечение в иммерсированное лагранжево подмногообразие в Y*. Покажем вначале, что это отображение — иммерсия. Пусть ξ — касательный вектор к $H\cap\Lambda_{X\times Y}$ и $d\rho_Y\xi=0$. Тогда $\xi\,\lrcorner\,\rho_Y^*\omega_Y=0$. По (4.1) отсюда следует, что

$$\xi\,\lrcorner\,\iota_H^*\omega_{X\times Y}=0, \quad \text{т. е.} \quad \langle\xi\wedge\eta,\ \omega_{X\times Y}\rangle=0$$

для всех касательных векторов η к H. С другой стороны, поскольку ξ касается лагранжева подмногообразия $\Lambda_{X\times Y}$, указанное уравнение должно иметь место для всех векторов η, касательных к $\Lambda_{X\times Y}$. Но $T(\Lambda_{X\times Y})$ и $T(H)$ порождают все пространство $T(X\times Y)$, значит, это уравнение имеет место для всех η, откуда следует, что $\xi=0$. Далее, по (4.1) имеем $\rho_Y^*\omega_Y=0$ на $\Lambda_{X\times Y}\cap H$, поскольку форма $\omega_{X\times Y}$ равна нулю на $\Lambda_{X\times Y}$. Значит, многообразие $\rho_Y(H\cap\Lambda_{X\times Y})$ лагранжево. Приведем теперь несколько примеров этой конструкции.

(i) *Композиция канонических отношений.* Пусть U, W, Z — симплектические многообразия с формами ω_U, ω_W, ω_Z. Рассмотрим $W\times U$ как симплектическое многообразие с 2-формой $\omega_W-\omega_U$ (где ω_W, например, рассматривается как форма на $W\times U$, поднятая с W при помощи проекции). Лагранжево подмногообразие Λ_1 в $W\times U$ называется каноническим отношением. Например, если $f\colon U\to W$ — каноническое преобразование, $\dim U=\dim W$, то $f^*\omega_W-\omega_U=0$, т. е. форма $\omega_W-\omega_U$ равна нулю на $\operatorname{graph} f$. Поскольку $\dim\operatorname{graph} f=\dim U={}^1/_2(\dim W\times U)$, мы получаем, что $\operatorname{graph} f$ — лагранжево подмногообразие. Каноническое отношение, таким образом, обобщает понятие канонического отображения. Пусть $Z\times W$ имеет симплектическую форму $\omega_Z-\omega_W$, и пусть $\Lambda_2\subset Z\times W$ — каноническое отношение. Нам хотелось бы, чтобы при благоприятных обстоятельствах $\Lambda_2\circ\Lambda_1$ было каноническим отношением в $Z\times U$. Напомним, что $\Lambda_2\circ\Lambda_1$ как множество состоит из таких пар (z, u), что для некоторого w имеем $(z, w)\in\Lambda_2$ и $(w, u)\in\Lambda_1$. Это можно записать следующим образом. Обозначим через Δ диагональ в $W\times W$, а через π проекцию

$$\pi\colon Z\times W\times W\times U\to Z\times U.$$

Тогда $Z\times\Delta\times U$ и $\Lambda_2\times\Lambda_1$ — подмногообразия в $Z\times W\times W\times U$ и

$$\Lambda_2\circ\Lambda_1=\pi((\Lambda_2\times\Lambda_1)\cap(Z\times\Delta\times U)).$$

Рассмотрим на $X=W\times W$ 2-форму $\omega_{W_2}-\omega_{W_1}$ (где ω_{W_1} — результат поднятия на X формы ω_W по первому множителю, и аналогично ω_{W_2}). Тогда Δ — лагранжево подмногообразие в X. Возьмем на $Y=Z\times U$ форму $\omega_Z-\omega_U$. Теперь, применяя нашу конструкцию, получаем

если $\Lambda_2\times\Lambda_1$ пересекает $Z\times\Delta\times U$ трансверсально, то $\Lambda_2\circ\Lambda_1$ — каноническое отношение в $Z\times U$.

Например, если Λ_2 — график некоторого отображения, то для любого $\eta\in TW$ существует такой вектор ζ, что $(\zeta, \eta, 0, 0)$ касается $\Lambda_2\times\Lambda_1$. Легко видеть, что в этом случае пересечение будет трансверсальным.

(ii) *Поднятие лагранжева подмногообразия в кокасательном расслоении.* Пусть M и N — дифференцируемые многообразия и $f\colon M\to N$ — дифференцируемое отображение. Пусть $\Lambda\subset T^*N$ —

лагранжево подмногообразие. Тогда

$$df^*\Lambda = \{(m, \xi) \in T^*M \mid \exists (n, \eta) \in \Lambda \ \text{ с } \ f(m) = n, \ df_m^*\eta = \xi\}$$

— подмножество в T^*M, и нам хотелось бы знать, будет ли оно лагранжевым подмногообразием. Положим $X = T^*N$ и $Y = T^*M$. Рассмотрим $\operatorname{graph} f \subset N \times M$, т. е. $\{(f(x), x) \mid x \in M\}$, и положим $\Lambda_{X\times Y} = \mathscr{N}(\operatorname{graph} f)$. Это означает, что точка из $\Lambda_{X\times Y}$ имеет вид

$$(f(x), x, \gamma, -df^*\gamma), \quad \gamma \in T^*N_{f(x)}.$$

Возьмем $\Lambda_X = \Lambda$, так что H состоит из всех точек вида

$$(y, x, \eta, \xi), \quad (y, \eta) \in \Lambda.$$

Ясно, что

$$\pi_Y(H \cap \mathscr{N}(\operatorname{graph} f)) = -df^*\Lambda.$$

Конечно, $-df^*\Lambda$ является лагранжевым подмногообразием тогда и только тогда, когда это верно для $df^*\Lambda$. Итак, мы доказали следующее:

Пусть $f: M \to N$ — гладкое отображение и $\Lambda \subset T^*N$ — лагранжево подмногообразие. Если $\mathscr{N}(\operatorname{graph} f)$ и $T^*M \times \Lambda$ трансверсально пересекаются в $T^*(M \times N)$, то $df^*\Lambda$ — лагранжево подмногообразие в T^*M.

Исследуя указанный выше вид H и $\mathscr{N}(\operatorname{graph} f)$, мы видим, что все значения последних трех компонент принимаются для любых f и Λ и что пересечение будет трансверсальным тогда и только тогда, когда трансверсальны отображения $f: M \to N$ и $\pi_N: \Lambda \to N$. Значит, имеет место

Предложение 4.1. *Пусть $f: M \to N$ — гладкое отображение и $\Lambda \subset T^*N$ — лагранжево подмногообразие. Пусть $\pi: \Lambda \to N$ — ограничение на Λ проекции $T^*N \to N$. Если f и π трансверсальны, то $df^*\Lambda$ — лагранжево подмногообразие в T^*M.*

Например, если $\pi: \Lambda \to N$ локально является диффеоморфизмом, то предположения выполнены. Здесь $\Lambda = \operatorname{graph} d\varphi$ (локально) и $df^*\Lambda = \operatorname{graph} df^*\varphi$.

В качестве второго примера рассмотрим $\Lambda = \mathscr{N}(S)$, где S — подмногообразие в N. Тогда $\pi\Lambda = S$ и предположения означают, что f трансверсально к S. В этом случае $f^{-1}S$ — подмногообразие в M и

$$df^*\Lambda = \mathscr{N}(f^{-1}S).$$

(iii) *Опускание лагранжевых подмногообразий.* Пусть $f: M \to N$ — гладкое отображение и Λ — лагранжево подмногообразие в T^*M. Тогда

$$df_*\Lambda = \{(y, \eta) \mid y = f(x), \ (x, df^*\eta) \in \Lambda\}.$$

Возьмем $X=T^*M$, $Y=T^*N$ и

$$\Lambda_{X\times Y}=\mathscr{N}(\operatorname{graph} f)=\{(x,\ f(x),\ df^*\eta,\ -\eta)|\ \eta\in T^*N_{f(x)}\}.$$

Тогда для $\Lambda_X=\Lambda$

$$H=\{(x,\ y,\ \xi,\ \eta)|\ (x,\ \xi)\in\Lambda\},$$

т. е. $\pi_Y(H\cap\mathscr{N}(\operatorname{graph} f))=-df_*\Lambda$. Значит, *если $\Lambda\times T^*N$ пересекает $\mathscr{N}(\operatorname{graph} f)$ трансверсально, то $df_*\Lambda$ — лагранжево подмногообразие в T^*N.*

Отметим, что если df имеет постоянный ранг, то это условие приобретает более простой вид. В этом случае размерность $df_x^*T^*N_{f(x)}$ не меняется, так что df^*T^*N — подрасслоение в T^*M. Тогда условие трансверсальности состоит в том, что это подрасслоение пересекает Λ трансверсально. Значит, имеет место

Предложение 4.2. *Пусть f: $M\to N$ — гладкое отображение, для которого df имеет постоянный ранг, и Λ — лагранжево подмногообразие в T^*M. Если Λ пересекает df^*T^*N трансверсально, то $df_*\Lambda$ — лагранжево подмногообразие в T^*N.*

Например, если f — иммерсия (т. е. df^* сюръективно всюду и, значит, $df^*T^*N=T^*M$), то условия удовлетворяются и $df_*\Lambda$ — лагранжево подмногообразие в T^*N для любого Λ.

Другой крайний случай состоит в том, что f: $M\to N$ — расслоение. Тогда $df^*T^*N=H$ — расслоение, состоящее из ковекторов, равных нулю на векторах, касательных к слою первого расслоения. Если Λ пересекает H трансверсально, то $df_*\Lambda$ — лагранжево подмногообразие. Например, если $\Lambda=\operatorname{graph} d\varphi$, то $\Lambda\cap H$ состоит из таких точек $(m,\ d\varphi(m))$ на Λ, в которых вертикальная производная $d_v\varphi$ равна нулю. Ясно, что в таких точках $d\varphi$ определяет ковектор в точке $n=f(m)$ и задает тем самым отображение $\Lambda\cap H\to T^*N$. В соответствии с общей теорией это отображение — лагранжева иммерсия. Если рассмотреть лагранжево многообразие Λ_1 в $T^*\mathbf{R}^1=\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1$ вида $\Lambda_1=\{(x,\ 1)\}$, то $\Lambda=d\varphi^*\Lambda_1$ и, значит, можно считать, что опускание Λ происходит в соответствии с диаграммой

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{R} \\ N & \end{tikzcd}$$

Вскоре мы увидим, что наиболее общие лагранжевы подмногообразия в T^*N можно локально представить в виде $df_*d\varphi^*\Lambda_1$ для подходящих M, φ и f.

Предположим, что вместо Λ_1 на $\mathbf{R}$ мы взяли $\mathscr{N}(\{0\})$, нормальное расслоение в начале. Тогда если в приведенной диаграмме φ трансверсально $\{0\}$, т. е. если 0 — регулярное значение φ, то $d\varphi^*(\mathscr{N}\{0\}) = \mathscr{N}(\varphi^{-1}(0))$. Если $\mathscr{N}(\varphi^{-1}(0))$ пересекает H трансверсально, то $df_*\mathscr{N}(\varphi^{-1}(0))$ — лагранжево подмногообразие в N. Эта конструкция обобщает классическое понятие *огибающей*. В самом деле, предположим, что $M = N \times S$, где S — пространство дополнительных параметров. Мы предположили, что отображение

$$\varphi\colon N \times S \to \mathbf{R}$$

имеет нуль регулярным значением, т. е. что $\varphi^{-1}(0) = Z$ — гиперповерхность (коразмерности 1) в $N \times S$. Пусть $\varphi_s\colon N \to \mathbf{R}$ имеет вид $\varphi_s(x) = \varphi(x, s)$. Можно сделать более сильное предположение, что φ_s имеет нуль регулярным значением для каждого s. Положим $N_s = \varphi_s^{-1}(0)$; тогда N_s — гиперповерхность в N для всех s и $N_s = Z \cap (N \times \{s\})$, т. е. как множество $Z = \bigcup_s N_s$. Далее, лагранжево многообразие $\mathscr{N}(Z)$ состоит из всех точек вида $\{(x, s, td_N\varphi, td_S\varphi) \mid \varphi(x, s) = 0, t \in \mathbf{R}\}$, и наше условие трансверсальности означает, что ранг $d(d_S\varphi)$ равен $\dim S$ на Z. Лагранжево многообразие $\Lambda = df_*(\mathscr{N}(Z))$ тогда состоит из всех ковекторов $td_N\varphi$, где

$$\varphi(x, s) = 0, \quad d_S\varphi(x, s) = 0.$$

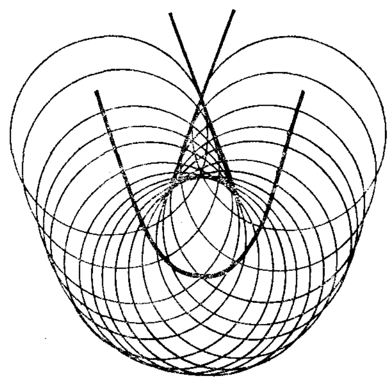
Это $p+1$ уравнений относительно $p+n$ переменных, где $p = \dim S$ и $n = \dim N$. Наше предположение о трансверсальности означает, что эти уравнения определяют подмногообразие в $N \times S$, т. е. что $0 \in \mathbf{R}^{p+1}$ — регулярное значение для $(\varphi, d_S\varphi)$. Сделаем более сильное предположение, состоящее в том, что уравнения $d_S\varphi(x, s) = 0$ можно разрешить относительно s; полученную функцию от x подставляем в первое уравнение:

$$\varphi(x, s(x)) = 0$$

и получаем уравнение гиперповерхности $\mathscr{E}$, называемой *огибающей* гиперповерхностей N_s. Далее,

$$d\varphi(\cdot, s(\cdot)) = d_N\varphi(\cdot, s(\cdot)) + d_S\varphi(\cdot, s(\cdot)) = d_N\varphi(\cdot, s(\cdot)),$$

поскольку $d_S\varphi = 0$. Таким образом, $\Lambda = \mathscr{N}(\mathscr{E})$. С нашей точки зрения более естественно рассматривать лагранжевы подмногообразия, чем гиперповерхности. Но даже в классической ситуации приходится рассматривать лагранжевы многообразия, а не гиперповерхности, чтобы избежать особенностей. Например, пусть S — подмногообразие в $N = \mathbf{R}^n$ и N_s — сфера радиуса r с центром в $s \in S$. (Мы встретились с такой ситуацией в нашем обсуждении принципа Гюйгенса в гл. I.) Тогда (классическая) огибающая сфер N_s будет иметь особенности, если r больше минимального радиуса кривизны подмногообразия S. Однако лагранжево подмногообразие $\Lambda \subset T^*(\mathbf{R}^n)$ не будет иметь особенностей. Особенности появятся лишь при проектировании на гиперповерхность в $\mathbf{R}^n$.



Позднее мы покажем, как связать с каждым распределением μ на M подмножество в T^*M, описывающее особенности μ. Специальный класс распределений будет иметь особенности вдоль (нормального расслоения) гиперповерхностей. Мы покажем, что при суперпозиции распределений, сосредоточенных вдоль N_s, мы получим распределение, сосредоточенное вдоль огибающей $\mathscr{E}$. Тем самым мы сможем дать чисто геометрическую версию принципа Гюйгенса.

§ 5. *Локальные параметризации лагранжевых подмногообразий*

В этом параграфе мы обсудим локальные представления лагранжевых подмногообразий в T^*M. Первое основное наблюдение состоит в том, что локально любое лагранжево подмногообразие можно получить опусканием graph $d\varphi$. Более точно, имеет место следующее

Предложение 5.1. *По заданному* $\Lambda \subset T^*M$ *в окрестности любой точки* $\lambda \in \Lambda$ *можно указать такое расслоение* $N \xrightarrow{\pi} M$ *и функцию* φ: $N \to \mathbf{R}$, *что*

$$\Lambda = d\pi_* \operatorname{graph} d\varphi = d\pi_* \, d\varphi^* \{(x, 1)\}.$$

Доказательство. Пусть $x^1, \ldots, x^n, \xi_1, \ldots, \xi_n$ — дуальные локальные координаты. Линейной заменой переменных можно добиться, чтобы координаты $\xi_1, \ldots, \xi_k, x^{k+1}, \ldots, x^n$ были независимы на Λ для некоторого k. (В самом деле, пусть X и Y — два дополнительных лагранжевых подпространства в симплектическом векторном пространстве V. Для любого лагранжева подпространства W мы знаем, что $W \cap X$ и $PW \subset Y$ ортогональны одно другому относительно симплектической формы, где P — проекция на Y вдоль X. Можно выбрать $e^1, \ldots, e^k$ в качестве базиса в $W \cap X$, а $f_{k+1}, \ldots, f_n$ — в качестве базиса в PW и дополнить их до дуального базиса. Применение этого к $T_\lambda\Lambda$ дает нужный результат.)

Итак, можно найти такие функции $f^1, \ldots, f^k, f_{k+1}, \ldots, f_n$, что Λ задается уравнениями

$$x^1 = -f^1(x^{k+1}, \ldots, x^n; \xi_1, \ldots, \xi_k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^k = -f^k(x^{k+1}, \ldots, x^n; \xi_1, \ldots, \xi_k),$$
$$\xi_{k+1} = f_{k+1}(x^{k+1}, \ldots, x^n; \xi_1, \ldots, \xi_k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\xi_n = f_n(x^{k+1}, \ldots, x^n; \xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Далее, фундаментальная 2-форма ω имеет вид

$$-d(x^1 d\xi_1 + \ldots + x^k d\xi_k) + d(\xi_{k+1} dx^{k+1} + \ldots + \xi_n dx^n).$$

Значит, на Λ

$$0 = d(f^1 d\xi_1 + \ldots + f^k d\xi_k + f_{k+1} dx^{k+1} + \ldots + f_n dx^n).$$

Таким образом, мы можем найти такую функцию $F = F(x^{k+1}, \ldots, x^n; \xi_1, \ldots, \xi_k)$, что

$$f^1 = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \ \ldots, \ f_n = \frac{\partial F}{\partial x^n}.$$

Определим на T^*M функцию φ формулой

$$\varphi(x^1, \ldots, x^n, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi_1 x^1 + \ldots + \xi_k x^k + F + \sum_{k+1}^{n} (\xi_j - f_j)^2.$$

Далее, (x, ξ) — координаты на T^*M. Пусть (x, ξ, z, ζ) — соответствующие координаты на $T^*(T^*M)$, так что, например, подрасслоение $H = d\pi^* T^*M$ задается условием $\zeta = 0$. Тогда graph $d\varphi$ состоит из всех точек вида (x, ξ, z, ζ), где

$$z_1 = \xi_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$z_k = \xi_k,$$
$$z_{k+1} = \frac{\partial}{\partial x^{k+1}}\left[F + \sum_{k+1}^{n} (\xi_j - f_j)^2\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_n = \frac{\partial}{\partial x^n}\left[F + \sum_{k+1}^{n} (\xi_j - f_j)^2\right],$$
$$\zeta^1 = x^1 + \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \sum_{k+1}^{n} (\xi_j - f_j)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\zeta^k = x^k + \frac{\partial F}{\partial \xi_x} + \frac{\partial}{\partial \xi_x} \sum_{k+1}^{n} (\xi_j - f_j)^2,$$
$$\zeta^{k+1} = 2(\xi_{k+1} - f_{k+1}),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\zeta^n = 2(\xi_n - f_n).$$

Далее, $\operatorname{graph} d\varphi$ трансверсален H, поэтому $\zeta^j = 0$, т. е.

$$\xi_{k+1} = f_{k+1}, \ \dots, \ \xi_n = f_n, \quad x^1 = -\frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \ \dots, \ x^k = -\frac{\partial F}{\partial \xi_k}$$

и

$$z_i = \xi_i, \quad i = 1, \ \dots, \ n.$$

Это, разумеется, дает Λ.

Заметим, что у нас получилось представление специального вида с $N = T^*M$; полагая $\Lambda_N = \operatorname{graph} d\varphi$, из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
T^*M = N \arrow[d, "\pi_M"'] & T^*N \arrow[l, "\pi_N"'] & \Lambda_N \arrow[l] \arrow[dl] & \Lambda_N \cap H \arrow[l] \\
M & T^*M \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

находим $d\pi_{M^*}\Lambda_N = \Lambda$. Важность этого специального представления мы обсудим в одном из следующих параграфов.

Интересно выяснить, когда нелинейной заменой координат можно добиться, чтобы $k = n$, и тем самым ликвидировать неприятные квадратичные члены в выражении для φ. Итак, мы хотим выбрать координаты так, чтобы $\xi_1, \dots, \xi_n$ были линейно независимы на Λ. Это, конечно, не всегда возможно. Например, если Λ — нулевое сечение, то $\xi_1 = \dots = \xi_n \equiv 0$ в любой координатной системе. Предположим, с другой стороны, что $\lambda \in \Lambda$ и $\lambda \neq 0$. Выберем лагранжево подпространство в $T_\lambda(T^*X)$, трансверсальное и $T_\lambda \Lambda$ и вертикали. По предложению 2.4 это всегда можно сделать. Перейдем к лагранжеву подмногообразию K, касающемуся этого подпространства. Поскольку K трансверсально вертикали, оно имеет вид $\operatorname{graph} d\psi$. Если $x = \pi\lambda$, то $d\psi(x) = \lambda \neq 0$. Таким образом, мы можем ввести систему координат $x^1, \dots, x^n$ с $\psi = x^1$. Тогда в этих координатах $K = \{(x^1, \dots, x^n, 1, 0, \dots, 0)\}$. В точке λ касательное пространство к K совпадает с ядром проекции на $\xi_1, \dots, \xi_n$. Поскольку Λ трансверсально K, мы получаем, что ξ_i независимы на Λ в окрестности λ. Таким образом, имеет место

Предложение 5.2. *Если $0 \neq \lambda \in \Lambda$, то в окрестности λ можно следующим образом параметризовать Λ. Можно ввести такие координаты $x^1, \ldots, x^n$ в окрестности $\pi\lambda$ с соответствующими координатами $x^1, \ldots, x^n, \xi_1, \ldots, \xi_n$ на T^*M в окрестности λ и найти такую функцию $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, что в окрестности λ*

$$\Lambda = d\pi_* \operatorname{graph} d\varphi,$$

где

$$\varphi = x \cdot \xi - f. \tag{5.1}$$

Если Λ однородно, т. е. инвариантно относительно умножения на элементы $\mathbf{R}^+$, то φ можно выбрать однородной степени 1 по ξ.

Осталось доказать только последнюю часть предложения. Если Λ инвариантно относительно действия $\mathbf{R}^+$, то $\xi\partial/\partial\xi$ — касательный вектор к Λ, а значит, ограничение формы $\alpha = \xi\, dx = (\xi\partial/\partial\xi) \lrcorner\, \omega$ на Λ должно быть равно нулю. Функции f^i однородны степени 0, т. е. на Λ

$$0 = \alpha = \sum \xi_i\, dx^i = d\left(\sum f^i \xi_i\right) - \sum f^i\, d\xi_i,$$

так что в качестве f мы можем взять функцию $f = \sum f^i \xi_i$, которая однородна степени 1.

Назовем функцию $\varphi\colon N \to \mathbf{R}$ локальной *фазовой функцией* для $\Lambda \subset T^*M$, если Λ локально имеет вид $d\pi_*(\operatorname{graph} d\varphi)$, как и выше. Здесь $N \xrightarrow{\pi} M$ — субмерсия. Положим $\Lambda_\varphi = \operatorname{graph} d\varphi$.

Пусть, далее, $C_\varphi = \pi_N(\Lambda_\varphi \cap H)$, где $\pi_N\colon T^*N \to N$. Значит, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d, "\pi"'] & C_\varphi \arrow[l] & \Lambda_\varphi \cap H \arrow[l, "\pi_N"'] \arrow[dl] \\
M & T^*M \arrow[l, "\pi_M"] &
\end{tikzcd}$$

Далее, $\pi_N\colon \Lambda_\varphi \to N$ — диффеоморфизм, так что его ограничение на $\Lambda_\varphi \cap H$ — иммерсия. Для $\lambda \in \Lambda_\varphi \cap H = \Lambda$ положим при $n = \pi_N \lambda$

$$k_\lambda = \ker d\pi_M\colon T_\lambda \Lambda \to T_{\pi n}(M),$$

$$l_n = \ker d\pi\colon T_n(C_\varphi) \to T_{\pi n}(M),$$

т. е. $l_n = T_n C_\varphi \cap T_n F$, где F — слой над n. Тогда

$$d\pi_N k_\lambda = l_n$$

и, в частности,

$$\dim k_\lambda = \dim l_n.$$

Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — координаты на M, а $x^1, \ldots, x^n, \theta^1, \ldots, \theta^k$ — координаты на N. Тогда $C_\varphi = \{(x, \theta) \mid \partial\varphi/\partial\theta^i = 0,\ i = 1, \ldots, k\}$. Касательное пространство к слою порождается векторами $\partial/\partial\theta^i$. Заметим, что $\eta = \sum \alpha^i\, \partial/\partial\theta^i$ касается C_φ тогда и только тогда, когда

$$\sum_i \alpha^i \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^i\,\partial\theta^j} = 0 \quad \text{для всех} \quad j,$$

т. е. когда η принадлежит ядру гессиана

$$H_\theta(\varphi) = d_\theta^2\varphi = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^i\,\partial\theta^j}\right).$$

Значит,

$$\dim k_\lambda = \text{кратность ядра } H_\theta(\varphi) \text{ в точке } \pi_N\lambda. \tag{5.2}$$

Отметим, что отсюда следует, что

$$\text{размерность слоя в } N \geqslant \dim k_\lambda \tag{5.3}$$

(где размерность слоя в N — это размерность слоев π, т. е. размерность слоя в N равна $\dim N - \dim M$).

Предположим, что гессиан $H_\theta(\varphi)$ невырожден. Тогда $\Lambda_\varphi \cap H$ диффеоморфно проектируется на M и имеет вид $\operatorname{graph} d\psi$. Заметим, что тогда отображения в диаграмме

$$\begin{tikzcd} C_\varphi \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \Lambda_\varphi \cap H \arrow[dl] \\ M & \end{tikzcd}$$

все являются диффеоморфизмами. В частности, имеется отображение $s\colon M \to C_\varphi$, т. е. сечение расслоения N, и $d\varphi \circ ds = d\psi$, так что мы можем взять $\psi = s^*\varphi$.

Будем говорить, что фазовая функция φ *редуцирована* (в точке λ), если размерность слоя в N равна $\dim k_\lambda$. Заметим, что если φ редуцирована в точке λ, то гессиан $H_\theta\varphi$ тождественно равен нулю в точке $\pi_N\lambda$.

Предложение 5.3. *Всегда можно пропустить N и φ через редуцированную параметризацию Λ. Другими словами, локально всегда* *можно найти промежуточное расслоение*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dd, bend left, "\pi"] \\ N^1 \arrow[d, "\pi_2"'] \\ M \end{tikzcd}$$

и функцию φ^1 *на* N^1, *для которых* $d\pi_{1*}\Lambda_{\varphi^1}=\Lambda_{\varphi^1}$ *и* $d\pi_{2*}\Lambda_{\varphi^1}=\Lambda$, *причем* φ^1 — *редуцированная фазовая функция в* λ.

Доказательство. Выберем в касательном пространстве к слою над $\pi_N\lambda$ дополнение к ядру гессиана $H_\theta(\varphi)$. Продолжим его до интегрируемого слоения в слоях. Это локально расслаивает N над некоторым N^1, причем гессиан $H_\theta(\varphi)$, ограниченный на касательные пространства к слоям π_1, невырожден.

Пусть $H_1=d\pi_1^*T^*N^1$, т. е. $H\subset H_1$, где $H=d\pi^*T^*M=$ $=d\pi_1^*(d\pi_2^*T^*M)$. Поскольку Λ_φ пересекает H трансверсально, оно трансверсально пересекает H_1 и имеет место диаграмма

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, "\pi"'] & \Lambda_\varphi\cap H_1 \arrow[l] \\ N^1 \end{tikzcd}$$

Поскольку $H_\theta(\varphi)$ невырожден на слоях N над N_1, $\Lambda_\varphi\cap H_1$ диффеоморфно проектируется на N^1, а значит, имеет вид $\operatorname{graph} d\varphi^1=\Lambda_{\varphi^1}$, где $\varphi^1=s^*\varphi$, $s\colon N^1\to N$ — сечение π_1. Остальное легко доказывается.

Предложение 5.4 (лемма Хёрмандера — Морса). *Пусть* (N_1, φ_1) *и* (N_2, φ_2) — *две параметризации лагранжева подмногообразия* Λ *в окрестности точки* λ, *причем* $\dim N_1=\dim N_2$. *Пусть* $z_1=\pi_{N_1}\lambda$ *и* $z_2=\pi_{N_2}\lambda$. *Предположим, что*

$$\operatorname{sign} H_\theta(\varphi_1)(z_1)=\operatorname{sign} H_\theta(\varphi_2)(z_2).$$

Тогда существует сохраняющий слои диффеоморфизм $f\colon N_1\to N_2$, *определенный в окрестности* z_1, *для которого* $f(z_1)=z_2$ *и*

$$\varphi_2\circ f=\varphi_1+\mathrm{const}.$$

Другими словами, Λ, $\dim N$ *и* $\operatorname{sign} H_\theta(\varphi)$ *определяют* φ *с точностью до диффеоморфизма.*

(Если взять в качестве M точку, то это утверждение превращается в стандартную лемму Морса. В самом деле, в этом случае H — это нулевое сечение T^*N, а значит, условие трансверсальности состоит в том, что φ имеет невырожденную критическую точку. Ясно, что тогда мы находимся в ситуации, описываемой леммой Морса.)

Первое соображение состоит в том, что достаточно рассмотреть случай, когда N_1 и N_2 редуцированы. Действительно, предположим, что предложение доказано в случае редуцированных параметризаций. Тогда существуют расслоения $N_1 \to N_1^1$ и $N_2 \to N_2^1$ с невырожденными фазовыми функциями. Применяя диффеоморфизм, мы можем считать, что $N_1^1 = N_2^1 = N^1$. Тогда имеются сечения s_1 и s_2:

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[rr, dashed] & & N_2 \\ & N^1 \arrow[ul, "s_1"] \arrow[ur, "s_2"'] & \end{tikzcd}$$

для которых $\varphi_1 \circ s_1 = \varphi_2 \circ s_2 + \mathrm{const}$. При этом $d_\theta \varphi_i = 0$, $i = 1, 2$. Далее, $H_\theta(\varphi_i)$ невырожден, так что мы можем применить стандартную лемму Морса на каждом слое. Это дает нужный диффеоморфизм из N_1 в N_2.

Итак, мы можем предполагать, что (N_1, φ_1) и (N_2, φ_2) редуцированы. Следующий шаг состоит в доказательстве того, что можно ввести предположения: $N_1 = N_2$, $C_{\varphi_1} = C_{\varphi_2}$, а первые производные φ_1 и φ_2 совпадают на $C_{\varphi_1} = C_{\varphi_2}$, так что h отображает $d\varphi_2|_{C_{\varphi_2}}$ на $d\varphi_1|_{C_{\varphi_1}}$. Для этого нам надо только предъявить диффеоморфизм расслоений $h\colon N_1 \to N_2$, для которого $h(C_{\varphi_1}) = C_{\varphi_2}$. Тогда мы заменим φ_2 на $\varphi_2 \circ h$. С этой целью введем локальные координаты (x, θ) на N_1 и рассмотрим отображение расслоений $g_1\colon N_1 \to T^*M$ вида

$$g_1(x, \theta) = \left(x, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, \theta)\right).$$

На C_{φ_1} это задает диффеоморфизм с Λ. Поскольку T_{z_1} (слой) $\subset$ $\subset T_{z_1}(C_{\varphi_1})$, мы получаем, что g_1 — иммерсия в точке z, сохраняющая слои над M. То же верно для аналогичного отображения g_2. По теореме о неявной функции существует такое отображение $\rho\colon T^*M \to N_2$, коммутирующее с расслаивающими отображениями над M, что $\rho \circ g_2 = \mathrm{id}$. Тогда $\rho \circ g_1\colon N_1 \to N_2$ — диффеоморфизм и, поскольку $g_1 C_{\varphi_1} = g_2 C_{\varphi_2} = \Lambda$, имеем $(\rho \circ g_1) C_{\varphi_1} = C_{\varphi_2}$. Кроме того, из определения ρ следует, что $d(\rho \circ g_1)^* \varphi_2 = \varphi_1$ на C_{φ_1}.

Итак, мы находимся в ситуации приложения I. Для удобства повторим здесь нужные доказательства.

Пусть φ_1 и φ_2 — редуцированные фазовые функции на N для лагранжева подмногообразия Λ, причем $C_{\varphi_1} = C_{\varphi_2}$ и

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta}$$

на C_φ. Значит, $\varphi_1 = \varphi_2$ на C_φ (с точностью до константы, которую мы будем игнорировать) и $\varphi_1 - \varphi_2$ имеет нуль второго порядка. Полагаем $\varphi_t = (1-t)\varphi_1 + t\varphi_2$ и ищем диффеоморфизм расслоений f_t, для которого $f_t^*\varphi_t = \varphi_1$, $f_t = 1$ на C_φ. Будем искать соответствующее векторное поле ξ_t. Оно должно удовлетворять условию

$$\dot{\varphi}_t + D_{\xi_t}\varphi_t = 0.$$

Далее, $\varphi_2 - \varphi_1$ обращается в нуль до второго порядка на C_φ и $d(\partial\varphi_1/\partial\theta^i)$ независимы ввиду трансверсальности Λ_φ и H. Значит,

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \sum b_{ij} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta^i}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta^j}, \quad b_{ij} = b_{ij}(x, \theta),$$

так что $\dot{\varphi}_t = \sum b_{ij} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta^i}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta^j}$. Мы ищем

$$\xi_t = \sum \mu_t^i(x, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta^i},$$

$\mu_t^i = 0$ на C_φ, так что $\mu_t^i = \sum \mu_{ij} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_j}$ и уравнение $\dot{\varphi}_t + D\xi_t\varphi_t = 0$ принимает вид

$$0 = \sum b_{ij} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta^i}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta^j} + \sum \mu_{ij} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta^j}\frac{\partial}{\partial \theta^i}\left[\varphi_1 + t\sum b_{kl}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta^k}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta^l}\right].$$

Приравнивая коэффициенты при $(\partial\varphi_1/\partial\theta^i)(\partial\varphi_1/\partial\theta^j)$, получаем

$$B + U(I+S) = 0, \quad B = (b_{ij}), \quad U = (\mu_{ij}),$$

где $S = 0$ в точке z_1, поскольку φ_1 редуцирована. Таким образом, мы можем разрешить это уравнение относительно U в окрестности z_1, найти ξ_t и путем интегрирования найти f_t, после чего предложение будет доказано.

В большинстве приложений мы будем иметь дело с однородными лагранжевыми многообразиями. Для этих применений нам потребуется небольшая модификация предложения 5.4.

Пусть $N^+ = N \times \mathbf{R}^+$; рассмотрим параметризации вида

$$\begin{array}{ccc} N^+ & \xrightarrow{\varphi^+} & \mathbf{R} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

которые эквивариантны относительно действия $\mathbf{R}^+$, а именно $\varphi^+(z, sa) = a\varphi^+(z, s)$ и $\pi(z, sa) = \pi(z, s)$. Ясно, что получающееся при этом лагранжево многообразие $\Lambda = \pi_*(\operatorname{graph} d\varphi^+)$ будет инвариантно относительно действия $\mathbf{R}^+$ на T^*M, а значит, однородно. По предложению 5.2 каждое однородное лагранжево многообразие допускает $\mathbf{R}^+$-эквивариантную параметризацию, по крайней мере локально. Кроме того, модифицируя доказательство предложения 5.3, легко доказать

Предложение 5.3 (однородная версия). *Пусть* (Λ, λ) — *однородное лагранжево многообразие (росток) в* T^*M. *Тогда каждая* $\mathbf{R}^+$-*эквивариантная параметризация* (Λ, λ) *может быть пропущена через редуцированную* $\mathbf{R}^+$-*эквивариантную параметризацию.*

Доказательство. Пусть $\varphi(z) = \varphi^+(z, 1)$. Тогда $\varphi^+(z, a) = a\varphi(z)$. Далее, если $z^+ = (z, a)$ принадлежит критическому множеству φ^+, то

$$\partial\varphi^+/\partial z = 0 = a(\partial\varphi/\partial z),$$

так что $\partial\varphi/\partial z = 0$, поскольку $a \neq 0$. Кроме того,

$$\partial^2\varphi^+\left(\frac{\partial}{\partial t}, \eta\right) = \left(d\left(\frac{\partial\varphi^+}{\partial t}\right), \eta\right) = \langle d_z\varphi, \eta\rangle = 0.$$

Здесь $\partial/\partial t$ — единичный касательный вектор к $\mathbf{R}^+$ в точке z^+, а η — любой касательный вектор к N. Это показывает, что $\partial/\partial t$ принадлежит ядру гессиана φ^+ в точке z^+, поэтому в доказательстве предложения 5.3 можно выбрать расслоение π_1 так, чтобы его слои лежали в множествах $N \times \mathrm{const}$; это означает, что π_1 коммутирует с действием $\mathbf{R}^+$. Значит, редуцированная параметризация будет также и $\mathbf{R}^+$-эквивариантной параметризацией, что и требовалось доказать.

Мы воспользуемся этим результатом для того, чтобы доказать

Предложение 5.4 (однородная версия). *Пусть* (N_1^+, φ_1^+) *и* (N_2^+, φ_2^+) — *две параметризации* (Λ, λ), *причем* $\dim N_1^+ = \dim N_2^+$. *Пусть* $z_1^+ = \pi_{N_1^+}(\lambda)$ *и* $z_2^+ = \pi_{N_2^+}(\lambda)$. *Предположим, что*

$$\operatorname{sign} H_\theta(\varphi_1^+)(z_1^+) = \operatorname{sign} H_\theta(\varphi_2^+)(z_2^+).$$

Тогда существует $\mathbf{R}^+$-*эквивариантный сохраняющий слои диффеоморфизм* $f\colon N_1^+ \to N_2^+$, *определенный в окрестности* z_1^+, *для которого* $f(z_1^+) = z_2^+$ *и* $\varphi_2^+ \circ f = \varphi_1^+$.

Доказательство. Как и прежде, достаточно рассмотреть редуцированный случай. Определим $g_1^+\colon N_1^+ \to T^*M$ и $g_2^+\colon N_2^+ \to T^*M$ точно так же, как выше мы определяли g_1 и g_2, т. е.

$$g_1^+(x, \theta, s) = \left(x, \frac{\partial\varphi_1^+}{\partial x}\right).$$

Ясно, что g_1^+ и g_2^+ будут $\mathbf{R}^+$-эквивариантными, поэтому мы можем выбрать диффеоморфизм $h\colon C_{\varphi_1^+} \to C_{\varphi_2^+}$, как и прежде, но так, чтобы он был эквивариантен, и, заменяя φ_2^+ на $\varphi_2^+ \circ h$, мы сведем все к случаю $N_1^+ = N_2^+$, $C_{\varphi_1}^+ = C_{\varphi_2}^+$ и $\varphi_1^+ = \varphi_2^+$ на $C_{\varphi_1}^+ = C_{\varphi_2}^+$. Заметим, что $\varphi_1^+(z, t) = t\varphi_1(z)$, поэтому в критической точке

$$z^+ = (z, t), \quad \frac{\partial \varphi_1^+}{\partial t} = 0 = \varphi_1(z),$$

а значит, $\varphi_1^+(z^+) = 0$. Таким образом, в однородном случае $\varphi_1^+ = 0$ на $C_{\varphi_1}^+$, так что не только первые производные φ_1^+ и φ_2^+ совпадают на $C_{\varphi_1}^+ = C_{\varphi_2}^+$, но и сами функции обладают этим свойством. (Напомним, что в неоднородном случае нам пришлось добавлять константу.) Дальнейшее доказательство проходит, как и прежде. Небольшие изменения требуются при выборе матрицы B: она должна быть однородной степени 1 по $\mathbf{R}^+$. Чтобы добиться этого, надо определить B на множестве, где $\mathbf{R}^+$-переменная постоянна, и продолжить по линейности.

Мы можем переформулировать некоторые из утверждений об уравнении (5.3) из гл. II в рамках излагаемой сейчас схемы, а также обобщить экспоненциальное отображение и вычисления из гл. I.

Предложение 5.5. *Пусть Λ — однородное лагранжево подмногообразие в T^*M, и пусть a — функция, определенная на $T^*M - \{0\}_M$, однородная степени 1 и не имеющая нулей на Λ. Тогда можно найти однородную функцию φ, определенную на T^*M, для которой*

$$d\pi_*(\operatorname{graph} d\varphi) = \Lambda \quad \textit{и} \quad \{a, \varphi\} = a.$$

Заметим, что если χ — любая однородная фазовая функция для Λ, то $\alpha = d\chi$ на Λ и по теореме Эйлера

$$\{a, \chi\} = \sum \frac{\partial a}{\partial \xi}\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial a}{\partial \xi}\xi = a.$$

Значит, $\{a, \chi\} = a$ всюду на Λ для всех однородных фазовых функций. Задача состоит в том, чтобы исправить χ вне Λ. Заметим также, что

$$\xi_a = \frac{\partial a}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}$$

нигде не касается Λ. Действительно, если бы ξ_a касался Λ в точке z, то $\langle \xi_a, \alpha \rangle_z = 0$, поскольку $\alpha|_\Lambda = 0$ для однородных Λ. Но тогда $0 = (\partial a/\partial \xi)\cdot \xi = a$ по теореме Эйлера, а это противоречит предположению о том, что a не обращается в нуль на Λ. Далее, выберем однородное подмногообразие C коразмерности 1, трансверсальное ξ_a и содержащее Λ; в качестве φ возьмем решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с начальным условием

$$\{a, \varphi\} = \xi_a \varphi = a, \quad \varphi = \chi \quad \text{на} \quad C.$$

Это однозначно определяет φ в окрестности C. Поскольку a, ξ_a и Λ все однородны, мы получаем, что φ однородна. Наконец, $\iota_C^* d\varphi = \iota_C^* d\chi$, поскольку $\varphi = \chi$ на C и $\xi_a \varphi = \xi_a \chi = a$ в точках Λ. Значит, $d\varphi = d\chi$ в точках Λ, а следовательно, φ — фазовая функция для Λ, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим поток f_t, порожденный ξ_a, и множество точек

$$(f_t(z),\ t,\ -a) \subset T^*(M \times \mathbf{R}).$$

Это в точности то множество, которое получается из изотропного подмногообразия $\{\Lambda;\ 0,\ -a\}$ под действием гамильтонова потока, порожденного векторным полем $\xi_a + \partial/\partial t$ на $T^*(M \times \mathbf{R})$, а значит, это (однородное) лагранжево подмногообразие; мы обозначим его через Λ^a. Заметим, что для малых значений t

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \xi_a\right)(\varphi - ta) = 0,$$

и на Λ^a при $t = 0$ (через τ обозначено переменное, двойственное t) имеем

$$d(\varphi - ta) = d\varphi - a\,dt = \xi\,dx + \tau\,dt\,|_{\Lambda^a,\ t=0} =$$
$$= (\alpha_{M \times \mathbf{R}})\,|_{\Lambda^a,\ t=0}.$$

Далее, $D_{\xi_a} \alpha_M = 0$ и $D_{\partial/\partial t}(\tau\,dt) = 0$, так что

$$D_{\partial/\partial t + \xi_a}(\alpha_{M \times \mathbf{R}}) = 0.$$

(В действительности если b — любая однородная функция на T^*N, то из теоремы Эйлера следует, что $D_{\xi_b} \alpha_N = 0$.) Значит, для достаточно малых t

$$d(\varphi - ta) = \alpha_{M \times \mathbf{R}}$$

вдоль Λ^a, т. е. $\varphi - ta$ — фазовая функция для Λ^a.

По ассоциации с той же конструкцией можно рассмотреть неоднородное лагранжево подмногообразие Λ_1 в T^*M, определяемое следующим образом. Пусть $S_1(\Lambda)$ состоит из точек Λ, в которых $a = 1$. (Заметим, что da не равен нулю на Λ. Действительно, $\langle \xi \partial/\partial \xi,\ da \rangle = a \neq 0$ и $\xi(\partial/\partial \xi)$ касается Λ. Значит, $S_1(\Lambda)$ — подмногообразие в Λ коразмерности 1.) Тогда $S_1(\Lambda)$ — изотропное подмногообразие, трансверсальное ξ_a (поскольку ξ_a трансверсально Λ). Рассмотрим отображение $S_1(\Lambda) \times \mathbf{R} \to T^*M$ вида $f(\lambda, t) = f_t(\lambda)$, где f_t — поток, порожденный ξ_a. Тогда $\Lambda_1 = f(S_1(\Lambda) \times \mathbf{R})$ — лагранжево подмногообразие в T^*M. Заметим, что, поскольку $\xi_a a = 0$, мы получаем, что $a \circ f \equiv 1$ на $S_1(\Lambda) \times \mathbf{R}$. Теперь мы можем определить экспоненциальное отображение $\exp\colon S_1(\Lambda) \times \mathbf{R} \to M$, полагая $\exp = \pi \circ f$. Если, например, a — длина относительно римановой метрики, а Λ — кокасательное пространство в точке y, то $S_1(\Lambda)$ — единичная сфера в рассматриваемой точке и $\exp$ — обычное экспоненциальное отображение. Аналогично мы можем считать Λ нормальным расслоением к подмногообразию.

Положим $S_1 = \{z \in T^*M \mid a(z) = 1\}$, т. е. в предыдущих обозначениях $S_1(\Lambda) = \Lambda \cap S_1$. Предположим, что S_1 — подмногообразие в T^*M и π_1: $S_1 \to M$ — ограничение π на S_1, а φ_1 — ограничение φ на S_1, где φ — ранее построенная фазовая функция для Λ. Мы утверждаем, что

$$\Lambda_1 = d\pi_{1*}(\operatorname{graph} d\varphi_1).$$

Действительно, множество C_{φ_1} задается (по правилу множителей Лагранжа) уравнениями

$$d_\xi \varphi - \mu\, d_\xi a = 0,$$
$$a = 1$$

для некоторого μ. Значит, $(x, \xi) \in C_{\varphi_1}$ тогда и только тогда, когда $(x, \xi, \mu, -1) \in \Lambda^{\tilde{a}}$. Далее, на Λ^a имеем $d(\varphi - ta) = \alpha + \tau\, dt$, так что $d\varphi - t\, da = \alpha$. На S_1 это дает

$$d\varphi_1 = \iota^*\alpha, \quad \iota\colon S_1 \to T^*M,$$

т. е. на C_{φ_1}

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x^i} = \xi_i,$$

и это и есть нужное утверждение.

Заметим, что значение множителя Лагранжа μ имеет очень простую геометрическую интерпретацию. Действительно, с одной стороны, поскольку φ однородна, имеем

$$\varphi = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \xi_i = \mu \sum \frac{\partial a}{\partial \xi_i} \xi_i = \mu a = \mu$$

на S_1. Если через $S_1(x)$ обозначено $S_1 \cap T^*M_x$ и если $x \in \pi\Lambda_1$, то $x = \pi(z)$, где z — критическая точка φ_1, т. е. μ — критическое значение φ_1. Отметим, что μ является также временны́м параметром, для которого $f_t(\lambda) = z$, где $\lambda \in S_1(\Lambda)$. Значит, μ — критическое значение $\varphi_1|_{S_1(x)}$ и представляет собой промежуток времени, за который экстремаль из $S_1(\Lambda)$ достигает T^*M_x. В римановом случае значения μ — это в точности длины геодезических, соединяющих x с точкой y.

Мы закончим этот параграф исследованием поведения коцепи Маслова при функториальных операциях на лагранжевых подмногообразиях кокасательных расслоений[1]). Пусть f: $M \to N$ —

---

[1]) Остальную часть параграфа можно при первом чтении опустить.

субмерсия. Тогда df^*T^*N — подрасслоение в T^*M и имеет место диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "f"'] & T^*M \arrow[l, "\pi_M"'] \arrow[d, "g"] & df^*TN = \mathscr{H} \arrow[l, "\iota"'] \\ N & T^*N \arrow[l, "\pi_N"'] & \end{tikzcd}$$

Пусть $p \in \mathscr{H}$, $x = \pi_M p \in M$, q — образ p в T^*N и $y = f(x)$ — образ q в N. Значит,

$$p = df_x^* q, \qquad q = gp,$$

$$x = \pi_M p, \qquad y = \pi_N q.$$

Обозначим через α_M и α_N фундаментальные 1-формы на T^*M и T^*N. Мы утверждаем, что

$$\iota^*\alpha_M = g^*\alpha_N.$$

Действительно, пусть ξ касается $\mathscr{H}$ в точке p. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \xi, g^*\alpha_N \rangle &= \langle dg\xi, \alpha_N \rangle = \langle d\pi_N \circ dg\xi, q \rangle = \\ &= \langle df \circ d\pi_M \xi, q \rangle = \langle d\pi_M \xi, df^* q \rangle = \\ &= \langle d\pi_M \xi, p \rangle = \langle \xi, \alpha_M \rangle. \end{aligned}$$

Если $\omega_M = d\alpha_M$, то тем более имеем (как и в (4.1))

$$g^*\omega_N = \iota^*\omega_M. \tag{5.4}$$

Если Λ_M — лагранжево подмногообразие в T^*M, трансверсально пересекающее $\mathscr{H}$, то $df_*\Lambda_M$ получается из $\Lambda_M \cap \mathscr{H}$ при отображении g в T^*N. Пусть j: $\Lambda_M \cap \mathscr{H} \to \Lambda_M$ и $\mathfrak{M}_{\Lambda_M}$ — класс Маслова многообразия Λ_M. Мы утверждаем, что

$$j^*\mathfrak{M}_{\Lambda_M} = \mathfrak{M}_{df_*\Lambda_M}, \tag{5.5}$$

где $\mathfrak{M}_{df_*\Lambda_M}$ — класс Маслова лагранжева подмногообразия $df_*\Lambda_M$.

Аналогично, предположим, что Λ_M — лагранжево подмногообразие в T^*N. Тогда $df^*\Lambda_N = g^{-1}\Lambda_N$ и мы утверждаем, что

$$g^*\mathfrak{M}_{\Lambda_N} = \mathfrak{M}_{df^*\Lambda_N}, \tag{5.6}$$

где g: $df^*\Lambda_N \to \Lambda_N$ (мы сохранили обозначение g для ограничения g на $g^{-1}\Lambda_N$).

Вначале докажем (5.5). Положим

$h = T_p\mathscr{H}$,

v_M — касательное пространство к слою (π_M) в точке p,

v_N — касательное пространство к слою (π_N) в точке q,

$T_p = T_p(T^*M)$,

$T_q = T_q(T^*N)$,

и пусть k — ядро отображения $dg\colon h \to T_q$, т. е. последовательность

$$0 \to k \to h \to T_q \to 0$$

точная. Мы утверждаем, что k — изотропное подпространство и что $h = k^\perp$ относительно ω_M, т. е. $T_q = k^\perp/k$. В самом деле, если $\xi \in k$ и $\eta \in h$, то

$$\langle \xi \wedge \eta,\ \omega_M\rangle = \langle dg \quad \wedge dg\eta,\ \omega_N\rangle = 0,$$

т. е. $h \subset k^\perp$; с другой стороны, $\dim k = \dim M - \dim N$, а $\dim h = \dim M + \dim N$, т. е. должно быть $h = k^\perp$.

В частности, определим отображение $\rho\colon L(T_p) \to L(T_q)$, ставящее каждому $u \subset T_p$ в соответствие $(u \cap k^\perp)/(u \cap k) \subset T_q$. Пусть Λ — лагранжево подмногообразие в T^*M, пересекающее $\mathscr{K}$ трансверсально. Имеем $T_p(\Lambda \cap \mathscr{K}) = T_p\Lambda \cap h$, в то время как $(T_p\Lambda \cap k)^\perp = T_p\Lambda + k^\perp = T_p\Lambda + h = T_p(T^*M)$ ввиду трансверсальности, т. е. $T_p\Lambda \cap k = 0$. Значит,

$$T_q(\Lambda \cap \mathscr{K}) = \rho T_p\Lambda.$$

Разумеется, это имеет место для всех точек $\Lambda \cap \mathscr{K}$, т. е. мы можем написать

$$T(\Lambda \cap \mathscr{K}) = \rho T\Lambda.$$

Поскольку v_M трансверсально h, из тех же соображений

$$v_M = \rho(v_M).$$

Пусть, далее, C_N и D_N — сечения $L(\Lambda \cap \mathscr{K})$. Тогда $C_N(p)$ — подпространство в $k^\perp/k$ и, значит, оно определяет единственное лагранжево подпространство в $k^\perp$, которое мы обозначим через $C_M(p)$. Мы утверждаем, что если $C_N(p) \cap T_p(\Lambda \cap \mathscr{K}) = 0$, то $C_M(p) \cap T_p(\Lambda) = 0$. Действительно, $C_M(p) \cap T_p(\Lambda) \subset k$, поскольку $C_M(p) \subset k^\perp$ и $C_M(p) \cap T_p(\Lambda)/k = 0$. Но тогда

$$C_M(p) \cap T_p(\Lambda) \subset C_M(p) \cap T_p(\Lambda) \cap k = 0,$$

поскольку $T_p(\Lambda) \cap k = 0$. Те же соображения применимы к v_N.

Значит, если C_N трансверсально v_N и $T(\Lambda \cap \mathscr{K})$, то C_M трансверсально v_M и $T(\Lambda)$ на $\Lambda \cap \mathscr{K}$, а значит, его можно продолжить до сечения $L(\Lambda)$, определенного в окрестности $\Lambda \cap \mathscr{K}$, которое также трансверсально v_M и $T(\Lambda)$. Мы утверждаем, что

$$(T(\Lambda),\ v_M,\ C_M,\ D_M) = (T(\Lambda \cap \mathscr{K}),\ v_N,\ C_N,\ D_N),$$

если D_N — другое такое сечение. В самом деле,

$$(T(\Lambda),\ v_M,\ C_M,\ D_M) = -(C_M,\ D_M,\ T(\Lambda),\ v_M)$$

и, поскольку $C_M \cap D_M \supset k$, имеем

$$(C_M,\ D_M,\ T(\Lambda),\ v_M) = (C_N,\ D_N,\ \rho T(\Lambda),\ \rho v_M) = \\ = (C_N,\ D_N,\ T(\Lambda \cap \mathscr{K}),\ v_N).$$

Это показывает, как явно связать чеховские коцепи на Λ и $\Lambda \cap \mathscr{H}$, так чтобы класс Маслова на Λ поднимался в качестве класса Маслова на $\Lambda \cap \mathscr{H}$, и тем самым доказывает (5.5).

Проверку формулы (5. 6) мы оставляем читателю в качестве упражнения. Основной момент состоит в том, чтобы заметить, что в любой точке $g^{-1}\Lambda_M$ пересечение $v_M \cap T(g^{-1}\Lambda_N)$ целиком приходит из N, т. е. из $v_N \cap \Lambda_N$.

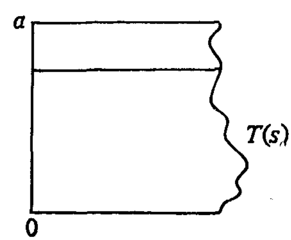
Функториальность класса Маслова влечет за собой соответствующую функториальность для линейного расслоения Маслова. Это следует из общих соображений (изоморфизма между классами когомологий и классами эквивалентности линейных расслоений), но может быть выведено непосредственно. В самом деле, пусть $f\colon M \to N$ — субмерсия, $y = f(x)$, $p = df_x^* q$, $p \in \Lambda_M$, $q \in \Lambda_N = df_* \Lambda_M$ (в тех же обозначениях, что и раньше). Напомним (§ 3), что слой расслоения Маслова в точке p — это множество всех функций

$$f\colon \mathscr{O} \to \mathbf{C}, \quad f(C) = e^{(i\pi/2)\alpha(C,\, D)} f(D),$$

где $\alpha(C, D)$ — сложное отношение $(T_p(\Lambda), v_M(p), C, D)$, а $\mathscr{O}$ — подмножество в $L(T_p)$, состоящее из тех лагранжевых подпространств, которые трансверсальны и $T_p(\Lambda)$ и $v_M(p)$. Далее, определенное чуть выше отображение ρ переводит $\mathscr{O}$ в соответствующее подмножество $L(T_q)$ и сохраняет сложное отношение. Значит, слой расслоения Маслова в точке q оказывается биективно отображенным на слой расслоения Маслова в точке p при помощи ρ^*.

§ 6 *Периодические гамильтоновы системы*

В этом параграфе мы отвлечемся от изучения общих свойств симплектических многообразий и исследуем частный случай гамильтонова потока с многообразиями периодических решений. Мы уже сталкивались с такой ситуацией в гл. III в связи с явлением идеальной фокусировки. В этом параграфе мы выясним некоторые свойства таких систем и разберем несколько важных примеров. Читатель, который предпочитает продолжить изучение общей теории, может перейти к следующему параграфу.



Пусть ξ — гамильтоново векторное поле на симплектическом многообразии X, т. е.

$$\xi \lrcorner\, \omega = -dH.$$

Предположим, что задано однопараметрическое семейство траекторий ξ. Другими словами, предположим, что имеется отображение F множества $0 \leqslant t \leqslant T(s)$, $0 \leqslant s \leqslant a$ на (t, s)-плоскости в X, причем

$$dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,\, s)} = \xi_{F(t,s)}.$$

Значит, для каждого фиксированного s кривая $\gamma_s = F(\cdot,\ s)$ является траекторией ξ. Далее,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \wedge \frac{\partial}{\partial s},\ F^*\omega \right\rangle = \left\langle dF\frac{\partial}{\partial t} \wedge dF\frac{\partial}{\partial s},\ \omega \right\rangle = \left\langle dF\frac{\partial}{\partial s},\ \xi \lrcorner\, \omega \right\rangle =$$
$$= -\left\langle dF\frac{\partial}{\partial s},\ dH \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial}{\partial s},\ d(H\circ F) \right\rangle =$$
$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial s},\ \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, (d(H\circ F)\wedge dt) \right\rangle =$$
$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \wedge \frac{\partial}{\partial s},\ d(H\circ F)\wedge dt \right\rangle,$$

или, короче, мы получаем формулу Картана

$$F^*\omega - d(H\circ F)\wedge dt = 0. \tag{6.1}$$

Теперь предположим, что на X имеется такая форма α, что $d\alpha = \omega$. Тогда уравнение можно переписать в виде

$$dF^*(\alpha + t\,dH) = 0.$$

Обозначим через b_0 кривую $t = 0$, а через b_1 кривую $s \longmapsto (T(s),\ s)$. Применяя теорему Стокса и учитывая, что H — константа вдоль γ_0 и γ_a, получаем

$$\int_{\gamma_a} \alpha - \int_{\gamma_0} \alpha = \int_{b_1} F^*\alpha + \int_{b_0} F^*\alpha + \int_{b_1} T(s)\, d(H\circ F). \tag{6.2}$$

Мы уже встречались с вариантами (и применениями) этой формулы в гл. II и III. Теперь применим эту формулу к случаю, когда каждая траектория γ_s периодична, т. е. $F(0,\ s) = F(T(s),\ s)$. Тогда $\int_{b_1} F^*\alpha = \int_{b_0} F^*\alpha$ и из (6.2) следует, что

$$\int_{\gamma_a} \alpha = \int_{\gamma_0} \alpha + \int_0^a T(s)\, d\bar{H}, \tag{6.3}$$

где $\bar{H}(s) = H(F(T(s),\ s))$. В частности, мы получаем следующий результат, принадлежащий Гордону [4]:

Если γ_s — однопараметрическое семейство периодических траекторий, лежащих на фиксированной энергетической поверхности $H = \mathrm{const}$, то $\int_{\gamma_s} \alpha$ не зависит от s.

Предположим теперь, что все траектории ξ периодичны и что поверхности $H = \mathrm{const}$ связны. Тогда интеграл $\int \alpha$ по периодическим траекториям зависит только от H, так что его можно обозначить $I(H)$. Уравнение (6.3) показывает, что

$$I'(H) = T(s), \tag{6.4}$$

откуда следует, что все траектории на одной и той же энергетической поверхности имеют одинаковые периоды. (Это рассуждение также принадлежит Гордону [4]. Сам результат в различных частных случаях был известен и прежде, см. Уинтнер [5] и ссылки у Мозера [6] и Гордона [4].) Приведем обобщение этого результата, принадлежащее Вейнстейну [8]. Пусть $f\colon X\times\mathbf{R}\to X$ — отображение, задаваемое потоком, порожденным ξ (т. е. $f(x, \cdot)$ — траектория, проходящая через x). Если поток не определен глобально, то в качестве области определения f берется соответствующее подмножество в $X\times\mathbf{R}$. Поднимем ω и H на $X\times\mathbf{R}$ при помощи проекции $X\times\mathbf{R}\to X$. Пусть η — произвольный касательный вектор к X, рассматриваемый как касательный вектор к $X\times\mathbf{R}$. Тогда вычисление, которое проводилось при доказательстве (6.1), показывает, что

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\wedge\eta,\ f^*\omega\right\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\wedge\eta,\ dH\wedge dt\right\rangle.$$

Если η и ζ — два касательных вектора к X, то

$$\langle\eta\wedge\zeta,\ f^*\omega\rangle=\langle\eta\wedge\zeta,\ \omega\rangle,$$

поскольку отображение $x\longmapsto f(x, t)$ — симплектический диффеоморфизм для каждого фиксированного t. Объединим два последних уравнения в формулу

$$f^*\omega=\omega+dH\wedge dt. \tag{6.5}$$

Пусть теперь $g\colon X\times\mathbf{R}\to X\times X$ — график f, т. е. $g(x, t)=(x, f(x, t))$. (Опять-таки g может не быть определена всюду на $X\times\mathbf{R}$; ее область определения та же, что у f.) Введем на $X\times X$ симплектическую структуру при помощи формы $\omega_{X\times X}=\pi_2^*\omega-\pi_1^*\omega$, где π_1 и π_2 — проекции $X\times X$ соответственно на первый и второй сомножители; например, $\pi_2\circ g=f$. Тогда в силу (6.5)

$$g^*\omega_{X\times X}=g^*\pi_2^*\omega-g^*\pi_1^*\omega=f^*\omega-\omega,$$

или

$$g^*\omega_{X\times X}=dH\wedge dt. \tag{6.6}$$

В частности, если $M\subset X\times\mathbf{R}$ — такое подмногообразие, что $g|_M$ — изотропное подмногообразие в $X\times X$, т. е. $(g|_M)^*\,\omega_{X\times X}=0$, то мы получаем, что форма $dH\wedge dt$ равна нулю на M. Например, предположим, что все траектории ξ периодичны и что период траектории, проходящей через x, равен $T(x)$. Тогда, взяв $M=\{(x, T(x))\}$, имеем $g(x, T(x))=(x, x)$. Поскольку диагональ — лагранжево подмногообразие в $X\times X$, мы получаем, что

$$dH\wedge dT=0,$$

т. е. опять-таки показано, что период и энергия «функционально зависимы».

Предположим, что уравнение $H=c$ определяет энергетическую поверхность Z_c и что траектории ξ расслаивают эту поверхность над Y. Итак, Y — «пространство орбит» поля ξ. Заметим, что ограничение формы ω на Z_c имеет ранг $2n-2$ (где $\dim X=2n$) и что на этой поверхности $\xi \rfloor \omega = dH|_{\{H=c\}}=0$. Мы можем отождествить TY_y с пространством $TZ_x/\{\xi_x\}$, где x — любая точка на орбите, отвечающей y. Поскольку ω индуцирует невырожденную кососимметрическую билинейную форму на $TZ_x/\{\xi_x\}$, мы получаем индуцированную форму $\bar{\omega}_y$ на TY_y. Поток, порожденный ξ, сохраняет ω, поэтому индуцированная форма не зависит от x. Таким образом, мы получили форму $\bar{\omega}$ на Y, и легко убедиться, что Y тем самым превращается в симплектическое многообразие. Любой симплектический автоморфизм h, сохраняющий ξ, очевидно, индуцирует симплектический автоморфизм Y.

Рассмотрим, например, геодезический поток на сфере S^n (рассматриваемой как единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$). Энергетические поверхности соответствуют касательным (или кокасательным) векторам постоянной длины, и все траектории — это большие круги, проходимые с разными скоростями; период обратно пропорционален скорости и, значит, постоянен на каждой энергетической гиперповерхности. Элементы группы $O(n+1)$ действуют как автоморфизмы потока, а значит, и как автоморфизмы ассоциированных пространств орбит. Наиболее важен частный случай $n=3$. В этом случае сфера S^3 сама является группой и метрика инвариантна относительно правых и левых сдвигов. Поскольку для каждой группы G можно отождествить $T(G)$ с $G\times g$, где g — алгебра Ли группы G, можно отождествить единичные касательные векторы с точками $S^3\times S^2$. Так как метрика инвариантна, соответствующий геодезический поток — это экспоненциальное отображение и его сдвиги. (См. Стернберг [2].) Значит, траектории имеют вид $\gamma\times v$, где γ — большой круг, определяемый единичным вектором v, а v — постоянный единичный вектор в g. Для каждого фиксированного v тем самым индуцируется расслоение Хопфа сферы S^3, и мы видим, что пространство орбит — это $S^2\times S^2$. Этот пример замечателен тем, что для него имеет место следующий красивый результат Мозера [6] (см. также Сурьо [9]): с точностью до компактификации и «регуляризации» геодезический поток на поверхности постоянной энергии тот же, что и поток на поверхности постоянной отрицательной энергии для задачи Кеплера, т. е. для частицы, движущейся под действием притяжения к фиксированному центру по закону обратного квадрата. В частности, одинаковы пространства орбит, т. е. $S^2\times S^2$. Как мы увидим, именно этим объясняется та роль, которую играет группа $O(4)$ в квантовании атома водорода.

Сделаем вначале предварительное замечание о «регуляризации» гамильтонова векторного поля. Пусть ξ — гамильтоново векторное поле, для которого $\xi \lrcorner \omega = -dH$, и f — гладкая функция. Тогда на каждой гиперповерхности постоянной энергии $H=c$ векторное поле $f\xi$ совпадает с ограничением на $H=c$ некоторого гамильтонова векторного поля. Действительно, определим гамильтоново векторное поле η формулой

$$\eta \lrcorner \omega = -d((H-c)f) = -(H-c)\,df - f\,dH.$$

На $H=c$ получаем $\eta \lrcorner \omega = -f\,dH$, т. е. $\eta = f\xi$ и, значит, $f\xi$ совпадает с гамильтоновым векторным полем η на $H=c$. (Конечно, $f\xi$ не будет всюду гамильтоновым векторным полем, если f и H не будут функционально зависимы.)

Далее, умножение векторного поля ξ на функцию f можно интерпретировать как «замену независимого переменного» $t=\int f\,ds$ (т. е. $dt/ds = f(z(t))$, где $z(t)$ — некоторая траектория ξ). Если f нигде не обращается в нуль, то ничего особенного не происходит. Если же f имеет нули, то η может обладать лучшими свойствами, чем ξ. Например, ξ может быть определено на открытом подмногообразии U многообразия W, обращаясь в «бесконечность» на ∂U, в то время как $\eta = f\xi$ определено всюду на W. Именно это происходит на «орбитах со столкновением» для задачи Кеплера, т. е. на тех орбитах, на которых частица движется по прямым в начальную точку пространства. При приближении частицы к началу ее скорость стремится к бесконечности и, значит, ξ теряет смысл. С другой стороны, после умножения на подходящую функцию f эти орбиты начинают вести себя регулярным образом, отвечая касательным векторам к большим кругам, проходящим через северный полюс, в то время как энергетическая поверхность отвечает касательным векторам, лежащим над сферой с удаленным северным полюсом. Кроме того, при подходящей нормировке t и s оказываются связанными известным уравнением Кеплера $t = s - e\sin s$, где e — эксцентриситет эллипса. При $e=1$ эллипс вырождается в прямолинейную орбиту со столкновением при $t=0$. Для t, близких к нулю, $t = s - \sin s = s^3/3! + \ldots$, что приводит к выбору $t^{1/3}$ в качестве «регуляризующего параметра».

Теперь приведем детали. Мы почти буквально следуем элегантному рассуждению Мозера с небольшими изменениями в обозначениях. Пусть $x=(x_0, \ldots, x_n)$ — евклидовы координаты на $\mathbf{R}^{n+1}$ и $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_n)$ — дуальные координаты, так что (x, ξ) — координаты на $\mathbf{R}^{n+1} + (\mathbf{R}^{n+1})^* = T^*\mathbf{R}^{n+1}$. Гамильтонов поток, порожденный функцией $\Phi = {}^1/_2\|\xi\|^2\|x\|^2$, дает дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \|x\|^2\,\xi, \quad \frac{d\xi}{ds} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\|\xi\|^2\,x.$$

Ясно, что

$$\frac{d(x\cdot\xi)}{ds} = 0, \quad \frac{d\|x\|^2}{ds} = 2\|x\|^2\,x\cdot\xi,$$

и

$$d\,\|\xi\|^2/ds = -2\,\|\xi\|^2\,(x\cdot\xi).$$

Значит, (ко)касательное расслоение на единичной сфере T^*S^n, задаваемое условиями

$$\|x\|^2 = 1, \quad x\cdot\xi = 0,$$

сохраняется под действием потока и на T^*S^n траектории удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx}{ds} = \xi, \quad \frac{d\xi}{ds} = -\,\|\xi\|^2 x,$$

или

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \|\xi\|^2 x = 0;$$

ясно, что это уравнение большого круга. Отождествляя T^*S^n с подмногообразием в $T^*\mathbb{R}^{n+1}$, как указано выше, получаем, что ограничение Φ на T^*S^n порождает геодезический поток на T^*S^n. Мы будем обозначать это ограничение Φ также через Φ. Единичные касательные векторы образуют энергетическую гиперповерхность $\Phi = 1/2$.

Обозначим через $y = (y_1, \ldots, y_n)$ евклидовы координаты в $\mathbb{R}^n$ с дуальными координатами η и рассмотрим стереографическую проекцию из северного полюса

$$y_k = \frac{x_k}{1 - x_0}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

так что

$$\|y\|^2 = \frac{1 - x_0^2}{(1 - x_0)^2} = \frac{1 + x_0}{1 - x_0},$$

и, значит, формулы

$$x_0 = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}, \quad x_k = \frac{2y_k}{\|y\|^2 + 1}$$

задают обратное отображение. Легко проверить хорошо известный факт о конформности этого отображения, а точнее, установить равенство

$$dx^2 = \sum_0^n dx_k^2 = \frac{4}{(\|y\|^2 + 1)}\,dy^2.$$

Обозначим через S_0^n сферу с выколотым северным полюсом. Стереографическая проекция определяет диффеоморфизм S_0^n на $\mathbb{R}^n$, а значит, индуцирует диффеоморфизм $T^*S_0^n$ с $T^*\mathbb{R}^n$ (который переводит каноническую 1-форму на $T^*S_0^n$ в каноническую 1-форму на $T^*\mathbb{R}^n$). В результате мы получим $\xi = \xi(y, \eta)$ и $\eta = \eta(x, \xi)$, для которых $\xi\cdot dx = \eta\cdot dy$, причем $\xi = \xi(y, \eta)$ и $\eta = \eta(x, \xi)$ определяются этим уравнением. Пользуясь тем фактом, что $\xi \cdot x = 0$ и $\sum x_i^2 = 1$, легко проверить, что $\eta(x, \xi)$ имеет вид $\eta_k = (1 - x_0)\xi_k + \xi_0 x_k$, и, поскольку $\eta \cdot y = \sum \eta_k y_k = \xi_0$, получаем

$$\xi_0 = \eta \cdot y, \quad \xi_k = \frac{\|y\|^2 + 1}{2}\eta_k - (\eta \cdot y) y_k,$$

так что

$$\|\xi\| = \frac{\|y\|^2 + 1}{2}\|\eta\|.$$

Теперь мы можем воспользоваться диффеоморфизмом $T^*S_0^n$ на $T^*\mathbf{R}^n$ и перенести гамильтониан

$$F(y, \eta) = \frac{(\|y\|^2 + 1)^2 \|\eta\|^2}{8}.$$

Если u — произвольная функция вещественного переменного, для которой $u'(^1/_2) = 1$, то $u(F)$ и F определяют одни и те же траектории на энергетической поверхности $F = 1/2$. Возьмем $G = u(F) = \sqrt{2F} - 1$. Тогда

$$G = \frac{(\|y\|^2 + 1)\|\eta\|}{2} - 1$$

и соответствующее гамильтоново векторное поле η определяется формулой $\eta \lrcorner \omega = -dG$. Введем теперь векторное поле ξ условием

$$\eta = \|\eta\| \xi,$$

т. е. ξ определено только для $\|\eta\| \neq 0$. Далее, поверхности $F = 1/2$ отвечает поверхность $G = 0$, и векторное поле ξ порождается гамильтонианом

$$H = \|\eta\|^{-1} G - \frac{1}{2} = \|\eta\|^{-1}(\sqrt{2F} - 1) - \frac{1}{2} = \frac{\|y\|^2}{2} - \frac{1}{\|\eta\|}.$$

Положим $p = -y$ и $q = \eta$; тогда $dp \wedge dq = d\eta \wedge dy$. Получаем

$$H = {}^1/_2\|p\|^2 - 1/\|q\|,$$

а это гамильтониан для задачи Кеплера. Энергетическая поверхность $\Phi = {}^1/_2$ отвечает поверхности $H = -{}^1/_2$. Следующим образом можно получить энергетическую поверхность более общего вида. Рассмотрим ковекторы длины ρ, т. е. множество всех (x, ξ) с $\|\xi\| = \rho$, и образ этого множества при стереографической проекции, т. е. гиперповерхность $F = {}^1/_2\rho^2$. Теперь положим

$$G = (2\rho^2 F)^{1/2} - \rho^2 = \frac{1}{2}\rho(\|y\|^2 + 1)\|\eta\| - \rho^2,$$

так что поверхность задается уравнением $G = 0$. Тогда

$$\rho^{-3}\|\eta\|^{-1} G = \frac{\|y\|^2}{2\rho^2} - \frac{1}{\rho\|\eta\|} + \frac{1}{2\rho^2}.$$

Сделав симплектическую замену координат $p=-y/\rho$ и $q=\rho\eta$, мы переведем поверхность $G=0$ в энергетическую поверхность $H=-1/2\rho^2$ для задачи Кеплера. Итак, проведенное обсуждение можно суммировать следующим образом. Каждая из энергетических поверхностей $\|\xi\|^2={}^1/_2\rho^2$ является многообразием размерности $2n-2$, которое расслаивается на круги (геодезические) над симплектическим многообразием размерности $2n-2$. При стереографической проекции $(2n-2)$-мерное многообразие (без точек, лежащих над северным полюсом) переходит в многообразие, которое можно отождествить с пространством орбит в задаче Кеплера с энергией $H=-1/2\rho^2$. В частности, индуцированное отображение $(2n-2)$-мерного многообразия на $(2n-2)$-мерное пространство орбит задачи Кеплера представляет собой симплектический диффеоморфизм. При $n=3$ «пополненное» пространство орбит топологически есть $S^2\times S^2$.

Проанализируем теперь в более классических терминах параметры, входящие в орбиты Кеплера и описанные на языке стереографической проекции $(x,\ \xi)\longmapsto(y,\ \eta)\longmapsto(-p,\ q)$. Заданная орбита соответствует большому кругу. Поскольку вся картина инвариантна относительно всех вращений вокруг оси x_0, можно считать, что орбита лежит в подпространстве $x_3=\ldots=x_n=0$ и описывается уравнениями

$$x_0=\sin\alpha\cos s,\qquad x_1=\sin s,\qquad x_2=-\cos\alpha\cos s,$$

так что

$$\xi_0=-\sin\alpha\sin s,\quad \xi_1=\cos s,\quad \xi_2=\cos\alpha\sin s,$$

и, значит, полагая $e=\sin\alpha$, получаем

$$p_1=-\frac{\sin s}{1-e\cos s},\qquad p_2=\frac{\sqrt{1-e^2}\cos s}{1-e\cos s},$$

$$q_1=\cos s-e,\qquad q_2=\sqrt{1-e^2}\sin s,$$

т. е. p описывает круг, а q описывает эллипс с эксцентриситетом e, параметризованные эксцентрической аномалией s (Стернберг [2]). Далее, $\|q\|^2=(1-e\cos s)^2$, т. е.

$$t=\int_0^s|q|\,ds=\int_0^s(1-e\cos s)\,ds=s-e\sin s,$$

и наша регуляризационная процедура в самом деле приводит к уравнению Кеплера. По поводу применения этих результатов к доказательству существования периодических траекторий в задаче трех тел в условиях, когда ее можно рассматривать как малое возмущение движения Кеплера, мы отсылаем читателя к работам Мозера [6] и Вейнстейна [8]. В этих статьях обсуждается более общая проблема существования периодических траекторий для систем, являющихся возмущениями систем, имеющих многообразия периодических траекторий. Наша цель — воспользоваться этими примерами для изучения процедуры квантования, описываемой в следующей главе, и для изучения асимптотического распределения собственных значений эллиптических операторов.

Предыдущие рассмотрения показали, почему группа $O(4)$ появляется как группа симметрии в задаче Кеплера на множестве орбит с фиксированной (отрицательной) энергией. (Этот факт поразительно подтверждается при изучении атомных спектров. Каждый энергетический уровень атома водорода встречается с кратностью, соответствующей некоторому неприводимому представлению группы $O(4)$. Для сравнения отметим, что спектр щелочных металлов имеет лишь $O(3)$-симметрию. Однако для высших уровней энергии внешнего электрона, где потенциал имеет приблизительно вид k/r, появляется аппроксимативная $O(4)$-вырожденность.) Если рассмотреть множество орбит со всеми отрицательными энергиями, то, как известно, там действует еще бо́льшая группа симметрий, а именно группа $SO(2, 4)$ ортогональных преобразований шестимерного пространства, сохраняющих квадратичную форму с сигнатурой $++----$. Именно, пусть T^+S^3 — подмножество в T^*S^3, состоящее из ненулевых ковекторов. Мы покажем, что группа $SO(2, 4)$ транзитивно действует как группа симплектических диффеоморфизмов на T^+S^3. (Во всем дальнейшем мы могли бы заменить 3 на n, а $SO(2, 4)$ на $SO(2, n+1)$ и т. д.)

Пусть G — группа Ли и g — ее алгебра Ли. Если $\xi \in g$, то $\exp t\xi$ — однопараметрическая подгруппа в G, где через $\exp\colon g \to G$ обозначено экспоненциальное отображение, и любая однопараметрическая подгруппа в G имеет такой вид. Если a — некоторый элемент G, то $a(\exp t\xi)a^{-1}$ — снова однопараметрическая подгруппа и, значит, имеет вид $\exp t\zeta$. Отображение $\xi \longmapsto \zeta$ линейно; положим $\zeta = \mathrm{Ad}_a\,\xi$. Итак, для каждого $a \in G$ мы имеем линейное преобразование; в результате мы получаем линейное представление G на g, известное как присоединенное представление. Поскольку G действует на g, имеется контрагредиентное действие на дуальном пространстве g^*: для всякого $l \in g^*$ определим элемент $a \cdot l$ формулой

$$\langle \xi, a \cdot l \rangle = \langle \mathrm{Ad}_{a^{-1}}\xi, l \rangle.$$

Это представление принято называть *коприсоединенным* представлением. Для любых $\eta \in g$ и $l \in g^*$ можно рассмотреть кривую $(\exp t\eta)\cdot l$. Обозначим касательный вектор к этой кривой при $t=0$ через η_l. Поскольку

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\exp t\eta}\xi\,|_{t=0} = [\eta, \xi],$$

где через [,] обозначен коммутатор, имеем

$$\langle \xi, \eta_l \rangle = \frac{d}{dt} \langle \mathrm{Ad}_{\exp(-t\eta)} \xi, l \rangle |_{t=0} = -\langle [\eta, \xi], l \rangle.$$

Векторы η_l порождают касательное пространство к орбите $G \cdot l$ в точке l. В следующем параграфе мы докажем, что для любой группы Ли G и любого $l \in g^*$ орбита $G \cdot l$ всегда является симплектическим многообразием с симплектической формой ω, определяемой условием

$$\langle \xi_l \wedge \eta_l, \omega \rangle = -\langle [\xi, \eta], l \rangle.$$

(Фактически мы даже докажем, что все симплектические многообразия, на которых G транзитивно действует как группа симплектических диффеоморфизмов, могут быть получены небольшой модификацией предыдущей конструкции.)

Покажем теперь, как можно рассмотреть T^+S^3 в виде некоторой орбиты в дуальном пространстве к алгебре Ли группы $SO(2, 4)$. Для этого удобно иметь следующее описание алгебры Ли. Пусть V — вещественное векторное пространство, снабженное невырожденным скалярным произведением (,). Обозначим через $o(V)$ алгебру Ли ортогональной группы, отвечающей этому скалярному произведению. Мы можем отождествить $\bigwedge^2(V)$ с $o(V)$, считая, что $u \wedge v$ действует как линейное преобразование

$$(u \wedge v) \cdot w = (v, w) u - (u, w) v.$$

Легко проверить, что при этом действительно определяется отображение, эквивариантное относительно действия $O(V)$. Аналогично, метрика на V индуцирует изоморфизм V с V^*, а значит, $\bigwedge^2(V)$ с дуальным к нему пространством. Значит, можно отождествить $o(V)^*$ с $\bigwedge^2(V)$. В частности, получаем отождествление $o(2, 4)$ с $\bigwedge^2(\mathbf{R}^{2,4})$.

Рассмотрим множество элементов $o(2, 4) \sim \bigwedge^2(\mathbf{R}^{2,4})$ вида

$$f \wedge f' \neq 0, \quad \text{где} \quad \|f\|^2 = \|f'\|^2 = 0 \quad \text{и} \quad (f, f') = 0.$$

(Как линейные преобразования эти элементы можно охарактеризовать как такие нильпотентные элементы ранга 2, у которых множество значений (которое двумерно) тотально изотропно.) По теореме Витта любые два таких элемента сопряжены относительно $O(2, 4)$. Покажем теперь, что относительно связной группы $SO(2, 4)$ множество этих элементов распадается на две компоненты. Выберем ортонормированный базис $e_{-1}, e_0, e_1, e_2, e_3, e_4$ в $\mathbf{R}^{2,4}$ так, чтобы основная форма была положительно определена на e_{-1}, e_0 и отрицательно определена на остальной части базиса. Мы утверждаем, что для любого рассматриваемого элемента $f \wedge f'$ должно быть

$$(e_{-1} \wedge e_0, f \wedge f') \neq 0. \tag{6.7}$$

В самом деле, предположим, что $(e_{-1} \wedge e_0,\ f \wedge f') = 0$. Тогда пространство, порожденное f и f', т. е. множество значений $f \wedge f'$, содержало бы ненулевой вектор, ортогональный и e_{-1} и e_0. Но такой вектор лежал бы в $\mathbf{R}^4$ и не был изотропным. Значит, относительно связной группы $SO(2,\ 4)$ множество всех $f \wedge f'$ распадается на две компоненты в соответствии со знаком скалярного произведения в (6.7). Обозначим через $\mathcal{Y}$ множество всех $f \wedge f'$, для которых скалярное произведение положительно. Не меняя элемента $f \wedge f'$, можно выбрать f и f' так, чтобы $(f,\ e_0) = 0 = (f',\ e_{-1}) = 0$, в то время как $(f,\ e_{-1})$ и $(f',\ e_0)$ оба положительны. Это показывает, что каждый элемент $\mathcal{Y}$ имеет единственное представление вида

$$s(e_{-1}+p) \wedge (e_0+q), \quad \text{где} \quad s>0,\ p,\ q \in \mathbf{R}^4,\ (p,\ q)=0,$$
$$\|p\|^2 = \|q\|^2 = -1. \qquad (6.8)$$

Далее, мы можем считать, что p пробегает единичную сферу в $\mathbf{R}^4$, а q при фиксированном p пробегает множество единичных касательных векторов к этой сфере. Значит, (6.8) отождествляется с ненулевым касательным вектором к трехмерной сфере. Пользуясь римановой метрикой, можно отождествить TS^3 и T^*S^3, и мы видим, что $\mathcal{Y}$ диффеоморфно T^+S^3. Вскоре мы покажем, что если ввести на T^*S^3 каноническую симплектическую форму, то этот диффеоморфизм симплектический.

Исследуем вначале действие $SO(2)$ и $SO(4)$. Каждое $A \in SO(4)$ сохраняет e_{-1} и e_0 и переводит p в Ap, а q в Aq. Ясно, что это индуцированное действие $SO(4)$ на TS^3. Элемент $R_\theta \in SO(2)$ переводит e_{-1} в $\cos\theta e_{-1} + \sin\theta e_0$, а e_0 в $-\sin\theta e_{-1} + \cos\theta e_0$. Значит,

$$R_\theta[(e_{-1}+p) \wedge (e_0+q)] =$$
$$= (\cos\theta e_{-1} + \sin\theta e_0 + p) \wedge (-\sin\theta e_{-1} + \cos\theta e_0 + q) =$$
$$= (e_{-1} + \cos\theta p - \sin\theta q) \wedge (e_0 + \sin\theta p + \cos\theta q).$$

Другими словами, на TS^3 отображение R_θ поворачивает $(p,\ q)$ на угол θ по окружности, определяемой p и q. Но это в точности образ $(p,\ q)$ относительно геодезического потока. Значит, на *единичных* векторах группа $SO(2)$ действует как геодезический поток. Обозначим через F_t этот геодезический поток. Проведенное выше вычисление показывает, что для векторов длины s имеем $R_\theta(p,\ q) = F_{s^{-1}\theta}(p,\ q)$. Выразим это немного иначе: $H = {}^1/_2\|q\|^2 = -{}^1/_2 s^2$. Геодезический поток имеет своей инфинитезимальной образующей векторное поле ξ_H, соответствующее $-dH$ при отождествлении дифференциальных форм и векторных полей на T^*S^3 при помощи симплектической формы. Рассмотрим функцию $(-2H)^{1/2}$. Она приводит к векторному полю $-(-2H)^{-1/2}\xi_H = -s^1\xi_H$. Таким образом, R_θ действует так, как если бы это действие порождалось векторным полем, отвечающим функции $(-2H)^{1/2}$.

Пусть $O(1, 4)$ — подгруппа группы $O(2, 4)$, оставляющая неподвижным вектор e_{-1}. Ясно, что $SO(1, 4)$ транзитивно действует на $\mathcal{V}$. В самом деле, пусть $\mathbf{R}^{1,4}$ — подпространство в $\mathbf{R}^{2,4}$, порожденное векторами e_0, e_1, e_2, e_3 и e_4. По теореме Витта $O(1, 4)$ транзитивно действует на множество пар вида (p, f'), где $\|p\|^2 = -1$, $\|f'\|^2 = 0$, $\langle p, f'\rangle = 0$ и где p, f' — ненулевые элементы $\mathbf{R}^{1,4}$. Далее, вектор f' не может быть ортогонален e_0, поскольку он тогда лежал бы в $\mathbf{R}^4$ и не мог быть изотропным. Значит, любой такой элемент f' можно представить в виде $f' = s(e_0 + q)$, где $\|q\|^2 = -1$ и $\langle p, q\rangle = 0$, $s \neq 0$. Группа $SO(1, 4)$ транзитивно действует на парах, для которых $s > 0$, и ясно, что их можно отождествить с точками $\mathcal{V}$. Отображение $\mathcal{V} \to o(1, 4) \sim o(1, 4)^*$, переводящее $s(e_{-1} + p) \wedge (e_0 + q)$ в $p \wedge s(e_0 + q)$, очевидно, эквивариантно относительно $SO(1, 4)$ и переводит $\mathcal{V}$ в одну из двух компонент множества (ненулевых) нильпотентных элементов $o(1, 4)$.

Для группы $SO(1, 4)$ можно дать довольно прямую интерпретацию ее действия на T^*S^3. Действительно, $SO(1, 4)$ можно рассматривать как группу (или ее связную компоненту) всех конформных преобразований S^3, а значит, она индуцирует действие на T^*S^3. Мы утверждаем, что это индуцированное действие совпадает с описанным выше орбитальным действием. Чтобы провести отождествление, будем рассматривать S^3 как множество «времениподобных направлений будущего» в $\mathbf{R}^{1,4}$. Итак, мы рассматриваем «световой конус будущего» в $\mathbf{R}^{1,4}$, состоящий из всех нулевых векторов f', для которых $\langle e_0, f'\rangle > 0$. Группа $SO(1, 4)$ транзитивно действует на множестве таких векторов, а значит, на множестве всех лучей, т. е. классов эквивалентности таких векторов, где два вектора отождествляются, если они отличаются на положительный скалярный множитель. Множество таких лучей топологически представляет собой S^3, и мы можем явно параметризовать их точками S^3, если выберем единичный вектор e_0, а именно, каждый такой луч имеет единственный представитель вида $e_0 + q$ с $\|q\|^2 = -1$. Таким образом, мы получаем действие $SO(1, 4)$ на S^3, которое, как легко убедиться, конформно. Касательное пространство к S^3 в точке f' можно отождествить с факторпространством пространства всех векторов, ортогональных световому конусу, по прямой, порожденной f'. Если $f' = e_0 + q$, то это пространство можно отождествить с множеством всех векторов вида sp, где $p \in \mathbf{R}^4$, $\langle p, q\rangle = 0$ и $\|p\|^2 = -1$. Теперь непосредственно получаем, что действие $SO(1, 4)$ на $\mathcal{V}$ можно отождествить с индуцированным действием $SO(1, 4)$ на T^+S^3, отвечающим конформному действию на S^3. Рассмотрим p как ковектор, и пусть ξ — любой элемент $o(1, 4)$; соответствующий касательный вектор в точке $[(e_0+q)]$ обозначим через $\xi_{[(e_0+q)]}$. Тогда значение ковектора p на касательном векторе $\xi_{[(e_0+q)]}$ равно

$$-(p, \xi_{[(e_0+q)]}) = -\langle p \wedge (e_0+q), \xi\rangle$$

(где слева берется скалярное произведение векторов из $\mathbf{R}^{1,4}$, а справа — векторов из $o(1, 4)$).

Теперь мы можем показать, что все три полученные идентификации для $\mathcal{V}$ — как множества нильпотентных элементов в $o(2, 4)$, как множества нильпотентных элементов в $o(1, 4)$ и как T^+S^3 — являются симплектическими диффеоморфизмами. Поскольку переход от $o(2, 4)^*$ к $o(1, 4)^*$ — отображение ограничения, из общих соображений или непосредственно из формулы

$$\langle \xi_l \wedge \eta_l, \omega_{\mathcal{V}}\rangle = \langle [\xi, \eta], l\rangle$$

для значений симплектической формы $\omega_{\mathcal{V}}$ многообразия $\mathcal{V}$ (вычисленных на образах ξ_l, η_l в точке $l \in \mathcal{V}$ векторов $\xi, \eta \in o(2, 4)$) следует, что отождествление $\mathcal{V}$ с подмногообразием как в $o(2, 4)^*$, так и в $o(1, 4)^*$ является симплектическим диффеоморфизмом. Теперь покажем, что отождествление $\mathcal{V}$ с орбитой в $o(1, 4)^*$ или с T^+S^3 симплектично. Для этого удобно воспользоваться следующей леммой:

Пусть ξ и η — векторные поля на дифференцируемом многообразии M, а $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$ — индуцированные векторные поля на T^*M. Пусть α — фундаментальная 1-форма на T^*M, $\omega = d\alpha$ — фундаментальная 2-форма, z — некоторая точка на T^*M и $x = \pi z$ — соответствующая точка на базе. Тогда

$$\langle \hat{\xi}_z \wedge \hat{\eta}_z, \omega\rangle = -\langle [\hat{\xi}, \hat{\eta}]_z, \alpha\rangle = -\langle [\xi, \eta]_x, z\rangle.$$

Доказательство леммы. Поскольку $\hat{\xi}$ — инфинитезимальный автоморфизм кокасательного расслоения, то $D_{\hat{\xi}}\alpha = 0$, где D — производная Ли. Значит, $0 = D_{\hat{\xi}}\alpha = \hat{\xi} \lrcorner d\alpha + d(\hat{\xi} \lrcorner \alpha)$, или $\hat{\xi} \lrcorner \omega = -d\langle \xi, \alpha\rangle$. Таким образом,

$$\langle \hat{\xi} \wedge \hat{\eta}, \omega\rangle = -\hat{\eta} \lrcorner \hat{\xi} \lrcorner \omega = -\hat{\eta} \lrcorner d(\hat{\xi} \lrcorner \alpha) = -D_{\hat{\eta}}(\hat{\xi} \lrcorner \alpha) = [\hat{\xi}, \hat{\eta}] \lrcorner \alpha,$$

поскольку $D_{\hat{\eta}}\alpha = 0$. Если фиксировать z и воспользоваться определением $\langle \zeta_z, \alpha\rangle = \langle d\pi\zeta_z, z\rangle$ для любого касательного вектора ζ_z в точке z, то лемма будет доказана. Беря $z = p$, $x = [e_0+q]$ и пользуясь полученными выше формулами и леммой, мы докажем, что отождествление $\mathcal{V}$ с T^+S^3 — симплектический диффеоморфизм.

Заметим, что группа $SO(1, 4)$ сохраняет не только симплектическую структуру на T^*S^3, но также и кокасательное расслоение. С другой стороны, геодезический поток, разумеется, не сохраняет кокасательное расслоение, а значит, его не сохраняет и

$SO(2)$. Поскольку $SO(1, 4)$ — максимальная подгруппа в $SO(2, 4)$, мы получаем, что $SO(1, 4)$ — наибольшая связная подгруппа, сохраняющая кокасательное расслоение.

§ 7. Однородные симплектические пространства

Пусть группа Ли G действует на многообразии X. Тем самым задано гладкое отображение $G \times X \to X$, $(a, x) \longmapsto ax$, являющееся групповым действием. Дифференциал этого отображения индуцирует отображение $T_a G \times T_x X \to T_{ax} X$. В частности, если $a = e$ — единица группы G, то для любого элемента $\xi \in g = T_e G$ алгебры Ли группы G мы получаем векторное поле $\bar{\xi}$ на X, где $\bar{\xi}_x$ — образ $(\xi, 0)$ при отображении $T_e G \times T_x X \to T_x X$. Значит, $\bar{\xi}$ — инфинитезимальная образующая потока $x \longmapsto (\exp t\xi)\, x$.

Из равенства

$$\frac{d}{dt}\{[a^{-1}(\exp t\xi)\, a]\, x\} = (a^*\bar{\xi})(x)$$

следует, что

$$a^*\bar{\xi} = \overline{(\operatorname{Ad} a^{-1})\, \xi}.$$

Полагая $a = \exp s\eta$ и дифференцируя по s, получаем

$$[\bar{\eta}, \bar{\xi}] = -\overline{[\eta, \xi]}.$$

(Причина странного изменения знака в том, что мы отождествляем алгебру Ли группы G с множеством левоинвариантных векторных полей на G, а значит, они порождают правые сдвиги. Иногда принимается противоположное соглашение, например у Сурьо [9].)

Полагая $\hat{\xi} = -\bar{\xi}$, получаем отображение $\xi \longmapsto \hat{\xi}$, являющееся гомоморфизмом g в алгебру Ли векторных полей на X.

Предположим теперь, что X — симплектическое многообразие и G действует как группа симплектических автоморфизмов. Тогда $\hat{\xi}$ удовлетворяет условию

$$D_{\hat{\xi}}\omega = 0 \quad \text{или} \quad d(\hat{\xi} \lrcorner\, \omega) = 0.$$

Будем называть это действие *сильно симплектическим*, если $\hat{\xi} \lrcorner\, \omega = df_{\xi}$ для некоторой функции f_{ξ}. Заметим, что

$$[\hat{\xi}, \hat{\eta}] \lrcorner\, \omega = D_{\hat{\xi}}(\hat{\eta} \lrcorner\, \omega) = \hat{\xi} \lrcorner\, d(\hat{\eta} \lrcorner\, \omega) + d(\hat{\xi} \lrcorner\, (\hat{\eta} \lrcorner\, \omega)) = d(\hat{\xi} \lrcorner\, \hat{\eta} \lrcorner\, \omega),$$

так что $[\xi, \eta]^{\wedge} \lrcorner\, \omega$ всегда имеет вид $-df$. Значит, если $[g, g] = g$, то *все симплектические действия сильно симплектичны*. (Так происходит, например, если алгебра Ли g полупроста или если g — полупрямое произведение полупростой алгебры Ли k, действующей на конечномерном векторном пространстве V и не имеющей тривиальной компоненты в представлении k на V.) Предположим, что действие сильно симплектично. Выберем базис в алгебре Ли и функции f_{ξ_i} для элементов базиса ξ_i; имеем

$$\hat{\xi} \rfloor \omega = -d\sum a_i f_{\xi_i}, \quad \text{если} \quad \xi = \sum a_i \xi_i.$$

Иначе можно определить функцию $f\colon X \to g^*$ равенством

$$\langle \xi, f \rangle = \sum a_i f_{\xi_i},$$

и тогда $\hat{\xi} \rfloor \omega = -d(\langle \xi, f \rangle)$. Заметим, что f определяется только с точностью до аддитивной константы (из g^*). Далее, для любого $a \in G$ имеем

$$a^*(\hat{\xi} \rfloor \omega) = d\langle \xi, a^*f \rangle,$$

поскольку ξ — константа в этом равенстве. Но $a^*\omega = \omega$ и $a^*\hat{\xi} = (\operatorname{Ad} a^{-1}\xi)\hat{}$, так что, полагая $\eta = \operatorname{Ad} a^{-1}\xi$, получаем

$$\hat{\eta} \rfloor \omega = d\langle \operatorname{Ad} a\eta, a^*f \rangle = d\langle \eta, (\operatorname{Ad} a)^*(a^*f) \rangle.$$

Здесь $(\operatorname{Ad} a)^*\colon g^* \to g^*$ — отображение, сопряженное $\operatorname{Ad} a$. В частности, $(\operatorname{Ad} a)^*(a^*f) - f$ — константа на X. Заменяя a на a^{-1}, получаем, что $\rho_a f - f = z_a$ — константа, где ρ_a — представление

$$\rho_a f(x) = (\operatorname{Ad}^{\#} a) f(a^{-1}x),$$

а $\operatorname{Ad}^{\#}$ — представление G на g^*, контрагредиентное к присоединенному представлению. Ясно, что $a \longmapsto z_a$ — коцикл на G со значениями в g^*, т. е. имеет место тождество

$$z_{ab} = (\operatorname{Ad}^{\#} a) z_b + z_a.$$

При замене f на $f + c$, где $c \in g^*$ — константа, к z_a добавляется кограница $(\operatorname{Ad}^{\#} a)c - c$, а значит, класс когомологий корректно определен. Он является препятствием к выбору $f\colon X \to g^*$ в классе G-отображений. Если же это препятствие равно нулю, то

$$\langle \eta, a^*f \rangle = \langle \operatorname{Ad} a^{-1}\eta, f \rangle,$$

и, полагая $a = \exp t\xi$ и дифференцируя по t, получаем

$$D_{\hat{\xi}}\langle \eta, f \rangle = \langle [\xi, \eta], f \rangle \quad \text{или} \quad D_{\hat{\xi}} f_\eta = f_{[\xi, \eta]}.$$

Но $D_{\hat{\xi}} f_\eta = \hat{\xi} \rfloor df_\eta$ — это определение скобки Пуассона $\{f_\xi, f_\eta\}$. Значит, в этом случае

$$\{f_\xi, f_\eta\} = f_{[\xi, \eta]},$$

т. е. отображение $\xi \longmapsto f_\xi$ — гомоморфизм алгебр Ли. Действие g на X вместе с таким поднятием гомоморфизма $\xi \longmapsto \hat{\xi}$ до $\xi \longmapsto f_\xi$ (если оно возможно) называется *гамильтоновым* действием G иа X. Симплектические действия очень важны в классической механике. (См., например, у Сурьо [9] элегаитное обсуждение многих классических законов физики с этой точки зрения.) Симплектическое действие называется *элементарным*, если действие G на X транзитивно. (Это классический аналог квантового понятия элементарной частицы как неприводимого представления группы G.) Если G действует на X транзитивно и это действие гамильтоново, то уравнение

$$(\mathrm{Ad}^{\#} a) f = f \circ a$$

показывает, что f отображает X на орбиту. Заметим также, что f — *иммерсия*. Действительно, поскольку G действует на X транзитивно, векторные поля $\hat{\xi}$ порождают касательное пространство в каждой точке. Если $df_x(\hat{\xi}) = \langle \xi, df \rangle_x = 0$, то $\langle \hat{\xi}, df_\eta \rangle_x = 0$ для всех η, откуда $\hat{\xi}_x = 0$, так как $df_\eta = \hat{\eta} \rfloor \omega$ порождают кокасательное пространство. Значит, X — накрывающее пространство орбиты в g^*. Это наводит на мысль, что орбиты в g^* — симплектические многообразия, и это в самом деле верно, как доказали А. А. Кириллов, Костант и Сурьо. Мы рассмотрим эти факты с более общей точки зрения, предложенной Чу [10].

Пусть G — группа Ли и $X = G/H$ — однородное пространство группы G, где H — замкнутая подгруппа, и пусть $\pi\colon G \to G/H = X$ — проекция. Если Ω — инвариантная форма на X, то ясно, что $\sigma = \pi^*\Omega$ — левоинвариантная форма на G, удовлетворяющая условиям:

(i) $\xi \rfloor \sigma = 0$ для всех $\xi \in h$, где h — алгебра Ли группы H;

(ii) σ инвариантна относительно правого умножения на элементы H, а значит, относительно оператора Ad для элементов из H.

Ясно, что верно и обратное: любая левоинвариантная форма на G, удовлетворяющая (i) и (ii), всегда получается из формы на G/H. Если Ω — симплектическая форма, то левоинвариантное векторное поле удовлетворяет условию $\xi \rfloor \sigma = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi \in h$. Вообще, если $d\sigma = 0$, то множество всех векторных полей, удовлетворяющих условию $\xi \rfloor \sigma = 0$, является интегрируемым подрасслоением в TG, и, в частности, те из этих полей, которые левоинвариантны, образуют подалгебру в алгебре Ли группы G. Обозначим ее через h_σ. Пусть H_σ — группа, отвечающая h_σ. Заметим, что для любого $\xi \in h_\sigma$ имеем $D_\xi \sigma = \xi \rfloor d\sigma + d(\xi \rfloor \sigma) = 0$, т. е. σ инвариантна относительно H_σ. Проблема только в том, что H_σ необязательно замкнута. Будем говорить, что σ *регулярна*, если H_σ замкнута. Заметим, что если G/H — симплектическое однородное пространство, так что H — замкнутая подгруппа, и если построить σ, как указано выше, то H_σ — связная компонента единицы группы H (а значит, замкнутая подгруппа в G). Итак, доказано

Предложение 7.1 (Чу [10]). *Каждое $2p$-мерное однородное симплектическое пространство определяет левоинвариантную регу-*

лярную замкнутую 2-форму ранга $2p$ на G. Обратно, регулярная замкнутая 2-форма определяет однородное симплектическое пространство. С точностью до накрытия пространство всех однородных симплектических многообразий для G совпадает с пространством орбит действия G на $Z^2_{\mathrm{reg}}(g)$, где через $Z^2_{\mathrm{reg}}(g)$ обозначено множество регулярных 2-коциклов алгебры Ли g.

Заметим, что если $\sigma = d\beta$, где β — левоинвариантная 1-форма, то σ автоматически регулярна. Действительно, $D_\xi\beta = \xi \rfloor d\beta + d(\xi \rfloor \beta) = \xi \rfloor \sigma$ для любого левоинвариантного векторного поля ξ, поскольку $\xi \rfloor \beta$ — константа. Значит, $\xi \in h_\sigma$ тогда и только тогда, когда $D_\xi\beta = 0$. Далее, ясно, что $H = \{a \mid (\mathrm{Ad}^\# a)\beta = \beta\}$ — замкнутая подгруппа и H_σ — компонента единицы. Значит, если $H^2(g) = \{0\}$, то каждый коцикл регулярен. Можно также показать, что если $H^1(g) = \{0\}$, то каждый коцикл регулярен. Действительно, утверждение $H^1(g) = \{0\}$ равносильно инъективности отображения $d: g^* \to \bigwedge^2(g^*)$. Но тогда $\xi \rfloor \sigma = 0$ эквивалентно $D_\xi\sigma = d(\xi \rfloor \sigma) = 0$, так что h_σ — алгебра Ли группы изотропии σ. Это соображение было подсказано нам О. Габбером. Во всяком случае из проведенного обсуждения ясно, что имеет место

Предложение 7.2 (Кириллов — Костант — Сурьо). *Каждая орбита $\mathrm{Ad}^\#(G)\beta$ при $\beta \in g^*$ является симплектическим многообразием с симплектической структурой, индуцированной формой $d\beta$.*

Далее, справедливо

Предложение 7.3 (Чу [4]). *Если G — односвязная группа Ли, то каждая левоинвариантная замкнутая 2-форма регулярна.*

Наметим доказательство. Пусть σ — замкнутая 2-форма. Можно рассматривать σ как 1-коцикл f из g в g^*, где $f(\xi) = \xi \rfloor \sigma$. Здесь f — коцикл относительно действия $\mathrm{ad}^\#$ алгебры Ли g на g^*. Значит, f определяет действие g аффинными преобразованиями на g^*:

$$\xi \cdot \theta = (\mathrm{ad}^\# \xi)\theta + f(\xi) = (\mathrm{ad}^\# \xi)\theta + \xi \rfloor \sigma.$$

Поскольку G односвязна, это определяет аффинное действие G на g^*. Ясно, что $\xi \in h_\sigma$ тогда и только тогда, когда $\xi \cdot 0 = 0$. Таким образом, H_σ — компонента единицы подгруппы изотропии начала и, значит, замкнута.

Поскольку орбиты в g^* являются (с точностью до накрытий) «универсальными» элементарными однородными симплектическими пространствами, важно изучить их. В этой связи для комплексных полупростых групп см. работу Костанта [11], для вещественных полупростых групп см. Ротшильд [12], для нильпотентных групп см. [20].

Пусть σ — левоинвариантная замкнутая 2-форма на G, причем подалгебра h имеет минимальную размерность среди всех подалгебр вида h_σ. Отсюда следует, что если σ_t — кривая из замкнутых 2-форм с $\sigma_0=\sigma$, то любое $\xi \in h_\sigma$ можно включить в кривую ξ_t с $\xi_0=\xi$ и $\xi_t \in h_{\sigma_t}$. (В самом деле, выберем подпространство m, дополнительное к h_σ в алгебре Ли TG_e. Поскольку $\dim h_\sigma$ минимальна, отсюда следует, что $\dim h_\sigma = \dim h_{\sigma'}$ для всех σ', близких к σ. Тогда проекция вдоль m определяет изоморфизм h_σ с $h_{\sigma'}$ для всех σ', близких к σ.) В частности, пусть θ — любая левоинвариантная 1-форма; рассмотрим

$$\sigma_t=\sigma+t\,d\theta.$$

Имеем $\xi_t=\xi+t\xi'+O(t^2)$. Рассматривая коэффициент при t в уравнении $\xi_t \rfloor \sigma_t=0$, получаем

$$\xi \rfloor d\theta+\xi' \rfloor \sigma=0.$$

Пусть η — некоторый другой элемент h_σ; возьмем скалярное произведение этого последнего равенства с η. Имеем $\eta \rfloor \xi' \rfloor \sigma = -\xi' \rfloor \eta \rfloor \sigma=0$ и

$$\eta \rfloor \xi \rfloor d\theta=0.$$

Далее, поскольку и η и θ левоинвариантны, $\eta \rfloor \theta$ — константа, а потому $0=D_\xi(\eta \rfloor \theta)=D_\xi\eta \rfloor \theta+\eta \rfloor D_\xi\theta=[\xi,\ \eta] \rfloor \theta+\eta \rfloor \xi \rfloor d\theta$, так как $\xi \rfloor \theta$ — тоже константа. Значит,

$$[\xi,\ \eta] \rfloor \theta=0.$$

Поскольку это имеет место для произвольной формы θ, мы получаем, что $[\xi,\ \eta]=0$. Итак, доказано

Предложение 7.4. *Пусть σ — левоинвариантная замкнутая 2-форма, для которой h_σ имеет минимальную размерность. Тогда h_σ коммутативна. В частности, пусть X — однородное симплектическое многообразие с группой автоморфизмов G максимальной размерности. Тогда связная компонента подгруппы изотропии любой точки X коммутативна.*

Для случая, когда $\sigma=d\theta$ — точная форма, этот результат получили Дюфло и Вернь [14]. (Нетрудно заметить, что их доказательство проходит и в случае замкнутых 2-форм.) В случае, когда G — полупростая группа, пространство, дуальное к алгебре Ли, можно идентифицировать с алгеброй Ли при помощи формы Киллинга. Тогда условие, что $h_{d\theta}$ имеет минимальную размерность, переходит в условие минимальной размерности централизатора соответствующего элемента θ. В результате предложение 7.4 сводится к классическому утверждению о том, что для таких регулярных элементов централизатор абелев. Для регулярных полупростых элементов подалгебра $h_{d\theta}$ — это подалгебра Картана.

В случае полупростых подалгебр имеется теорема о сопряженности для картановских подалгебр, которую в вещественном случае можно сформулировать как утверждение о том, что если θ общего положения, то $h_{d\theta'}$ сопряжена $h_{d\theta}$ относительно присоединенной группы, когда элемент θ' достаточно близок к θ. Можно попытаться выяснить, в какой мере это утверждение остается справедливым в общем случае. Как показывает следующий пример, для произвольных алгебр Ли оно не верно. Пусть $g = \mathbb{R} + V$, где V — тривиальная алгебра Ли (векторное пространство с тривиальным коммутатором) и $[r, v] = rv$ для $r \in \mathbb{R}$ и $v \in V$. Легко убедиться, что для всякого $\theta \in g^*$, отличного от нуля на V, подалгебра $h_{d\theta}$ представляет собой гиперплоскость в V, задаваемую уравнением $\theta(v) = 0$, причем гиперплоскостям отвечают двумерные орбиты в g^*. Ясно, что никакие две такие подалгебры не сопряжены одна другой, если они различны. Назовем $\theta \in g^*$ *стабильным*, если алгебра $h_{d\theta'}$ сопряжена $h_{d\theta}$ для всех θ', близких к θ.

Предложение 7.5. *Если $h_{d\theta}$ имеет минимальную размерность и $[g, h_{d\theta}] \cap h_{d\theta} = \{0\}$, то элемент θ стабилен, и обратно.*

Доказательство. Ясно, что для любого θ' на орбите элемента θ алгебры $h_{d\theta}$ и $h_{d\theta'}$ сопряжены. Значит, мы получим нужный результат, если сможем найти подмногообразие W, трансверсальное орбите, проходящей через θ, и такое, что $h_{d\theta'} = h_{d\theta}$ для всех $\theta' \in W$ (в окрестности θ). По теореме о неявной функции можно свести задачу к соответствующей инфинитезимальной задаче: показать, что каждый элемент θ' можно представить в виде $\theta_1 + \theta_2$, где $\theta_1 \in g \rfloor d\theta$ (касательное пространство к орбите) и $h_{d\theta} \rfloor d\theta_2 = 0$ (ввиду минимальности $\dim h_{d\theta}$ это равносильно тому, что $h_{d(\theta+\theta_2)} = h_{d\theta}$ для достаточно малых θ_2). Поэтому достаточно показать, что в g нет вектора, на котором аннулируются все такие θ_1 и θ_2. Далее, $\langle \xi, g \rfloor d\theta \rangle = 0$ равносильно тому, что $\xi \rfloor d\theta = 0$, т. е. что $\xi \in h_{d\theta}$. С другой стороны, утверждение, что $\langle \xi, \theta_2 \rangle = 0$ для всех θ_2, — это то же самое, что $\langle \xi, \theta_2 \rangle = 0$ для всех θ_2 со свойством $\langle [g, h_{d\theta}], \theta_2 \rangle = 0$, т. е. что $\xi \in [g, h_{d\theta}]$. По предположению отсюда следует, что $\xi = 0$.

Если θ стабилен, то $h_{d\theta}$ должна иметь размерность общего положения, т. е. минимальную размерность. Предположим, что для некоторых $\eta \in h_{d\theta}$ и $\zeta \in g$ элемент $\sum [\eta, \zeta]$ лежит в $h_{d\theta}$, но отличен от нуля. Выберем γ так, чтобы $\langle \sum [\eta, \zeta], \gamma \rangle \neq 0$. Если применить условие существования сопряжения $h_{d(\theta+t\gamma)}$ с $h_{d\theta}$ и сравнить коэффициенты при t, то легко видеть, что для всех $\eta \in h_{d\theta}$ и $\zeta \in g$ должны быть разрешимы уравнения

$$\langle [[\xi, \eta], \zeta], \theta \rangle = \langle [\eta, \zeta], \gamma \rangle.$$

Взяв $\sum[\eta, \zeta] \in h_{d\theta}$ и пользуясь тождеством Якоби, мы слева получим нуль, в то время как правая часть отлична от нуля, что приводит к противоречию.

Заметим, что если заменить кограницу $d\theta$ коциклом σ, то предложение 7.5 не верно. Действительно, рассмотрим тривиальную трехмерную алгебру. Здесь каждая 2-форма является коциклом, и для ненулевой формы σ подалгебра h_σ является прямой $\{\zeta \lrcorner \sigma = 0\}$, причем различные прямые не сопряжены, поскольку присоединенная группа действует тривиально. С другой стороны, $[g, g] = 0$, т. е. условие $[g, h_\sigma] \cap h_\sigma = 0$ заведомо выполнено.

Для понимания этого примера полезно заметить, что для любой алгебры Ли g можно следующим образом построить ее центральное расширение при помощи $H^2(g)$. Выберем в $H^2(g)$ базис $c_1, \ldots, c_k$ и циклы $z_1, \ldots, z_k$, представляющие c_j. Положим, по определению, $[(v, x), (w, y)] = (z_1(x, y)c_1 + \ldots + z_k(x, y)c_k, [x, y])$, где v и w — элементы $H^2(g)$, а x и y — элементы g. Это задает на $H^2(g) + g$ структуру алгебры Ли.

Если $\theta \in (H^2(g) + g)^*$ имеет вид $\theta(v, x) = a_i$ при $v = \sum a_i c_i$, то ясно, что $d\theta = z_i$. Таким образом, каждый коцикл на g можно рассматривать как кограницу на расширенной алгебре. Если σ — коцикл на g, соответствующий когранице $d\theta$ на расширенной алгебре, то $h_{d\theta} = H^2(g) + h_\sigma$. Если σ стабилен, то это верно и для θ, и обратно. Поэтому должен выполняться критерий стабильности в расширенной алгебре.

Можно следующим образом усилить формулировку и доказательство предложения 7.5. Пусть l — алгебра Ли и g — идеал в l. Тогда каждый элемент l действует на g при помощи коммутирования, а значит, на g^* определено контрагредиентное действие. При $\xi \in l$ и $\theta \in g^*$ обозначим через $\xi \lrcorner d\theta$ результат действия ξ на θ, т. е. $(\xi \lrcorner d\theta)(\eta) = -[\xi, \eta] \lrcorner \theta$. Пусть L — группа Ли, соответствующая алгебре Ли l, и пусть L действует на g так, что соответствующее инфинитезимальное действие совпадает с коммутированием с l. Назовем θ *L-стабильным*, если $h_{d\theta'}$ сопряжена $h_{d\theta}$ при помощи элемента L для всех θ', близких к θ. Тогда условие L-стабильности состоит в том, что

$$[g, h_{\alpha\theta}] \cap (l \lrcorner d\theta)^\perp = 0.$$

Доказательство остается прежним.

В частности, в качестве L можно взять группу всех автоморфизмов g; в этом случае l — алгебра дифференцирований g, и мы получаем условие стабильности относительно всех автоморфизмов. Можно построить алгебры, у которых нет форм θ, стабильных относительно группы всех автоморфизмов; ср. [15].

Теперь нам хотелось бы классифицировать однородные симплектические многообразия для различных интересных групп

Ли. Мы сведем эту проблему к изучению поведения замкнутых 2-форм относительно некоторых подгрупп. Сделаем следующее предположение об алгебре Ли g группы G. Будем считать, что в g имеются два подпространства k и p, для которых

$$g = k + p, \qquad k \cap p = \{0\},$$
$$[k, k] \subset k, \qquad [k, p] \subset p.$$

Итак, мы предполагаем, что k — подалгебра в g, а p — дополнительное подпространство к k, инвариантное относительно действия k. Пока мы не будем делать других предположений о p. Значит, $[p, p]$ имеет k-компоненту и p-компоненту; обозначим их через r и s соответственно: при $\eta \in p$, $\eta' \in p$ имеем $[\eta, \eta'] = r(\eta, \eta') + s(\eta, \eta')$, где $r(\eta, \eta') \in k$, $s(\eta, \eta') \in p$. Из тождества Якоби следуют некоторые тождества для r и s. Легко проверить, что

$$\mathscr{E} r(s(\eta, \eta'), \eta'') = 0,$$
$$\mathscr{E} \{s(s(\eta, \eta'), \eta'') + [r(\eta, \eta'), \eta'']\} = 0,$$

где $\mathscr{E}$ обозначает циклическую сумму. Кроме того,

$$[\xi, r(\eta, \eta')] = r(\xi \cdot \eta, \eta') + r(\eta, \xi \cdot \eta'),$$

где $\xi \in k$ и η, $\eta' \in p$ и мы написали $\xi \cdot \eta$ вместо $[\xi, \eta]$, считая, что k действует на p. Имеем также

$$\xi \cdot s(\eta, \eta') = s(\xi \cdot \eta, \eta') + s(\eta, \xi \cdot \eta').$$

Кроме того, имеется тождество, означающее, что k действует как алгебра Ли линейных преобразований на p, и тождество Якоби для k. Обратно, отправляясь от любого действия алгебры Ли k на векторном пространстве p вместе с отображениями r и s, удовлетворяющими приведенным выше тождествам, мы получим алгебру Ли $g = k + p$. Проиллюстрируем эту ситуацию.

(A) $r = s = 0$. В этом случае p — дополнительный абелев идеал и k действует линейными преобразованиями на p. Другими словами, g — полупрямое произведение k и p, где k — алгебра Ли, и задано линейное представление k на p. Каждое такое линейное представление k позволяет построить алгебру Ли g, называемую ассоциированной *аффинной алгеброй*.

(B) $r = 0$. В этом случае предположения означают, что p — дополнительный идеал к k. Важным примером этой ситуации является группа Галилея. Напомним, что группу Галилея можно рассматривать как группу 5×5-матриц вида

$$\begin{bmatrix} A & v & x \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $A \in O(3)$, $v \in \mathbf{R}^3$, $x \in \mathbf{R}^3$ и $t \in \mathbf{R}$. Такая матрица переводит пространственно-временную точку (x_0, t_0) в пространственно-временную точку $(Ax_0 + x + t_0 v, t + t_0)$. Соответствующая алгебра Ли состоит из всех матриц вида

$$\begin{bmatrix} a & v & x \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $a \in o(3)$, а v, x, t — те же, что и прежде. Здесь можно взять $k \sim o(3)$, отождествляя k с подалгеброй $x = v = t = 0$, а в качестве p взять семимерную подалгебру $a = 0$. Обозначая элементы p через (v, x, t), получаем $[(v, x, t), (v', x', t')] = s((v, x, t), (v', x', t')) = (0, t'v - tv', 0)$ и $\xi \cdot (v, x, t) = (\xi \cdot v, \xi \cdot x, 0)$, где через $\xi \cdot v$ обозначается обычное действие $\xi \in o(3)$ на $v \in \mathbf{R}^3$ и аналогично для $\xi \cdot x$.

(C) Случай полупростой алгебры Ли g, когда k и p отвечают разложению Картана. Здесь $s = 0$.

(D) Случай, когда k — идеал. Здесь действие k на p тривиально. Например, для алгебры Гейзенберга мы можем взять в качестве k центр. Тогда p — симплектическое векторное пространство, $k = \mathbf{R}$ тривиально действует на p, а r — симплектическая 2-форма, в то время как $s = 0$.

Пусть $f \in \bigwedge^2 g^*$ — некоторая 2-форма. Отождествление $\bigwedge^2 g^*$ с $\bigwedge^2 k^* \oplus k^* \otimes p^* \oplus \bigwedge^2 p^*$ позволяет представить f в виде $f = a + b + c$, так что

$$f(\xi + \eta, \xi' + \eta') = a(\xi, \xi') + b(\xi, \eta') - b(\xi', \eta) + c(\eta, \eta').$$

Далее, $df \in \bigwedge^3 g^*$ имеет вид $df(\chi, \chi', \chi'') = \mathscr{E} f([\chi, \chi'], \chi'')$, где $\mathscr{E}$ обозначает циклическую сумму. Записывая $\chi = \xi + \eta$ и т. д., перепишем уравнение $df = 0$ так:

$$\mathscr{E}\{a([\xi, \xi'] + r(\eta, \eta'), \xi'') + b([\xi, \xi'] + r(\eta, \eta'), \eta'') -$$
$$- b(\xi'', \xi \cdot \eta' - \xi' \cdot \eta + s(\eta, \eta')) + c(\xi \cdot \eta - \xi' \cdot \eta + s(\eta, \eta'), \eta'')\} = 0.$$

Выведем теперь некоторые тождества для a, b, c, рассматривая частные случаи этого тождества.

(i) $\xi = \xi' = \xi'' = 0$. В этом случае тождество дает

$$\mathscr{E}\{b(r(\eta, \eta'), \eta'') + c(s(\eta, \eta'), \eta'')\} = 0. \qquad (*)$$

Для случая аффинной алгебры это тождество бессодержательно. Если p — подалгебра, т. е $r = 0$, остается тождество, содержащее только c. Например, непосредственное вычисление для группы Галилея показывает, что тождество $(*)$ сводится к условию $c((0, x, 0), (0, x', 0)) = 0$. В случае разложения Картана получается тождество, содержащее только b, и аналогично в случае алгебры Гейзенберга.

(ii) $\xi=\xi'=0$, $\eta''=0$. В этом случае тождество дает

$$a(r(\eta,\ \eta'),\ \xi'')-b(\xi'',\ s(\eta,\ \eta'))+c(\xi''\cdot\eta,\ \eta')+c(\eta,\ \xi''\cdot\eta')=0. \qquad (**)$$

Для аффинной алгебры и r и s равны нулю, и тождество приобретает вид

$$c(\xi\cdot\eta,\ \eta')+c(\eta,\ \xi\cdot\eta')=0; \qquad (**)_A$$

это означает, что кососимметрическая форма c инвариантна относительно действия k. Например, в случае алгебры Пуанкаре, где $k=o(3,\ 1)$ и $p=\mathbf{R}^4$, не существует инвариантных кососимметрических форм и мы получаем, что $c=0$.

В случае когда p — подалгебра, т. е. $r=0$, тождество имеет вид

$$c(\xi\cdot\eta,\ \eta')+c(\eta,\ \xi\cdot\eta')=b(\xi,\ s(\eta,\ \eta')). \qquad (**)_B$$

Например, если в случае алгебры Галилея применить это тождество к $\eta=(v,\ x,\ 0)$ и $\eta'=(v',\ x',\ 0)$, то правая часть равна нулю, и мы получаем, что ограничение c на $(\mathbf{R}^3+\mathbf{R}^3)\wedge(\mathbf{R}^3+\mathbf{R}^3)$ инвариантно относительно действия $o(3)$ при диагональном действии на $\mathbf{R}^3+\mathbf{R}^3$. Очевидно, что есть только одна (с точностью до скалярного множителя) такая функция; она имеет вид

$$c((v,\ x,\ 0),\ (v',\ x',\ 0))=m(\langle v,\ x'\rangle-\langle v',\ x\rangle),$$

где через $\langle\ ,\ \rangle$ обозначено евклидово скалярное произведение. Если взять $\eta=(0,\ x,\ 0)$, $\eta'=(0,\ 0,\ t)$, то правая часть $(**)_B$ обратится в нуль. В левой части выражение $\xi\cdot\eta'$ равно нулю, а $\xi\cdot x$ произвольно. Получаем

$$c((0,\ x,\ 0),\ (0,\ 0,\ t))=0.$$

Значит,

$$c((v,\ x,\ t),\ (v',\ x',\ t'))=m(\langle v,\ x'\rangle-\langle v',\ x\rangle)+\langle l,\ t'v-tv'\rangle$$

для некоторого $l\in\mathbf{R}^3$, где в силу $(**)_B$

$$\langle l,\ \xi\cdot v\rangle=b(\xi,\ (0,\ v,\ 0)).$$

В случае разложения Картана или, более общо, когда $s=0$, тождество $(**)$ имеет вид

$$c(\xi\cdot\eta,\ \eta')+c(\eta,\ \xi\cdot\eta')=a(\xi,\ r(\eta,\ \eta')). \qquad (**)_C$$

В случае когда k — идеал, из $(**)$ имеем

$$a(\xi,\ r(\eta,\ \eta'))+b(\xi,\ s(\eta,\ \eta'))=0. \qquad (**)_D$$

(iii) $\xi=0$, $\eta'=\eta''=0$. В этом случае ни a, ни c не дают вклада, и мы получаем тождество

$$b([\xi',\ \xi''],\ \eta)+b(\xi'',\ \xi'\cdot\eta)-b(\xi',\ \xi''\cdot\eta)=0. \qquad (***)$$

Это тождество означает, что отображение из k в p^* вида $\xi\longmapsto b(\xi,\cdot)$ является коциклом. Если k полупроста, то по лемме Уайтхеда

b — кограница, т. е. существует такое $\theta \in p^*$, что

$$b(\xi, \eta) = \theta(\xi \cdot \eta). \qquad (***)_S$$

Вместо предположения о полупростоте k допустим, что в центре k имеется элемент, действующий на p как единичное преобразование. Считая ξ' этим элементом, а ξ'' — произвольным элементом ξ в $(***)$, получаем, что $(***)_S$ имеет место для $\theta(\eta) = b(\xi', \eta)$. Значит,

если алгебра k или полупроста, или содержит в своем центре элемент, действующий на p как единичное преобразование, то имеет место $(***)_S$.

Например, для алгебры Галилея билинейная форма b имеет вид

$$b(\xi, (v, x, t)) = \langle l', \xi \cdot v\rangle + \langle l, \xi \cdot x\rangle,$$

где l' и l — элементы $\mathbf{R}^3$.

(iv) $\eta = \eta' = \eta'' = 0$. В этом случае мы получаем тождество, означающее, что a — коцикл в $\bigwedge^2 k^*$. Опять-таки, если k полупроста, то можно показать, что a — кограница. Для алгебры Галилея таким образом доказано, что наиболее общий коцикл можно представить в виде

$$f((\xi, v, x, t), (\xi', v', x', t')) = \tau([\xi, \xi']) + \\ + \langle l', \xi v' - \xi' v\rangle + \langle l, \xi x' - \xi' x + t' v - t v'\rangle + m(\langle v, x'\rangle - \langle v', x\rangle),$$

где $\tau \in o(3)^*$. Далее, сумму первых трех слагаемых можно переписать как $\theta([(\xi, v, x, t), (\xi', v', x', t')])$, где $\theta = (\tau, l', l, 0) \in g^*$, т. е. это кограница. Напротив, последнее слагаемое не может быть кограницей. Тем самым мы получаем результат, принадлежащий Баргманну:

Если G — группа Галилея, то $H^2(g)$ одномерна и с точностью до кограниц коцикл можно представить в виде

$$f((\xi, v, x, t), (\xi', v', x', t')) = m(\langle v, x'\rangle - \langle v', x\rangle).$$

Вернемся теперь к задаче описания действия G на пространстве 2-коциклов, с тем чтобы выяснить, когда два таких коцикла определяют эквивалентные симплектические структуры. Начнем со случая полупрямого произведения, т. е. аффинной алгебры. Каждый элемент односвязной группы, отвечающей g, можно представить в виде $m \exp \eta$, где $m \in K = \exp k$ и $\eta \in p$. Далее, K оставляет k и p инвариантными, т. е. действие K на $f = a + b + c$ не смешивает слагаемых и действие на каждое слагаемое — это соответствующее внешнее или тензорное произведение контрагредиентного представления. При $f = d\theta$, где $\theta \in g^* = k^* + p^*$, имеем $mf = dm\theta$; здесь K действует на g^* контрагредиентным представлением. Поэтому остается исследовать действие $\exp \eta$. Имеем

$$[\eta, \eta'] = 0 \quad \text{и} \quad [\eta, \xi] = -\xi \cdot \eta.$$

Значит,

$$\operatorname{Ad}(\exp -\eta)(\xi'+\eta') = \exp(\operatorname{ad} -\eta)(\xi'+\eta') = (\xi'+\xi'\cdot\eta+\eta').$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(\exp \eta) f(\xi'+\eta',\ \xi''+\eta'') &=\\ &= f(\exp(\operatorname{ad}-\eta)(\xi'+\eta'),\ \exp(\operatorname{ad}-\eta)(\xi''+\eta'')) =\\ &= a(\xi',\ \xi'') + b(\xi',\ \xi''\cdot\eta) - b(\xi'',\ \xi'\cdot\eta) + c(\xi'\cdot\eta,\ \xi''\cdot\eta) =\\ &= f(\xi'+\xi'\cdot\eta+\eta',\ \xi''+\xi''\cdot\eta+\eta'') + b(\xi',\ \eta'') - b(\xi'',\ \eta') +\\ &\qquad + c(\xi'\cdot\eta,\ \eta'') + c(\eta',\ \xi''\cdot\eta) + c(\eta',\ \eta'').\end{aligned}$$

Далее, согласно (***), $b(\xi',\ \xi''\cdot\eta) - b(\xi'',\ \xi'\cdot\eta) = b([\xi',\ \xi''],\ \eta)$ и в силу $(**)_A$

$$c(\xi'\cdot\eta, \xi''\cdot\eta) = -c(\eta, \xi'\cdot\xi''\cdot\eta) = c(\xi'\cdot\xi''\cdot\eta, \eta) = \frac{1}{2}c([\xi', \xi'']\cdot\eta, \eta).$$

Значит, мы можем написать

$$(\exp \eta)(a+b+c) = \left(a + d\left(b_\eta + \frac{1}{2}c_{\eta\eta}\right)\right) + (b + dc_\eta) + c,$$

где $b_\eta \in k^*$, $c_{\eta\eta} \in k^*$ определяются условиями

$$b_\eta(\xi) = b(\xi,\ \eta), \quad c_{\eta\eta}(\xi) = c(\xi\cdot\eta,\ \eta),$$

а $c_\eta \in p^*$ имеет вид

$$c_\eta(\eta') = -c(\eta,\ \eta').$$

В важном частном случае, когда $(a+b) = d(\tau+\theta)$ — точная форма, где $\tau \in k^*$, $\theta \in p^*$, имеем

$$(\exp \eta)(d(\tau+\theta)+c) = d\left(\left(\tau + b_\eta + \frac{1}{2}c_{\eta\eta}\right) + (\theta + c_\eta)\right) + c.$$

Итак, можно описать ситуацию следующим образом. Компонента c инвариантна относительно действия G. Относительно $\exp p$ она инвариантна в силу проведенного выше вычисления, а относительно действия K — по $(**)_A$. При заданном c можно перевести θ в $(h^{*-1})\theta + c_\eta$, где $h \in K$ и $\eta \in p$. Этим определено действие $K \times p$ на p^*. Предположим, что мы параметризовали орбиты этого действия и выбрали кросс-сечение этих орбит. При этом для каждой орбиты мы фиксировали на ней θ. Тем самым в G определена подгруппа — подгруппа изотропии θ. Соответствующая алгебра состоит из тех $(\xi,\ \eta)$, для которых $\xi\theta + c_\eta = 0$. Те ξ, которые при этом появляются, образуют подалгебру в k; обозначим ее через k_θ. Значит, $\xi \in k_\theta$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\eta_\xi \in p$, что $\theta(\xi\cdot\eta) = c(\eta_\xi,\ \eta)$ для всех $\eta \in p$. При помощи тождества $(**)_A$ легко проверить, что отображение $\xi \longmapsto \eta_\xi$ есть коцикл на k_θ со значениями в p. Если этот коцикл — кограница (например, если k_θ полупроста или содержит единичный оператор), то можно найти такой элемент $\bar{\eta}$, что $\xi\theta - c_{\xi\bar{\eta}} = \xi(\theta - c_{\bar{\eta}}) = 0$. Значит, выбирая другой элемент θ в пределах той же орбиты, можно добиться того, чтобы k_θ состояла в точности из тех ξ, для которых $\xi\theta = 0$. Заметим, что это уравнение эквивалентно уравнению $\theta_\eta(\xi) = 0$ для всех η. Действие $\exp\eta$ на k^*-компоненте сводится к добавлению $b_\eta + {}^1/_2 c_{\eta\eta}$. Если $c_{\eta\eta} = 0$, то орбита τ — это полный прообраз орбиты $\rho_\theta(\tau)$ относительно K_θ, где $\rho_\theta\colon k^* \to k_\theta^*$ — проекция, дуальная инъекции $k_\theta \to k$. Значит, в этом случае коциклы параметризуются тройками (c, θ, x), где θ пробегает кросс-сечение действия G на k^*, определяемого c, а χ пробегает кросс-сечение действия K_θ на k_θ^*.

Например, в случае алгебры Ли группы Пуанкаре, как мы уже видели, $c = 0$. Значит, орбиты G на p^* те же, что и орбиты $K = SO(3, 1)$ на p^*, и представляют собой: одну полость двуполостного гиперболоида $\theta^2 = m^2 > 0$, $\theta_0 > 0$ или $\theta^2 = m^2 > 0$, $\theta_0 < 0$, световой конус будущего $\theta^2 = 0$, $\theta_0 > 0$, световой конус прошлого $\theta^2 = 0$, $\theta_0 < 0$, однополостный гиперболоид $\theta^2 = -m^2 < 0$ и начало. Выберем следующим образом кросс-сечения этих орбит:

$$(m,\ 0,\ 0,\ 0),\quad (-m,\ 0,\ 0,\ 0),\quad (1,\ 1,\ 0,\ 0),$$
$$(-1,\ 1,\ 0,\ 0),\quad (0,\ m,\ 0,\ 0),\quad (0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Легко убедиться, что группа $K_{(m,0,0,0)}$ — это $SO(3)$. Орбиты ее действия на пространстве, дуальном к ее алгебре Ли,— это сферы. Если обозначить через s радиус этих сфер, то орбиты параметризуются двумя вещественными параметрами $m > 0$ и $s \geqslant 0$. Здесь m — «масса», а s — «спин». Для «массы нуль», т. е. при $(1, 1, 0, 0)$ или $(-1, 1, 0, 0)$ соответствующая подгруппа изотропии, как легко видеть, — это евклидова группа $E(2)$. Орбиты $E(2)$ на пространстве, дуальном к ее алгебре Ли, — это цилиндры (скажем, радиуса r) и точки на оси $r = 0$. Пусть s — вещественный параметр, задающий точки на этой оси. Тогда симплектические структуры, соответствующие $(1, 1, 0, 0)$, параметризуются $r > 0$, а если $r = 0$, то произвольным вещественным параметром s. Случай $r > 0$ не встречается в известных физических системах; при $r = 0$ параметр s также называют «спином». Группой изотропии для $(0, m, 0, 0)$ является $SL(2)$. Ее орбиты — снова гиперболоиды, «световые конусы» будущего и прошлого и начало. Частиц с $m^2 < 0$ («тахионов»), по-видимому, не бывает.

Проведем теперь несколько более сложные вычисления: найдем симплектические однородные пространства для группы Галилея. Здесь p не будет абелевым. Однако легко проверить, что

$$\operatorname{Ad}(\exp(-(0, v, x, t)))(\xi, w, y, s) =$$
$$= \left(\xi,\ w + \xi v,\ y + \xi\left(x + \frac{1}{2}tv\right) + tw - sv,\ s\right).$$

Мы уже нашли вид произвольного коцикла f на алгебре Галилея. Легко проверить, что l' при действии $\exp\eta$ переходит в $l'+mx$, а l — в $l-mv$. Значит, при подходящем выборе x и v можно перевести и l и l' в нуль, если только $m\neq 0$. Далее, $\vec{p}=-l$, будучи дуальным к трансляционному вектору x, имеет характер импульса. При чистом «преобразовании скорости» $\exp(0, v, 0, 0)$ импульс p переходит в $\vec{p}+mv$. Таким образом, m — это отношение импульса к скорости, а значит, m отвечает обычному понятию массы. Наш выбор v позволяет перейти к новой системе отсчета, в которой центр тяжести неподвижен. Физическая интерпретация отношения $-l'/m$ состоит в том, что это положение центра масс в системе, в которой он покоится. (Перемещая начало координат, можно считать, что он находится в начале.) Если мы добились того, что $l=l'=0$, то для η (в случае ненулевого m) остается единственная возможность $\eta=(0, 0, t)$ и, очевидно, $\exp(0, 0, -t)$ действует тривиально. Значит, остается действие $SO(3)$ на $k^*=o(3)^*$. Опять-таки орбиты — это сферы, параметризованные их радиусом, т. е. неотрицательным параметром s. Итак, при $m\neq 0$ однородные симплектические многообразия для группы Галилея параметризуются величинами m и $s\geqslant 0$, «массой» и спином. При $m=0$ мы не можем изменить l, в то время как l' переходит в $l'+tl$. С другой стороны, τ переходит в

$$\tau+\langle l', \cdot v\rangle+\left\langle l, \cdot\left(x+\frac{1}{2}tv\right)\right\rangle.$$

Если считать τ вектором трехмерного пространства, то последнее выражение можно переписать так:

$$\tau+l'\times v+l\times\left(x+\frac{1}{2}tv\right),$$

где $\times$ обозначает векторное произведение. В этом случае удобнее считать, что G действует так, что вначале действует $SO(3)$, а затем $\exp p$. Применяя подходящий элемент $SO(3)$, можно сделать $l=(f, 0, 0)$, а затем, если $f\neq 0$, $l'=(0, b, c)$. Если l и l' независимы, то, подбирая v и x, можно добиться, чтобы $\tau=0$. Если $f\neq 0$ и $b=c=0$, то можно добиться, чтобы $\tau=(\pm sf, 0, 0)$, где $s\geqslant 0$, $f>0$. (Это соответствует случаю частиц с нулевой массой, движущихся с бесконечной скоростью. Условие $b=c=0$ сводится к условию, что «возмущение поперечно», а параметр f — это «величина, обратная длине волны», т. е. «цвет». Параметр s называется спином, а знак $+$ или $-$ называется спиральностью. Подробности см. у Сурьо [9, стр. 195].)

Укажем процедуру интерпретации на языке «частиц», движущихся в пространстве-времени, описанных выше симплектических многообразий для групп Пуанкаре и Галилея. (Мы благодарны Томасу Унгару за помощь в обсуждении этих вопросов.) Пусть

G — произвольная группа Ли, а $M=G/L$ — однородное пространство для G, где L — некоторая замкнутая подгруппа. (В рассматриваемом случае G — это группа Пуанкаре или Галилея, а M — пространство-время.) Пусть S — некоторое однородное симплектическое пространство для G. Нам хотелось бы найти однородное пространство N для G, которое расслаивается над S (и значит, имеет предсимплектическую структуру, поднятую с S), а также расслаивается над M (что позволяет говорить о «положении в M» точки из N). Таким образом, мы хотим иметь следующее двойное расслоение:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ S & & M \end{tikzcd}$$

Если $S=G/H$ и $M=G/L$, то «наименьшим» N с такими свойствами будет $G/(H\cap aLa^{-1})$ для некоторого $a\in G$, где a выбирается так, чтобы $H\cap aLa^{-1}$ имело максимальную размерность. Образ в M типичного слоя N над S будет представлять собой орбиту относительно действия группы H, проходящую через точку aL. В частности, размерность образа в M типичного слоя будет равна размерности $H/(H\cap aLa^{-1})$.

Рассмотрим, например, случай, когда G — группа Пуанкаре, а $L=O(1,\ 3)$ — группа Лоренца, т. е. $M=G/L$ — это пространство-время. Рассмотрим вначале орбиту группы Лоренца с положительной массой в указанном выше смысле. Типичная точка этой орбиты — это $(p,\ \tau)$, где $p=(m,\ 0,\ 0,\ 0)$ и $\tau\in o(1,\ 3)^*$. Подалгебра изотропии p — это подалгебра $o(3)$, и мы можем считать τ элементом $o(3)^*$. Подгруппа изотропии точки $(p,\ \tau)$ состоит тогда из всех сдвигов на векторы tp и всех элементов $O(3)$, сохраняющих τ. Значит, $H\sim\mathbf{R}\times O(2)$, если $\tau\neq 0$, и $H\sim\mathbf{R}\times O(3)$, если $\tau=0$. Если a_v — сдвиг на вектор v, то $a_vLa_v^{-1}$ состоит из всех преобразований пространства Минковского, переводящих вектор w в $Aw+v-Av$, где $A\in O(1,\ 3)=L$. Значит, $\dim(H/(H\cap aLa^{-1}))=1$ для любого элемента группы Пуанкаре, и можно считать, что $aLa^{-1}=L$. Итак, образ в пространстве-времени типичного слоя представляет собой множество $x+tp$. В случае $s=0$ мы получаем, что N семимерно, а шестимерное многообразие S представляет собой пространство «мировых линий» частиц с данной массой покоя, движущихся в пространстве-времени. Если $s\neq 0$, то можно представлять себе частицу со спином (в пространстве, ортогональном ее мировой линии) с полным моментом ms. Направление спина может меняться в двумерной сфере. Значит, в этом случае N девятимерно, а S восьмимерно. Анализ симплектических однородных многообразий с ненулевой массой для группы Галилея проводится аналогично.

Исследуем теперь шестимерные орбиты группы Пуанкаре с нулевой массой и ненулевым спином. Здесь типичная точка имеет вид $(u, \varkappa)$, где u — вектор $(1, 1, 0, 0)$ и $\varkappa \in o(1, 3)^*$ индуцирует ненулевую точку орбиты в $e(2)^*$; $e(2)$ — алгебра Ли подгруппы $E(2)$, сохраняющей точку u (эта подгруппа изоморфна двумерной евклидовой группе). Подалгебра изотропии h в этом случае четырехмерна и может быть описана следующим образом. Запишем элемент алгебры Пуанкаре в виде (B, b), где B — его линейная компонента, а b — трансляционная компонента. Пусть $e_2 = (0, 0, 1, 0)$ и $e_3 = (0, 0, 0, 1)$; пусть $A_2 \in o(1, 3)$ определяется условиями $A_2 e_2 = u$, $A_2(1, -1, 0, 0) = -2e_2$ и аналогично $A_3 e_3 = u$, $A_3(1, -1, 0, 0) = 2e_3$. Пусть, наконец, B — такое инфинитезимальное вращение плоскости e_2, e_3, что $Bu = B(1, -1, 0, 0) = 0$ и $Be_2 = e_3$, $Be_3 = -e_2$. Тогда h порождается элементами

$$(0, u),\ (A_3, se_2),\ (-A_2, se_3),\ (B, 0),$$

где s — «спин» частицы с массой нуль, а $h \cap o(1, 3)$ одномерно. Легко проверить, что это максимальная размерность пересечения. Поэтому опять мы берем $L = O(1, 3)$; на этот раз слои трехмерны. Образ типичного слоя теперь — это множество вида $x + u^{\perp}$, где $u^{\perp}$ — трехмерное пространство векторов, ортогональных u. Мы можем считать его плоскостью в пространстве, движущейся со скоростью света в направлении, определяемом вектором u. Аналогичные вычисления для группы Галилея мы предоставляем читателю.

Сравним теперь симплектические однородные пространства для групп Галилея и Пуанкаре. Для этого мы хотим интерпретировать группу Пуанкаре как «деформацию» группы Галилея или, как чаще говорится в физической литературе, рассматривать группу Галилея как «стягивание» группы Пуанкаре, когда скорость света стремится к бесконечности. Поясним вначале, что это означает. Предположим, что мы фиксировали расщепление пространства-времени на пространство и время и записываем точку пространства-времени как вектор-столбец с компонентами (t, x_1, x_2, x_3), сокращенно $\binom{t}{x}$. Тогда произвольный элемент алгебры Пуанкаре можно записать в виде 5×5-матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & v_1 & v_2 & v_3 & t \\ v_1 & 0 & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ v_2 & -a_{12} & 0 & a_{23} & x_2 \\ v_3 & -a_{13} & -a_{23} & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

или, короче,

$$\begin{bmatrix} 0 & v^t & t \\ v & A & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A \in o(3).$$

Это вид алгебры Пуанкаре относительно некоторого расщепления пространства-времени и системы координат, в которой скорость света равна единице. Для того чтобы найти вид алгебры Пуанкаре в координатах, в которых скорость света равна c, мы должны сделать растяжение по пространственным координатам с коэффициентом c. Это осуществляется сопряжением приведенных матриц при помощи матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

после чего получаются матрицы вида

$$\begin{bmatrix} 0 & c^{-1}v^t & t \\ cv & A & cx \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для каждого положительного значения c мы получаем свою подалгебру 5×5-матриц. Все они изоморфны (и даже сопряжены) алгебре Пуанкаре. В наших растянутых координатах вектор cv дает преобразование «скорости» (или «ускорения»), а вектор cx задает пространственный сдвиг. Если мы привыкли работать со скоростями и перемещениями, которые «малы по сравнению со скоростью света», то имеет смысл ввести $\bar{v} = cv$ и $\bar{x} = cx$ и соответственно параметризовать элементы алгебры (для фиксированного c):

$$\begin{bmatrix} 0 & c^{-2}\bar{v}^t & t \\ \bar{v} & A & \bar{x} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее, положим $\varepsilon = c^{-2}$ и удалим черту над v и x. Тогда при каждом $\varepsilon > 0$ мы имеем отображение десятимерного пространства четверок A, v, x, t в пространство 5×5-матриц, а именно

$$(A, v, x, t) \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon v^t & t \\ v & A & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что при $\varepsilon=0$ образ в точности совпадает с алгеброй Галилея. Предел при $\varepsilon\to 0$, конечно, тот же, что и предел при $c\to\infty$. Обозначим десятимерное векторное пространство, порожденное A, v, x, t, через g. Тогда для каждого $\varepsilon\geqslant 0$ определено линейное отображение g в подалгебру алгебры Ли 5×5-матриц. Оно индуцирует на g коммутатор, зависящий от ε, т. е. $[\ ,\ ]_\varepsilon$. Укажем его явный вид. Пусть

$$\xi_1=(A_1,\ v_1,\ x_1,\ t_1),\quad \xi_2=(A_2,\ v_2,\ x_2,\ t_2).$$

Тогда

$$[\xi_1,\ \xi_2]_\varepsilon=\big([A_1,\ A_2]+\varepsilon\,(v_1\otimes v_2^t-v_2\otimes v_1^t),\ A_1v_2-A_2v_1,$$
$$A_1x_2+t_2v_1-A_2x_1-t_1v_2,\ \varepsilon\,(\langle v_1,\ x_2\rangle-\langle v_2,\ x_1\rangle)\big).$$

Аналогично, для каждого ε имеется отображение d_ε: $\bigwedge^k(g^*)\to\bigwedge^{k+1}(g^*)$. В частности, мы получаем различные пространства 2-коциклов $Z_\varepsilon^2\subset\bigwedge^2(g^*)$. Отметим, что при этом размерность не зависит от $\varepsilon\geqslant 0$. В самом деле, при $\varepsilon>0$ все алгебры изоморфны алгебре Пуанкаре, и мы получаем, что $\dim Z_\varepsilon^2=\dim g=10$. При $\varepsilon=0$, как мы уже видели, $\dim H^2(g)=1$, поскольку мы имеем алгебру Галилея. С другой стороны, $[g,\ g]_0$ состоит из всех тех элементов, у которых t-компонента равна нулю. Значит, d_0 имеет одномерное ядро и девятимерный образ. Введем координаты $(\tau,\ L,\ \vec{p},\ E)$, дуальные к $(A,\ v,\ x,\ t)$. (Здесь $\vec{p}$ дуален x, а значит, как мы уже отмечали, его можно интерпретировать как импульс; координата E дуальна временно́му сдвигу, и ее можно интерпретировать как «энергию».) Пусть $\nu\in\bigwedge^2(g^*)$ — билинейная форма вида

$$\nu(\xi_1,\ \xi_2)=\langle v_1,\ x_2\rangle-\langle v_2,\ x_1\rangle.$$

Мы уже видели, что при $\varepsilon=0$ билинейная форма ν — коцикл и что класс когомологий ν порождает $H_0^2(g)$, т. е. что произвольный класс когомологий имеет вид $m[\nu]$, где m — «масса» для группы Галилея. Мы утверждаем, что ν — коцикл и при $\varepsilon>0$ (а значит, разумеется, кограница для положительных значений ε). Действительно, пусть $\theta\in g^*$ — элемент $\theta=(0,\ 0,\ 0,\ 1)$ в координатах, которыми мы пользуемся. Значит, $\theta(\xi)=t$ — это t-компонента ξ. Тогда, пользуясь приведенной выше формулой для $[\ ,\ ]_\varepsilon$, получаем

$$d_\varepsilon\theta\,(\xi_1,\ \xi_2)=\theta\,([\xi_1,\ \xi_2]_\varepsilon)=\varepsilon\,(\langle v_1,\ x_2\rangle-\langle v_2,\ x_1\rangle),$$
$$\text{или}\quad d_\varepsilon\theta=\varepsilon\nu.$$

Заметим, что при $\varepsilon>0$ элемент θ однозначно определяется этим уравнением. Значит, при $\varepsilon>0$ «коцикл с массой» $m\nu$ — кограница, причем кограница единственного элемента $(0,\ 0,\ 0,\ E)$, где $E=\varepsilon^{-1}m$. Если мы подставим сюда наше определение $\varepsilon=c^{-2}$, то получим знаменитую формулу Эйнштейна $E=mc^2$, связывающую массу и энергию. Орбита группы Пуанкаре (отвечающей скорости света c), проходящая через точку $(\tau, 0, 0, E)$, $\tau\in o(3)^*$, при $c\to\infty$ перейдет в симплектическое однородное пространство для группы Галилея (с нетривиальным классом когомологий) с массой m (и спином $\|\tau\|$). Квадрат массы для орбиты (группы Пуанкаре) равен m^2c^4. Если $(\tau_1, L_1, \vec{p}_1, E_1)$ — какая-либо другая точка этой орбиты, то

$$E_1^2-c^2\vec{p}_1^{\,2}=m^2c^4,$$

откуда следует соотношение между массой, энергией и импульсом.

Мы можем найти пространство коциклов и соответствующие симплектические многообразия для группы Галилея, исходя из несколько иной точки зрения. Пусть $SO(3)\times\mathbf{R}^3$ действует на $\mathbf{R}^4$ по формуле $(A, v)\cdot(x, t)=(Ax+tv, t)$. Здесь (x, t) — вектор в $\mathbf{R}^4$, причем x — вектор в $\mathbf{R}^3$, а $t\in\mathbf{R}$. Группу Галилея можно рассматривать как полупрямое произведение $SO(3)\times\mathbf{R}^3$ и $\mathbf{R}^4$. Опять-таки имеем (k, p)-разложение, но с $k=o(3)\oplus\mathbf{R}^3$ (полупрямая сумма) и $p=\mathbf{R}^4$. Легко проверить, что на $\mathbf{R}^4$ нет инвариантных кососимметрических 2-форм, т. е. $c=0$. Мы можем записать b в виде

$$b=b_1(\xi, x)+b_2(\xi, t)+b_3(v, x)+b_4(v, t),$$

где $\xi\in o(3)$ и $v\in\mathbf{R}^3$. Из условия (***) следует, что

$$b_3(\xi\cdot v, x)+b_4(\xi\cdot v, t)=b_1(\xi, tv)-b_3(v, \xi\cdot x)+b_2(\xi, t)$$

и

$$b_1([\xi, \xi'], x)+b_2([\xi, \xi'], t)=b_1(\xi, \xi'\cdot x)-b_1(\xi', \xi\cdot x).$$

Второе равенство показывает, что b_1 — коцикл на $o(3)$ со значениями в $\mathbf{R}^{3*}$, а значит, кограница, и что $b_2=0$. Первое из указанных соотношений при $t=0$ означает, что $b_2(v, x)=m\langle v, x\rangle$, в то время как при $t\neq0$ получаем $b_4(\xi\cdot v, t)=b_1(\xi, tv)$. Итак,

$$b=\langle l, \xi\cdot x+tv\rangle+m\langle v, x\rangle.$$

Из того что a — коцикл в $\bigwedge^2k^*$, следует, что это кограница: $a=d(\tau+l')$, где $\tau\in o(3)^*$ и $l'\in\mathbf{R}^{3*}$. В результате мы пришли к выражению, которое мы получили выше для произвольного коцикла на алгебре Галилея. Далее исследование действия группы Галилея на пространстве коциклов проводится, как и прежде.

Проведем теперь вычисления для противоположного случая — алгебры Гейзенберга. В этом случае k — это одномерный центр, который можно отождествить с $\mathbf{R}$, а p — симплектическое векторное пространство, причем r отождествляется с его симплектической 2-формой. Действие k на p тривиально и $s=0$. Поскольку подалгебра k одномерна, $a=0$ и условия (**) и (***) бессодержательны. Условие (*) можно интерпретировать следующим образом. Обозначим через ω симплектическую форму на p, и пусть $\varkappa \in p^*$ определяется формулой $\varkappa = b(1, \cdot)$. Тогда (*) дает $\omega \wedge \varkappa = 0$. Если $\dim p = 2$, то это не налагает никаких условий. Если же $\dim p > 2$, то должно быть $\varkappa = 0$. Действительно, при $\dim p > 2$ мы можем написать $\omega = \theta \wedge \varkappa + \omega'$ для некоторого $\theta \in p^*$, где $\omega' \wedge \varkappa \neq 0$. Любой элемент $c \in \bigwedge^2 p^*$ дает коцикл. Элемент $\omega \in \bigwedge^2 p^*$ — кограница: $\omega = dl$, где l — элемент g^*, удовлетворяющий условию $l(1) = 1$ (через 1 обозначен базисный элемент центры который мы отождествили с $\mathbf{R}$). Ясно, что только кограница, кратны ω. Далее,

$$[(s, v), (t, w)] = (\omega(v, w), 0), \quad \text{где} \quad s, t \in k = \mathbf{R} \text{ и } v, w \in p.$$

Поэтому

$$\mathrm{Ad}(\exp(s, v))(t, w) = (t + \omega(v, w), w).$$

Значит, группа тривиально действует на $\bigwedge^2 p^*$. При $\dim p = 2$ она переводит ненулевой элемент $b \in k^* \otimes p^*$ в $b + c$, где c пробегает все $\bigwedge^2 p^*$. При $\dim p > 2$ действие группы на пространстве коциклов тривиально. Таким образом, $H^2(g) \sim k^* \otimes p^*$ при $\dim p = 2$, в то время как $H^2(g) \sim \bigwedge^2 p^* / \{\omega\}$ при $\dim p > 2$. Орбиты группы G, действующей на g^* контрагредиентным представлением, — это гиперплоскости $l(1, 0) = \mathrm{const}$ при $l(1, 0) \neq 0$ и точки подпространства $l(1, 0) = 0$. Значит, эти орбиты илн имеют размерность, равную размерности p, или нульмерны. Симплектические многообразия, отвечающие ненулевым классам когомологий, при $\dim p = 2$ все двумерны, а при $\dim p > 2$ размерность равна рангу соответствующего элемента $\bigwedge^2 p^*$.

Перечислим теперь однородные симплектические многообразия для алгебр Ли малых размерностей.

$n = 1$. Имеется единственная алгебра Ли размерности 1: тривиальная алгебра Ли; отвечающая ей односвязная группа — это аддитивная группа вещественных чисел. Очевидно, что она не действует транзитивно ни на каком симплектическом многообразии положительной размерности. Значит, единственное однородное симплектическое многообразие — это точка. Тем не менее даже этот тривиальный пример имеет некоторые интересные связи, заслуживающие упоминания. Действие присоединенной группы тривиально, а значит, тривиально и коприсоединенное действие. Значит, орбиты G в g^* — это точки. Очевидно, что это так для любой коммутативной алгебры Ли. Хотя все орбиты различны, они все отвечают одному и тому же симплектическому многообразию, поскольку оператор d тривиален, а значит, все орбиты дают нулевой коцикл. С точки зрения «классической механики» все эти орбиты одинаковы. Но с «квантовой» точки зрения, т. е. с точки зрения теории представлений, они все отвечают различным инфинитезимальным характерам, различным представлениям.

Это верно уже на уровне «предквантования»; см. гл. V, где речь идет о классификации однородных эрмитовых линейных расслоений со связностью. Другое замечание имеет смысл даже на уровне «классической механики». В то время как вещественная прямая, очевидно, не может действовать транзитивно на многообразии размерности, большей единицы, ее действие может быть «эргодичным» в разных смыслах, например, топологически транзитивным, или метрически транзитивным, или перемешивающим и т. д. Каждому из этих понятий отвечает своя математическая формулировка интуитивного понятия «неприводимости» механической системы. Понятие транзитивности, с которым мы имеем дело, лишь наиболее простая из этих возможностей.

$n=2$. Существуют две алгебры Ли размерности 2: тривиальная алгебра Ли и алгебра Ли с базисом $\{\xi, \eta\}$ и коммутационным соотношением $[\xi, \eta]=\eta$. Назовем эту вторую алгебру *масштабной алгеброй*. Она отвечает группе симметрий, меняющей начало отсчета (временной сдвиг) и выбор единицы (шкалирование). Для обеих алгебр все 2-формы являются коциклами, поскольку алгебра двумерна. Однако оператор $d: g^* \to \bigwedge^2 g^*$ ведет себя по-разному в этих случаях.

Тривиальная алгебра. Здесь оператор d тривиален. Значит, каждый элемент $\bigwedge^2 g^*$ представляет собой класс когомологий и действие G на $\bigwedge^2 g^*$ тривиально. Различные элементы $\bigwedge^2 g^*$ приводят к различным симплектическим пространствам. Как легко убедиться, явная реализация этих пространств имеет вид $\omega = c\,dx \wedge dy$, $c \neq 0$, $\xi \longmapsto \partial/\partial x$ и $\eta \longmapsto \partial/\partial y$. Кроме того, конечно, имеется нульмерное симплектическое многообразие, отвечающее орбитам в g^*, к которым применимо все то же самое, о чем мы говорили выше в одномерном случае.

Масштабная алгебра. Имеется разложение $k+p$, где k и p одномерны. Значит, $a=c=0$ и, поскольку d нетривиально (или из общих соображений для случая, когда k содержит единичное преобразование), мы получаем, что каждый коцикл — кограница. Значит, каждый элемент b имеет вид $b(\xi, \cdot)=l([\xi, \cdot])$ для некоторого $l \in p^*$. Группа K действует на p, а значит, и на p^* умножением на положительные числа, в то время как $\exp p$ не меняет dl. Значит, имеется три симплектических однородных пространства, отвечающих трем возможностям: $l(\eta)>0$, $l(\eta)=0$ и $l(\eta)<0$. Пусть (a, b) — координаты на g^*, задаваемые ξ и η, т. е. $\theta(\xi)=a$ и $\theta(\eta)=b$, если $\theta \in g^*$ имеет координаты (a, b). Тогда непосредственное вычисление показывает, что

$$\mathrm{Ad}^*_{\exp t\xi}(a, b)=(a, e^{-t}b) \quad \text{и} \quad \mathrm{Ad}^*_{\exp t\eta}(a, b)=(a+tb, b).$$

Скажем, при $b>0$ мы получаем симплектическое многообразие и

$$\hat{\xi}=b\frac{\partial}{\partial b}, \quad \hat{\eta}=-b\frac{\partial}{\partial a}.$$

Ясно, что инвариантная 2-форма ω имеет вид

$$\omega = \varkappa b^{-1}\, db \wedge da$$

при $\varkappa \neq 0$. С другой стороны, замена (a, b) на (sa, sb), где s — произвольная константа, не меняет $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$, но меняет $\varkappa$ на $s\varkappa$. Это показывает, что симплектические многообразия, отвечающие $l(\eta) > 0$ и $l(\eta) < 0$, эквивалентны, т. е. имеется в точности одно двумерное однородное симплектическое многообразие для масштабной алгебры. Конечно, имеется также и нульмерное многообразие.

Вводя переменные $x = a/b$, $y = b$, мы можем переписать двумерное действие в виде

$$(\exp t\xi)(x, y) = (e^t x, e^{-t} y), \quad (\exp t\eta)(x, y) = (x + t, y);$$

в этих координатах $\omega = dx \wedge dy$.

Если положить $u = a$ и $v = -\log b$, то $\omega = du \wedge dv$, а действие имеет вид $\exp t\xi(u, v) = (u, v + t)$ и $\exp t\eta(u, v) = (u + te^{-v}, v)$.

$n = 3$. Трехмерные алгебры Ли над $\mathbf{R}$ классифицируются следующим образом (см. Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964, с. 22—23):

(i) тривиальная алгебра,
(ii) алгебра Гейзенберга,
(iii) прямая сумма $\mathbf{R} + h$, где h — двумерная масштабная алгебра,
(iv)$_A$ аффинная алгебра $k + p$, где k одномерно, а p двумерно. Здесь базисный элемент k действует на p при помощи невырожденного линейного преобразования A. При этом A определено только с точностью до сопряжения на p и умножения на произвольное ненулевое вещественное число (поскольку базис в k можно выбирать произвольно). Имеется несколько возможностей в зависимости от того, равен или не равен нулю след A. Если $\operatorname{tr} A = 0$ и A имеет вещественные собственные значения, то можно сделать матрицу A диагональной с собственными значениями ± 1. Значит, матрица A инфинитезимально сохраняет индефинитную метрику xy на (x, y)-плоскости, и g — алгебра (инфинитезимальных) движений относительно этой метрики. Включим эту алгебру в наш список:

(iv) $e(1,1)$.

Если $\operatorname{tr} A = 0$, но A имеет комплексные собственные значения, то эти собственные значения должны быть чисто мнимыми, и мы можем добиться, чтобы они равнялись $\pm i$. Тогда A — инфинитезимальное вращение относительно евклидовой метрики на плоскости, и мы приходим к случаю:

(v) $e(2)$ — алгебра Ли группы евклидовых движений плоскости.

Далее имеем:

(vi) случай аффинной алгебры (iv)$_A$, когда $\operatorname{tr} A \neq 0$,
(vii) ортогональная алгебра $o(3)$,
(viii) $sl(2, \mathbf{R})$.

В случае тривиальной алгебры каждый элемент $\bigwedge^2 g^*$ является коциклом, но нет кограниц. Каждый ненулевой элемент имеет одномерное ядро, тривиально действующее на соответствующем симплектическом многообразии — однородном симплектическом многообразии для двумерной тривиальной факторалгебры.

Алгебру Гейзенберга мы уже рассмотрели. В случае (iii) мы можем воспользоваться (k, p)-разложением с $k=\mathbf{R}$ и $p=h$, причем k и p — идеалы. Тогда $a=0$ и c — коцикл для масштабной алгебры, в то время как из $(**)_D$ следует, что $b(k, [h, h])=0$. Значит, пространство возможных b одномерно и среди них нет кограниц, а потому $H^2(g)$ одномерна. Пусть x, y, z — базис в g с соотношениями коммутации

$$[x, y]=y, \quad [x, z]=[y, z]=0,$$

и пусть

$$A_t=\exp tx, \quad B_t=\exp ty, \quad C_t=\exp tz$$

— соответствующие однопараметрические подгруппы. Тогда из проведенного выше вычисления следует, что пространство всех двумерных симплектических многообразий параметризуется константами $m=b(z, x)$. Этими многообразиями являются $\mathbf{R}^2$ с координатами (u, v) и формой $\omega=du\wedge dv$, а действие задается формулами

$$A_t(u, v)=(u, v+t), \quad B_t(u, v)=(u+te^v, v), \quad C_t(u, v)=(u+mt, v).$$

Рассмотрим теперь остальные случаи.

(iv) алгебра $e(1, 1)$. Выберем базис с соотношениями

$$[z, x]=x, \quad [z, y]=-y, \quad [x, y]=0.$$

Здесь k порождается z, а p порождается x и y. Всякий элемент $c\in\bigwedge^2 p^*$ является коциклом, но при $c\neq 0$ не является кограницей. Оператор d: $g^*\to\bigwedge^2 g^*$ имеет одномерное ядро, а значит, пространство кограниц двумерно. Итак, $dg^*=k^*\otimes p^*$, т. е. все b — кограницы. При $c\neq 0$ отображение $p\to k^*\otimes p^*$, имеющее вид $v\longmapsto c(\cdot v, \cdot)$, несингулярно, а значит, сюръективно. Следовательно, при $c\neq 0$ можно исключить b действием G. Итак, имеется два семейства двумерных симплектических многообразий, одно параметризуется ненулевыми элементами $c\in\bigwedge^2 p^*$, а другое — кросс-сечением орбит C_t на p^*. Многообразия первого семейства — это $\mathbf{R}^2$ с координатами (u, v), с разными формами $\omega=m\,du\,dv$ (где $m=c(x, y)$) и действием

$$A_t(u, v)=(u+t, v), \quad B_t(u, v)=(u, v+t), \quad C_t(u, v)=(e^t u, e^{-t}v).$$

Для описания орбит в p^* заметим, что x и y можно считать функциями на g^*, а значит, и на p^*, а орбиты C_t — это различные компоненты гипербол $xy=\varkappa$ для разных значений константы $\varkappa$.

Орбиты G на g^* задаются теми же уравнениями и являются цилиндрами над этими кривыми с образующими в направлении k^*. Опять-таки орбиты можно отождествить с $\mathbf{R}^2$, где в координатах (u, v) форма ω имеет вид $\omega = du \wedge dv$. Для орбит, на которых $\varkappa \neq 0$, можно взять в качестве кросс-сечений орбит векторы $(1, \varkappa)$; соответствующие действия имеют вид

$$A_t(u, v) = (u + te^{-v}, v), \quad B_t(u, v) = (u - \varkappa e^{v}, v), \quad C_t(u, v) = (u, v + t).$$

Случай $\varkappa = \infty$ получается в пределе, когда A_t действует как единичное преобразование, $B_t(u, v) = (u \pm te^{v}, v)$ и $C_t(u, v) = (u, v + t)$. Интересно интерпретировать параметры m и $\varkappa$. Заметим, что $e(1, 1)$ содержит два экземпляра масштабной алгебры, а именно z, x и z, y с группой C_t, умножающей x на e^t и умножающей y на e^{-t}. Имеются две ситуации, когда замена масштаба по одному переменному индуцирует обратную замену по другому переменному: если переменные дуальны одна другой (т. е. представляют координаты в дуальных одномерных векторных пространствах) или если переменные взаимно обратны. Первое семейство орбит соответствует ситуации с дуальностью, причем параметр m задает дуальность между a и b. Второе семейство орбит соответствует ситуации, когда масштабные алгебры действуют на переменных r и s, связанных соотношением $rs = \varkappa$.

(v) Случай евклидовой алгебры $e(2)$ похож на случай $e(1, 1)$. Группа когомологий одномерна, каждый ненулевой элемент $\bigwedge^2 p^*$ соответствует ненулевому классу когомологий и приводит к симплектическому многообразию, на котором x и y действуют как постоянные векторные поля. Остальные симплектические многообразия задаются орбитами в g^*, которые являются цилиндрами $x^2 + y^2 = r^2$ при положительном r и нульмерными орбитами на оси z.

(vi) Для аффинной алгебры с $\operatorname{tr} A \neq 0$ не существует ненулевого инвариантного элемента $c \in \bigwedge^2 p^*$ и, значит, пространство коциклов двумерно, а когомологии равны нулю. Орбиты в g^* представляют собой цилиндры над орбитами $\exp tz$, действующими на p^*, и они отвечают всем двумерным симплектическим многообразиям. Опять-таки ось z рассыпается на нульмерные орбиты.

(vii) Ортогональная алгебра полупроста, и ее группа когомологий тривиальна. Орбиты в g^* — это сферы $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, где x, y, z — обычный базис в $o(3)$ с соотношениями коммутации

$$[x, y] = z, \quad [z, x] = y, \quad [z, y] = -x.$$

(viii) Алгебра $sl(2)$ также полупроста, и ее группа когомологий также тривиальна. Мы можем выбрать базис с соотношениями коммутации

$$[x, y] = z, \quad [z, x] = x, \quad [z, y] = -y.$$

Тогда выражение $xy + z^2/2$ инвариантно относительно действия g, а значит, рассматриваемое как функция на g^*, определяет двумерные поверхности, инвариантные относительно G. Связные компоненты этих поверхностей уровня являются орбитами G; они имеют вид однополостных гиперболоидов, двуполостных гиперболоидов и двух компонент светового конуса.

Изучим теперь поведение однородных симплектических многообразий при деформации структуры алгебры Ли. В качестве иллюстрации того, что может при этом происходить, рассмотрим деформацию $sl(2)$ в $e(1, 1)$. Рассмотрим трехмерное пространство с базисом x, y, z и соотношениями коммутации

$$[z, x] = x, \quad [z, y] = -y, \quad [x, y] = \varepsilon z.$$

При $\varepsilon \neq 0$ эта алгебра изоморфна $sl(2)$, в то время как при $\varepsilon = 0$ это алгебра $e(1, 1)$. Для всех значений ε функция $xy + \varepsilon z^2/2$ инвариантна. Двуполостные гиперболоиды, отвечающие положительным значениям этой функции при $\varepsilon < 0$ (и отрицательным значениям при $\varepsilon > 0$), деформируются в цилиндры $xy = c$ при $\varepsilon = 0$. Интересно проследить за поведением однополостных гиперболоидов. Они приводят к другим цилиндрам, а также к симплектическим многообразиям для $e(1, 1)$, отвечающим ненулевым классам когомологий $e(1, 1)$. (Напомним, что $H^2(e(1, 1)) = \mathbf{R}$, в то время как $H^2(sl(2)) = 0$.) Действительно, для *фиксированного* значения $xy + \varepsilon z^2/2$ точки в окрестности $x = 0$ на гиперболоиде (или в окрестности $y = 0$) будут двигаться к бесконечности как $\varepsilon^{-1/2}$ и гиперболоиды распадутся на два цилиндра. Что касается орбит с ненулевым классом когомологий, то заметим, что коциклы имеют вид $hx^* \wedge y^*$ и для всех ε

$$dz^* = \varepsilon x^* \wedge y^*.$$

При $\varepsilon = 0$, как мы знаем, $hx^* \wedge y^*$ не является кограницей (для ненулевого h), в то же время при $\varepsilon \neq 0$ верхнее уравнение показывает, что $hx^* \wedge y^* = d(h\varepsilon^{-1}z^*)$. Это наводит на мысль рассмотреть орбиту, проходящую через точку $x = 0$, $y = 0$, $z = h\varepsilon^{-1}$, т. е. орбиту $xy + \varepsilon z^2/2 = m_\varepsilon$, где $m_\varepsilon = (2\varepsilon)^{-1} h^2$. Непосредственное вычисление показывает, что если рассмотреть ограниченную область по x и y, то действие на этой части орбиты стремится к описанному предельному действию для $e(1, 1)$.

§ 8. *Мультисимплектические структуры и вариационное исчисление*

Основным стимулом к изучению симплектических многообразий пока для нас были асимптотики. Однако есть и другой путь, который исторически привел к симплектическим многообразиям. Это классическая механика, и, в частности, связанные с ней вариационные принципы, см. Стернберг [2, гл. III, § 7, и гл. IV], Люмис — Стернберг [13, гл. XIII] и Сурьо [9]. Для систем с конечным числом степеней свободы, т. е. для вариационных задач с одним независимым параметром — кривыми на конечномерном многообразии — «пространство экстремалей» является конечномерным симплектическим многообразием; см. в этой связи Германн [21], Гарсиа [22] и Дедекер [23].

В этом параграфе мы коротко остановимся на геометрических вопросах, касающихся вариационных задач для одного или нескольких независимых переменных. В случае нескольких независимых переменных наши результаты будут довольно формальными. В некоторых случаях они стали бы более содержательными, если привести теоремы существования для эллиптических или гиперболических дифференциальных уравнений. Однако мы не будем останавливаться на этих вопросах. Изложение здесь следует работе [17], а «симплектическая структура» использует также [18]. Мы ограничимся случаем лагранжианов, содержащих производные не выше первого порядка. Пусть $Y \to X$ — расслоенное многообразие, т. е. задано такое дифференцируемое отображение π из Y в X, что вблизи каждой точки Y можно ввести координаты, относительно которых отображение π — проекция на какую-то их часть. Значит, мы можем ввести локальные координаты на Y вида $(x, y)=(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^f)$, где n — размерность X, а $n+f$ — размерность Y. Сечение Y над X — это отображение s: $X \to Y$, удовлетворяющее условию $\pi \cdot s = \mathrm{id}$. Значит, s относит каждой точке $x \in X$ точку $s(x) \in \pi^{-1}(x)$. (Множество $\pi^{-1}(x)$ называется *слоем* над x. Слой автоматически является дифференцируемым подмногообразием в Y.) Локально сечение задается f функциями $y^l = y^l(x^1, \ldots, x^n)$, где $l = 1, \ldots, f$. Говорят, что два сечения s_1 и s_2 совпадают до первого порядка в некоторой точке x_0, если $s_1(x_0) = s_2(x_0)$ и функции $y_1^l(x)$ и $y_2^l(x)$ имеют одинаковые первые производные в точке x_0. (Легко убедиться, что это условие не зависит от выбора координат вида (x, y).) Совпадение до первого порядка в точке x_0 — это отношение эквивалентности. Класс эквивалентности сечения s в точке x_0 называется *1-струей* сечения *s в точке* x_0 и обозначается через $j_1(s)(x_0)$. Поскольку нам не встретятся струи более высокого порядка, мы будем опускать индекс 1 и писать просто $js(x_0)$. Струя $js(x_0)$ определяется локально координатами $(x, y, (y))=(x^i, y^l, y_i^l)$, $i = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, f$, где x^i — координаты x_0, y^l — координаты $s(x_0)$, а y_i^l — первые частные производные s, вычисленные в x_0. Итак, множество всех струй во всех точках X является многообразием, которое мы обозначим через JY. Имеются проекции

$$\pi_Y\colon\ JY \to Y, \quad \pi_Y(x, y, (y))=(x, y)$$

и

$$\pi_X\colon\ JY \to X, \quad \pi_X(x, y, (y))= x,$$

так что $\pi_X = \pi \circ \pi_Y$. Значит, JY — расслоенное многообразие над Y, а также расслоенное многообразие над X. Если s — сечение Y, то s определяет сечение js расслоенного многообразия JY над X, где js в каждой точке X есть струя s в этой точке. На языке локальных координат, если s задается функциями $y^l(x) = s^l(x)$, то js задается функциями $y^l = s^l(x)$, $y^l_i = (\partial s^l/\partial x^i)(x)$. Не всякое сечение JY имеет вид js. Действительно, если u — сечение JY, то в локальных координатах его задают функции y^l и y^l_i от x, для которых должны удовлетворяться уравнения

$$dy^l(x) - y^l_i(x)\,dx^i = 0 \quad (\text{по } i \text{ — суммирование}).$$

С другой стороны, пусть ω — линейная дифференциальная форма, которая отображает касательные векторы к JY в касательные векторы к Y по формуле

$$\omega = (\partial/\partial y^l) \otimes \left[dy^l - y^l_i\,dx^i\right]. \tag{8.1}$$

Тогда сечение u расслоения JY над X имеет вид $u = js$ в том и только том случае, когда

$$u^*\omega = 0. \tag{8.2}$$

Отметим, что мы дали определение ω через локальные координаты. В действительности же ω допускает инвариантное определение. Пусть ξ — касательный вектор к JY в точке z, где $z = js(x_0)$ при $x_0 \in X$. Тогда $d\pi_Y\xi$ — касательный вектор к Y в точке $y_0 = s(x_0)$, а $d\pi_X\xi$ — касательный вектор к X в точке x_0. Пусть η — любой касательный вектор к X в точке x_0; тогда $ds_{x_0}\eta$ — касательный вектор к Y в точке y_0, который зависит только от η и $z = js(x_0)$. Мы утверждаем, что

$$\langle \xi, \omega \rangle = d\pi_Y\xi - ds(d\pi_X\xi). \tag{8.3}$$

Действительно, в локальных координатах мы можем написать

$$\xi = a^i(\partial/\partial x^i) + b^l(\partial/\partial y^l) + c^l_i(\partial/\partial y^l_i),$$

т. е.

$$d\pi_X\xi = a^i(\partial/\partial x^i),$$

$$d\pi_Y\xi = a^i(\partial/\partial x^i) + b^l(\partial/\partial y^l),$$

и

$$ds(d\pi_X\xi) = a^i(\partial/\partial x^i) + y^l_i a^i(\partial/\partial y^l),$$

что и доказывает нашу формулу.

Заметим, что если ξ — *вертикальный* касательный вектор, т. е.

$$\text{если} \quad d\pi_X\,\xi = 0, \quad \text{то} \quad \langle \xi, \omega \rangle = d\pi_Y\xi. \tag{8.4}$$

Пусть L — вещественнозначная функция на JY и (vol) есть n-форма на X. Основная задача вариационного исчисления —

найти экстремали для интегралов вида

$$I_A[s]=\int\limits_A L(js)\,(\mathrm{vol}), \tag{8.5}$$

где A — некоторая ограниченная область на X. Здесь s пробегает некоторый класс сечений X. Обычная задача (задача с фиксированной границей) рассматривается в ситуации, когда A — область с гладкой границей ∂A, а s принимает заданные значения на границе.

Основная идея *формализма Гамильтона — Картана* состоит в замене интеграла (8.5) интегралом вида $\int\limits_A u^*\Theta$, где Θ — подходящая n-форма на JY и u — сечение JY над X. Этот интеграл удовлетворяет условию

$$\int\limits_A u^*\Theta=\int\limits_A L(js)\,(\mathrm{vol}),$$

если $u=js$. Оказывается, n-форма Θ такова, что экстремали для $\int\limits_A u^*\Theta$, где u пробегает *все* сечения JY, автоматически имеют вид $u=js$, если L «регулярен».

Опишем теперь конструкцию формы Θ. Начнем с определения формы θ, которая отображает TJY в TX, т. е. ставит в соответствие каждому касательному вектору ξ к JY в точке z касательный вектор $\langle\xi,\ \theta\rangle$ к X в точке πz. Вначале приведем формулу в локальных координатах. Определим функции p_l^i на JY:

$$p_l^i=\partial L/\partial y_i^l$$

и положим

$$\theta=(\partial/\partial x^i)\otimes\left[\frac{1}{n}\,L\,dx^i+p_l^i\left(dy^l-y_j^l dx^j\right)\right]. \tag{8.6}$$

Чтобы дать инвариантное определение θ, заметим, что L задает отображение расслоений σ из $JY\to Y$ в векторное расслоение $\mathrm{Hom}(VY,\ TX)\to Y$, где через VY обозначено расслоение вертикальных касательных векторов к Y. Отображение σ (преобразование Лежандра) определяется как $\sigma(z)=d_vL$, где через d_v обозначен дифференциал L относительно слоя JY над Y. (Это имеет инвариантный смысл, поскольку JY — «аффинное расслоение» над Y, ассоциированное с которым векторное расслоение есть $\mathrm{Hom}(TX,\ VY)$. Действительно, если заданы два сечения, для которых $s_1(x_0)=s_2(x_0)=y_0$, то отображение $ds_{1*}-ds_{2*}\in\mathrm{Hom}(TX_{x_0},\ VY_{y_0})$ зависит только от $js_1(x_0)$ и $js_2(x_0)$.) Тогда при $\xi\in TJY_z$

$$\langle\xi,\ \theta\rangle=\left(\frac{1}{n}\right)L(z)\,d\pi_X\xi+\sigma(z)\,\langle\xi,\ \omega\rangle, \tag{8.7}$$

где $\langle \xi, \omega \rangle \in VY$, так что $\sigma(z)\langle \xi, \omega \rangle \in TX$. Из определений следует, что если s — любое сечение Y, то в локальных координатах

$$(js)^* \theta = \left(\frac{1}{n}\right) L \left(\frac{1}{n}\right)(js)\,\mathrm{id} = \left(\frac{1}{n}\right) L\,(js)\,\partial/\partial x^i \otimes dx^i. \tag{8.8}$$

Форма Θ в локальных координатах определяется следующим образом:

$$\Theta = \left(L - p_l^i y_i^l\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n + \\ + \sum_{l,\,i} (-1)^{i+1} p_l^i\, dy^l \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n, \tag{8.9}$$

где координаты выбраны так, чтобы $(\mathrm{vol}) = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Инвариантное определение Θ имеет вид

$$\Theta = \theta \mathbin{\overline{\wedge}} (\mathrm{vol}), \tag{8.10}$$

где операция $\overline{\wedge}$ спаривает TX-значную p-форму на JY с q-формой на X и дает $(p+q-1)$-форму на JY в соответствии с правилом

$$(\alpha \otimes \eta) \mathbin{\overline{\wedge}} \tau = \alpha \wedge \pi_X^* (\eta \lrcorner \tau),$$

где η — векторное поле на X, а α — это p-форма на JY. (Подробности можно найти в [14].)

Из (8.10) следует, что для любого сечения u расслоения JY над X имеем

$$u^*\Theta = u^* (\theta \mathbin{\overline{\wedge}} \mathrm{vol}),$$

а потому

$$u^*\Theta = L(u)\,(\mathrm{vol}) + \sigma(u) \cdot u^*\omega. \tag{8.11}$$

В частности, если $u = js$, то $u^*\omega = 0$ и мы получаем

$$(js)^*\,\Theta = L\,(js)\,(\mathrm{vol}). \tag{8.12}$$

Предположим, что u_t — некоторое однопараметрическое семейство сечений JY, $u_0 = u$. Обозначим через ξ векторное поле вдоль u, касательное к деформации, т. е. $\xi(x) \in TJY_{u(x)}$ — касательный вектор к кривой $t \longmapsto u_t(x)$. Тогда, как показывает основная формула дифференциального исчисления,

$$\frac{d}{dt} u_t^*\Theta \,\big|_{t=0} = u^* (\xi \lrcorner d\Theta) + du^* (\xi \lrcorner \Theta).$$

Если u — экстремаль интеграла $\int_A u_t^*\Theta$ среди всех u_t, удовлетворяющих условию $\pi_Y u_t = \pi_Y u$ на ∂A, то мы получаем «уравнения Эйлера»

$$u^* (\xi \lrcorner \Omega) = 0, \tag{8.13}$$

где $\Omega = d\Theta$, а ξ может быть любым векторным полем на JY. Вычисление (которое можно провести или в локальных координатах, или инвариантно, как в [17, стр. 219—220]), показывает, что для любого векторного поля η на JY, удовлетворяющего условию $d\pi_Y\eta=0$,

$$u^*(\eta \lrcorner \Omega)=\operatorname{tr}[(u^*D_\eta\sigma(L))\circ u^*\omega](\mathrm{vol}), \tag{8.14}$$

где $u^*\omega\in\operatorname{Hom}(TX, VY)$ и $u^*D_\eta\sigma\in\operatorname{Hom}(VY, TX)$, т. е. след имеет смысл. Если $u=js$, то $u^*\omega=0$, т. е. $u^*(\eta \lrcorner \Omega)=0$ для всех η, удовлетворяющих условию $d\pi_Y\eta=0$. Если s_t — однопараметрическое семейство сечений Y с $s_0=s$ и $s_t|_{\partial A}=s|_{\partial A}$, то js_t — однопараметрическое семейство сечений JY, где касательное векторное поле η удовлетворяет условию: $d\pi_Y\eta=\xi$ — касательное поле вдоль s. Тогда, если

$$\frac{d}{dt} I_A(s_t)=0,$$

мы получаем, что для всех таких η

$$\int u^*(\eta \lrcorner \Omega)=0,$$

откуда следует, что для всех таких η

$$u^*(\eta \lrcorner \Omega)=0.$$

Отсюда в свою очередь следует, что $u^*(\eta \lrcorner \Omega)=0$ для всех η, удовлетворяющих условию $d\pi_X\eta=0$. Но, поскольку $u^*\Omega=0$ (так как Ω — это $(n+1)$-форма, а X только n-мерно), мы получаем, что $u^*(\eta \lrcorner \Omega)=0$ для всех η. Таким образом, мы видим, что *если s — экстремаль для I_A, то $u=js$ удовлетворяет* (8.13).

Те же рассуждения показывают, что если $u=js$ и u удовлетворяет (8.13), то u — экстремаль. Но мы можем сказать значительно больше. Предположим только, что u удовлетворяет (8.13). По (8.14) отсюда следует, что $u^*\omega$ — сечение $\operatorname{Hom}(TX, VY)$, перпендикулярное подрасслоению расслоения $\operatorname{Hom}(VY, TX)$, порожденному всеми $D_\eta\sigma$. Если $D_\eta\sigma$ порождают все $\operatorname{Hom}(VY, TX)_z$, то из условия (8.13) автоматически следует, что $u^*\omega=0$, т. е. что $u=js$. Условие, состоящее в том, что $D_\eta\sigma$ порождают все $\operatorname{Hom}(VY, TX)_z$, известно как «условие регулярности» лагранжиана L. В локальных координатах оно означает, что гессиан $\partial^2L/\partial y_i^l\partial y_j^k$ — невырожденная $(fn\times fn)$-матрица. Итак, для регулярных лагранжианов *уравнение*

$$u^*(\eta \lrcorner \Omega)=0$$

для всех η эквивалентно паре условий

$$u=js \quad \text{и} \quad s\text{ — экстремаль } I_A.$$

Пусть ξ — векторное поле на JY. Условие, что ξ (инфинитезимально) сохраняет Ω, имеет вид

$$0=D_\xi\Omega=d(\xi \lrcorner \Omega).$$

Локально это эквивалентно более сильному условию

$$\xi \lrcorner \Omega = -d\tau. \tag{8.15}$$

Назовем векторное поле, удовлетворяющее (8.15), *гамильтоновым*. Заметим, что если u удовлетворяет (8.13), то $du^*(\tau) = 0$, т. е. форма $u^*(\tau)$ замкнута. Мы хотим рассматривать τ как функционал на экстремалях:

$$\tau(u) = \int_C u^*\tau,$$

где C — подходящее $(n-1)$-мерное подмногообразие в X. Если, например, $X = M \times \mathbb{R}$ и τ имеет «компактный носитель» по переменным M, то можно выбрать в качестве C «пространственноподобную поверхность» $\{(m, t(m))\}$ и значение интеграла не будет зависеть от выбора этой пространственноподобной поверхности C, т. е. от выбора функции t. Кроме того, если к τ добавить точную форму dv (с компактным носителем по M), то значение интеграла не изменится. В связи с этим введем «алгебру токов», состоящую из всех $(n-1)$-форм τ, для которых существует такое ξ, что имеет место (8.15). Рассмотрим «алгебру зарядов», состоящую из классов эквивалентности $[\tau]$, где τ удовлетворяет (8.15) и

$$[\tau] = [\tau'], \quad \text{если} \quad \tau' = \tau + dv \quad \text{для некоторой} \quad (n-2)\text{-формы } v.$$

Определим скобку Пуассона

$$\{\tau_1, \tau_2\} = \xi_1 \lrcorner d\tau_2,$$

где $\xi_i \lrcorner \Omega = -d\tau_i$. Заметим, что это определение не зависит от конкретного выбора ξ_i. Действительно,

$$\xi_1 \lrcorner d\tau_2 = -\xi_1 \lrcorner \xi_2 \lrcorner \Omega = -\xi_2 \lrcorner d\tau_1,$$

откуда следует, что если $\xi_1 \lrcorner \Omega = 0$, то $\xi_1 \lrcorner d\tau_2 = 0$, так что $\{\tau_1, \tau_2\}$ не зависит от выбора ξ_1, если только $\xi_1 \lrcorner \Omega = -d\tau_1$. Мы видим также, что скобка $\{\tau_1, \tau_2\}$ антисимметрична по τ_1 и τ_2. Отметим еще, что $\xi_1 \lrcorner d(dv) = 0$, так что скобка Пуассона для токов индуцирует операцию на зарядах:

$$\{[\tau_1], [\tau_2]\} = [\{\tau_1, \tau_2\}],$$

которая также называется скобкой Пуассона. Заметим, что

$$D_{\xi_1}(\xi_2 \lrcorner \Omega) = [\xi_1, \xi_2] \lrcorner \Omega$$

и

$$\begin{aligned} D_{\xi_1}(\xi_2 \lrcorner \Omega) &= D_{\xi_1} d\tau_2 = d(D_{\xi_1}\tau_2) = \\ &= d(\xi_1 \lrcorner d\tau_2) + d(d(\xi_1 \lrcorner \tau_2)) = d(\xi_1 \lrcorner d\tau_2), \end{aligned}$$

откуда

$$[\xi_1, \xi_2] \lrcorner \Omega = -d\{\tau_1, \tau_2\}.$$

Мы видим также, что

$$\begin{aligned}\{\tau_1, \{\tau_2, \tau_3\}\} &= [\xi_2, \xi_3] \rfloor d\tau_1 = \\ &= -D_{\xi_2}(\xi_3 \rfloor d\tau_1) + \xi_3 \rfloor D_{\xi_2} d\tau_1 = \\ &= -D_{\xi_2}(\xi_1 \rfloor d\tau_3) + \{\{\tau_1, \tau_2\}, \tau_3\} = \\ &= \xi_2 \rfloor d(\xi_1 \rfloor d\tau_3) + d(\xi_2 \rfloor \xi_1 \rfloor \tau_3) + \{\{\tau_1, \tau_2\}, \tau_3\} = \\ &= \{\{\tau_1, \tau_2\}, \tau_3\} + \{\tau_2, \{\tau_1, \tau_3\}\} + d(\xi_1 \rfloor \xi_2 \rfloor \xi_3 \rfloor \Omega).\end{aligned}$$

Значит, алгебра токов не обязательно удовлетворяет тождеству Якоби, в то время как алгебра зарядов удовлетворяет ему. Конечно, если $\dim X = 1$, последнее слагаемое равно нулю.

Пусть φ_t — однопараметрическое семейство автоморфизмов JY, удовлетворяющих условию

$$\varphi_t^* \Theta = \Theta + d\alpha_t.$$

(Например, φ_t может получиться из однопараметрического семейства автоморфизмов Y, сохраняющих L.) Если η — соответствующее векторное поле, то

$$D_\eta \Theta = -d\dot{\alpha}_0, \quad \eta \rfloor \Omega = d(\dot{\alpha}_0 - \eta \rfloor \Theta),$$

т. е. поле η гамильтоново с $\tau = -\dot{\alpha}_0 + \eta \rfloor \Theta$. Итак, φ_t порождает «сохраняющийся ток» $u^*\tau$ для любой экстремали u. Это утверждение составляет содержание теоремы Нётер.

В случае $n = \dim X = 1$ условие на τ (она теперь форма степени нуль, т. е. функция) приводит в силу уравнения (8.15) к постоянству τ вдоль экстремалей. Действительно, в этом случае экстремали — это интегральные кривые для поля линейных элементов, порожденного вектором η, удовлетворяющим условию $\eta \rfloor \Omega = 0$, и условие $\langle \eta, d\tau \rangle = 0$ эквивалентно (8.15), поскольку ранг 2-формы Ω равен $2f$, а размерность JY равна $2f+1$. Значит, при $n = 1$ «алгебра токов» — это алгебра Ли, ее можно отождествить с «алгеброй зарядов», и она состоит из *всех* гладких функций на экстремалях.

При $n > 1$ условие (8.15) гораздо более ограничительное. «Функции на экстремалях», отвечающие $[\tau]$, где τ удовлетворяет (8.15), образуют только небольшое подпространство в пространстве функций на экстремалях. В действительности для многих интересных лагранжианов пространство таких $[\tau]$ конечномерно. Если лагранжиан «квадратичен», т. е. может быть представлен квадратичной функцией от координат на JY, когда на X и Y выбраны подходящие координаты, то имеется бесконечномерное пространство $[\tau]$, «достаточных» в некоем смысле, который мы не будем уточнять.

Тогда возникает задача, как ввести разумный класс функций на экстремалях. Один возможный метод предложен в [18]; он основан на рассмотрении «инфинитезимальной версии» конструкции $[\tau]$, которая включает так называемую «вторую вариацию» и поля

Якоби. Грубо говоря, ситуация следующая. Пусть u_t — однопараметрическое семейство экстремалей и ξ — векторное поле вдоль u, касательное к u_t в $t=0$. Тогда ξ удовлетворяет уравнению Якоби

$$u^*(\eta \rfloor d(\xi \rfloor \Omega))=0 \quad \text{для всех векторных полей } \eta \text{ вдоль } u.$$

Множество ξ, удовлетворяющих этому уравнению, можно описать как экстремали квадратичного лагранжиана на векторном расслоении всех векторных полей вдоль u; этот квадратичный функционал и есть вторая вариация. Мы отсылаем за подробностями к работе [17], особенно стр. 255—262. Множество ξ, удовлетворяющих указанному уравнению, можно рассматривать как «касательное пространство» к множеству экстремалей в u. Тогда мы можем определить билинейную кососимметрическую форму Ξ из этого «касательного пространства» в $\bigwedge^{n-1}X$, переводящую ξ_1, ξ_2 в $u^*(\xi_1 \rfloor \xi_2 \rfloor \Omega)$. Можно проверить, что эта форма замкнута для любых ξ_1, ξ_2 из «касательного пространства» к u, а значит, если ξ_1 или ξ_2 имеет соответствующий «компактный носитель в пространственноподобном направлении», то интегрированием по некоторой пространственноподобной поверхности определена кососимметрическая 2-форма на «касательном пространстве». Тогда эту 2-форму можно было бы считать кандидатом на симплектическую форму на «многообразии экстремалей». Для этой симплектической формы рассматриваются те «функции на экстремалях» f, которые удовлетворяют условию $df_u=\int \xi \rfloor \Xi$, где интеграл берется по пространственноподобной поверхности. Подробности читатель может найти в [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Weinstein A. — *Advances in Math.*, **6** (1971), 329—346.
2. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. Пер. с англ. — М.: Мир, 1970.
3. Hörmander L. — *Acta Math.*, **127** (1971), 79—183. [Имеется перевод в сб. Математика, **16**:1 (1972), 17—61, и **16**:2 (1972), 67—137.]
4. Gordon W. B. — *J. Math. Mech.*, **19** (1969/1970), 111—114.
5. Wintner A. The analytical foundations of celestial mechanics. — Princeton Math. Ser., vol. 5, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1941.
6. Moser J. K. — *Comm. Pure Appl. Math.*, **23** (1970), 609—636.
7. Sternberg S. Celestial mechanics, I. — Benjamin, New York, 1969.
8. Weinstein A. — *Ann. of Math.*, **98** (1973), 377—410.
9. Souriau J.-M. Structure des systèmes dynamiques. Maîtrises de mathématiques. — Dunod, Paris, 1970.
10. Chu B. Y. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, **197** (1974), 145—159.
11. Kostant B. — *Amer. J. Math.* **85** (1963), 327—404.
12. Rothschild L. F. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, **168** (1972), 403—421.
13. Кириллов А. А. — *Успехи матем. н.*, **17**:4 (1962), 57—110.
14. Duflo M., Vergne M. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. A—B, **268** (1969), A583—A585.
15. Kosmann Y., Sternberg S. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. A—B, **279** (1974), A777—A779.

16. Sternberg S. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, **212** (1975), 113—130.
17. Goldschmidt H., Sternberg S. — *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), **23** (1973), fasc. 1, 203—267.
18. Kijowski J., Szczyrba W. In: Geometrie symplectique et physique mathematique. — Ed. CNRS, Paris, 1975, pp. 347—378.
19. Спеньер Э. Алгебраическая топология. Пер. с англ. — М.: Мир, 1971.
20. Pukanszky L Leçons sur les représentations des groupes. — Dunod, Paris, 1967
21. Hermann R. Differential geometry and the calculus of variations. — Academic Press, New York, 1968.
22. Garcia P. L. — *Symposia Mathematica*, XIV (1974), 219—246.
23. Dedecker P. — *Colloque Intern. de Geom. Diff.*, Strasbourg (1953).
24. Leray J. — *Symposia. Math.*, XIV (1974).
25. Souriau J.-M. Construction explicite de l'indice de Maslov (в печати).
26*. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1972.
27*. Арнольд В. И. — *Функц. анализ и прилож.*, 1:1 (1967). 1—14.
28*. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М. Наука, 1974.
29*. Weinstein A. Lectures on symplectic anifolds. — CBMS, AMS, Providence, R. I., 1979.
30*. Wallach N. R. Symplectic geometry and Fourier analysis — Math. Sci Press, Brockline, Massachusetts, 1977.
31*. Мищенко А. С., Стернин Б Ю. Шаталов В. Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. — М.: Наука, 1978
32* Adler M. — *Invent. math.* 50 (1979), 219—248.
33*. Kazhdan D., Kostant B., Sternber S. — *Comm. Pur Appl. Math.*, **31** 1978), 481—508.
34*. Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. — *Invent. math.*, 54 (1979), 81—100.
35*. Leray J. Analyse lagrangienne et mécanique quantique, R. C. P., 25, vol. 25. — I. R. M. A., Strasbourg, 1978.

Глава V

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ

Эта глава посвящена некоторым методам, недавно развитым для получения геометрических конструкций, связывающих классическую и квантовую механику. Первый шаг (называемый предквантованием по Костанту) состоит в реализации симплектической формы ω на симплектическом многообразии X как формы кривизны линейного расслоения L над X. (Этого нельзя сделать для произвольных X, а лишь тогда, когда форма ω определяет целочисленный класс когомологий. Уже это условие налагает интересные «квантовые» условия на X.) Тогда функции на X действуют на сечения L. Однако пространство всех сечений L слишком велико Мы хотим рассматривать сечения, которые «постоянны в некоторых направлениях», а для этого нужно ввести понятие «поляризации». Для того чтобы ввести структуру гильбертова пространства, согласованную с преобразованиями, нам потребуются объекты, называемые «полуформами». (Эти объекты упоминались в гл. II и будут играть важную роль в символических исчислениях глав VI и VII.) Существенно также, что между объектами, ассоциированными с различными поляризациями, определено полуторалинейное спаривание (если только выполняются соответствующие условия трансверсальности). Мы попытаемся объяснить все эти идеи в этой главе и проиллюстрируем их в последнем параграфе некоторыми квантовомеханическими примерами. Идея рассматривать линейное расслоение и поляризации была предложена независимо Костантом [1] и Сурьо [2]; она использовалась (особенно комплексные поляризации) Костантом и Ауслендером [3] в теории представлений разрешимых групп Ли. Идея полуформ и спаривания возникла в результате совместных усилий Блаттнера, Костанта и Стернберга (см. [4, 5]); квантовомеханические примеры взяты из работ Симмса [6, 7].

§ 1. Формы кривизны и векторные расслоения

В § 7 гл. IV мы рассматривали действие алгебры Ли инфинитезимальными автоморфизмами симплектических многообразий. Мы видели, что имеется различие между понятием инфинитезимального автоморфизма, т. е. векторного поля, удовлетворяющего условию $D_\xi \omega = 0$, или, что то же самое,

$$d(\xi \rfloor \omega) = 0,$$

и понятием гамильтонова векторного поля, удовлетворяющего более сильному условию

$$\xi \rfloor \omega = -df_\xi.$$

Для гамильтоновых векторных полей функции f_ξ определены с точностью до аддитивной константы. С другой стороны, обозначим через P алгебру C^∞-функций на X относительно скобки Пуассона, и пусть A — алгебра гамильтоновых векторных полей. Тогда, очевидно, имеется точная последовательность

$$0 \to \mathbf{R} \to P \to A \to 0,$$

где элементы $\mathbf{R}$ вкладываются как константы. В классической механике ключевую роль играет алгебра A. Напротив, в квантовой механике основной является алгебра P. (В самом деле, одна из формулировок принципа неопределенности Гейзенберга состоит в том, что имеется нетривиальное представление констант в алгебре наблюдаемых.) Поэтому интересно найти групповой аналог указанной выше точной последовательности. Это было сделано Костантом в его фундаментальной работе [1] (см. также Сурьо [2]). Основное новое соображение состоит в том, что для получения групповой версии нужно иметь возможность рассматривать симплектическую форму ω как форму кривизны линейного расслоения со связностью. По этой причине мы приводим в этом параграфе некоторые основные факты, касающиеся векторных расслоений, связностей и кривизны. Мы предполагаем, что читатель хорошо знаком с понятием гладкого векторного расслоения E над многообразием X.

Будем предполагать, что все рассматриваемые векторные расслоения локально тривиальны. Это означает, что для каждого $x \in X$ существует такая окрестность U, что E_U тривиально, т. е. $E_U \sim U \times V$ для некоторого фиксированного V (не зависящего от U).

Мы будем рассматривать векторные пространства над полем вещественных или над полем комплексных чисел. В каждом из этих случаев получается свой тип векторных расслоений. Поэтому удобно иметь некоторый набор модельных векторных пространств. Для конечномерных векторных расслоений можно считать $V = \mathbf{R}^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ или $V = \mathbf{C}^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Каждое из этих пространств рассматривается со стандартным базисом. Через $GL(V)$ обозначается группа всех невырожденных линейных преобразований V. Значит, для каждого из модельных пространств $GL(V)$ можно понимать как группу вещественных или комплексных $(n \times n)$-матриц.

Пусть $E \to X$ — векторное расслоение. Дифференцируемое отображение s: $X \to E$ называется *сечением*, если $\pi \circ s = \mathrm{id}$; другими словами, $s(x) \in E_x$ для всех x. Сечения можно складывать: $(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x)$ и умножать на функцию: $(fs)(x) = f(x)s(x)$. Таким образом, пространство всех сечений является векторным пространством над полем вещественных (или комплексных) чисел, а в действительности и модулем над кольцом дифференцируемых функций на X.

Если E_1 и E_2 — векторные расслоения над одним и тем же многообразием X, то можно очевидным образом получить векторное расслоение $E_1 \oplus E_2$ (прямую сумму), т. е. $(E_1 \oplus E_2)_x = E_{1x} \oplus E_{2x}$. Аналогично можно рассмотреть $E_1 \otimes E_2$. При этом возникают соответствующие операции на сечениях. Например, если s_1 — сечение E_1, а s_2 — сечение E_2, то $s_1 \otimes s_2$ — сечение $E_1 \otimes E_2$.

Если ξ — векторное поле на X и s — сечение $E \to X$, то хотелось бы определить дифференцирование s в направлении ξ. Сделать это, не вводя какую-то дополнительную структуру, нельзя, поскольку нет способа сравнивать векторы, принадлежащие различным пространствам E_x. Соответствующая дополнительная структура называется *линейной связностью на* E. Итак, мы хотим иметь правило, которое каждому векторному полю ξ относит линейный оператор ∇_ξ со свойствами

$$\nabla_\xi (s_1 + s_2) = \nabla_\xi s_1 + \nabla_\xi s_2,$$

$$\nabla_\xi (fs) = (D_\xi f) s + f \nabla_\xi s,$$

$$\nabla_{\xi_1 + \xi_2} s = \nabla_{\xi_1} s + \nabla_{\xi_2} s$$

и

$$\nabla_{f\xi} s = f \nabla_\xi s.$$

Два последних равенства означают, что для каждого фиксированного s отображение $\xi \longmapsto \nabla_\xi s$ линейно над функциями. Значит, мы можем рассматривать это отображение как сечение расслоения $E \otimes T^*$, где $T^* = T^*(X)$ — кокасательное расслоение. Итак, последние два уравнения означают, что каждому сечению s расслоения E мы поставили в соответствие сечение Ds расслоения $E \otimes T^*$. Первое уравнение теперь можно переписать так:

$$D(s_1 + s\ ) = Ds_1 + Ds_2,$$

а второе так:

$$D(fs) = s \otimes df + f\,Ds. \tag{1.1}$$

Обратно, всякое отображение $s \longmapsto Ds$, удовлетворяющее (1.1), определяет линейную связность, если положить

$$\nabla_\xi s = (Ds \circ \xi).$$

Предположим, что $E|_U$ изоморфно тривиальному расслоению $U \times V$, т. е. $E|_U \overset{\varphi}{\cong} U \times V$. Если $\delta_1, \ldots, \delta_n$ — (выделенные) базисные векторы в V ($=\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$), то, полагая

$$s_i(x)=\varphi^{-1}(\delta_i), \quad x\in U,$$

мы получаем n таких сечений, что $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ образуют базис в E_x для всех x. (Обратно, для любых n сечений $s_1, \ldots, s_n$, линейно независимых во всех точках $x\in U$, мы получаем изоморфизм между $E|_U$ и $U\times V$, ставя в соответствие элементу $e=a_1s_1(x)+\ldots+a_ns_n(x)\in E_x$ элемент $(x, a_1\delta_1+\ldots+a_n\delta_n)\in U\times V$.) Будем называть $\mathbf{s}=(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *репером* в $E|_U$. Значит, $\mathbf{s}(x)$ — базис в E_x. Если $\mathbf{s}'$ — репер в $E|_W$, то на $U\cap W$ мы можем написать $s_j'=\sum A_{ij}s_i$, или, короче,

$$\mathbf{s}'=\mathbf{s}A,$$

где $A=(A_{ij})$ — матрица порядка n из функций на $U\cap W$. Далее, на U имеем

$$Ds_j=\sum s_i\times\theta_{ij},$$

где θ_{ij} — линейные дифференциальные формы, зависящие от выбора репера. Если обозначить через $\theta_{\mathbf{s}}=(\theta_{ij})$ матрицу из форм, то предыдущее равенство перепишется более компактно:

$$D\mathbf{s}=\mathbf{s}\times\theta_{\mathbf{s}}.$$

Сечение общего вида на U можно записать в виде $\mathbf{s}\cdot\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — вектор-столбец из функций, а $\mathbf{s}$ — строка:

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}=(s_1, \ldots, s_n)$$

$$\text{и} \quad \mathbf{s}\cdot\mathbf{a}=a_1s_1+\ldots+a_ns_n.$$

Тогда уравнение (1.1) приобретает вид

$$D(\mathbf{s}\cdot\mathbf{a})=s_1\times da_1+\ldots+s_n\times da_n+a_1\,Ds_1+\ldots+a_n\,Ds_n$$

или, в очевидных обозначениях,

$$D(\mathbf{s}\cdot\mathbf{a})=\mathbf{s}\times d\mathbf{a}+D\mathbf{s}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{s}\times d\mathbf{a}+\mathbf{s}\times\theta_{\mathbf{s}}\mathbf{a}. \tag{1.2}$$

Применительно к уравнению $\mathbf{s}'=\mathbf{s}A$ мы видим, что

$$D(\mathbf{s}')=D(\mathbf{s}A)=\mathbf{s}\times dA+\mathbf{s}\times\theta_{\mathbf{s}}A=\mathbf{s}'A^{-1}\times dA+\mathbf{s}'A^{-1}\times\theta_{\mathbf{s}}A=$$
$$=\mathbf{s}'\times A^{-1}\,dA+\mathbf{s}'\times A^{-1}\theta_{\mathbf{s}}A=\mathbf{s}'\times[A^{-1}\,dA+A^{-1}\theta_{\mathbf{s}}A].$$

Итак, закон преобразования для $\theta_{\mathbf{s}}$ имеет вид

$$\theta_{\mathbf{s}'}=A^{-1}\,dA+A^{-1}\theta_{\mathbf{s}}A. \tag{1.3}$$

Обратно, предположим, что мы задали $\theta_{\mathbf{s}}$ для всех реперов $\mathbf{s}$, причем каждый $\mathbf{s}$ задан на открытом множестве U, где $\{U\}$ — покрытие X. Если при этом (1.3) имеет место для любой пары $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}'$, то легко убедиться, что (1.2) определяет связность.

Связность называется *плоской*, если (в окрестности каждой точки) можно выбрать такой репер $\mathbf{s}$, что $\theta_{\mathbf{s}}=0$. Ввиду (1.3), если связность плоская, то для *любого* репера форма связности θ имеет вид $A^{-1}dA$. Найдем необходимые условия того, что θ имеет такой вид. Заметим, что

$$0=dI=d(A^{-1}A)=dA^{-1}\cdot A+A^{-1}\cdot dA,$$

т. е.

$$dA^{-1}=A^{-1}\cdot dA\cdot A^{-1}. \tag{1.4}$$

Далее,

$$d(A^{-1}dA)=dA^{-1}\wedge dA=-(A^{-1}dA)\wedge(A^{-1}dA).$$

Значит, если $\theta_{\mathbf{s}}=A^{-1}dA$, то выражение

$$K(\theta_{\mathbf{s}})=d\theta_{\mathbf{s}}+\theta_{\mathbf{s}}\wedge\theta_{\mathbf{s}},$$

называемое *формой кривизны* для $\theta_{\mathbf{s}}$, должно равняться нулю. (Оказывается, что это условие также и достаточно.) Вычислим $K(\theta_{\mathbf{s}'})$ для $\mathbf{s}'=\mathbf{s}A$. Согласно (1.3), имеем

$$K(\theta_{\mathbf{s}'})=d[A^{-1}dA]+A^{-1}dA\wedge A^{-1}dA+d(A^{-1}\theta_{\mathbf{s}}A)+$$
$$+A^{-1}\theta_{\mathbf{s}}A\wedge A^{-1}\theta_{\mathbf{s}}A+A^{-1}dA\wedge A^{-1}\theta_{\mathbf{s}}A+A^{-1}\theta_{\mathbf{s}}A\wedge A^{-1}dA.$$

Первые два слагаемых, как мы уже видели, взаимно уничтожаются. Кроме того,

$$d(A^{-1}\theta_{\mathbf{s}}A)=dA^{-1}\wedge\theta_{\mathbf{s}}A+A^{-1}d\theta_{\mathbf{s}}A-A^{-1}\theta_{\mathbf{s}}\wedge dA=$$
$$=-A^{-1}dA\wedge A^{-1}\theta_{\mathbf{s}}A+A^{-1}d\theta_{\mathbf{s}}A-A^{-1}\theta_{\mathbf{s}}\wedge dA.$$

Слагаемые с минусами в этом выражении уничтожают два последних слагаемых в выражении для $K(\theta_{\mathbf{s}'})$. Получаем

$$K(\theta_{\mathbf{s}'})=A^{-1}K(\theta_{\mathbf{s}})A. \tag{1.5}$$

Это равенство показывает, что $K(\theta_{\mathbf{s}})$ определяет сечение расслоения $\operatorname{Hom}(E, E)\otimes\bigwedge^2T^*$, называемое кривизной D.

Если $E\to X$ — векторное расслоение и $f\colon Y\to X$ — дифференцируемое отображение, то мы получаем расслоение $f^{\#}E\to Y$, где $(f^{\#}E)_y=E_{f(y)}$. (В случае когда Y — подмногообразие в X, имеем $f^{\#}E=E_Y$.) Если s — сечение расслоения E над множеством U, то f^*s — сечение над $f^{-1}(U)$ вида $(f^*s)(y)=s(f(y))$. Если $\mathbf{s}$ — репер над U, то $f^*\mathbf{s}$ — соответствующий репер над $f^{-1}(U)$. Если D — связность, то $f^{\#}D$ — это связность на $f^{\#}E$, для которой формы связности относительно $f^*\mathbf{s}$ задаются формулами

$$(f^{\#}\theta)_{f^*\mathbf{s}}=f^*\theta_{\mathbf{s}}.$$

Рассмотрим, в частности, случай, когда $Y=(-1, 1)$ — интервал, т. е. f определяет кривую на X. Пусть t — стандартная координата на Y. Тогда $f^{\#}E$ — векторное расслоение над $(-1, 1)$ и мы можем написать $\mathbf{r} = f^*\mathrm{s}$ (на некотором открытом интервале) и

$$f^*\theta = B_t\, dt,$$

где B — некоторая матричнозначная функция от t. Тогда для всякого сечения $v = f^*\mathbf{s}\cdot \mathbf{a}$ над Y имеем

$$Dv = \mathbf{r}\times d\mathbf{a} + \mathbf{a}D\mathbf{r} = \mathbf{r}\times \mathbf{a}'\, dt + \mathbf{r}\times B\cdot \mathbf{a}\, dt = \mathbf{r}\times[\mathbf{a}' + B\mathbf{a}]\, dt.$$

Значит,

$$\nabla_{\partial/\partial t} v = (\mathbf{a}' + B\cdot \mathbf{a})\,\mathbf{r}.$$

Будем говорить, что сечение v горизонтально, если $\nabla_{\partial/\partial t} v = 0$.

Это условие сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\mathbf{a}' = -B\mathbf{a},$$

где B — заданная функция от t.

Мы можем решить это линейное дифференциальное уравнение и получить «параллельный перенос» вдоль кривой. Здесь

$$\mathbf{a}(t) = A(t)\,\mathbf{a}(0),$$

где $A(t)$ — единственное решение матричного дифференциального уравнения

$$A'(t) = -B(t)\,A,$$

$$A(0) = \mathrm{id}.$$

Эту матричнозначную функцию иногда записывают в виде

$$A(t) = T\left(\exp - \int_0^t B(u)\, du\right),$$

где символ справа — это «экспоненциальный интеграл по времени»

$$T\left(\exp - \int_0^t B(u)\, du\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp - \frac{1}{n} B(t) \exp - \frac{1}{n} B\left(\frac{n-1}{n} t\right) \ldots \exp - \frac{1}{n} B\left(\frac{t}{n}\right).$$

В этих обозначениях мы можем записать операцию параллельного переноса вдоль любой кривой $C\colon [0, t] \to X$, лежащей в области определения репера $\mathbf{s}$, как сопоставление вектору $\mathbf{s}(0)\cdot \mathbf{a}(0) \in E_{C(0)}$ вектора

$$\mathbf{s}(t)\cdot\left[T\exp - \int_C \theta_s\right]\mathbf{a}(0) \in E_{C(t)}.$$

В частном случае, когда E — *линейное* расслоение (т. е. слои E *одномерны*), нет нужды заботиться о порядке, в котором производятся умножения, поскольку (1×1)-матрицы коммутируют.

В этом случае параллельный перенос можно записать как умножение на *число* $\exp\left(-\int\limits_C \theta_s\right)$. Если C — замкнутая кривая, содержащаяся в области определения s, и $C=\partial D$ — граница некоторой двумерной поверхности D, то по теореме Стокса общий эффект от параллельного переноса вдоль замкнутой кривой состоит в умножении на

$$\exp\left(-\int\limits_D d\theta_s\right)=\exp\left(-\int\limits_D K(\theta_s)\right).$$

Вернемся к случаю общего векторного расслоения. Для любого репера s матрица $K(\theta_s)$ — это матрица из 2-форм. При внешнем умножении 2-форма коммутирует с любой другой формой. С учетом этого мы утверждаем, что $K(\theta_s)$ удовлетворяет тождеству (известному как тождество Бьянки)

$$dK(\theta_s)-[K(\theta_s),\ \theta_s]=0,$$

где скобкой обозначен коммутатор матриц с внешним умножением их элементов, т. е. если $A=(A_{ij})$ и $B=(B_{ki})$ — матрицы из 2-форм, то $[A,\ B]=C$, где

$$C_{ik}=\sum A_{ij}\wedge B_{jk}-B_{ij}\wedge A_{jk}.$$

Поскольку $K(\theta_s)$ — матрица из 2-форм, внешнее умножение коммутативно. Для доказательства тождества Бьянки заметим, что

$$dK(\theta_s)=dd\theta_s+d(\theta_s\wedge\theta_s)=d\theta_s\wedge\theta_s-\theta_s\wedge d\theta_s,$$

в то время как

$$[K(\theta_s),\ \theta_s]=d\theta_s\wedge\theta_s+\theta_s\wedge\theta_s\wedge\theta_s-\theta_s\wedge d\theta_s-\theta_s\wedge\theta_s\wedge\theta_s.$$

Если E_1 и E_2 — векторные расслоения со связностями, то очевидным образом строится связность на $E_1\oplus E_2$:

$$\nabla_\xi(s_1\oplus s_2)=\nabla_\xi s_1\oplus\nabla_\xi s_2$$

и единственная связность на $E_1\otimes E_2$, удовлетворяющая условию

$$\nabla_\xi(s_1\otimes s_2)=\nabla_\xi s_1\otimes s_2+s_1\otimes\nabla_\xi s_2.$$

Легко проверить, что при этом в самом деле получается связность.

Пусть $E\to X$ и $H\to Y$ — векторные расслоения. Морфизм $(f,\ r)$ из E в H — это пара, состоящая из дифференцируемого отображения $f\colon X\to Y$ и линейного отображения $r(x)\colon H_{f(x)}\to E_x$ для всех $x\in X$, гладко зависящего от $x\in X$. Если s — сечение расслоения H, то сечение f^*s расслоения E определяется так:

$$f^*s(x)=r(x)\,s(f(x)).$$

Если $f\colon X\to Y$ — дифференцируемое отображение, то имеется индуцированный морфизм расслоений $T^*(f)\colon T^*(X)\to T^*(Y)$ вида

$T^*(f)=(f,\ df^*)$, где $df^*_x\colon T^*Y_{f(x)}\to T^*X_x$ — сопряженное линейное отображение к $df_x\colon TX_x\to TY_{f(x)}$. Если $E\to X$ и $H\to Y$ — векторные расслоения со связностями, то будем говорить, что f — морфизм векторных расслоений со связностями, если коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(E) & \xrightarrow{(f,r)} & C^\infty(H) \\ \downarrow{\scriptstyle D} & & \downarrow{\scriptstyle D} \\ C^\infty(E\otimes T^*X) & \longrightarrow & C^\infty(H\otimes T^*Y) \end{array}$$

Иначе говоря, это означает, что для любого $\xi\in TX_x$ и любого сечения s расслоения H

$$D_\xi f^*s=r(x)\left(D_{df_x\xi}s\right)(x).$$

Пусть $E\to X$ — векторное расслоение и $f\colon E\to E$ — такой диффеоморфизм, что f отображает слои в слои и $f\colon E_x\to E_{f(x)}$ — линейный изоморфизм. Тогда f определяет морфизм векторных расслоений $\mathfrak{f}=(\bar f,\ r)$, где $r(x)=f(x)^{-1}$ и $\bar f(x)=\pi f(e)$, $e\in E_x$. В этом случае f называется *автоморфизмом* векторного расслоения E. Если E имеет связность и $\mathfrak{f}$ — морфизм векторных расслоений со связностью, то мы будем говорить, что f — автоморфизм E, рассматриваемого как векторное расслоение со связностью. Отметим, что если f — автоморфизм E, то f индуцирует автоморфизмы $\operatorname{Hom}(E,\ E)$ и $\bigwedge^2T^*X\otimes\operatorname{Hom}(E,\ E)$, которые будем также обозначать через f. Если f сохраняет связность на E, то ясно, что

$$f^*K=K,$$

где K — кривизна, рассматриваемая как сечение расслоения $\operatorname{Hom}(E,\ E)\otimes\bigwedge^2T^*X$. В частности, если E — *линейное* расслоение, то K можно рассматривать как замкнутую 2-форму, которую f сохраняет.

Если E — такое вещественное или комплексное векторное расслоение, что E_x имеет скалярное произведение, гладко зависящее от x, то можно потребовать, чтобы наша связность сохраняла скалярное произведение в том смысле, что

$$\nabla_\xi(s_1,\ s_2)=(\nabla_\xi s_1,\ s_2)+(s_1,\ \nabla_\xi s_2).$$

Как легко видеть, это то же самое, что потребовать, чтобы для каждого ортонормированного репера $\mathbf{s}$ матрица $\theta_{\mathbf{s}}$ была ортогональной (соответственно унитарной) в том смысле, что $\langle\xi,\ \theta_{\mathbf{s}}\rangle\in O(n)$ (или $U(n)$) для любого векторного поля ξ. Это в свою очередь то же самое, что сохранение скалярного произведения при параллельном переносе. Тогда мы можем говорить, например, об автоморфизмах E, сохраняющих одновременно скалярное произведение и связность. Пусть $L \to X$ — эрмитово линейное расслоение со связностью. Если $\mathbf{s}$ — ортонормированный репер, т. е. сечение с $(\mathbf{s}, \mathbf{s}) \equiv 1$, то форма связности θ_s чисто мнимая. Мы можем написать $\theta_s = i\alpha_s$, где α_s — вещественная форма и $K(\theta_s) = i\omega$, где $\omega = d\alpha_s$ не зависит от $\mathbf{s}$. Здесь ω — вещественная замкнутая 2-форма, и всякий автоморфизм L индуцирует диффеоморфизм X, сохраняющий ω.

Для нас представляет основной интерес случай, когда замкнутая форма ω невырожденна, а значит, определяет на X структуру симплектического многообразия. В этом случае каждый автоморфизм L как линейного расслоения со связностью дает симплектическое преобразование X. Мы подробно изучим это обстоятельство в следующем параграфе.

Пусть E — векторное расслоение. Для каждого $x \in X$ можно рассмотреть множество всех базисов, т. е. реперов, в E_x. Если $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — такой репер, то то же можно сказать про

$$\mathbf{e}A = \left(\sum A_{i1}e_i, \ \ldots, \ \sum A_{in}e_i\right)$$

для любой невырожденной матрицы $A = (A_{ij})$. Группа $GL(n)$ действует транзитивно и свободно на множестве всех реперов в x. Обозначим через $B(E_x)$ пространство всех реперов в x, а через $B(E)$ — множество всех реперов для всех x. Очевидно, что это многообразие и что $GL(n)$ действует на нем справа, причем свободно. Оно называется расслоением реперов для E. Это расслоение потребуется нам в § 4 при определении полуформ и аналогичных объектов.

§ 2. *Группа автоморфизмов эрмитова линейного расслоения*

Пусть $E \to X$ и $H \to Y$ — векторные расслоения со связностью и $\mathfrak{f}: E \to H$ — морфизм векторных расслоений со связностью. Предположим, что $\mathfrak{f} = (f, r)$, где $r(x)$ — изоморфизм для всех x. Пусть, далее, C_1: $[0, 1] \to X$ — кривая на X и $C_2 = f \circ C_1$ — образ этой кривой на Y. Тогда $\mathfrak{f}$ переводит параллельный перенос вдоль кривой C_1 в параллельный перенос вдоль C_2. Точнее, если $h \in H_{C_2(0)}$ и $h(t) \in H_{C_2(t)}$ — образ h при параллельном переносе вдоль C_2, то сечение

$$e(t) = r(C_1(t))\, h(t) \in E_{C_1(t)} \tag{2.1}$$

горизонтально вдоль $C_1(t)$. Это показывает, что отображение $r(C_1(t))$ определяется отображением $r(C_1(0))$. Если X связно, то это означает, что $r(x)$ определяется для всех x по своему значению в произвольно взятой одной точке x_0. Значит, $\mathfrak{f}$ определяется по f с точностью до действия элемента из $GL(E_{x_0})$. Предположим, что мы начинаем с f и $r(x_0) \in \operatorname{Hom}(H_{f(x_0)}, E_{x_0})$ и пытаемся построить $\mathfrak{f}$. Для любого $x \in X$ мы соединили бы x_0 с x кривой C_1, а затем, пользуясь (2.1), определили $r(x)$. Для корректности этого определения нужно быть уверенным, что $r(x)$ не зависит от выбора кривой, соединяющей x_0 с x. Иначе говоря, эта процедура, примененная к замкнутой кривой, проходящей через x_0, должна давать тождественное преобразование. Сформулируем это условие несколько более четко. Пусть γ — замкнутая кривая, выходящая из $x_0 \in X$. Тогда параллельный перенос вдоль γ дает элемент $\varphi_\gamma \in \mathrm{Hom}(V, V)$, где $V = E_{x_0}$. Отображенне f переводит γ в замкнутую кривую $f \circ \gamma$, выходящую из $y_0 = f(x_0)$. Параллельный перенос вдоль любой замкнутой кривой β, выходящей из y_0, дает $\varphi_\beta \in \mathrm{Hom}(W, W)$, где $W = H_{y_0}$. Мы хотим знать, существует ли такое линейное отображение r_0: $W \to V$, что

$$\varphi_\gamma \circ r_0 = r_0 \circ \varphi_{f \circ \gamma} \tag{2.2}$$

для всех замкнутых кривых γ. Если такое r_0 существует, то ясно, что (2.1) определяет $r(x)$ для всех $x \in X$ с $r(x_0) = r_0$. Нетрудно проверить, что при этом в самом деле определяется $\mathfrak{f} = (f, r)$, т. е. определенное так r является гладким.

В том случае, когда E и H — линейные расслоения, ситуация несколько проще, поскольку тогда $\mathrm{Hom}(V, V)$ и $\mathrm{Hom}(W, W)$ канонически изоморфны скалярам и (2.2) принимает вид

$$\varphi_\gamma = \varphi_{f \circ \gamma}. \tag{2.3}$$

Если γ целиком содержится в области определения некоторого ненулевого сечения $\mathbf{s}$, то φ_γ — это умножение на скаляр

$$\exp \int_\gamma \theta_{\mathbf{s}}.$$

Если, кроме того, γ — граница некоторой поверхности σ, то по теореме Стокса φ_γ есть умножение на

$$\exp \int_\sigma K,$$

где K — кривизна. Отметим, что если мы отбросим ограничение, что γ содержится в области определения одного сечения $\mathbf{s}$, но сохраним требование $\gamma = \partial\sigma$, то последняя формула будет все равно иметь место. В этом легко убедиться, разбивая σ на малые куски и замечая, что интегралы по внутренним линиям взаимно уничтожаются. В частности, если X односвязно, то условие (2.3) можно записать в виде

$$\exp \int_\sigma K_E = \exp \int_{f\sigma} K_H,$$

где K_E и K_H — формы кривизны на E и H. Это должно иметь место для всех поверхностей σ, поэтому (2.3) принимает вид

$$f^* K_H = K_E. \tag{2.4}$$

Применим эти факты к случаю, когда $X=Y$ и $E=H=L$ — эрмитово линейное расслоение с кривизной $K=i\omega$. Предположим, что ω — невырожденная внешняя 2-форма на X. Значит, X — симплектическое многообразие; обозначим через H группу его симплектических диффеоморфизмов, т. е. группу всех таких диффеоморфизмов $f\colon X\to X$, что $f^*\omega=\omega$. Обозначим через P группу всех автоморфизмов L как эрмитова линейного расслоения со связностью. Если $\mathfrak{f}_1\in P$ и $\mathfrak{f}_2\in P$ определяют одно и то же отображение $f\in H$, то $\mathfrak{f}_1=c\mathfrak{f}_2$, где c — умножение на комплексный скаляр, по модулю равный единице. Таким образом, имеет место точная последовательность групп

$$0\to T^1\to P\to H,$$

где T^1 — группа комплексных чисел, равных по модулю единице. Проведенные выше рассмотрения показывают, что справедливо

Предложение 2.1. *Если многообразие X связно и односвязно, то последовательность групп*

$$0\to T^1\to P\to H\to 1 \tag{2.5}$$

точна. Если X не является односвязным, то группа преобразований, удовлетворяющих (2.3), *может быть собственной подгруппой в H; обозначим ее через H_L. В этом случае мы можем только сказать, что точна последовательность*

$$0\to T^1\to P\to H_L\to 1.$$

Предположим, что мы начинаем с симплектического многообразия X. Когда его 2-форма ω происходит из эрмитова линейного расслоения L со связностью? Если $\omega=d\alpha$ (как, например, в случае кокасательного расслоения), можно воспользоваться формой α и определить связность глобально. Достаточно взять тривиальное расслоение $L=X\times\mathbf{C}$, где $\mathbf{C}$ имеет свою обычную эрмитову структуру, и взять $\theta=i\alpha$ в качестве формы связности, отвечающей единичному сечению. Равенство $\omega=d\alpha$ означает, что класс когомологий формы ω, который мы обозначим через $[\omega]$, равен нулю. Более обще, мы хотим построить расслоение со связностью так, чтобы параллельный перенос вдоль замкнутой кривой, ограничивающей поверхность σ, давался умножением на $\exp i\int\limits_{\sigma}\omega$. Если поверхности σ_1 и σ_2 имеют общую границу, то должно быть

$$\int\limits_{\sigma_1}\omega=\int\limits_{\sigma_2}\omega+2k\pi.$$

Точнее, требование состоит в том, чтобы $\frac{1}{2\pi}[\omega]$ был *целочисленным классом когомологий*. Детали читатель найдет в [1].

Пусть $L \to X$ — эрмитово линейное расслоение, задающее симплектическую структуру на X. Алгебра Ли группы H — это алгебра h_L всех локально гамильтоновых векторных полей, т. е. векторных полей, удовлетворяющих условию

$$D_\xi \omega = 0, \quad \text{т. е.} \quad d(\xi \rfloor \omega) = 0.$$

Множество ξ, удовлетворяющих условию

$$\xi \rfloor \omega = -dg, \quad \text{где } g \text{ — гладкая функция на } X, \tag{2.6}$$

является идеалом h в h_L, который мы назовем алгеброй гамильтоновых векторных полей или *гамильтоновой алгеброй*. Ясно, что в случае односвязного X имеем $h = h_L$.

Во всяком случае каждой гладкой функции g на X отвечает единственное векторное поле ξ_g, определяемое условием (2.6). Множество всех функций является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона

$$\{g, h\} = \xi_g h.$$

Как мы видели в § 8 гл. IV,

$$\{g, h\} = \xi_g h = \langle \xi_g, \xi_h \rfloor \omega \rangle$$

кососимметрична по g и h. Кроме того, из соотношений

$$d(\xi_g h) = dD_{\xi_g} h = D_{\xi_g} dh = -D_{\xi_g}(\xi_h \rfloor \omega) = -[\xi_g, \xi_h] \rfloor \omega$$

следует, что

$$[\xi_g, \xi_h] = \xi_{\{g, h\}}. \tag{2.7}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\{f, \{g, h\}\} &= \xi_f \{g, h\} = D_{\xi_f} \langle \xi_g \wedge \xi_h, \omega \rangle = \\ &= \langle [\xi_f, \xi_g] \wedge \xi_h, \omega \rangle + \langle \xi_g \wedge [\xi_f, \xi_h], \omega \rangle = \\ &= \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\},\end{aligned}$$

т. е. имеет место тождество Якоби. Обозначим через p алгебру Ли функций относительно скобки Пуассона. Тогда имеет место точная последовательность алгебр Ли:

$$0 \to \mathbf{R} \to p \to h \to 0. \tag{2.8}$$

Мы утверждаем, что p можно отождествить с алгеброй Ли группы P, т. е. что (2.8) — это инфинитезимальная версия (2.5). Действительно, пусть f_t — однопараметрическое семейство автоморфизмов L, сохраняющих связность и эрмитову структуру на L. Тогда $f_t^* \mathrm{s} = (e^{i\psi_t}) \mathrm{s}$ для любого сечения s единичной длины и

$$f_t^*(D\mathrm{s}) = Df_t^* \mathrm{s},$$

так что

$$f_t^* \theta_\mathrm{s} \cdot f_t^* \mathrm{s} = \theta_{f_t^* \mathrm{s}} f_t^* \mathrm{s}, \quad \text{т. е.} \quad f_t^* \theta_\mathrm{s} = \theta_{f_t^* \mathrm{s}} = i\, d\psi_t + \theta_\mathrm{s}.$$

Если ξ — это инфинитезимальная образующая f_t, то из последнего уравнения следует, что

$$D_\xi \theta_s = i\, d\psi,$$

где $\psi = (d\psi/dt)|_{t=0}$. Далее, $D_\xi \theta_s = \xi \lrcorner d\theta_s + d(\xi \lrcorner \theta_s)$ и $d\theta_s = i\omega$, так что

$$\xi \lrcorner \omega = d(\psi + i\langle \xi, \theta_s \rangle) = d(\psi - \langle \xi, \alpha_s \rangle).$$

Заметим, что функция

$$\varphi_\xi = \psi - \langle \xi, \alpha_s \rangle$$

не зависит от выбора сечения s. Действительно, замена s на $s' = e^{iu}s$ приводит к замене α_s на $\alpha_{s'} = du + \alpha_s$, в то время как

$$f_t^*(e^{iu}s) = f_t^*(e^{iu}) f_t^* s = e^{i(f_t^* u - u)} e^{i\psi_t}(e^{iu}s),$$

т. е. ψ заменяется на $\psi + \langle \xi, du \rangle$.

Итак, мы получили линейное отображение ρ пространства инфинитезимальных автоморфизмов L в пространство всех функций на X, переводящее ξ в φ_ξ. Ясно, что отображение ρ инъективно. Пусть g — автоморфизм L, а f_t — однопараметрическое семейство автоморфизмов. Если

$$g^* s = e^{iv}s,$$

то

$$(g^{-1} f_t g)^* s = e^{i[v + g^*\psi_t - g^* f_t^* g - g^{-1*} v]}.$$

Вычисляя производную при $t = 0$, для компоненты ψ получаем

$$g^*\psi - g^*\langle \xi, d(g^{-1*}v) \rangle = g^*\psi - \langle g^*\xi, dv \rangle.$$

С другой стороны, ξ заменяется на $g^*\xi$, т. е. инфинитезимальной образующей семейства $g^{-1} f_t g$ отвечает функция

$$g^*\psi - \langle g^*\xi, dv \rangle - \langle g^*\xi, \alpha_s \rangle = g^*\psi - \langle g^*\xi, \alpha_s + dv \rangle =$$
$$= g^*\psi - \langle g^*\xi, \alpha_{g^*s} \rangle = g^*\psi - \langle g^*\xi, g^*\alpha_s \rangle = g^*(\psi - \langle \xi, \alpha_s \rangle).$$

Если обозначить через $\mathrm{Ad}\, g$ индуцированное действие на пространстве инфинитезимальных автоморфизмов L, то

$$\rho(\mathrm{Ad}\, g^{-1}) = g^*\rho. \tag{2.9}$$

Отсюда следует, что ρ — это изоморфизм алгебр Ли. Заметим, что постоянная функция c отвечает инфинитезимальной образующей умножения на константу e^{itc}. Доказательство сюръективности ρ также достаточно ясно, и мы отсылаем читателя к [1], где имеется доказательство для общего случая. Если X односвязно, то любая однопараметрическая группа симплектических автоморфизмов X может быть поднята в P. Поскольку всегда можно выбрать аддитивную константу соответствующим образом, это доказывает, что ρ сюръективно. Значит, последовательность (2.8 в самом деле является инфинитезимальной версией последовательности (2.5).

Заметим, что мы выделили некоторое представление алгебры Пуассона P. Она действует инфинитезимальными автоморфизмами эрмитова линейного расслоения L со связностью, а значит, на векторном пространстве всех сечений этого расслоения.

Предположим, что G — группа Ли и что X — орбита G в дуальном пространстве к алгебре Ли g группы G. Тогда каждый элемент $\xi \in g$ определяет функцию всюду на g^*, а значит, ее можно ограничить на X и получить представление g гамильтоновыми векторными полями на X. Итак, мы имеем гамильтоново действие G на X. Условие целочисленности класса $(1/2\pi)[\omega]$ приводит тогда к условиям на X. Рассмотрим, например, группу $SO(3)$. Тогда пространство, дуальное к алгебре Ли, — это трехмерное евклидово пространство, а орбиты — это трехмерные сферы. Симплектической формой является $\omega = (1/r)\sigma_r$, где σ_r — форма площади поверхности на сфере радиуса r. Условие состоит в том, что $(1/r)\cdot$(площадь всей сферы)$=2\pi n$, или, другими словами, радиус r — полуцелый. Аналогично, если исследовать симплектические однородные пространства для группы Лоренца и рассмотреть орбиты с положительной массой, то получается, что условие целочисленности не налагает условий на m, но ограничивает s полуцелыми значениями.

Более общо, имеется полезный критерий Костанта ([1], теорема 5.7.1), который позволяет сказать, когда орбита $X \subset g^*$ удовлетворяет условию целочисленности, в случае если группа G односвязна. Он состоит в следующем. Пусть θ — элемент g^* и $H_{d\theta}$ — подгруппа изотропии, а $h_{d\theta}$ — подалгебра изотропии, т. е. $h_{d\theta}$ — алгебра Ли группы $H_{d\theta}$. Заметим, что θ определяет (при помощи ограничения) линейную функцию на $h = h_{d\theta}$ и равно нулю на $[h, h]$. Орбита, проходящая через θ, удовлетворяет условию целочисленности тогда и только тогда, когда линейная функция $2\pi i\theta$ поднимается при помощи экспоненциального отображения до корректно определенной функции на $H_{d\theta}$.

Применительно к группе $SU(2)$ (односвязной накрывающей группы $SO(3)$) критерий дает в точности условие $r = n/2$, поскольку группа $H_{d\theta}$ в этом случае дважды накрывает окружность. Применительно к группе $SL(2, \mathbf{C}) \times \mathbf{R}^{1,3}$, которая накрывает группу Пуанкаре, мы получаем ограничение $s = n/2$ на спин.

Аналогичные соображения можно применить к изучению атома водорода, поскольку, как мы увидим, условие целочисленности дает квантование энергетических уровней. Прежде чем переходить к деталям, остановимся на методе. Пусть Z_E — энергетическая поверхность некоторого гамильтониана H на симплектическом многообразии X, и предположим, что траектории расслаивают Z_E над некоторым многообразием Y_E. Тогда, как мы видели в § 6 гл. IV, Y_E — симплектическое многообразие. Обозначим через $\omega|_{Z_E}$ ограничение формы ω на Z_E, а через ω_E — симплектическую форму на Y_E. Эти две формы связаны условием

$$\omega|_{Z_E} = \pi^*\omega_E,$$

где через π обозначена проекция Z_E на Y_E.

Таким образом, условие целочисленности на ω_E — это условие на «энергию» E. В случае когда все траектории H на Z_E периодичны и $\omega = d\alpha$, как мы уже видели, интеграл $\int\alpha$ по траектории не зависит от траектории. Из того что $d\alpha_{Z_E} = \pi^*\omega_E$, на основании топологических соображений [1]) следует, что класс ω_E удовлетворяет условию целочисленности тогда и только тогда, когда $(1/2\pi)\int\alpha$ — целое число; ср. [15].

Для случая атома водорода (трехмерная задача Кеплера) мы теперь явно найдем эти условия. Мы следуем изложению Симмса [6] (и, в частности, повторяем некоторые из результатов § 6 гл. IV, пользуясь обозначениями, принятыми в физической литературе). Пусть $p = (p_1, p_2, p_3)$ и $q = (q_1, q_2, q_3)$, причем $q \neq 0$. Симплектическое многообразие X состоит из таких пар (p, q), а $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$. Гамильтониан H имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}\|p\|^2 - \frac{K}{\|q\|},$$

где m и K — константы. Введем вектор момента

$$(l_1, l_2, l_3) = l = q \times p,$$

где $\times$ обозначает векторное произведение в $\mathbf{R}^3$, и вектор Рунге — Ленца

$$(a_1, a_2, a_3) = a = l \times p + mK\frac{q}{\|q\|}.$$

Заметим, что

$$a \cdot l = 0, \quad \{H, l\} = \{H, a\} = 0,$$

а соотношения коммутации для компонент a и l имеют вид

$$\{l_1, l_2\} = -l_3, \quad \{l_1, a_2\} = -a_3, \quad \{a_1, a_2\} = 2mHl_3.$$

Для некоторого $E < 0$ пусть Z_E — энергетическая гиперповерхность и Y_E — соответствующее многообразие орбит. Положим $\rho = \sqrt{-2mE}$ и $x = \rho l + a$, $y = \rho l - a$. Непосредственное вычисле-

---

[1]) Уравнение $d\alpha_{Z_E} = \pi^*\omega_E$ означает, что класс когомологий $[\alpha]$ в слое трансгрессивен и что $\delta_{2,-1}[\alpha] = [\omega_E]$ в спектральной последовательности Серра. Если это верно для вещественных когомологий и класс $[\alpha]$ целочислен, то тем же свойством обладает $[\omega_E]$.

ние показывает, что $\|x\|^2=\|y\|^2=m^2K^2$, т. е. отображение (x, y) переводит Y_E в произведение $S^2\times S^2$ двух сфер радиуса mK.

Можно вычислить скобки Пуассона компонент x и y на Y_E, вычисляя соответствующие скобки Пуассона для $\rho l+a$ и $\rho l-a$ на X (ρ — константа). Получаем

$$\{x_1, x_2\}=-2\rho x_3, \quad \{x_i, y_j\}=0, \quad \{y_1, y_2\}=-2\rho y_3$$

и т. д. Отсюда следует, что

$$\xi_{x_1}=-2\rho x_3\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \xi_{x_2}=2\rho x_3\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$\xi_{y_1}=-2\rho y_3\frac{\partial}{\partial y_2}, \quad \xi_{y_2}=2\rho y_3\frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Это означает, что если выбрать x_1, x_2, y_1, y_2 в качестве локальных координат, то форма ω_E примет вид

$$\omega_E=\frac{dx_1\wedge dx_2}{2\rho x_3}+\frac{dy_1\wedge dy_2}{2\rho y_3}.$$

Далее, элемент площади сферы радиуса mK в пространстве x имеет в координатах x_1, x_2 вид $mK\frac{dx_1\wedge dx_2}{x_3}$. Значит, интеграл ω_E по каждой из сфер равен

$$\frac{1}{2\rho mK}\cdot 4\pi(mK)^2=2\pi mK/\rho$$

и должен быть целым числом. Поскольку $\rho=\sqrt{-2mE}$, мы получаем квантовые ограничения:

$$E=\frac{-2\pi^2 mK}{n^2}, \quad n \text{ — целое.}$$

§ 3. Поляризации

Вернемся к изучению общих симплектических многообразий. Пусть X — симплектическое многообразие с 2-формой ω. Вещественная *поляризация* X состоит в том, что каждому $x\in X$ гладким образом ставится в соответствие лагранжево подпространство пространства TX_x, причем так, чтобы получившееся семейство подпространств было интегрируемым. Мы будем также иметь дело с комплексными поляризациями. Пусть $T_{\mathbf{C}}X$ — комплексифицированное касательное расслоение. Тогда $T_{\mathbf{C}}X_x=TX_x\otimes\mathbf{C}$ — комплексное симплектическое векторное пространство, и имеет смысл говорить о комплексном лагранжевом подпространстве. Поляризация $\mathcal{F}$ многообразия X — это гладкое распределение (комплексных) лагранжевых подпространств $\mathcal{F}_x$ для всех $x\in X$, интегрируемое в том смысле, что если ξ и η — комплексные векторные поля и $\xi_x\in\mathcal{F}_x$, $\eta_x\in\mathcal{F}_x$ для всех x, то $[\xi_x, \eta_x]\in\mathcal{F}_x$.

Обозначим через $\xi \to \bar{\xi}$ операцию комплексного сопряжения; поляризация $\mathcal{F}$ называется вещественной, если $\mathcal{F}_x = \overline{\mathcal{F}}_x$. Другой крайностью является ситуация, когда $\mathcal{F}_x \cap \overline{\mathcal{F}}_x = \{0\}$. Пока что мы хотим исследовать вещественные поляризации. В этом случае $\mathcal{F}_x = \mathcal{G}_x \otimes \mathbf{C}$, где $\mathcal{G}_x$ — вещественное лагранжево подпространство в TX_x. Интегрируемость означает, что $\mathcal{G}$ определяет на X слоение лагранжевых подмногообразий. Очевидный пример такой поляризации возникает при $X = T^*M$, когда слоение индуцируется проекцией π: $X \to M$. В этом случае нулевое сечение — это лагранжево подмногообразие в X, трансверсальное слоению. Оказывается, что локально других примеров не бывает. А именно, имеет место

Предложение 3.1 (Костант — Вейнстейн). *Предположим, что $\mathcal{G}$ — вещественная поляризация X, трансверсальная лагранжеву подмногообразию M. Тогда существует симплектический диффеоморфизм f некоторой окрестности M в X на некоторую окрестность нулевого сечения T^*M, переводящий листы $\mathcal{G}$ в слои T^*M.*

Действительно, просмотрев доказательство предложения 1.1 гл. IV, мы увидим, что поляризация $\mathcal{G}$ переходит в трансверсальное лагранжево подрасслоение. Следовательно, можно применить предложение 1.1 и убедиться, что существует симплектический диффеоморфизм окрестности M на окрестность нулевого сечения в T^*M, который переводит $\mathcal{G}$ в слоение, касательное на M к кокасательному слоению. Таким образом, все сводится к случаю, когда $X = T^*M$, M — нулевое сечение T^*M и $\mathcal{G}$ касательно на M к кокасательному слоению. Пусть h — диффеоморфизм, переводящий листы $\mathcal{G}$ на листы кокасательного слоения и такой, что $dh = \mathrm{id}$ вдоль M. Такой h всегда существует, но нельзя считать, что он сохраняет ω. Пусть $\omega_1 = h^*\omega$. Теперь, пользуясь теоремой 1.1 гл. IV, выберем g так, чтобы $g^*\omega_1 = \omega$ и g сохранял кокасательное слоение. Полагая $f = h \circ g$, мы получим нужный диффеоморфизм. Далее, в доказательстве теоремы 1.1 гл. IV возьмем в качестве φ_t умножение на t. Тогда для того чтобы показать, что $f = f_1$ сохраняет слои, нужно только показать, что η_t касается слоев. Для всякого ξ, касательного к слою, имеем

$$\langle \eta_t \wedge \zeta, \ \omega_t \rangle = \langle \zeta, \ \beta_t \rangle = \int_0^1 \langle \xi_t \wedge \zeta, \ \varphi_t^* (\omega_1 - \omega) \rangle \, dt = 0,$$

поскольку слои лагранжевы для ω_1 и ω. Тогда слои лагранжевы для ω_t, и мы получаем, что η_t касается слоев: предложение доказано.

Далее, симплектическое многообразие T^*M снабжено 1-формой α, а не только 2-формой $\omega = d\alpha$. Заметим, что форму α можно охарактеризовать следующим образом:

(i) $d\alpha = \omega$,

(ii) $\langle \eta, \alpha \rangle = 0$, если η касается кокасательного слоения, т. е. $d\pi\eta = 0$ и

(iii) $\alpha|_{z_M} = 0$, где z_M — нулевое сечение T^*M.

В самом деле, если α' — другая такая форма, то из (i) следует, что локально $\alpha - \alpha' = d\psi$ для некоторой функции ψ. Из (ii) следует, что ψ постоянна вдоль слоев, а из (iii) — что ψ постоянна на базе, т. е. $d\psi = 0$.

Если теперь $\mathcal{G}$ — любая вещественная поляризация симплектического многообразия X, трансверсальная лагранжеву подмногообразию M, то локально в окрестности M существует однозначно определенная 1-форма β, удовлетворяющая условиям:

(i) $d\beta = \omega$,

(ii) $\langle \eta, \beta \rangle = 0$ для η, лежащих в $\mathcal{G}$, и

(iii) $\beta|_M = 0$.

(Форма β не всегда определена глобально. Рассмотрим, например, (двумерный) цилиндр, у которого $\mathcal{G}$ задается окружностями. Тогда если $\omega = d\theta \wedge dh$, где h — параметр вдоль оси, θ — параметр вдоль окружности и M задается уравнением $\theta = 0$, то единственный кандидат на роль β — это форма θdh, которая не определена глобально на цилиндре.)

Предположим, что мы начали с 1-формы β, для которой $d\beta = \omega$. Можно ожидать, что, вообще говоря, множество тех x, в которых $\beta_x = 0$, состоит из изолированных точек. Дело в том, что β — сечение T^*X, и мы рассматриваем пересечение этого сечения с нулевым сечение , т. е. пересечение двух $2n$-мерных подмногообразий в $4n$-мерном многообразии T^*X. Характерно, что если β связана с поляризацией, то множество нулей оказывается n-мерным подмногообразием, а не множеством изолированных точек. Мы покажем, что такая форма β полностью определяет поляризацию. Следующий результат был получен совместно с Б. Костантом.

Предложение 3.2. *Пусть β — такая 1-форма на X, что $d\beta = \omega$ и множество $M = \{x \mid \beta_x = 0\}$ является n-мерным подмногообразием. Тогда M лагранжево и существует единственная поляризация на X в окрестности M, которая трансверсальна M и для которой ассоциированная 1-форма совпадает с β. Будем говорить, что M — база, ассоциированная с β.*

Пусть ξ — векторное поле, определяемое формой β, т. е. $\xi \rfloor \omega = \beta$, а потому

$$D_\xi \omega = d(\xi \rfloor \omega) = d\beta = \omega. \tag{3.1}$$

Мы видим, что если f_t — поток, порожденный ξ, то

$$f_t^* \omega = e^t \omega. \tag{3.2}$$

Пусть x — нуль формы β, а значит, и поля ξ. Тогда ξ определяет линейное преобразование A_x на TX_x вида

$$A_x\eta_x = [\xi, \eta]_x,$$

где η — произвольное векторное поле. (Правая часть зависит только от значения η_x, поскольку ξ обращается в нуль в x. В локальных координатах A_x задается якобиевой матрицей поля ξ в x.) Имеем $A_x \in csp(TX_x)$. Действительно, для любых $\eta, \zeta \in TX_x$

$$(A_x\eta, \zeta)_x + (\eta, A_x\zeta)_x = (\eta, \zeta)_x, \tag{3.3}$$

где мы положили $(\eta, \zeta)_x = \langle \eta \wedge \zeta, \omega_x \rangle$.

Далее, если η — векторное поле, касательное к M, то $[\xi, \eta] = 0$. Значит, $A_x\eta = 0$ для всех η, касательных к M. Тогда из (3.3) следует, что $(\eta, \zeta)_x = 0$ для любой пары векторов, касательных к M. Поскольку размерность M равна n, мы получаем, что M лагранжево. Далее, по предложению 2.1 гл. IV, A_x имеет n-мерное подпространство собственных векторов, отвечающих собственному значению 1. Пусть $\mathcal{G}_x$ — это подпространство в TX_x. Теперь воспользуемся теоремой о поведении решений обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки (см., например, Стернберг [8] или Хартман [9]), утверждающей, что через x проходит единственное многообразие, касательное к $\mathcal{G}_x$ и инвариантное относительно f_t. Для вектора η, касательного к этому инвариантному многообразию, имеем $|df_{-t}\eta| = O(e^{-t})$. В частности, для η и ζ, которые оба касаются инвариантного многообразия, получаем

$$\langle df_{-t}\eta \wedge df_{-t}\zeta, \omega \rangle = O(e^{-2t}).$$

С другой стороны, по (3.2)

$$\langle df_{-t}\eta \wedge df_{-t}\zeta, \omega \rangle = e^{-t} \langle \eta \wedge \zeta, \omega \rangle,$$

откуда мы заключаем, что инвариантное многообразие лагранжево. Поскольку для любой точки M мы получили проходящее через нее инвариантное многообразие, доказано, что имеется поляризация X в окрестности M, трансверсальная M. Далее, каждый лист лагранжев и касается ξ. Поэтому если ζ также касается листа, то

$$0 = \langle \xi \wedge \zeta, \omega \rangle = \langle \zeta, \xi \lrcorner \omega \rangle = \langle \zeta, \beta \rangle.$$

Значит, β равна нулю на касательных векторах к поляризации, т. е. удовлетворяет условию (ii). По предположению, она удовлетворяет (i) и (iii), а значит, это 1-форма, задаваемая поляризацией. Предложение доказано.

Теперь мы можем выяснить роль специальной параметризации лагранжевых многообразий при помощи кокасательного расслоения, описанной в начале § 5 гл. IV. Действительно, пусть α — стандартная 1-форма на T^*M и Λ — лагранжево подмногообразие. Пусть φ — функция на T^*M. Предположим, что $\Lambda = \pi_*(\operatorname{graph} d\varphi)$. В локальных координатах x, ξ на T^*M это означает, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \xi_0$$

в любой точке $(x_0, \xi_0) \in \Lambda$. Мы можем переформулировать это так:

$$\alpha - d\varphi = 0 \quad \text{на} \quad \Lambda.$$

Далее, $d(\alpha - d\varphi) = d\alpha = \omega$. Таким образом, φ приводит к поляризации T^*M, трансверсальной Λ. Итак, параметризации, получаемые из T^*M, отвечают (в окрестности Λ) поляризациям T^*M, трансверсальным Λ. С другой стороны, не всякая вещественная поляризация соответствует параметризации при помощи φ (описанной в § 4 гл. IV), удовлетворяющей условию трансверсальности (которое состоит в том, что $\operatorname{graph} d\varphi$ трансверсально пересекает $H = d\pi^* T^*X \subset T^*(T^*X)$). Действительно, мы утверждаем, что пересечение трансверсально в точности тогда, когда поляризация, индуцированная φ, трансверсальна вертикальной поляризации. В самом деле, пусть (x, ξ) — локальные координаты в окрестности рассматриваемой точки. Тогда

$$\alpha - d\varphi = \left(\xi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx - \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\, d\xi$$

и ассоциированное векторное поле имеет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x} + \left(\xi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial\xi},$$

а ассоциированное преобразование A имеет матрицу

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_i\,\partial x^j} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_i\partial\xi_j} \\ \dfrac{-\partial^2\varphi}{\partial x^j\partial x^i} & \delta_{ij} - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial\xi_j} \end{bmatrix}.$$

Утверждение, что поляризация пересекает вертикаль (в рассматриваемой точке), означает, что существует вектор $v = \sum b_j\,\partial/\partial\xi_j$, для которого $Av = v$. Это в свою очередь означает, что

$$\sum b_j \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j} = 0, \qquad \sum b_j \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\,\partial\xi_j} = 0,$$

или что

$$\sum b_j\, d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}\right) = 0,$$

т. е. что дифференциалы $d(\partial\varphi/\partial\xi_j)$ не являются линейно независимыми, или, другими словами, что пересечение $\operatorname{graph} d\varphi$ с H, не трансверсально.

Для заданного $\Lambda \subset T^*M$ всегда можно найти вещественную поляризацию T^*M, определенную в окрестности Λ, и форму β, для которой Λ — ассоциированная база. Однако, вообще говоря, не удастся найти поляризацию, которая также трансверсальна кокасательному слоению. В самом деле, класс Маслова является первым препятствием к построению такой поляризации.

В качестве важного примера вещественной поляризации рассмотрим случай, когда M — векторное пространство с линейными координатами x, а ξ — дуальные координаты на M^*. Тогда $T^*M \sim M + M^*$; рассмотрим функцию $\varphi(x, \xi) = \xi \cdot x$. Имеем $\beta = = \xi \cdot dx - d(\xi \cdot x) = -x \cdot d\xi$, т. е. поляризация состоит из «горизонтальных» плоскостей $\xi = \text{const}$, а база — это кокасательное пространство в начале $\{(0, \xi)\}$. Позднее мы увидим, что с каждой поляризацией связано гильбертово пространство, а с некоторыми парами поляризаций связано отображение соответствующих гильбертовых пространств. В случае когда одна из поляризаций вертикальная, а другая — горизонтальная, которую мы только что ввели, это преобразование можно отождествить с преобразованием Фурье.

Перейдем теперь к комплексным поляризациям. Наиболее важный пример комплексной поляризации доставляют кэлеровы многообразия. Начнем с разбора этого примера. Кэлерово многообразие — это комплексное многообразие X вместе с положительно определенной эрмитовой формой $\langle\ ,\ \rangle$, такой, что ассоциированная кососимметрическая форма $\omega = \operatorname{Im}\langle\ ,\ \rangle$ симплектична. Говоря, что X — комплексное многообразие, мы тем самым предполагаем, что *вещественное* касательное пространство TX_x для каждого $x \in X$ имеет комплексную структуру, т. е. допускает такой автоморфизм J, что $J^2 = -1$. (Принято говорить, что J задает почти комплексную структуру.) Тогда комплексифицированное касательное пространство распадается на два собственных подпространства: $\mathscr{F}_x$, где $J = i$, и $\overline{\mathscr{F}}_x$, где $J = -i$. (Почти комплексная структура называется комплексной, если можно ввести такие локальные координаты $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$, что отвечающее $+i$ собственное подпространство $\mathscr{F}_x$ порождается векторами $\partial/\partial x^j - i\partial/\partial y^j$, а отвечающее $-i$ собственное подпространство $\overline{\mathscr{F}}_x$ порождается векторами $\partial/\partial x^j + i\partial/\partial y^j$.) Если $\langle\ ,\ \rangle$ — эрмитова форма на TX_x, то это означает, что

$$\langle J\xi, \eta\rangle = i\langle\xi, \eta\rangle \quad \text{и} \quad \langle\xi, J\eta\rangle = -i\langle\xi, \eta\rangle.$$

Продолжив эти соотношения на $TX_x \otimes \mathbf{C}$, мы увидим, что для $\xi, \eta \in \mathscr{F}_x$

$$\langle\xi, \eta\rangle = \langle J\xi, J\eta\rangle = \langle i\xi, i\eta\rangle = -\langle\xi, \eta\rangle,$$

т. е. $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ и, в частности, $\langle \xi \wedge \eta, \omega \rangle = \operatorname{Im} \langle \xi, \eta \rangle = 0$. Другими словами, мы получаем такую комплексную поляризацию, что $\mathscr{F}_x \oplus \overline{\mathscr{F}}_x = TX_x \otimes \mathbf{C}$.

Обратно, предположим, что мы начали с такой комплексной поляризации $\mathscr{F}$ относительно ω, что $\mathscr{F} \oplus \overline{\mathscr{F}} = TX \otimes \mathbf{C}$. Определим J на $TX \otimes \mathbf{C}$ следующим образом: $J = i$ на $\mathscr{F}$, $J = -i$ на $\overline{\mathscr{F}}$, и если $\xi = \zeta + \bar{\zeta}$ — любой вещественный вектор, то $J\xi = i\zeta - i\bar{\zeta}$; тем самым почти комплексная структура задана. Из того, что $\mathscr{F}$ замкнута относительно коммутатора, следует, что это комплексная структура (по теореме Ньюлендера — Ниренберга [10]). Изотропность $\mathscr{F}$ и $\overline{\mathscr{F}}$ для ω означает, что если

$$\xi_1 = \zeta_1 + \bar{\zeta}_1, \quad \xi_2 = \zeta_2 + \bar{\zeta}_2,$$

то

$$\begin{aligned}\langle \xi_1 \wedge \xi_2, \omega \rangle &= \langle (\zeta_1 + \bar{\zeta}_1) \wedge (\zeta_2 + \bar{\zeta}_2), \omega \rangle = \\ &= \langle \zeta_1 \wedge \bar{\zeta}_2, \omega \rangle + \langle \bar{\zeta}_1 \wedge \zeta_2, \omega \rangle = \\ &= \langle i\zeta_1 \wedge (-i)\bar{\zeta}_2, \omega \rangle + \langle (-i)\, i\bar{\zeta}_1 \wedge i\zeta_2, \omega \rangle = \\ &= \langle J\xi_1 \wedge J\xi_2, \omega \rangle.\end{aligned}$$

Как мы видели в § 3 гл. IV, из того, что J сохраняет ω, следует, что ω можно представить как мнимую часть невырожденной эрмитовой формы. Итак, мы почти построили кэлерову структуру. Не хватает только положительной определенности эрмитовой формы. Мы не будем вводить нового термина вроде псевдокэлеровости; вместо этого будем называть любую поляризацию, для которой $\mathscr{F} + \overline{\mathscr{F}} = TX \otimes \mathbf{C}$, *поляризацией кэлерова типа*. Таким образом, имеются два крайних случая: вещественные поляризации $(\mathscr{F} = \overline{\mathscr{F}})$ и поляризации кэлерова типа $(\mathscr{F} + \overline{\mathscr{F}} = TX \otimes \mathbf{C})$.

В общем случае мы можем рассмотреть $\mathscr{F} \cap \overline{\mathscr{F}}$ и $\mathscr{F} + \overline{\mathscr{F}}$. Будем предполагать, что в обоих случаях мы имеем дело с подрасслоениями $TX \otimes \mathbf{C}$, т. е. их размерности не меняются от точки к точке. Пусть $\dim \mathscr{F} \cap \overline{\mathscr{F}} = k$, т. е. $\dim \mathscr{F} + \overline{\mathscr{F}} = 2n - k$. Предположим, что распределение $\mathscr{F} + \overline{\mathscr{F}}$ интегрируемо. Тогда $\mathscr{F} \cap \overline{\mathscr{F}} = \mathscr{D} \otimes \mathbf{C}$ и $\mathscr{F} + \overline{\mathscr{F}} = \mathscr{E} \otimes \mathbf{C}$, где $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}$ — интегрируемые подрасслоения в TX. В вещественном случае $\mathscr{D} = \mathscr{E}$ и $k = n$. В кэлеровом случае $\mathscr{D} = 0$, $\mathscr{E} = TX \otimes \mathbf{C}$ и $k = 0$.

Пусть X — симплектическое многообразие, на котором группа G действует как группа симплектических диффеоморфизмов. Пусть, далее, $\mathscr{F}$ — поляризация X. Для всякого $a \in G$ определим поляризацию $a\mathscr{F}$ формулой

$$(a\mathscr{F})_x = da_{a^{-1}x}\mathscr{F}_{a^{-1}x}.$$

Будем говорить, что поляризация $\mathscr{F}$ инвариантна относительно G, если $a\mathscr{F} = \mathscr{F}$ для всех $a \in G$. Предположим, что G транзитивно действует на X. Тогда TX_x порождается векторами вида $\hat{\xi}(x)$, когда ξ пробегает алгебру Ли g группы G, а $\hat{\xi}$ — соответствующее векторное поле на X. Если фиксировать некоторую точку $x \in X$, то подпространство $TX_x \otimes \mathbf{C}$ определяет подпространство в $g \otimes \mathbf{C}$. Отображение $G \xrightarrow{\rho_x} X$, переводящее a в $a \cdot x$, коммутирует с (левым) действием G. Если ξ — левоинвариантное векторное поле и $\mathscr{F}$ — инвариантное семейство подпространств в $TX \otimes \mathbf{C}$, то из $\hat{\xi} \in \mathscr{F}_x$ следует, что $d\rho_x \hat{\xi}(a) \in \mathscr{F}_{ax}$. Поскольку $\rho\colon G \to X$ — слоение, мы получаем, что $\mathscr{F}$ интегрируемо тогда и только тогда, когда соответствующие ξ порождают подалгебру в $g \otimes \mathbf{C}$. Таким образом, поляризации X отвечают некоторым подалгебрам в $g \otimes \mathbf{C}$.

Опишем ситуацию более явно на языке орбит в g^*. Здесь $X = (\mathrm{Ad}^{\#} G) \cdot \beta$ для некоторого $\beta \in g^*$. Инвариантная 2-форма $d\beta$ задается формулой

$$\langle \xi \wedge \eta,\ d\beta \rangle = \langle \eta,\ \xi \lrcorner\, d\beta \rangle = \langle \eta,\ D_\xi \beta \rangle,$$

поскольку $D_\xi \beta = \xi \lrcorner\, d\beta + d\langle \xi,\ \beta \rangle$ и $\langle \xi,\ \beta \rangle$ — константа. Но, так как $\langle \eta,\ \beta \rangle$ — константа,

$$0 = D_\xi \langle \eta,\ \beta \rangle = \langle [\xi,\ \eta],\ \beta \rangle + \langle \eta,\ D_\xi \beta \rangle$$

и, значит,

$$\langle \xi \wedge \eta,\ d\beta \rangle = -\langle [\xi,\ \eta],\ \beta \rangle.$$

Итак, мы видим, что инвариантная поляризация на орбите, проходящей через β, отвечает такой подалгебре m в $g \otimes \mathbf{C}$, что

(i) $m \supset g_\beta$, где $g_\beta = \{\xi \mid \xi \lrcorner\, d\beta = 0\}$;
(ii) $\dim_{\mathbf{C}} m/g_\beta = \dim_{\mathbf{C}} g \otimes \mathbf{C}/m$;
(iii) $\langle [m,\ m],\ \beta \rangle = 0$;
(iv) m инвариантна относительно $\mathrm{Ad}\, G_\beta$, где G_β — стабилизатор β.

См. в этой связи Ауслендер и Костант [3]. Дадим несколько примеров орбит в g^* и соответствующих поляризаций. Если G коммутативна, то присоединенное представление тривиально, а значит, тривиально и коприсоединенное представление. В этом случае все орбиты сводятся к точкам.

Рассмотрим группу $SO(3)$. Ее алгебра Ли — это алгебра кососимметрических (3×3)-матриц. Квадратичная форма $Q(A) = {}^1/_2 \operatorname{tr} A^2$ отрицательно определена на пространстве кососимметрических матриц, так как $\operatorname{tr} AA = -\operatorname{tr} AA^* = \sum_{i,j} A_{ij}^2$, если $A = (A_{ij}) = -(A_{ji})$. Поскольку $Q(A)$ невырожденна, мы можем отождествить g с g^*. (Более общо, если g — вещественная полупростая алгебра Ли, то ее форма Киллинга $Q(A) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} A)^2$ невырожденна, и можно отождествить g с g^*.) В случае $SO(3)$

можно обычным образом отождествить кососимметрические (3×3)-матрицы с $\mathbf{R}^3$, на котором $SO(3)$ действует поворотами. Значит, орбиты — это сферы (двумерные) и начало (нульмерная). Сфера не допускает вещественной поляризации (инвариантной или нет), и нам придется иметь дело с комплексными поляризациями. Возьмем $\beta=(0, 0, r)$, так что G_β состоит из поворотов вокруг z-оси и g_β порождается матрицей

$$A_z=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

В $g \otimes \mathbf{C}$ векторы A_x+iA_y и A_x-iA_y являются собственными векторами для $\operatorname{ad} A_z$ с собственными значениями i и $-i$. Таким образом, имеются две инвариантные комплексные поляризации (отвечающие голоморфной и антиголоморфной структурам на сфере Римана).

Рассмотрим, далее, группу $SL(2, \mathbf{R})$ всех вещественных (2×2)-матриц с определителем 1. Алгебра Ли g состоит из всех матриц вида

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & -a\end{bmatrix},$$

а квадратичная форма $Q(A)={}^1/_2 \operatorname{tr} A^2$ имеет вид

$$Q(A)=a^2+bc.$$

Эта форма опять-таки невырожденна (т. е. мы можем отождествить g^* с g), но она уже не будет положительно определенной. Имеется три сорта двумерных орбит; они отвечают $Q(A)>0$ (однополостный гиперболоид), $Q(A)=0$ (это конус, который после удаления начала распадается на две орбиты) и $Q(A)<0$ (двуполостный гиперболоид, каждая пола которого является орбитой).

Исследуем вначале однополостный гиперболоид $Q(A)=\lambda^2>0$. Мы можем взять

$$\beta=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{bmatrix}, \quad \text{т. е.} \quad G_\beta=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s^{-1}\end{bmatrix}$$

и g_β — это прямая, порожденная β. Если положить

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

то плоскости, порожденные β и A, а также β и C, инвариантны относительно G_β. Каждая плоскость пересекает гиперболоид по прямой линии. Имеются две вещественные поляризации, отвечающие образующим гиперболоида, и других поляризаций нет. (Это построение можно обобщить. Если G — вещественная полупростая группа Ли и β — регулярный элемент, лежащий в тотально вещественной картановской подалгебре, то любая система положительных корневых векторов определит вещественную поляризацию. В общем случае будет несколько различных классов сопряженных картановских подалгебр, в зависимости от того, какое число простых корней вещественно; ср. Костант [5]. Этим будет определяться характер поляризации. Для $sl(2)$ их два типа: отвечающие $Q(A) > 0$ и $Q(A) < 0$.)

В случае гиперболоида $Q(A) = -\lambda^2 < 0$ мы можем взять

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

для одной полы и $-\beta$ для другой. Исследуем полу, отвечающую β. Тогда G_β — это группа вращений, а g_β порождается элементом β. Вещественных поляризаций нет. Прямое вычисление показывает (см., например, Ренуар [11]), что можно отождествить орбиту с верхней полуплоскостью (или внутренностью единичного круга), на которой задана форма ω, равная умноженной на λ форме объема для стандартной гиперболической метрики. Две поляризации порождаются соответственно векторными полями $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial \bar{z}$.

Для конуса $Q(A) = 0$ орбита, проходящая через матрицу

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

дает в качестве G_β множество всех матриц вида

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Легко убедиться, что в $g \otimes \mathbf{C}/g_\beta$ имеется единственная прямая, инвариантная относительно G_β, и что она вещественна. Таким образом, имеется одна инвариантная поляризация, и она задается образующими конуса.

Пусть X — симплектическое многообразие и $\mathscr{M}$ — его поляризация. Предположим, что g — симплектический диффеоморфизм X. Тогда мы получим новую поляризацию $g\mathscr{M}$, полагая

$$(g\mathscr{M})_x = (dg)_{g^{-1}x}\mathscr{M}_{g^{-1}x}.$$

Легко проверить, что

$$g_1(g_2\mathscr{M}) = (g_1 g_2)\mathscr{M}.$$

В этом параграфе мы будем иметь дело с вещественными поляризациями, удовлетворяющими дополнительному условию, состоящему в том, что $\mathscr{M}_x$ являются касательными пространствами к листам некоторого расслоения. Точнее, пусть $\mathscr{M}$ — вещественная поляризация X. Будем говорить, что $\mathscr{M}$ — *расслаивающая поляризация,* если существуют такое гладкое n-мерное многообразие N и такое гладкое отображение $f\colon X \to N$, что:

(i) $\mathscr{M}_x = \ker df_x$ *при каждом* $x \in X$;

(ii) *при каждом* $y \in N$ *прообраз* $f^{-1}(y)$ *связен и односвязен.*

Заметим, что если $\mathscr{M}$ — расслаивающая поляризация и g — симплектический автоморфизм, то $g\mathscr{M}$ — снова расслаивающая поляризация, где в качестве отображения, ассоциированного с $g\mathscr{M}$, берется просто $f \circ g^{-1}$:

$$\ker d(f \circ g^{-1})_x = (dg^{-1})^{-1} (\ker df)_{g^{-1}x} = (dg) (\ker df)_{g^{-1}x} = (g\mathscr{M})_x.$$

Отметим, что $f^{-1}(y)$ — лагранжево многообразие.

Предположим, что симплектическая структура на X происходит из эрмитова линейного расслоения L со связностью. Если Λ — лагранжево многообразие, то ограничение L на Λ — это линейное расслоение $L|_\Lambda$ с нулевой кривизной. Если, кроме того, Λ связно и односвязно, то имеет смысл говорить о *горизонтальном сечении* расслоения $L|_\Lambda$, не зависящем от пути. Это объясняется тем, что параллельный перенос вдоль любого замкнутого пути есть тождественное преобразование. Таким способом подмногообразию Λ поставлена в соответствие комплексная прямая — пространство горизонтальных сечений L_Λ расслоения $L|_\Lambda$. Мы можем сделать это для каждого $f^{-1}(y)$. В результате с каждым $y \in N$ мы связываем комплексную прямую. Это приводит к линейному расслоению $L^{\mathscr{M}}$ над N. Сечение $L^{\mathscr{M}}$ можно представлять себе как сечение L, горизонтальное на каждом $f^{-1}(y)$. Заметим, что $L^{\mathscr{M}}$ наследует эрмитову структуру L.

Пусть $g \in P$ и s — гладкое сечение $L^{\mathscr{M}}$, так что s — сечение L, которое горизонтально (т. е. является ковариантной константой) вдоль листов $\mathscr{M}$. Значит,

$$\langle \xi, Ds \rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad \xi \in \mathscr{M}_x \quad \textit{и всех} \quad x.$$

Мы будем пользоваться буквой g также и для обозначения образа g в H. Тогда при $\eta \in (g\mathscr{M})_x$ можно написать $\eta = (dg)_{g^{-1}x}\xi$, где $\xi \in \mathscr{M}_{g^{-1}x}$. Поскольку g^{-1} сохраняет связность,

$$\langle \eta, D(g^{-1*}s) \rangle = \langle dg^{-1}\eta, Ds \rangle = \langle \xi, Ds \rangle = 0,$$

так что

$$g^{-1*}s \quad \textit{локально постоянно вдоль} \quad g\mathscr{M}.$$

Теперь мы хотим связать с $\mathscr{M}$ гильбертово пространство. Приводимое ниже определение временно; окончательное определение мы дадим в § 5. Обозначим через $|\bigwedge^n|^{1/2}(N)$ пространство полуплотностей на N, так что элемент $|\wedge^n|^{1/2}(N)$ — это гладкое сечение линейного расслоения $|\wedge^n|^{1/2}T^*(N)$. Через $L^{\mathscr{M}^{1/2}}$ обозначим тензорное произведение

$$L^{\mathscr{M}^{1/2}} = L^{\mathscr{M}} \times |\wedge^n|^{1/2}T^*(N).$$

Пусть $r_1 = s_1 \times \rho_1$ и $r_2 = s_2 \times \rho_2$ — два сечения $L^{\mathscr{M}^{1/2}}$. Тогда $\langle s_1, s_2\rangle \rho_1\bar{\rho}_2$ — это плотность, зависящая только от r_1 и r_2. Если r_1 и r_2 имеют компактный носитель, то положим, по определению,

$$(r_1, r_2) = \int \langle s_1, s_2\rangle \rho_1\bar{\rho}_2.$$

Эти сечения образуют предгильбертово пространство, которое мы обозначим через $|H_0(\mathscr{M})|$. Его пополнение обозначим через $|H(\mathscr{M})|$. Из предыдущего обсуждения следует, что каждое $g \in P$ определяет изометрию между $|H_0(\mathscr{M})|$ и $|H_0(g\mathscr{M})|$.

Пусть $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ — две расслаивающие поляризации, ассоциированные с отображениями $f_1\colon X \to N_1$ и $f_2\colon X \to N_2$. Будем говорить, что эти поляризации *трансверсальны*, если $f_1 \times f_2\colon X \to N_1 \times N_2$ — иммерсия. Это означает, что для каждого $x \in X$

$$\mathscr{M}_{1x} \cap \mathscr{M}_{2x} = \{0\}.$$

Будем говорить, что $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ *сильно трансверсальны*, если в дополнение к этому отображение $f_1 \times f_2\colon X \to N_1 \times N_2$ собственное.

Мы хотим определить спаривание между $|H_0(\mathscr{M}_1)|$ и $|H_0(\mathscr{M}_2)|$, если $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ сильно трансверсальны. Мы увидим, что спаривание обобщает преобразование Фурье. Перед тем как дать определение, поясним, как в каждой точке x можно спарить полуплотность в $y_1 = f_1(x)$ с полуплотностью в $y_2 = f_2(x)$, так чтобы получилось число. Заметим, что $(TN_1)_{y_1}$ изоморфно $TX_x/\mathscr{M}_{1x}$. Поскольку $\mathscr{M}_{1x}$ лагранжево, билинейная форма ω дает несингулярное спаривание между $\mathscr{M}_{1x}$ и $TX_x/\mathscr{M}_{1x}$. Таким образом, $\mathscr{M}_{1x}$ отождествляется с $T^*N_{1y_1}$, а $|\wedge^n|^{1/2}T^*N_{1y_1}$ с $|\wedge^n|^{1/2}\mathscr{M}_{1x}$. Аналогично, $|\wedge^n|^{1/2}T^*N_{2y_2}$ нужно отождествить с $|\wedge^n|^{1/2}\mathscr{M}_{2x}$. Далее, $\mathscr{M}_{1x}$ и $\mathscr{M}_{2x}$ дуально спарены относительно ω. Если мы выберем базис $\mathbf{e} = e_1, \ldots, e_n$ в $\mathscr{M}_{1x}$, то этим определяется базис $\mathbf{f} = f_1, \ldots, f_n$ в $\mathscr{M}_{2x}$. При замене $\mathbf{e}$ на $\mathbf{e}' = A\mathbf{e}$ происходит замена $\mathbf{f}$ на $\mathbf{f}' = ({}^tA)^{-1}\mathbf{f}$. Если $\rho_1 \in |\wedge^n|^{1/2}\mathscr{M}_{1x}$, то мы можем написать

$$\rho_1 = a\,|e_1 \wedge \ldots \wedge e_n|^{1/2},$$

где $|e_1 \wedge \ldots \wedge e_n|^{1/2}$ — базисный элемент в $|\wedge^n|^{1/2}\mathscr{M}_{1x}$, определяемый базисом $\mathbf{e}$. Если заменить $\mathbf{e}$ на $\mathbf{e}' = A\mathbf{e}$, то

$$|e'_1 \wedge \ldots \wedge e'_n|^{1/2} = |\det A|^{1/2}\,|e_1 \wedge \ldots \wedge e_n|^{1/2},$$

так что

$$\rho_1 = \frac{a}{|\det A|^{1/2}}\,|e'_1 \wedge \ldots \wedge e'_n|^{1/2}.$$

Если $\rho_2 \in |\bigwedge^n|^{1/2}\mathscr{M}_{2x}$, где $\rho_2 = b\,|f_1 \wedge \ldots \wedge f_n|^{1/2}$, то мы полагаем

$$\rho_1 \cdot \bar{\rho}_2 = a\bar{b}.$$

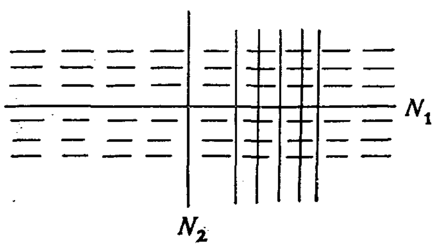
Из сказанного выше следует, что это выражение не зависит от выбора базиса.

Теперь рассмотрим $h_1 = s_1 \times \rho_1 \in |H_0(\mathscr{M}_1)|$ и $h_2 = s_2 \times \rho_2 \in |H_0(\mathscr{M}_2)|$, где $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ — сильно трансверсальные расслаивающие поляризации. Тогда $\langle s_1, s_2\rangle \rho_1 \cdot \bar{\rho}_2$ — гладкая функция с компактным носителем на X. Ясно, что она не зависит от специального представления s_1 и s_2. Мы можем проинтегрировать эту функцию относительно ω^n и получить полуторалинейное спаривание

$$\langle h_1, h_2\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_X \langle s_1, s_2\rangle \rho_1 \cdot \overline{\rho_2}\omega^n.$$

Покажем, что это спаривание в самом деле обобщает классическое преобразование Фурье. Для этого предположим, что X — фазовое пространство линейного пространства, т. е. $X = T^*(V)$, где V — векторное пространство. Тогда на X имеются глобальные координаты $(q, p) = (q^1, \ldots, q^n, p^1, \ldots, p^n)$.

Ясно, что поляризация $\mathscr{M}_1$, ассоциированная с отображением $(q, p) \longmapsto q$, сильно трансверсальна поляризации $\mathscr{M}_2$, ассоциированной с отображением $(q, p) \longmapsto p$. Здесь N_1 можно отождествить с V, рассматриваемым как нулевое сечение расслоения $T^*(X)$, а N_2 можно отождествить с V^*, рассматриваемым как $T^*(X)_0$ (кокасательное пространство в начале). Заметим, что N_1 и N_2 были идентифицированы как лагранжевы подмногообразия в X, которые сами связны и односвязны. Сечение расслоения $L^{\mathscr{M}_1}$, рассматриваемое как сечение расслоения L, определяется своими значениями на N_1. На N_1 имеется единственное (с точностью до постоянного множителя) выделенное сечение, а именно сечение единичной длины, являющееся ковариантной константой вдоль N_1. Обозначим это сечение через r_1. Тогда сечения $L^{\mathscr{M}_1}$ имеют вид ar_1, где a — *функция*, постоянная вдоль слоев $\mathscr{M}_1$, т. е. функция на N_1. Таким образом, сечения $L^{\mathscr{M}_1}$ можно отождествить с функциями на N_1. Аналогичное верно для N_2.



Таким способом мы получаем спаривание между полуплотностями (с компактным носителем) на N_1 и на N_2. Произвольное сечение расслоения $L^{\mathcal{M}_1 1/2}$ можно записать в виде $f(q)\, r_1\, dq^{1/2}$, а произвольное сечение $L^{\mathcal{M}_2 1/2}$ в виде $h(p)\, r_2\, dp^{1/2}$. Спаривание между f и h задается интегралом

$$(2\pi)^{-n/2} \int f(q)\, \bar{h}(p)\, \langle r_1,\ r_2 \rangle\, dq^{1/2} \cdot dp^{1/2} \omega^n.$$

Далее, $dq^{1/2} \cdot dp^{1/2} = 1$. Нужно вычислить $\langle r_1,\ r_2\rangle$. Поскольку r_1 и r_2 имеют единичную длину, $r_2 = e^{i\varphi} r_1$ для некоторой вещественной функции φ, а потому $\langle r_1,\ r_2\rangle = e^{-i\varphi}$. Мы должны определить φ. Обозначим через $\alpha_1 = \alpha_{r_1}$ мнимую часть формы связности: $\theta_{r_1} = i\alpha_1$ и аналогично для r_2. Тогда

$$\alpha_2 = \alpha_1 + d\varphi.$$

Поэтому мы должны определить α_1 и α_2. Но r_1 — ковариантная константа вдоль листов $q = \mathrm{const}$. Поэтому $\langle \partial/\partial p,\ Dr_1 \rangle = 0$ и, поскольку $Dr_1 = r_1 \otimes \alpha_1$, мы видим, что $\alpha_1 = \sum f_i dq^i$. Так как $d\alpha_1 = \sum dp^i \wedge dq^i$, отсюда следует, что

$$\alpha_1 = \sum p^i\, dq^i + dF,$$

где $F = F(q)$. Поскольку r_1 горизонтально вдоль N_1, получаем, что $\alpha_1|_{N_1} = 0$, т. е. $dF = 0$. Итак, $\alpha_1 = \sum p^i\, dq^i$. Те же рассуждения показывают, что $\alpha_2 = -\sum q^i\, dp^i$. Поэтому φ (с точностью до константы) имеет вид $\varphi = -\sum p^j q^j$, а значит, для спаривания получаем выражение

$$(2\pi)^{-n/2} \int e^{-ip\cdot q} f(q)\, \bar{h}(p)\, dp^1 \wedge \ldots \wedge dp^n \wedge dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^n.$$

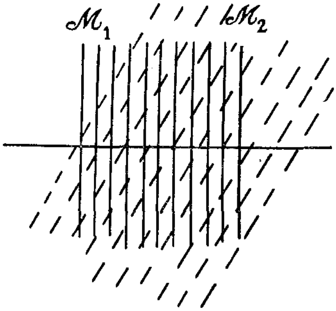
Если считать, что это спаривание ставит в соответствие функции f распределение по p, то получится в точности преобразование Фурье.

Проделаем теперь следующее вычисление. Пусть $N_1 = N_2 = (p = 0) \subset X = T^*(V)$. Пусть, далее, $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ определяются отображениями f_1 и f_2, где

$$f_1(q,\ p) = q,$$

$$f_2(q,\ p) = q - tp, \quad t \neq 0.$$

Мы можем отождествить как $L^{\mathscr{M}_1}$, так и $L^{\mathscr{M}_2}$ с функциями на N_1. Здесь r_1 — то же, что и прежде, а r_2 — константа вдоль



листов $q - tp = \text{const}$. Значит, $\alpha_2 = \sum f_i (dq^i - t\,dp^i)$ и, поскольку $d\alpha_2 = \omega$, получаем $\alpha_2 = \sum p^i (dq^i - t\,dp^i) + dF$, где $F = F(q - tp)$. Так как $\alpha_2|_{N_1} = 0$, имеем $dF = 0$. Итак,

$$\alpha_2 = \sum p^i\,dq^i + t\,d\varphi,$$

где φ с точностью до константы задается формулой

$$\varphi(q,\ p) = -\frac{1}{2} t \sum p^{j2}.$$

Найдем спаривание между полуплотностями. Для каждого $x \in X$ подпространство $\mathscr{M}_{1x}$ порождается векторами $\partial/\partial p^1, \ldots$ $\ldots, \partial/\partial p^n$, а подпространство $\mathscr{M}_{2x}$ — векторами

$$\frac{\partial}{\partial p^1} + t\frac{\partial}{\partial q^1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial p^n} + t\frac{\partial}{\partial q^n}.$$

Если выбрать $\partial/\partial p^1, \ldots, \partial/\partial p^n$ в качестве базиса в $\mathscr{M}_{1x}$, то соответствующий базис в $\mathscr{M}_{2x}$ имеет вид

$$t^{-1}\frac{\partial}{\partial p^1} + \frac{\partial}{\partial q^1},\ \ldots,\ t^{-1}\frac{\partial}{\partial p^n} + \frac{\partial}{\partial q^n}.$$

Ковариантная полуплотность $|dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^n|^{1/2}$ на N_x отвечает ковариантной полуплотности

$$\left|\frac{\partial}{\partial p^1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial p^n}\right|^{1/2}$$

на $\mathscr{M}_{1x}$ относительно f_1 и полуплотности

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial p^1} + t\frac{\partial}{\partial q^1}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\frac{\partial}{\partial p^n} + t\frac{\partial}{\partial q^n}\right)\right|^{1/2}$$

на $\mathscr{M}_{2x}$ относительно f_2. Это последнее выражение равно

$$t^{n/2}\left|\left(t^{-1}\frac{\partial}{\partial p^1} + \frac{\partial}{\partial q^1}\right) \wedge \ldots \wedge \left(t^{-1}\frac{\partial}{\partial p^n} + \frac{\partial}{\partial q^n}\right)\right|^{1/2}.$$

Поэтому

$$|dq|^{1/2}\cdot|dq|^{1/2}=|t|^{n/2}.$$

В результате мы получаем спаривание

$$\langle f\,|\,dq\,|^{1/2},\ g\,|\,dq\,|^{1/2}\rangle_t=\frac{t^{n/2}}{(2\pi)^{n/2}}\int e^{-itp^2/2}f(q)\,\overline{g(q-tp)}\,dp\,dq.$$

Заметим, что, когда t стремится к нулю, допустимая область для интеграла, т. е. $f_1^{-1}(\operatorname{supp} f)\cap f_2^{-1}(\operatorname{supp} g)$, увеличивается. Вычислим этот предел по методу стационарной фазы. Положим $p'=tp$, так что правая часть принимает вид

$$\int\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\int e^{-ip'^2/2t}\,\overline{g(q-p')}\,dp'f(q)\,dq.$$

Согласно методу стационарной фазы, внутренний интеграл стремится к

$$e^{\pi in/4}\,\overline{g(q)}\quad\text{при}\quad t\to 0^+,$$

$$e^{-\pi in/4}\,\overline{g(q)}\quad\text{при}\quad t\to 0^-.$$

Если бы пренебречь фазовыми множителями, то в пределе получилось бы спаривание в гильбертовом пространстве $|H_0(N_1)|$, т. е.

$$\lim_{t\to 0}|\langle f\,|\,dq\,|^{1/2},\ g\,|\,dq\,|^{1/2}\rangle|_t=|\langle f\,|\,dq\,|^{1/2},\ g\,|\,dq\,|^{1/2}\rangle|,$$

где справа стоит скалярное произведение в гильбертовом пространстве $|H_0(N_1)|$. Фазы в правой части учитываются следующим образом. Заметим, что если говорить о формах, а не полуплотностях, то n-форма $dq^1\wedge\ldots\wedge dq^n$ определяет элемент

$$\frac{\partial}{\partial p^1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial p^n}\in\bigwedge\nolimits^n(\mathcal{M}_{1x})$$

и элемент

$$\left(\frac{\partial}{\partial q^1}+t\frac{\partial}{\partial p^1}\right)\wedge\ldots\wedge\left(\frac{\partial}{\partial q^n}+t\frac{\partial}{\partial p^n}\right)\in\bigwedge\nolimits^n(\mathcal{M}_{2x}).$$

Поэтому, если бы нужно было определить спаривание между формами, мы получили бы

$$dq\cdot dq=t^n=\begin{cases}|t|^n & \text{при}\quad t>0,\\ e^{n\pi i}|t|^n & \text{при}\quad t<0.\end{cases}$$

Если бы мы могли иметь дело с «полуформами», а не с полуплотностями, то мы получили бы

$$dq^{1/2}\cdot dq^{1/2}=t^{n/2}\qquad\text{при}\quad t>0,$$

$$dq^{1/2}\cdot dq^{1/2}=e^{n\pi i/2}|t|^{n/2}\qquad\text{при}\quad t<0$$

(где выбрано какое-то значение $\sqrt{-1}$). Если в спаривании заменить $(2\pi)^{-n/2}$ на $(e^{\pi i/2}\,2\pi)^{-n/2}$, а $|dq|^{1/2}$ на $dq^{1/2}$, то мы получим в качестве спаривания

$$\left(\frac{t}{2\pi i}\right)^{n/2}\int e^{-itp^2/2} f(q)\,\overline{g(q-tp)}\,dp\,dq$$

и по методу стационарной фазы найдем, что

$$\lim \langle f\,dq^{1/2},\ g\,dq^{1/2}\rangle_t = \langle f\,dq^{1/2},\ g\,dq^{1/2}\rangle.$$

По этой причине мы исследуем в дальнейшем полуформы и то, как они спариваются на симплектическом многообразии.

Заметим, что функция

$$h(q,\ t) = \left(\frac{1}{2\pi i t}\right)^{n/2}\int e^{i(q-x)^2/2t}\,h(x)\,dx$$

— это в точности решение уравнения Шредингера

$$\frac{1}{i}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial q^2}$$

для свободной частицы с начальными условиями $h(q,\ 0) = h(q)$. Итак, наша интерпретация уравнения Шредингера состоит в следующем. Функция $^1/_2 p^2$ рассматривается как элемент алгебры Ли h. Поэтому она порождает однопараметрическую подгруппу g_t. Мы будем обозначать через g_t также и образ этой однопараметрической группы в H. Значит, g_t — это также и однопараметрическая группа диффеоморфизмов X с инфинитезимальной образующей $p\partial/\partial q = \sum p^i\partial/\partial q^i$. Тогда

$$g_t(q,\ p) = (q + tp,\ p)$$

и, значит, слоение $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0$, задаваемое уравнениями $q = \text{const}$, переходит в слоение $\mathscr{M}_t = g_t\mathscr{M}$, задаваемое уравнениями $q + tp = \text{const}$. Поэтому $|H_0(\mathscr{M})|$ изометрично отображается на $|H_0(\mathscr{M}_t)|$, а значит, это отображение продолжается до унитарного изоморфизма $|H(\mathscr{M})|$ на $|H(\mathscr{M}_t)|$. Это отображение мы также будем обозначать через g_t. При $t \neq 0$ определим отображение U_t: $|H(\mathscr{M})| \to |H(\mathscr{M})|$, полагая

$$\langle h_1,\ U_t h_2\rangle_0 = \langle h_1,\ g_t h_2\rangle_t$$

для всех $h_1,\ h_2 \in |H(\mathscr{M})|$ и $U_0 = \mathrm{id}$. Тогда U_t — унитарная однопараметрическая группа на $|H(\mathscr{M})|$, инфинитезимальной образующей которой является оператор Шредингера $\partial^2/\partial q^2$.

В предыдущих вычислениях мы могли бы заменить скаляр t диагональной матрицей $T_2 = \operatorname{diag}(t_1,\ \ldots,\ t_n)$, так что f_2 имело бы вид $f_2(q,\ p) = q - T_2 p$. Если при этом $t_i \neq 0$ для всех i, то вычисления по существу не меняются.

Пусть $N=N_1=N_2$ — подпространство, определяемое уравнением $p=0$, и U_{1N}: $C_0^\infty(N)\to|H_0(\mathscr{M}_1)|$ — отождествление, отвечающее выбору полуплотности $dq^{1/2}$ и отображения f_1; аналогично определим U_{2N}: $C_0^\infty(N)\to|H_0(\mathscr{M}_2)|$. Тогда

$$\langle U_{1N}f,\ U_{2N}g\rangle=\frac{\Pi t_j^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\int\int e^{-{}^1/_2 i\Sigma t_j p_j^2} f(q)\,\overline{g(q-Tp)}\,dq\,dp.$$

Пользуясь преобразованием Фурье, эту формулу можно упростить. Если обозначить через $\tilde{f}$ преобразование Фурье функции f, а через g_T функцию $g_T(q)=g(q-Tp)$, то $\tilde{g}_T(\xi)=e^{-i\Sigma t_j p_j \xi_j}\tilde{g}(\xi)$. Применяя к предыдущему выражению формулу Планшереля, получаем

$$\langle U_{1N}f,\ U_{2N}g\rangle=\langle\tilde{f},\ \tilde{\varphi}_T\tilde{g}\rangle,$$

где

$$\tilde{\varphi}_T(\xi)=\frac{\Pi t_j^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\int e^{{}^1/_2 i\Sigma t_j p_j^2+i\Sigma t_j p_j \xi_j}\,dp=$$
$$=e^{(\operatorname{sign} T)\pi i/4}e^{-i\Sigma|t_j|\xi_j^2/2}$$

в силу основного вычисления для метода стационарной фазы, проведенного в начале гл. I. Опять-таки мы видим, что при спаривании имеет место «непрерывность с точностью до фазы». Однако из этой формулы можно вывести другой важный факт, выбирая две диагональные матрицы T_2 и T_3, не имеющие общих собственных значений (а значит, соответствующие слоения $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ и $\mathscr{M}_3$ попарно трансверсальны). Воспользуемся полуторалинейным спариванием между $|H(\mathscr{M}_1)|$ и $|H(\mathscr{M}_2)|$ и определим отображение F_{21}: $|H(\mathscr{M}_1)|\to|H(\mathscr{M}_2)|$, которое в силу приведенной выше формулы унитарно. Аналогично можно определить унитарные отображения F_{23} и F_{13}. Пусть X_1, X_2 и X_3 — лагранжевы подпространства, отвечающие этим трем поляризациям. Тогда из проведенного выше вычисления следует, что

$$F_{32}\cdot F_{21}=e^{(\pi i/4)\,i(X_1,\,X_2,\,X_3)}F_{31},$$

где $i(X_1,\ X_2,\ X_3)$ — индекс тройки трансверсальных лагранжевых подпространств, определенный в § 2 гл. IV. Пусть X и Y — любые два трансверсальных лагранжевых подпространства и $\mathscr{M}_X$, $\mathscr{M}_Y$ — соответствующие вещественные поляризации. Тогда определено унитарное отображение

$$F_{YX}\colon\ |H(\mathscr{M}_X)|\to|H(\mathscr{M}_Y)|.$$

Каждому элементу a симплектической группы отвечает индуцированное отображение

$$a_*\colon\ |H(\mathscr{M}_X)|\to|H(\mathscr{M}_{aX})|,$$

и из инвариантности наших определений следует, что

$$F_{aY,\,aX}a_* = a_* F_{Y,\,X}. \tag{3.4}$$

Итак, мы знаем, что для *любой* тройки трансверсальных лагранжевых подпространств X, Y и Z

$$F_{Z,\,Y} \circ F_{Y,\,X} = e^{(\pi i/4)\,i\,(X,\,Y,\,Z)} F_{Z,\,X}. \tag{3.5}$$

Уравнение (3.4) подсказывает, что можно попытаться определить представление симплектической группы на любом фиксированном $|H(\mathscr{M}_X)|$, ставя в соответствие элементу a унитарное отображение $a_* F_{a^{-1}X,\,X}$. Уравнение же (3.5) показывает, что это не совсем представление, а лишь представление с точностью до фазового множителя, т. е. проективное представление. Однако мы можем перейти к универсальной накрывающей симплектической группы и универсальному накрывающему пространства лагранжевых подпространств, с тем чтобы учесть фазу. Как и в § 2 гл. IV, обозначим через $\tilde{L}(V)$ универсальное накрывающее пространство пространства $L(V)$ вещественных лагранжевых подпространств V. Если $u = (X,\ \theta)$ — точка $\tilde{L}(V)$, то положим $\mathscr{M}_u = \mathscr{M}_X$. Далее, определим унитарные отображения

$$F_{v,\,u}\colon\ |H(\mathscr{M}_u)| \to |H(\mathscr{M}_v)|,$$

полагая

$$F_{v,\,u} = e^{-\pi i m(u,\,v)/2} F_{Y,\,X}, \quad \text{где} \quad u = (X,\ \theta),\ v = (Y,\ \varphi), \tag{3.6}$$

$m(u,\ v)$ — индекс Маслова и u и v предполагаются трансверсальными. Из проведенных выше рассмотрений следует, что если определить

$$\tilde{a}_*\colon\ |H(\mathscr{M}_u)| \to \left|H\left(\mathscr{M}_{\tilde{a}u}\right)\right|, \quad \text{полагая} \quad \tilde{a}_* = a_*$$

для любого $\tilde{a} \in \widetilde{Sp}(V)$, накрывающего $a \in Sp(V)$, то

$$F_{\tilde{a}v,\,\tilde{a}u}\tilde{a}_* = \tilde{a}_* F_{v,\,u}, \tag{3.7}$$

$$F_{u,\,v} = F^{-1}_{v,\,u} \tag{3.8}$$

$$\text{и} \quad F_{w,\,v} \circ F_{v,\,u} = F_{w,\,u} \tag{3.9}$$

для трех трансверсальных элементов u, v и w, где в (3.9) мы воспользовались (3.5) и формулой Лере (2.26) из гл. IV. Теперь покажем (следуя Сурьо [16]), как определить отображение $F_{v,\,u}$ для любой пары элементов $\tilde{L}(V)$, не обязательно трансверсальных, так чтобы оператор $F_{v,u}$ остался унитарным,

$$F_{u,\,u} = \mathrm{id} \tag{3.10}$$

и (3.7) — (3.9) продолжали иметь место. Для этого воспользуемся обозначениями § 2 гл. IV (в частности, выберем комплексную структуру и отождествим V с $\mathbf{C}^n$). Для каждого $0 \leqslant \theta < 2\pi$ положим

$$z_\theta = (e^{i\theta}\mathbf{R}^n,\ \theta),$$

и пусть z, z' и т. д. пробегают множество возможных z_θ. Если задано любое конечное множество элементов u, v, w и т. д., то можно выбрать некоторое z, трансверсальное им всем, просто считая, что θ не совпадает ни с каким из собственных значений (X), и т. д. Кроме того, если $z \neq z'$, то z трансверсально z'. Теперь определим отображение

$$G_{v,\,u} = F_{v,\,z} \circ F_{z,\,u},$$

где z выбрано трансверсальным u и v. Из (3.8), (3.9) формально следует, что G удовлетворяет тем же уравнениям и не зависит от выбора z. Аналогично получается, что G совпадает с F, когда u и v трансверсальны, и что имеет место (3.10). Из (3.10) и уравнения (2.21) гл. IV следует, что

$$F_{\operatorname{Exp}(4k\pi i)\,u,\,u} = \mathrm{id}. \tag{3.11}$$

Таким образом, мы видим, что представление $\tilde{a} \longmapsto \tilde{a}_* F_{\tilde{a}^{-1}u,\,u}$ группы $\widetilde{Sp}(V)$ уже является представлением двулистной накрывающей $Mp(V)$ симплектической группы. Эта двулистная накрывающая называется *метаплектической группой*, а соответствующее представление называется *метаплектическим представлением*. Мы подробно изучим его в § 6.

Проведем теперь аналогичное вычисление в случае гармонического осциллятора. Для простоты ограничимся случаем $n=1$. Тогда гамильтониан имеет вид $\frac{1}{2m}p^2 + \frac{mf^2}{2}q^2$, т. е. соответствующее векторное поле — это $\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q} - mf^2 q\frac{\partial}{\partial p}$, а поток —

$$g_t(q,\ p) = \left((\cos ft)\,q + \frac{1}{mf}(\sin ft)\,p,\ \ -mf(\sin ft)\,q + (\cos ft)\,p\right).$$

Введем координаты p, q и t так, чтобы $m=f=1$, для упрощения вычислений. К исходным координатам мы вернемся в окончательном результате. Тогда гамильтониан примет вид $^1/_2(p^2+q^2)$, соответствующее векторное поле — вид $p\partial/\partial q - q\partial/\partial p$, а соответствующий поток g_t будет задаваться формулой

$$g_t(q,\ p) = (q\cos t + p\sin t,\ \ -q\sin t + p\cos t).$$

Поляризация $g_t\mathscr{M}$ задается уравнениями $q\cos t - p\sin t = \mathrm{const}$. Скалярное произведение между $dq^{1/2}$ и $g_t\,dq^{1/2}$ имеет вид $e^{i\varphi_t}$. Функция φ_t удовлетворяет уравнению

$$(g_t)^{-1*}\alpha - \alpha = d\varphi_t.$$

Проделаем соответствующее вычисление для произвольного

$$g=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R}),$$

где A, B, C и D — вещественные числа. Мы хотим найти такое φ, что $g^{-1*}\alpha-\alpha=d\varphi$. Имеем

$$g^{-1}=\begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$$

и $(g^{-1})^*(p\,dq)=(-Cq+Ap)(D\,dq-B\,dp)$. Значит,

$$g^{-1*}\alpha-\alpha=-DCq\,dq-BAp\,dp+BCq\,dp+CBp\,dq,$$

поскольку $AD-BC=1$. Итак, мы видим, что можно взять

$$\varphi(p, q)=-\frac{1}{2}DCq^2+(Cq)(Bp)-\frac{1}{2}BAp^2.$$

(В § 7 мы проведем соответствующее вычисление в n-мерном случае; оно практически совпадает с вычислением в одномерном случае.) В рассматриваемом сейчас случае получаем

$$\varphi_t=+\frac{1}{2}(\sin t\ \cos t)\,q^2-\sin^2 t\,pq-\frac{1}{2}(\sin t\cos t)\,p^2.$$

Итак, если $v_1=h_1s_1$ и $v_2=h_2s_2$ — элементы $|H_0(\mathcal{M})|$, то

$$\langle v_1, g_tv_2\rangle_t=\frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\int e^{-i[-(\sin^2 t)\,pq+(1/2)\sin t\cos t\,(q^2-p^2)]}\times$$
$$\times h_1(q)\,\overline{h_2}(q\cos t-p\sin t)\sin^{1/2}t\,dp\,dq.$$

Мы можем понимать это как

$$\langle v_1, g_tv_2\rangle_t=\langle v_1, U(t)\,v_2\rangle_0,$$

где

$$U(t)\,v(q)=\int K(q, t; z, 0)\,v(z)\,dz$$

для соответствующего ядра K. Чтобы найти явное выражение для K, сделаем в рассматриваемом интеграле подстановку $z=q\cos t-p\sin t$. Это дает $dp=-(\sin t)^{-1}dz$ и

$$-(\sin^2 t)\,pq+\frac{1}{2}(\sin t\cos t)(q^2-p^2)=\frac{1}{\sin t}\left[qz-\frac{1}{2}\cos t\,(q^2+z^2)\right].$$

Эти два уравнения показывают, что

$$K(q, t; z, 0)=\left(\frac{1}{2\pi i\sin t}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{i}{\sin t}\left[\frac{1}{2}(q^2+z^2)\cos t-qz\right]\right).$$

Непосредственное вычисление показывает, что при $t\neq 0$ ядро K удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\frac{1}{i}\frac{\partial K}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial q^2}+q^2K\right),$$

и методом стационарной фазы получаем, что $\lim_{t \to 0} K(q, t; z, 0) = \delta(q-z)$. Возвращаясь к первоначальным координатам, можно написать

$$K(q, t; z, 0) = \left(\frac{mf}{2\pi i \sin ft}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{imf}{\sin ft}\left[\frac{1}{2}(q^2+z^2) - qz\right]\right\}.$$

Мы видим, что функция

$$h(t, q) = (U(t)h)(q) = \int K(q, t; z, 0) h(z)\, dz$$

является решением уравнения Шредингера

$$\frac{1}{i}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2m}\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} + \frac{mf^2}{2} q^2 h$$

с начальными условиями $h(0, q) = h(q)$.

Операторы $U(t)$ унитарны и удовлетворяют условию $U(t+s) = U(t)U(s)$. Кроме того, оператор $U(t)$ определяется при $t = k\pi$ по методу стационарной фазы. Заметим, что $U(t)$ не будет периодическим с периодом π. Действительно, из-за квадратного корня в $\sin^{1/2} t$ мы видим, что $U(t+2\pi) = -U(t)$, т. е. U периодично с периодом 4π. Итак, U является представлением двулистной накрывающей группы вращений окружности, а не самой этой группы.

Обобщим предыдущее рассуждение. Пусть f — функция на T^*M, порождающая однопараметрическую группу g_t. Обозначим через $\mathscr{M}_0$ кокасательную поляризацию и предположим, что для t, достаточно близких к нулю, $t \neq 0$, поляризации $\mathscr{M}_0$ и $\mathscr{M}_t = g_t\mathscr{M}_0$ вполне трансверсальны, т. е. отображение

$$\psi\colon T^*M \to M \times M, \quad \psi(z) = (\pi z, \pi g_{-t} z)$$

— диффеоморфизм. Для вычисления спаривания мы должны найти такую функцию φ_t, что

$$d\varphi_t = g_{-t}^* \alpha - \alpha.$$

Мы утверждаем, что можно выбрать

$$\varphi_t \psi^{-1}(x, y) = \int_\gamma \alpha - f\, dt = \int_C \mathscr{L}\, dt,$$

где $\mathscr{L}$ — «лагранжиан», отвечающий «гамильтониану» f, C — классический путь, соединяющий x с y, а γ — поднятие этого пути на T^*M (определяемое $\mathscr{L}$). Действительно, мы можем рассмотреть функцию $F = f - E$ на $T^*(M \times \mathbf{R})$ и гамильтонов поток, который она порождает; здесь E — координата на $\mathbf{R}^*$. Тогда данное уравнение в точности является предметом рассмотрения в методе характеристик Гамильтона, описанном в § 3 гл. III. (Изученный там двумерный случай заменяется здесь n-мерным случаем, а t — дополнительное переменное. Рассматриваемое уравнение тогда является следствием уравнения (3.3) гл. III.) Применяя вычисления того же типа, что и раньше в этом параграфе, мы видим, что ассоциированный оператор U_t имеет вид

$$(U_t h)(x_{-t}) = (2\pi i)^{-n/2} \int e^{iS_t(x_{-t},\, x)} (\det(\partial^2 S_t/\partial x_{-t}\partial x))^{-1/2} h(x)\, dx,$$

где $S_t = \varphi_t \circ \psi$. Хорошо известно, что эта формула не является корректной для процедуры квантования в общем случае; это лишь аппроксимация к формальному выражению, даваемому методом Фейнмана (интегралов по траекториям); ср. конец гл. II. Поэтому в общем случае будет применяться более сложная процедура. Тем не менее обсуждаемая процедура оказывается корректной для многих задач теории представлений групп. В конце этой главы мы приведем предварительное вычисление, подсказывающее, какого сорта геометрические условия участвуют в обосновании этой процедуры.

§ 4. *Металинейные многообразия и полуформы*

В этом параграфе мы вводим понятие полуформы. Пусть M — многообразие размерности n. Будем характеризовать n-форму в точке, исходя из ее поведения при преобразованиях. Именно, n-форма ω в точке x — это задание числа $\omega(\mathbf{v})$ для каждого базиса $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ в $T(X)_x$. Если $A = (A_{ij}) \in GL(n, \mathbf{R})$ и $\mathbf{w} = \mathbf{v}A$, т. е. $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, где $w_j = \sum A_{ij} v_i$, то $\omega(\mathbf{w}) = \omega(\mathbf{v}) \det A$. Плотностью порядка s мы назвали объект, который изменяется по закону $\omega(\mathbf{w}) = \omega(\mathbf{v}) |\det A|^s$. Нам хотелось бы определить полуформы как объекты с законом преобразования $\omega(\mathbf{w}) = \omega(\mathbf{v}) (\det A)^{1/2}$. Трудность состоит в том, что $(\det A)^{1/2}$ не является корректно определенной функцией на $GL(n, \mathbf{R})$. На самом деле мы должны перейти к двулистной накрывающей для $GL(n, \mathbf{R})$ и к соответствующему двулистному накрытию расслоения базисов в $T(X)$.

Поскольку $GL(n, \mathbf{R})$ имеет две компоненты (матрицы с положительными и отрицательными детерминантами), естественно ожидать, что двулистиая накрывающая будет иметь четыре компоненты, а $(\det A)^{1/2}$ будет принимать на соответствующих компонентах значения в $\mathbf{R}^+$, $i\,\mathbf{R}^+$, $-\mathbf{R}^+$, $-i\mathbf{R}^+$. По различным причинам удобно рассматривать $GL(n, \mathbf{R})$ как подгруппу вещественных матриц, лежащую в $GL(n, \mathbf{C})$.

Напомним, что всякая невырожденная комплексная матрица может быть записана в виде PU, где P — положительно определенная эрмитова матрица, а U — унитарная матрица. Каждую унитарную матрицу можно представить в виде $U = e^{i\theta} U_1$, где $U_1 \in SU(n)$. Далее, группа $SU(n)$ односвязна. Действительно, любую замкнутую кривую, начинающуюся в единице, можно записать в виде

$$C(t)=A(t)\begin{bmatrix} e^{i\alpha_1(t)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\alpha_n(t)} \end{bmatrix} A(t)^{-1},$$

и ее можно стянуть в точку, рассматривая деформацию $C(s,\ t)$ вида

$$C(s,\ t)=A(t)\begin{bmatrix} e^{i\beta_1(s,\ t)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\beta_n(s,\ t)} \end{bmatrix} A(t)^{-1},$$

где

$$\beta_k(s,\ t)=(1-s)\,\alpha_k(t)+s\sum_{1}^{n}\alpha_j(t)/n.$$

Значит, $\pi_1 GL(n,\ \mathbf{R})=\pi_1 U(n)=\pi_1 S^1=\mathbf{Z}$.

Исследуем теперь этот факт с несколько иной точки зрения. Пусть $\mathbf{C}^*=GL(1,\ \mathbf{C})$ — плоскость с выколотой точкой, рассматриваемая как группа обратимых (1×1)-матриц. Экспоненциальное отображение, переводящее $u\in\mathbf{C}$ в e^u, превращает $\mathbf{C}$ в универсальную накрывающую группу для $\mathbf{C}^*$. Группа $\mathbf{Z}$ действует как группа накрывающих преобразований; отображение $\mathbf{Z}\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ имеет вид $(k,\ u)\longmapsto 2\pi ik+u$, так что $\mathbf{C}^*=\mathbf{C}/\mathbf{Z}$.

Проведем соответствующее вычисление для $GL(n,\ \mathbf{C})$. Пусть $\mathbf{Z}$ действует на $\mathbf{C}\times SL(n,\ \mathbf{C})$ при помощи отображения

$$\mathbf{Z}\times(\mathbf{C}\times SL(n,\ \mathbf{C}))\to\mathbf{C}\times SL(n,\ \mathbf{C}),$$

имеющего вид

$$(k(u,\ A))\longmapsto\left(u+\frac{2\pi ik}{n},\ e^{-2\pi ik/n}A\right).$$

Мы утверждаем, что относительно этого действия имеет место отождествление

$$(\mathbf{C}\times SL(n,\ \mathbf{C}))/\mathbf{Z}=GL(n,\ \mathbf{C}).$$

Действительно, имеется отображение

$$\mathbf{C}\times SL(n,\ \mathbf{C})\xrightarrow{\pi}GL(n,\ \mathbf{C})$$

вида $(u,\ A)\longmapsto e^uA$, инвариантное относительно действия $\mathbf{Z}$, и, как легко заметить, это изоморфизм $(\mathbf{C}\times SL(n,\ \mathbf{C}))/\mathbf{Z}$ на $GL(n,\ \mathbf{C})$. Функция det, определенная на $GL(n,\ \mathbf{C})$ формулой $GL(n,\ \mathbf{C})\ni B\longmapsto\det B\in\mathbf{C}^*$, поднимается до функции $\det\circ\pi$ на $\mathbf{C}\times SL(n,\ \mathbf{C})$, где

$$(\det\circ\pi)(u,\ A)=e^{nu}.$$

Эта функция имеет корректно определенный голоморфный квадратный корень $u\longmapsto e^{nu/2}$, который уже определен на группе

$(\mathbf{C}\times SL(n, \mathbf{C}))/2\mathbf{Z}$. Положим

$$(\mathbf{C}\times SL(n, \mathbf{C}))/2\mathbf{Z} = ML(n, \mathbf{C})$$

и назовем эту группу *металинейной*. Это двулистная накрывающая группы $GL(n, \mathbf{C})$. Обозначим через r проекцию $ML(n, \mathbf{C})$ на $GL(n, \mathbf{C})$, а через χ — голоморфный квадратный корень из $\det\circ r$, т. е.

$$\chi^2(C) = \det(rC), \quad C\in ML(n, \mathbf{C}). \tag{4.1}$$

Рассмотрим теперь $GL(n, \mathbf{R})$ как подгруппу в $GL(n, \mathbf{C})$, состоящую из вещественных матриц, и положим, по определению,

$$ML(n, \mathbf{R}) = r^{-1}GL(n, \mathbf{R}),$$

т. е. $ML(n, \mathbf{R})$ — подгруппа в $ML(n, \mathbf{C})$, являющаяся двулистной накрывающей $GL(n, \mathbf{R})$. Будем обозначать через r также и ограничение r на $ML(n, \mathbf{R})$, а через χ — ограничение χ на $ML(n, \mathbf{R})$. Из (4.1) следует, что χ может принимать значения на четырех полупрямых: $\mathbf{R}^+$, $i\mathbf{R}^+$, $-\mathbf{R}^+$, $-i\mathbf{R}^+$ и, значит, группа $ML(n, \mathbf{R})$ имеет четыре компоненты.

Пусть, далее, V — произвольное n-мерное векторное пространство и $B(V)$ — множество базисов в V. Группа $GL(n, \mathbf{R})$ действует (справа) на $B(V)$ при помощи отображения $B(V)\times GL(n, \mathbf{R})\to B(V)$, переводящего $(v_1, \ldots, v_n)\times(A_{ij})$ в $(\sum v_iA_{i1}, \ldots, \sum v_iA_{in})$. Под *металинейной структурой* на V мы будем понимать накрытие $MB(V)\xrightarrow{\rho} B(V)$ вместе с действием $MB(V)\times ML(n, \mathbf{R})\to MB(V)$, согласованным с накрытием $ML(n, \mathbf{R})\to GL(n, \mathbf{R})$, т. е. таким, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} MB(V) & \times & ML(n,\mathbf{R}) & \longrightarrow & MB(V) \\ \downarrow{\scriptstyle\rho} & & \downarrow{\scriptstyle r} & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ B(V) & \times & GL(n,\mathbf{R}) & \longrightarrow & B(V) \end{array}$$

Предложение 4.1. *Существуют в точности две металинейные структуры на V.*

Пространство $B(V)$ распадается на две компоненты B_+ и B_-, причем элементы $GL(n, \mathbf{R})_0$ сохраняют компоненты, а элементы $GL(n, \mathbf{R})^-$ переставляют их; здесь через $GL(n, \mathbf{R})^-$ обозначено множество матриц с отрицательным детерминантом. Как множество, $MB(V)$ должно состоять из четырех компонент: B_{1+}, B_{2+}, B_{1-}, B_{2-}, где B_{1+} и B_{2+} проектируются на B_+, а B_{1-} и B_{2-} на B_-. Ясно, что действие $ML(n, \mathbf{R})$ на $MB(V)$ определяется действием любого элемента θ с $\chi(\theta) = i$. Должно быть или $B_{1+}\theta = B_{1-}$, или $B_{1+}\theta = B_{2-}$. В первом случае имеем

$$B_{1+}\xrightarrow{\theta} B_{1-}\xrightarrow{\theta} B_{2+}\xrightarrow{\theta} B_{2-}\xrightarrow{\theta} B_{1+},$$

во втором случае —

$$B_{1+} \xrightarrow{\theta} B_{2-} \xrightarrow{\theta} B_{2+} \xrightarrow{\theta} B_{1-} \xrightarrow{\theta} B_{1+}.$$

Далее, индексация $MB = B_1 \cup B_2$ — вопрос соглашения; с другой стороны, нет никакого предпочтения в объявлении одних базисов положительными, а других — отрицательными. Это зависит от выбора ориентации. Заметим, что если изменить $+$ на $-$, то вторая из приведенных выше последовательностей перейдет в первую. Мы можем считать стандартной первую последовательность; тогда два действия $ML(n, \mathbf{R})$ на $MB(V)$ определятся выбором ориентации на V.

Предложение 4.2. *Выбор металинейной структуры на векторном пространстве V эквивалентен выбору ориентации V.*

Если комплексифицировать векторное пространство V, т. е. рассмотреть $V^{\mathbf{C}} = V \otimes \mathbf{C}$, то можно рассмотреть множество всех комплексных базисов

$$B(V^{\mathbf{C}}) = B(V) \underset{GL(n,\ \mathbf{R})}{\times} GL(n, \mathbf{C}).$$

Если нам задана вещественная металинейная структура $MB(V)$ на V, то можно определить комплексную металинейную структуру на $V^{\mathbf{C}}$, полагая

$$MB(V^{\mathbf{C}}) = MB(V) \underset{ML(n,\ \mathbf{R})}{\times} ML(n, \mathbf{C}).$$

Группа $ML(n, \mathbf{C})$ имеет инволютивный антиголоморфный автоморфизм, накрывающий автоморфизм группы $GL(n, \mathbf{C})$, ставящий в соответствие матрице ее комплексно сопряженную. (Именно, отображение $(z, A) \longmapsto (\bar{z}, \bar{A})$ на $\mathbf{C} \times SL(n, \mathbf{C})$ факторизуется до корректно определенного автоморфизма группы $ML(n, \mathbf{C})$.) Обозначим образ любого $B \in ML(n, \mathbf{C})$ при этом автоморфизме через $\bar{B}$. Заметим, что на $ML(n, \mathbf{R}) \subset ML(n, \mathbf{C})$ это упоминавшийся выше внешний автоморфизм. Для заданной комплексной металинейной структуры $MB(V^{\mathbf{C}})$ мы можем определить новую комплексную металинейную структуру (и новую комплексную линейную структуру), не меняя множество $MB(V^{\mathbf{C}})$, но определив новое действие с применением вначале автоморфизма $B \longmapsto \bar{B}$. (Так, если $f \in MB(V^{\mathbf{C}})$ и элемент B при старом действии переводит f в fB, то при новом действии f переходит в $f\bar{B}$.) Это сопряженная комплексная металинейная структура на $V^{\mathbf{C}}$. Если рассматривать $MB(V)$ как подмножество в $MB(V^{\mathbf{C}})$, то сопряженная металинейная структура индуцирует другую вещественную металинейную структуру на V. В этой ситуации мы будем говорить, что эти две (вещественные) металинейные структуры на V сопряжены одна другой.

Напомним, что n-форму на n-мерном векторном пространстве V можно определить как функцию ω из $B(V)$ в $\mathbf{C}$, удовлетворяющую условию

$$\omega(bA) = (\det A)\,\omega(b),$$

а плотность — как функцию $\sigma\colon B(V) \to \mathbf{C}$, удовлетворяющую условию

$$\sigma(bA) = |\det A|\,\sigma(b).$$

Для заданной металинейной структуры $MB(V)$ определим *полуформу* как такое отображение $\rho\colon MB(V) \to \mathbf{C}$, что

$$\rho(fB) = \chi(B)\,\rho(f).$$

Пусть ρ_1 и ρ_2 — полуформы; тогда, согласно (4.1),

$$\rho_1(fB)\,\rho_2(fB) = \rho_1(f)\,\rho_2(f)\,\chi^2(B) = \rho_1(f)\,\rho_2(f)\det(rB).$$

В частности, если f и f' проектируются на один и тот же элемент $B(V)$, то $f = f'C$, где $rC = I$, и приведенное выше равенство показывает, что $\rho_1(f)\,\rho_2(f) = \rho_1(f')\,\rho_2(f')$, т. е. $\rho_1\rho_2$ — корректно определенная функция $B(V) \to \mathbf{C}$; из этого же равенства следует, что $\rho_1\rho_2$ — это n-форма на V. Взяв $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, мы увидим, что полуформу можно понимать как «квадратный корень» из n-формы. Обозначим одномерное пространство полуформ на V через $\bigwedge^{1/2}V$, одномерное пространство n-форм на V через $\bigwedge^n V$, а одномерное пространство плотностей на V через $|\bigwedge|V$. Тогда имеется билинейное спаривание

$$\textstyle\bigwedge^{1/2}(V) \times \bigwedge^{1/2}(V) \to \bigwedge^n(V), \quad \rho_1 \times \rho_2 \longmapsto \rho_1\rho_2,$$

а также полуторалинейное спаривание

$$\textstyle\bigwedge^{1/2}(V) \times \bigwedge^{1/2}(V) \to |\bigwedge|(V), \quad \rho_1 \times \rho_2 \longmapsto \rho_1\overline{\rho_2}.$$

Введем также пространство $\overline{\bigwedge}^{1/2}(V)$ сопряженных полуформ τ, удовлетворяющих соотношению

$$\tau(fB) = \bar{\chi}(B)\,\tau(f)$$

(они являются полуформами относительно сопряженной металинейной структуры), и пространство «отрицательных полуформ» $\bigwedge^{-1/2}(V)$, удовлетворяющих соотношению

$$\tau(fB) = \chi^{-1}(B)\,\tau(f).$$

Предложение 4.3. *Металинейная структура на V индуцирует металинейную структуру на дуальном пространстве V^*; при этом $\bigwedge^{-1/2}(V) \sim \bigwedge^{1/2}(V^*)$.*

Доказательство. Существует естественный изоморфизм между множествами $B(V)$ и $B(V^*)$, так как каждому базису $\mathbf{b}$ в V соответствует дуальный базис $\mathbf{b}^*$ в V^*. Для каждого $A \in GL(n, \mathbf{R})$

имеем $(\mathbf{b}A)^* = \mathbf{b}^*\,({}^tA)^{-1}$, где через ${}^tA$ обозначена матрица, транспонированная к A. Таким образом, мы можем отождествить $B(V^*)$ с $B(V)$, если только определим новое действие $GL(n, \mathbf{R})$ на $B(V)$ при помощи автоморфизма $A \longmapsto {}^tA^{-1}$. Далее, ясно, что можно определить автоморфизм $ML(n, \mathbf{R})$, накрывающий этот автоморфизм $GL(n, \mathbf{R})$; полученный автоморфизм мы также будем обозначать $B \longmapsto {}^tB^{-1}$, т. е. $\chi({}^tB^{-1}) = \chi(B)^{-1}$. (Это ограничение на $ML(n, \mathbf{R})$ единственного голоморфного автоморфизма $ML(n, \mathbf{C})$, накрывающего автоморфизм $A \longmapsto {}^tA^{-1}$ группы $GL(n, \mathbf{C})$.) Теперь мы можем выбрать $MB(V^*)$ совпадающим с $MB(V)$ как множество, вместе с новым действием $ML(n, \mathbf{R})$, и ясно, что $\bigwedge^{1/2}(V^*)$ можно отождествить с $\bigwedge^{-1/2}(V)$. Конструкцию предложения 4.3 мы будем описывать, говоря, что металинейный репер f пространства V определяет металинейный репер f^* пространства V^*, причем $(fA)^* = f\,({}^tA)^{-1}$.

Предложение 4.4. *Пусть* $0 \to U \to V \to W \to 0$ — *точная последовательность векторных пространств. Тогда выбор металинейной структуры на любых двух из этих пространств определяет металинейную структуру на третьем. Если металинейные структуры выбраны согласованно, то мы говорим, что имеется точная последовательность металинейных пространств. Для заданной таким образом точной последовательности имеется естественный изоморфизм*

$$\textstyle\bigwedge^{1/2}(V) \cong \bigwedge^{1/2}(U) \otimes \bigwedge^{1/2}(W).$$

Доказательство. По предложению 4.2 выбор металинейной структуры — это то же самое, что выбор ориентации. Как хорошо известно, выбор ориентации в любых двух из трех пространств U, V, W точной последовательности определяет ориентацию в третьем. Напомним, как это доказывается. Обозначим через $B_T(V)$ множество базисов в V, у которых первые m векторов принадлежат U, где $\dim U = m$ и $\dim W = n$. Множество $B_T(V)$ инвариантно относительно действия группы $T(m, n)$ блочно-треугольных матриц вида

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \end{array}.$$

Каждый элемент $B_T(V)$ определяет базис в U (первые m элементов) и базис в W (образ последних n элементов). Два элемента $B_T(V)$ определяют один и тот же базис в U и один и тот же базис в W тогда и только тогда, когда они отличаются на действие матрицы вида

$$\begin{pmatrix} I_m & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Пусть N — группа таких матриц. Тогда имеется отождествление

$$B(U)\times B(W)=B_T(V)/N.$$

Имеется также групповой изоморфизм

$$GL(m)\times GL(n)\cong T(m,\ n)/N,$$

согласованный с указанным отождествлением. Выбор положительных реперов в U и W дает семейство реперов в V, которые отличаются друг от друга на действие матриц с положительным детерминантом, а значит, на V задается ориентация. Пусть мы начинаем с ориентации на V и U. Если ограничение заданных реперов в V на U положительно, то проекция этих реперов на W объявляется положительной; в противном случае они отрицательны. Если мы начинаем с W и V, поступим аналогично.

Предположим теперь, что задана точная последовательность металинейных векторных пространств $0\to U\to V\to W\to 0$. Группа N стягиваема, а значит, поднимается до подгруппы в $ML(m+n)$, которую мы также будем обозначать через N. Обозначим через $MT(m,\ n)$ прообраз $T(m,\ n)$ в $ML(m+n)$, а через $MB_T(V)$ прообраз $B_T(V)$ в $MB(V)$. Значит, $MT(m,\ n)$ действует на $MB(V)$. Мы можем считать $ML(m)$ подгруппой в $ML(m+n)$, являющейся прообразом в $ML(m+n)$ множества всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

и аналогично считать $ML(n)$ подгруппой $ML(m+n)$. Итак, мы имеем изоморфизм

$$ML(m)\times ML(n)\cong MT(m,\ n)/N.$$

В результате получаем отображение

$$MB(U)\times MB(W)\cong MB_T(V)/N,$$

согласованное с указанным выше действием и определяемое требованиями, чтобы оно проектировалось в отождествление $B(U)\times\times B(W)\to B_T(V)/N$ и чтобы $B_{1+}(U)\times B_{1+}(W)$ отображалось на $B_{1+}(V)$. Поскольку χ принимает на любом элементе N значение 1 (так как N стягиваема), мы видим, что в самом деле имеется отождествление

$$\wedge^{1/2}(U)\otimes\wedge^{1/2}(W)\cong\wedge^{1/2}(V).$$

Если E — вещественное векторное расслоение над некоторым многообразием X, то через $B(E)$ обозначим расслоение базисов для E. Значит, $B(E)$ — главное расслоение для группы $GL(n)$, где n — размерность слоя в E. Под металинейной структурой на E будем понимать поднятие этого $GL(n)$-расслоения до $ML(n)$-расслоения $MB(E)$. Итак, *металинейная структура на E — это глав-*

ное $ML(n)$-расслоение $MB(E)$ с проекцией на $B(E)$, такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} MB(E) & \times & ML(n) & \longrightarrow & MB(E) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B(E) & \times & GL(n) & \longrightarrow & B(E) \end{array}$$

Не всякое векторное расслоение имеет металинейную структуру — может быть топологическое препятствие к поднятию расслоения $B(E)$. (Мы коротко остановимся на этом в конце параграфа.) Ясно, что если E ориентируемо, то оно допускает металинейную структуру. Однако E может допускать металинейную структуру, даже не будучи ориентируемым. С каждым металинейным расслоением E ассоциировано расслоение полуформ $\bigwedge^{1/2}E$, и имеют место аналоги предложений 4.3, 4.4.

В частности, если M — дифференцируемое многообразие, а TM имеет металинейную структуру, то мы говорим, что M — металинейное многообразие. Обозначим пространство гладких сечений $\bigwedge^{1/2}TM$ через $\bigwedge^{1/2}M$ и будем называть такие сечения *гладкими полуформами на* M. Если ρ_1 и ρ_2 — полуформы, то $\rho_1\bar{\rho}_2$ — плотность (порядка 1) на M. Обозначим через $\bigwedge_0^{1/2}M$ пространство гладких полуформ с компактным носителем; его можно сделать предгильбертовым пространством, введя скалярное произведение

$$(\rho_1, \rho_2) = \int_M \rho_1\bar{\rho}_2.$$

Гильбертово пространство, являющееся его пополнением, обозначается через $H(M)$.

Пусть M и M' — два металинейных многообразия. Под морфизмом f из M в M' мы будем понимать морфизм соответствующих линейных расслоений $\bigwedge^{1/2}TM$ и $\bigwedge^{1/2}TM'$, т. е. отображение f: $M \to M'$ вместе с отображениями $\bigwedge^{1/2}TM'_{f(x)} \to \bigwedge^{1/2}TM_x$ для каждого $x \in M$, гладко зависящими от x. Это дает отображение f^* из $\bigwedge^{1/2}M'$ в $\bigwedge^{1/2}M$, которое мы назовем отображением *поднятия* (pull back) *на полуформах.*

Для полноты изложения мы закончим этот параграф выяснением того, когда расслоение $E \to X$ несет на себе металинейную структуру и сколько таких структур с точностью до топологической эквивалентности. (Заметим, что металинейная структура и сопряженная с ней топологически эквивалентны.)

Если V — векторное пространство, то, как мы видели выше, выбор металинейной структуры на V — это выбор действия группы $\mathbf{Z}_4 = \{1, -1, i, -i\}$ на компонентах $MB(V)$, согласованного с действием $\mathbf{Z}_2 = \{1, -1\}$ на компонентах $B(V)$. Значит, выбор металинейной структуры на $E \to X$ — это выбор $\mathbf{Z}_4$-расслоения над X, накрывающего $\mathbf{Z}_2$-расслоение $\bigwedge^k(E)/\mathbf{R}^+$, где k — размерность слоя в E. Рассмотрим короткую точную последовательность групп

$$0 \to \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{i} \mathbf{Z}_4 \xrightarrow{j} \mathbf{Z}_2 \to 0,$$

где i — отображение вложения, а j — умножение на 2. Она индуцирует длинную точную последовательность в когомологиях:

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{i_*} H^1(X, \mathbf{Z}_4) \xrightarrow{j_*} H^1(X, \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathbf{Z}_2) \to \dots .$$

Гомоморфизм j_* имеет хорошую геометрическую интерпретацию $\mathbf{Z}_n$-расслоения классифицируются с точностью до эквивалентности при помощи их классов Штифеля — Уитни, лежащих в $H^1(X, \mathbf{Z}_n)$. Отображение j_*: $H^1(X, \mathbf{Z}_4) \to H^1(X, \mathbf{Z}_2)$ отвечает описанному выше накрытию ($\mathbf{Z}_2$-расслоений $\mathbf{Z}_4$-расслоениями). Поэтому если $w = w_2(E)$ — класс Штифеля — Уитни расслоения $\bigwedge^k(E)/\mathbf{R}^+$, то необходимое и достаточное условие того, что E допускает металинейную структуру, состоит в том, что w лежит в образе j_*, или, что эквивалентно, в ядре δ. Однако δ — это гомоморфизм Бокштейна. В размерности 1 он совпадает с гомоморфизмом $a \longmapsto a^2$. (См. Э. Спеньер. Алгебраическая топология. Пер. с англ. — М.: Мир, 1971, § 9 гл. 5, а также упр. G5 на стр. 363.) Поэтому E *допускает металинейную структуру тогда и только тогда, когда квадрат ее первого класса Штифеля — Уитни равен нулю.* В предположении, что E допускает металинейную структуру, множество всех таких структур с точностью до топологической эквивалентности описывается множеством всех таких элементов $a \in H^1(X, \mathbf{Z}_4)$, что $j_* a = w$. Если один такой элемент a задан, то все остальные имеют вид $a + i_* b$, где $b \in H^1(X, \mathbf{Z}_2)$. Поскольку отображение i_* инъективно, отсюда следует, что *множество всех металинейных структур имеет ту же мощность, что и* $H^1(X, \mathbf{Z}_2)$. В частности, *если* $H^1(X, \mathbf{Z}_2) = 0$, *то* X *допускает единственную металинейную структуру.* Для окружности автоматически $w_1^2 = 0$, поскольку $H^2(S^1, \mathbf{Z}_2) = 0$. Кроме того, $H^1(S^1, \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2$, т. е. *окружность допускает в точности две неэквивалентные металинейные структуры.* Этот результат найдет применения в § 8 этой главы и в § 3 гл. VII.

§ 5. *Метаплектические многообразия*

Корректная формулировка спаривания, описанного в § 3, требует выбора металинейной структуры на каждом лагранжевом подпространстве в $T(X)$, где X — симплектическое многообразие. Чтобы сделать это согласованным образом, введем на X дополнительную структуру. Для этого потребуем, чтобы расслоение симплектических реперов на X могло быть заменено двулистной накрывающей, как это делалось при определении металинейной структуры. Здесь симплектический репер $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ таков, что $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$ и $\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$. Прежде чем вести речь о двулистном накрытии расслоения симплектических реперов, мы должны вернуться назад и поговорить о двулистной накрывающей симплектической группы. Для этого нам потребуются некоторые факты о самой симплектической группе.

Пусть $Sp(n, \mathbf{R})$ — вещественная симплектическая группа, действующая на $\mathbf{R}^{2n}$. Ее элементы — это матрицы $T \in GL(2n, \mathbf{R})$, имеющие блочное представление

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix},$$

где $T_4^* T_1 - T_2^* T_2 = I$ и $T_3^* T_1$ *и* $T_4^* T_2$ — *симметрические матрицы*. Матрицы вида

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}, \quad A^*A + B^*B = I,$$

образуют компактную подгруппу, которая, очевидно, изоморфна $U(n)$ при изоморфизме, переводящем указанную выше матрицу в матрицу $A + iB$. Мы уже знаем, что это максимальная компактная подгруппа и что $Sp(n)$ диффеоморфна пространству $V \times U(n)$, где V топологически является клеткой. (Это следствие полярного разложения, о котором мы много будем говорить дальше в этом параграфе.) В частности, как мы уже видели, фундаментальная группа $Sp(n)$ — это $\mathbf{Z}$, т. е. $Sp(n)$ имеет единственную двулистную накрывающую, которую мы обозначим через $Mp(n)$ и будем называть, следуя А. Вейлю [12], *метаплектической группой*. Заметим, что $GL(n, \mathbf{R})$ естественным образом вкладывается в $Sp(n, \mathbf{R})$ при помощи отображения, переводящего матрицу $A \in GL(n, \mathbf{R})$ в

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{bmatrix},$$

лежащую в $Sp(n, \mathbf{R})$. Геометрически это подгруппа, оставляющая инвариантной пару лагранжевых подпространств, порожденных первыми n и последними n векторами. Пусть G — прообраз этой подгруппы в $Mp(n, \mathbf{R})$. Соображения, аналогичные использованным в начале § 4, показывают, что G_0 изоморфна $GL(n, \mathbf{R})_0$. Мы утверждаем, что на самом деле G — это $ML(n, \mathbf{R})$, т. е. мы утверждаем, что существует единственный изоморфизм $ML(n, \mathbf{R})$ в $Mp(n, \mathbf{R})$, при котором коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} ML(n,\mathbf{R}) \arrow[r] \arrow[d] & Mp(n,\mathbf{R}) \arrow[d] \\ GL(n,\mathbf{R}) \arrow[r] & Sp(n,\mathbf{R}) \end{tikzcd}$$

Действительно, накрытие $ML(n, \mathbf{R}) \to GL(n, \mathbf{R})$ вполне определяется соответствующим накрытием ортогональной группы. Для ортогональных матриц A отображение

$$A \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \mapsto A + i0$$

совпадает со стандартным вложением $O(n)$ в $U(n)$. Накрытия $U(n)$ в $Mp(n)$ и $ML(n, \mathbf{C})$ совпадают, и накрытие $O(n)$, по определению, индуцируется из $ML(n, \mathbf{C})$. Теперь мы будем рассматривать $ML(n, \mathbf{C})$ как подгруппу в $Mp(n)$ относительно этого отождествления.

Пусть, далее, X — симплектическое многообразие и $Bp(X)$ — расслоение симплектических реперов в TX. Значит, $Bp(X)$ — (правое) главное $Sp(n)$-расслоение. Поднятие $Bp(X)$ до (правого) главного $Mp(n)$-расслоения называется *метаплектической структурой* на X, а соответствующее расслоение обозначается через $Mp(X)$ и называется расслоением метаплектических реперов. Разумеется, такого поднятия может не существовать. Имеются некоторые простые топологические условия, гарантирующие существование такой структуры. Кроме того, симплектическое многообразие может допускать несколько метаплектических структур. Мы обсудим этот вопрос в конце параграфа. Мы утверждаем, что выбор метаплектической структуры на X приводит к металинейной структуре на каждом лагранжевом подпространстве $E_x \subset TX_x$ для всех $x \in X$. Точнее, пусть $L(X)$ — это расслоение всех лагранжевых подпространств в $T(X)$ и E — тавтологичное векторное расслоение, относящее каждому $l \in L$ определяемое им подпространство в $T(X)$. Эту ситуацию описывает диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & L \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ TX & \longrightarrow & X \end{array}$$

Пусть $B(E)$ — расслоение базисов в E; это (правое) $GL(n, \mathbf{R})$-расслоение. Каждый базис в E_x продолжается до симплектического базиса в TX_x. Обратно, каждый симплектический базис $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ определяет лагранжево подпространство, а именно подпространство, порождаемое $e_1, \ldots, e_n$, и базис $e_1, \ldots, e_n$ в этом пространстве. Следовательно, отображение $\lambda\colon Bp(X) \to B(E)$ вида

$$\lambda(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)$$

— это сюръективное гладкое отображение расслоений. Кроме того, ясно, что два репера в $\lambda^{-1}(e_1, \ldots, e_n)$ отличаются на действие матрицы вида

$$\begin{bmatrix} I & S \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

где S — симметрическая матрица. Другими словами, если обозначить через N группу всех таких матриц, то $Bp(X) \xrightarrow{\lambda} B(E)$ — главное N-расслоение. Отметим также, что $GL(n, \mathbf{R}) \subset Sp(n, \mathbf{R})$ нормализует N, т, е.

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & S \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & ASA^* \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Итак, если рассмотреть действие $GL(n, \mathbf{R})$ на $Bp(X)$ и на E, то мы видим, что отображение λ эквивариантно относительно действия $GL(n, \mathbf{R})$. Это, конечно, очевидное следствие из явного выражения действия. Далее, ясно, что группа N односвязна, а значит, изоморфно поднимается до подгруппы в $Mp(n)$, которую мы также будем обозначать через N (ср. предложение 2.5 из гл. IV). Рассмотрим теперь расслоение $Mp(X)/N$. Итак, мы имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Mp(X) & \xrightarrow{\hat{\lambda}} & Mp(X)/N = MB(E) \\ \downarrow{\scriptstyle s} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ Bp(X) & \xrightarrow{\lambda} & B(E) \end{array} \tag{5.1}$$

Поскольку $Mp(X)$ — двулистное накрытие $Bp(X)$, согласованное с действием $Mp(n)$, и поскольку $ML(n, \mathbf{R})$ нормализует N в $Mp(n)$, мы получаем, что r осуществляет двулистное накрытие $B(E)$, снабжая E металинейной структурой.

В частности, если $Y \hookrightarrow X$ — подмногообразие и E_1 — расслоение лагранжевых подпространств над Y, то E_1 снабжается металинейной структурой. Если E_1 и E_2 — два трансверсальных расслоения лагранжевых подпространств, то каждое снабжается металинейной структурой. Далее, *симплектическая* структура на X позволяет отождествить *линейную* структуру на E_1 с дуальной линейной структурой на E_2 — пространства E_{1x} и E_{2x} невырожденно спариваются относительно ω. Мы покажем, что *метаплектическая* структура на X определяет изоморфизм между металинейной структурой на E_1 и комплексно сопряженной дуальной металинейной структурой на E_2. В частности, мы покажем, что имеется естественное полуторалинейное спаривание между $\wedge^{1/2}(E_1)$ и $\wedge^{1/2}(E_2)$, индуцированное метаплектической структурой на X.

Чтобы мотивировать наше построение, переделаем линейное спаривание между E_1 и E_2, пользуясь в большей степени групповым языком. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в E_{1x}. Тогда существует единственный базис $(f_1, \ldots, f_n)$ в E_{2x}, такой, что $\mathbf{u} = (e_1, \ldots \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ — симплектический базис в TX_x. Обозначим через J матрицу

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $J \in Sp(n)$ и

$$\mathbf{u}J = (f_1, \ldots, f_n, -e_1, \ldots, -e_n),$$

так что

$$\lambda(\mathbf{u}) = (e_1, \ldots, e_n), \quad \lambda(\mathbf{u}J) = (f_1, \ldots, f_n),$$

где λ — введенная выше проекция. При отождествлении E_1 с E_2^* базис $(e_1, \ldots, e_n)$ отождествляется с дуальным базисом к $(f_1, \ldots, f_n)$. Проведем аналогичное построение для расслоения метаплектических реперов. Вначале мы должны найти аналог J. Для этого заметим, что элемент $J \in Sp(n)$ обладает тем характеристическим свойством, что он принадлежит также алгебре Ли $sp(n)$ и удовлетворяет условию

$$J = \exp \frac{\pi}{2} J,$$

где $\exp\colon sp(n) \to Sp(n)$ — экспоненциальное отображение. Пусть, далее, $\operatorname{Exp}\colon sp(n) \to Mp(n)$ — экспоненциальное отображение в метаплектическую группу; положим

$$\hat{J} = \operatorname{Exp} \frac{\pi}{2} J,$$

т. е. $\hat{J}$ — один из двух элементов в $Mp(n)$, проектирующихся в J. Пусть задан элемент $\hat{e} \in MB(E_1)_x$. Мы утверждаем, что *существует единственный элемент* $\hat{\mathbf{u}} \in Mp(X)_x$, *такой, что*

$$\hat{\lambda}(\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{e}, \quad \hat{\lambda}(\hat{\mathbf{u}}J) = \mathfrak{f} \in MB(E_2)_x.$$

Элементы $\hat{\mathbf{e}}$ определяют репер $\mathbf{e} = r\hat{\mathbf{e}} \in B(E_1)$, где отображение r и другие отображения фигурируют в диаграмме (5.1). Мы знаем, что существует единственный элемент $\mathbf{w} \in Bp(X)$, для которого

$$\lambda(\mathbf{w}) = r\mathbf{e}, \quad \lambda(\mathbf{w}J) \in Bp(E_2)_x.$$

Далее, выберем $\hat{\mathbf{w}} \in Mp(X)$ с $s\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}$, $\hat{\lambda}\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{e}}$. Это однозначно определяет $\hat{\mathbf{w}}$, а значит, мы получаем $\hat{f} = \hat{\lambda}(\hat{\mathbf{w}}\hat{J})$. Заметим, что если брать в качестве $\hat{\mathbf{e}}$ различные металинейные базисы в E_1, то $\mathbf{w}$ будет определяться с точностью до элемента из $GL(n, \mathbf{R})$, а $\hat{\mathbf{w}}$ — с точностью до элемента из $ML(n, \mathbf{R})$.

Введем теперь спаривание между полуформами на E_{1x} и полуформами на E_{2x}. Пусть $\sigma_1 \in \bigwedge^{1/2} E_{1x}$ и $\sigma_2 \in \bigwedge^{1/2} E_{2x}$. Мы хотим определить число $\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$, зависящее линейно от σ_1 и антилинейно от σ_2. С этой целью выберем, как и выше, метаплектический репер $\hat{\mathbf{w}}$, так что $\hat{\mathbf{e}}=\hat{\lambda}(\hat{\mathbf{w}})$ — металинейный базис в E_{1x} и $\hat{\mathbf{f}}=\hat{\lambda}(\hat{\mathbf{w}}\hat{J})$ — металинейный базис в E_{2x}. Тогда

$$\sigma_1(\hat{\mathbf{e}})=a_1, \quad \sigma_2(\hat{\mathbf{f}})=a_2, \quad \text{где} \quad a_1,\ a_2\in\mathbf{C}.$$

Положим

$$\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle=(2\pi)^{-n/2}e^{-i\pi n/4}a_1\bar{a}_2. \tag{5.2}$$

Здесь $(2\pi)^{-n/2}e^{-i\pi n/4}$ — нормирующий множитель, введенный для погашения членов, возникающих при применении метода стационарной фазы. Мы должны показать, что правая часть (5.2) не зависит от выбора $\hat{\mathbf{w}}$. Предположим, что мы выбрали какой-то другой элемент, скажем $\hat{\mathbf{v}}$. Тогда $\hat{\mathbf{v}}=\hat{\mathbf{w}}\hat{g}$ для некоторого $\hat{g}\in ML(n, \mathbf{R})\subset Mp(n)$. Это приводит к замене $\hat{\mathbf{e}}$ на $\hat{\mathbf{e}}\hat{g}$ и $\hat{\mathbf{f}}$ на

$$\hat{\lambda}(\hat{\mathbf{w}}\hat{g}\hat{J})=\hat{\lambda}(\hat{\mathbf{w}}\hat{J}\hat{J}^{-1}\hat{g}J)=\hat{\mathbf{f}}(\hat{J}^{-1}\hat{g}\hat{J}).$$

Это означает, что a_1 заменяется на $\chi(\hat{g})a_1$ и a_2 заменяется на $\chi(\hat{J}^{-1}\hat{g}\hat{J})a_2$. Мы должны показать, что

$$\chi(\hat{g})\bar{\chi}(\hat{J}^{-1}\hat{g}\hat{J})=1. \tag{5.3}$$

При доказательстве (5.3) мы воспользуемся так называемым «полярным разложением» $Mp(n)$. Мы покажем, что каждый элемент $Mp(n)$ можно представить в виде $\hat{g}=(\exp p)\,\hat{u}$, где p — симметрический элемент из $sp(n)$, а $\hat{u}\in MO(n)$. Мы также увидим, что

$$\hat{J}^{-1}(\operatorname{Exp} p)\,\hat{J}=\operatorname{Exp}(-p),$$

$$\hat{J}^{-1}\hat{u}\hat{J}=\hat{u}.$$

Наконец, так как $\operatorname{Exp} p\in ML(n)_0$, мы получаем, что $\chi(\operatorname{Exp} p)>0$ вещественно, а $|\chi(u)|=1$, поскольку $u\in MO(n)$. Итак,

$$\chi(\hat{J}^{-1}\hat{g}\hat{J})=\chi(\operatorname{Exp}-p)\,\chi(u)=\bar{\chi}^{-1}(\operatorname{Exp}\ p)\bar{\chi}^{-1}(u)=\bar{\chi}(\hat{g})^{-1}.$$

Для того чтобы завершить этот анализ $Mp(n)$ и характера χ, воспользуемся понятием полярного разложения. Мы подробно обсуждаем эти вопросы для удобства читателя, несмотря на их стандартность (см., например, [14]). Осведомленный читатель может перейти непосредственно к концу обсуждения. Напомним, что для группы $GL(n, \mathbf{R})$ каждая невырожденная матрица T может быть представлена в виде $T=PO$, где P — положительно определенная матрица, а O — ортогональная. (Набросок доказательства: поскольку матрица TT^* положительно определена, для нее существует положительно определенный квадратный корень P. Напишем $T=PP^{-1}T$ и заметим, что $(P^{-1}T)(P^{-1}T)^*=P^{-1}TT^*P^{-1}=$

$=P^{-1}P^2P^{-1}=I$, т. е. матрица $O=P^{-1}T$ ортогональна.) На инфинитезимальном уровне аналогичное разложение еще проще. Алгебра Ли ортогональной группы состоит из кососимметрических матриц, в то время как каждая положительно определенная матрица P равна e^S, где S-симметрическая. Далее, каждую матрицу B можно представить в виде $B=A+S$, где S — симметрическая, а A — кососимметрическая матрицы. Конечно, это разложение не инвариантно относительно $GL(n)$. Оказывается, аналогичное полярное разложение можно построить для произвольной связной вещественной полупростой группы Ли, при условии что в ее алгебре Ли задано соответствующее инфинитезимальное разложение, известное как *картановское разложение*.

Пусть g — вещественная полупростая алгебра Ли, и пусть $g=k+p$ — разложение g в прямую сумму векторных пространств, удовлетворяющее условиям

$$[k,\ k]\subset k \quad (\text{т. е. } k - \text{подалгебра}), \quad [k,\ p]\subset p, \quad [p,\ p]\subset k.$$

(Заметим, что при $g=gl(n)$ можно в качестве k взять множество кососимметрических матриц, а в качестве p — множество симметрических. Это даст нужное разложение.) Определим θ: $g\to g$, полагая

$$\theta(\xi+\eta)=\xi-\eta \quad \text{при} \quad \xi\in k,\ \eta\in p.$$

Тогда θ — автоморфизм алгебры g, т. е.

$$[\theta\zeta_1,\ \theta\zeta_2]=\theta[\zeta_1,\ \zeta_2] \quad \text{и} \quad \theta^2=\mathrm{id}.$$

Обратно, при заданном инволютивном автоморфизме θ каждый элемент $\zeta\in g$ можно представить в виде $\zeta=\xi+\eta$, где $\zeta={}^1/_2(\zeta+\theta\zeta)$ и $\eta={}^1/_2(\zeta-\theta\zeta)$, а значит, $\theta\xi=\xi$ и $\theta\eta=-\eta$. Положив

$$k=\{\xi\mid\ \theta\xi=\xi\}, \qquad p=\{\eta\mid\ \theta\eta=-\eta\},$$

мы получим требуемое разложение g. Обозначим через B форму Киллинга на g. Тогда можно ввести билинейную форму (,), полагая

$$(\zeta_1,\ \zeta_2)=-B(\zeta_1,\ \theta\zeta_2).$$

Будем говорить, что θ — *картановская инволюция*, а $g=k+p$ — *картановское разложение*, если форма B положительно определена. Утверждение, что $g=k+p$ — картановское разложение, означает, что B отрицательно определена на k и положительно определена на p. Например, в случае $sl(n,\ \mathbf{R})$ форма Киллинга (с точностью до постоянного множителя) имеет вид

$$B(Z,\ W)=\operatorname{tr} ZW,$$

где Z и W считаются $(n\times n)$-матрицами. Заметим, что если W — кососимметрическая матрица, то

$$(Z,\ W)=-\operatorname{tr} ZW=\operatorname{tr} ZW^*,$$

а если W симметрическая, то

$$(Z,\ W) = \operatorname{tr} ZW = \operatorname{tr} ZW^*,$$

т. е. во всех случаях форма $(Z, W) = \operatorname{tr} ZW^*$ положительно определена.

Вычислим теперь форму Киллинга для $sp(n)$ через скобку Пуассона. При этом элементы $sp(n)$ можно рассматривать как квадратичные функции от p и q, действующие на линейные функции при помощи скобки Пуассона. Опять-таки с точностью до скаляра

$$B(f,\ g) = \operatorname{tr}\{f,\ \{g,\ \cdot\}\} = \sum \frac{\partial}{\partial p_i}\{f,\ \{g,\ p_i\}\} + \sum \frac{\partial}{\partial q_i}\{f,\ \{g,\ q_i\}\} =$$
$$= \sum \frac{\partial^2 f}{\partial p_i\,\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\,\partial q_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_i\,\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\,\partial q_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial q_i\,\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\,\partial p_i} +$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial q_i\,\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\,\partial p_i}.$$

Заметим, что B отрицательно определена на множестве всех f вида

$$f(p,\ q) = \sum_{i \leqslant j} A_{ij}(p_i p_j + q_i q_j) + \sum_{i<j} B_{ij}(p_i q_j - p_j q_i),$$

которое соответствует в точности подалгебре Ли всех кососимметрических матриц в $sp(n)$. Значит, $\theta T = -T^*$ — картановская инволюция на $sp(n)$. Заметим, что θ оставляет $gl(n) \subset sp(n)$ инвариантной, где $gl(n)$ рассматривается как подалгебра вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}.$$

Заметим также, что если матрица $T \in sp(n)$ симметрическая, то

$$0 = TJ + JT^* = TJ + JT,$$

так что $J^{-1}TJ = -T$; если же матрица T кососимметрическая, то $J^{-1}TJ = T$. Значит, автоморфизм θ можно задавать как сопряжение при помощи J.

Пусть G — произвольная группа, имеющая $sp(n)$ своей алгеброй Ли, например $G = Mp(n)$. Тогда

$$\operatorname{Ad}\left(\exp \frac{\pi}{2} J\right) = \exp \frac{\pi}{2} \operatorname{ad} J,$$

и потому

$$\theta = \operatorname{Ad} \hat{J}, \quad \text{где} \quad \hat{J} = \exp \frac{\pi}{2} J.$$

Теперь мы сформулируем и докажем основные факты, касающиеся полярного разложения. Следующий известный результат принадлежит Э. Картану (см., например, [14]; мы следуем здесь этому изложению). *Пусть G — вещественная связная полупростая группа*

Ли с алгеброй Ли g. Пусть θ — картановская инволюция в g с картановским разложением $g=k+p$. Пусть K — подгруппа Ли в G, имеющая k алгеброй Ли. Тогда:

(i) *K замкнута и связна;*

(ii) *K является множеством неподвижных точек для инволютивного автоморфизма Θ группы G, где $d\Theta_e=\theta$;*

(iii) *центр $Z(G)$ группы G содержится в K и группа $K/Z(G)$ компактна;*

(iv) *K совпадает со своим нормализатором; централизатор K в G сводится к $Z(K)$;*

(v) *отображение $p\times K\to G$ вида $(Z, k)\longmapsto(\exp Z)\cdot k$ является сюръективным диффеоморфизмом.*

Рассмотрим скалярное произведение $(\ ,\ )$ в g. Пусть A — произвольный элемент $\operatorname{Aut}(g)_0$ (т. е. $A=\operatorname{Ad}a$ для некоторого $a\in G$). Наш первый шаг состоит в том, чтобы показать, что для полярного разложения $A=PO$ относительно $(\ ,\ )$ элементы P и O лежат в $\operatorname{Aut}(g)_0$. Для этого мы вначале покажем, что $A^*\in(\operatorname{Aut}g)_0$.

При $A\in(\operatorname{Aut}g)_0$ и $Z_1,\ Z_2\in g$ имеем

$$\begin{aligned}(Z_1,\ AZ_2)&=-B(Z_1,\ \theta AZ_2)=-B(\theta Z_1,\ AZ_2)=-B(A^{-1}\theta Z_1,\ Z_2)=\\&=-B(\theta A^{-1}\theta Z_1,\ \theta Z_2)=(\theta A^{-1}\theta Z_1,\ Z_2),\end{aligned}$$

т. е.

$$A^*=\theta A^{-1}\theta\in(\operatorname{Aut}g)_0.$$

В частности, $AA^*\in(\operatorname{Aut}g)_0$. Теперь мы хотим показать, что $(AA^*)^{1/2}\in(\operatorname{Aut}g)_0$. Пусть $X_1,\ \ldots,\ X_n$ — базис в g, состоящий из собственных векторов для AA^* с собственными значениями λ_i. Тогда $[X_i,\ X_j]=\sum C_{ij}^k X_k$ и

$$[(AA^*)X_i,\ (AA^*)X_j]=\sum C_{ij}^k(AA^*)X_k,\quad \text{или}\quad C_{ij}^k\lambda_i\lambda_j=C_{ij}^k\lambda_k.$$

Отсюда следует, что $C_{ij}^k\lambda_i^t\lambda_j^t=C_{ij}^k\lambda_k^t$ для любого вещественного числа t. Подстановка $t=1/2$ показывает, что $P=(AA^*)^{1/2}\in\in(\operatorname{Aut}g)_0$ и, значит, $O\in(\operatorname{Aut}g)_0$. Заметим, что для $W\in k$ (или p)

$$\begin{aligned}([W,\ Y],\ Z)&=-B([W,\ Y],\ \theta Z)=B(Y,\ [W,\ \theta Z])=\\&=B(Y,\ \theta[\theta W,\ Z])=\pm B(Y,\ \theta[W,\ Z])=\\&=\mp(Y,\ \theta[W,\ Z]),\end{aligned}$$

т. е. элементы k — это кососимметрические, а элементы p — симметрические элементы g относительно $(\ ,\ )$. Из сказанного выше следует, что если $P=e^Y$ — положительно определенный элемент $(\operatorname{Aut}g)_0$ для симметрического элемента Y, то $e^{tY}\in\operatorname{Aut}g$ для всех t, т. е. $Y\in p$. Значит, $(\operatorname{Aut}g)_0\cap$ (множество положительно определенных элементов) $=\{\exp\operatorname{ad}p\}$. Пусть $\operatorname{Ad}\colon G\to\operatorname{Aut}g$ — присоединенный гомоморфизм, т. е. $\operatorname{Ad}G=(\operatorname{Aut}g)_0$. Пусть, далее, $\bar{K}=$

$=\operatorname{Ad} G \cap \mathscr{O}$, где $\mathscr{O}$ — ортогональная группа относительно $(\ ,\ )$. Как мы только что показали,

$$\operatorname{Ad} G = \bar{K} \times \exp p.$$

Пусть $K' = \operatorname{Ad}^{-1} K$. Тогда многообразие $G/K' = \operatorname{Ad} G/\bar{K} \sim \exp p$ односвязно. Поскольку G связна, отсюда следует, что K' и $\bar{K}$ связны, так как любой путь, соединяющий две точки K' в G, можно продеформировать в путь, лежащий в K'. Пусть, далее, $K \subset G$ — подгруппа с алгеброй Ли k. Тогда $\operatorname{Ad} K$ оставляет k инвариантной и сохраняет B, а значит, сохраняет разложение. Итак, $\operatorname{Ad} K \subset \bar{K}$, т. е. $K \subset K'$. С другой стороны, K' связна и имеет ту же алгебру Ли, что и K. Значит, $K' = K$. Кроме того, $Z(G) \subset \operatorname{Ad}^{-1}(e)$, так что $Z(G) \subset K$ и $K/Z(G)$ компактна. Тем самым (i) и (ii) доказаны.

Пусть $\hat{G}$ — универсальная накрывающая группы G и $N \subset Z(\hat{G})$ — ядро накрывающего отображения. Можно найти инволютивный автоморфизм Θ группы $\hat{G}$, продолжающий θ и такой, что $\operatorname{Ad}(\Theta\tilde{a}) = (\operatorname{Ad}\tilde{a})^{*-1}$. Поскольку $N \subset Z(G) \subset K(\operatorname{Ad})^{-1} aK$, мы видим, что Θ тождествен на N, а значит, индуцирует инволюцию Θ группы G, продолжающую θ. Это доказывает (iii).

Для любого $a \in G$ элемент $(\operatorname{Ad} a)(\operatorname{Ad} a)^* = \operatorname{Ad}(a(\Theta a)^{-1})$ положительно определен. Значит,

$$\operatorname{Ad}(a(\Theta a)^{-1}) = \exp 2Y, \quad Y \in p.$$

Пусть $O = (\exp -Y)\, a$. Тогда

$$(\operatorname{Ad} O)(\operatorname{Ad} O)^* = (\exp -Y) \operatorname{Ad} a (\operatorname{Ad} a)^* \exp -Y = \mathrm{id},$$

т. е. $\operatorname{Ad} O \in \bar{K}$ и, значит, $O \in K$. Итак,

$$a = (\exp Y)(\exp -Y)\, a = PO,$$

что дает нужное полярное разложение и доказывает (v).

Далее, если $a = PO$ и $aKa^{-1} = K$, то $PKP^{-1} = K$. Записывая $P = \exp Y$, мы видим, что $\exp Y$ оставляет k, а значит, и P инвариантными. Поскольку $\exp \operatorname{ad} Y$ действует как положительно определенное преобразование, его можно диагонализировать. Поэтому $\exp tY$ также оставляет k и p инвариантными. Таким образом, $[Y, k] \subset k$ и $[Y, k] \subset p$, т. е. $[Y, k] = 0$. Но для всех $W \in p$ имеем

$$B([Y, W], [Y, W]) = -B([Y, [Y, W]], W) = 0,$$

поскольку $[Y, W] \subset p$. Поэтому $[Y, W] = 0$, а значит, $Y = 0$. Итак, $N(K) = K$. Если $POR = RPO$, то

$$ORO^{-1} = P^{-1}RP.$$

Если это имеет место для всех $R \in K$, то P нормализует K и, значит, $P = e$, а $O \in Z(k)$. Доказательство закончено.

В случае $Mp(n)$, как мы убедились, Θ имеет вид $\Theta a = \hat{J}^{-1} a \hat{J}$. Для любого $A \in ML(n) \subset Mp(n)$ можно написать $A = PO$, где $P = \exp Y$, $Y \in gl(n)$ — симметрический элемент и $O \in K \cap ML(n)$. Таким образом,

$$\hat{J}^{-1} A \hat{J} = (\exp - Y)\, O.$$

Далее, $|\chi(O)| = 1$ и $\chi(\exp Y)$ вещественно. Поэтому

$$\overline{\chi(O)}^{-1} = \chi(O), \quad \overline{\chi(\exp Y)}^{-1} = \chi(\exp - Y).$$

Значит,

$$\chi(\hat{J}^{-1} A \hat{J}) = \overline{\chi(A)}^{-1}.$$

Отсюда следует, что спаривание $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$, задаваемое (5.2), корректно определено.

Мы утверждаем также, что

$$\langle \sigma_2, \sigma_1 \rangle = \overline{\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle}. \tag{5.4}$$

Чтобы показать это, вначале заметим, что $\chi(J^2) = e^{in\pi/2}$. Действительно, $\operatorname{Exp} tJ$ лежит в $MU(n)$, а χ фактически является функцией на $MU(n)$, причем

$$\chi^2(\operatorname{Exp} tJ) = \det(\operatorname{Exp} tJ) = \det(e^{it} I) = e^{int},$$

$$\text{т. е. } \chi(\hat{J}^2) = \chi^2(J) = e^{in\pi/2}.$$

Мы пользуемся репером $\hat{\mathbf{w}}$, т. е. $\hat{\lambda}\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{e}}$ и $\hat{\lambda}(\hat{\mathbf{w}}J) = \hat{\mathbf{f}}$, как выше, с $\sigma_1(\hat{\mathbf{e}}) = a_1$ и $\sigma_2(\hat{\mathbf{e}}) = a_2$, т. е. $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = (2\pi)^{-n/2} \; e^{in\pi/4} a_1 \bar{a}_2$. Тогда имеем

$$\hat{\lambda}(\hat{\mathbf{w}}\hat{J}) = \mathbf{f}, \quad \hat{\lambda}(\hat{\mathbf{w}}\hat{J}^2) = \hat{\mathbf{e}}\hat{J}^2.$$

Далее, $\sigma_1(\mathbf{e}\,\hat{J}^2) = e^{in\pi/2} \sigma_1 \mathbf{e}$, т. е.

$$\langle \sigma_2, \sigma_1 \rangle = (2\pi)^{-n/2} e^{in\pi/4} a_2 \overline{e^{in\pi/2} a_1} = (2\pi)^{-n/2} e^{-in\pi/4} a_2 \bar{a}_1 = \overline{\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle},$$

что и требовалось доказать.

Разумеется, мы определили также полуторалинейное спаривание между $\overline{\bigwedge}^{1/2}(E_{1x})$ и $\overline{\bigwedge}^{1/2}(E_{2x})$, между $\bigwedge^{-1/2}(E_{1x})$ и $\bigwedge^{-1/2}(E_{2x})$, между $\overline{\bigwedge}^{-1/2}(E_{1x})$ и $\overline{\bigwedge}^{-1/2}(E_{2x})$, удовлетворяющее (5.3), если E_{1x} и E_{2x} — трансверсальные лагранжевы подпространства в TX_x.

Вернемся к вопросу описания возможных метаплектических структур на симплектическом многообразии. Будем считать две метаплектические структуры $Mp(X)_1$ и $Mp(X)_2$ эквивалентными, если существует такое отображение φ: $Mp(X)_1 \to Mp(X)_2$, являющееся морфизмом $Mp(n)$-расслоений над X, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Mp(X)_1 & \xrightarrow{\varphi} & Mp(X)_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Bp(X) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & Bp(X) \end{array}$$

т. е. φ — морфизм $\mathbf{Z}_2$-расслоений над $Bp(X)$, где $\mathbf{Z}_2$ рассматривается как ядро гомоморфизма $Mp(n) \to Sp(n)$. Любое главное G-расслоение мы можем описать функциями перехода $c_{ij}\colon U_i \cap \cap U_j \to G$, где $\{U_i\}$ — покрытие X и расслоение имеет сечения над U_i. Тогда c_{ij} образуют чеховский коцикл со значениями в G, и соответствующий класс когомологий определяет расслоение. Предположим, что $\{c_{ij}\}$ — коцикл, отвечающий метаплектической структуре $MB(X)$, и $\{z_{ij}\}$ — коцикл со значениями в $\mathbf{Z}_2$. Тогда $\{c_{ij}z_{ij}\}$ — снова коцикл со значениями в $Mp(n)$, и непосредственно проверяется, что при этом определяется действие $H^1(X, \mathbf{Z}_2)$ на классе метаплектических структур на X, т. е. мы получаем следующий результат, принадлежащий Костанту:

Если симплектическое многообразие X допускает метаплектическую структуру, то множество классов эквивалентности метаплектических структур — это главное однородное пространство для $H^1(X, \mathbf{Z}_2)$. В частности, если $H^1(X, \mathbf{Z}^2) = 0$, то все метаплектические структуры на X эквивалентны.

Имеется простой критерий, также принадлежащий Костанту [5, предложение 3.3.1], для решения вопроса о том, допускает ли симплектическое многообразие метаплектическую структуру. Коротко опишем его. Поскольку $U(n)$ — максимальная компактная подгруппа в $Sp(n)$, можно свести группу $Sp(n)$ к $U(n)$, т. е. можно найти сечения, для которых функции перехода γ_{ij} принимают значения в $U(n)$. Характер $\det\colon U(n) \to \mathbf{C}$ задает тогда линейное расслоение $\mathscr{L}'$, и это линейное расслоение отвечает некоторому элементу $c' \in H^2(X, \mathbf{Z})$. Для существования метаплектической структуры необходимо, чтобы существовало $MU(n)$-расслоение, позволяющее построить расслоение, ассоциированное с χ, где $\chi^2 = \det \circ r$. Как легко видеть, это эквивалентно существованию такого линейного расслоения $\mathscr{L}$, что $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}$. А это в свою очередь эквивалентно условию $c' = 2c$ для некоторого $c \in H^2(X, \mathbf{Z})$, т. е. что c' делится на два в $H^2(X, \mathbf{Z})$.

§ 6. Спаривание полуформ

Пусть $\mathscr{M}$ — расслаивающая поляризация метаплектического многообразия X. Предположим, что симплектическая структура на X происходит из эрмитова линейного расслоения со связностью. Пусть ρ: $X \to Y$ — расслаивающее отображение для поляризации $\mathscr{M}$. Для каждого $x \in X$ подпространство $\mathscr{M}_x$ — это аннуляторное подпространство для $\rho^* T^* Y_{\rho(x)}$. Поскольку $\mathscr{M}_x$ лагранжево, оно является также аннуляторным подпространством своего образа при изоморфизме между TX и T^*X, задаваемом формой ω. Это дает изоморфизм между $B(\mathscr{M}_x)$ и $B(T^*Y_y)$, где $y = \rho(x)$. Кроме того, $\mathscr{M}_x$ имеет металинейную структуру, происходящую из метаплектической структуры на X. Поэтому мы можем получить металинейную структуру на T^*Y_y при помощи накрытия расслоения реперов $B(T^*Y_y)$ расслоением $MB(\mathscr{M}_x)$, пользуясь изоморфизмом между $\mathscr{M}_x$ и T^*Y_y. Мы утверждаем, что при этом получается металинейная структура на Y.

Надо убедиться, что металинейная структура на T^*Y_y не зависит от выбора $x \in \rho^{-1}(y)$ и дает накрытие расслоения реперов Y. Для этого заметим, что имеет смысл говорить о постоянном векторном поле вдоль $\rho^{-1}(y)$, а именно о поле, которое в каждой точке $x \in \rho^{-1}(y)$ соответствует одному и тому же фиксированному ковектору в T^*Y_y. Таким образом, имеет смысл говорить о постоянном линейном репере, т. е. о постоянном сечении s расслоения $B(\mathscr{M}|_{\rho^{-1}(y)})$. Ясно, что такие постоянные сечения соответствуют линейному базису в T^*Y_y. Далее, можно накрыть сечение s сечением $\tilde{s}$ расслоения $MB(\mathscr{M}|_{\rho^{-1}(y)})$, поскольку множество $\rho^{-1}(y)$ *односвязно*. Таким образом, мы можем говорить о постоянном сечении расслоения $MB(\mathscr{M}|_{\rho^{-1}(y)})$, и ясно, что такое сечение определяется своим значением в любом $x \in \rho^{-1}(y)$, поскольку $\rho^{-1}(y)$ связно. Итак, $ML(n, \mathbf{R})$ действует просто транзитивно на постоянных сечениях расслоения $MB(\mathscr{M}|_{\rho^{-1}(y)})$ и тем самым определяет металинейную структуру на T^*Y_y.

Пусть U — произвольное открытое множество в X. Мы можем говорить, что гладкое сечение расслоения $MB(\mathscr{M}|_U)$ постоянно на слоях, если оно постоянно вдоль каждого множества $\rho^{-1}(y) \cap U$. Легко видеть, что такое гладкое сечение дает сечение расслоения $MB(T^*Y)$ над $\rho(U)$ и, таким образом, определяет структуру расслоения на $MB(T^*Y)$. В результате мы получаем металинейную структуру на Y. В частности, можно говорить о полуформах σ на Y и отождествлять такие полуформы с сечениями $\bigwedge^{-1/2}(\mathscr{M})$, постоянными вдоль каждого слоя. Мы будем обозначать пространство таких полуформ через $\bigwedge^{1/2}(Y)$, когда будем рассматривать их как полуформы на Y, или через $\bigwedge_{\mathscr{M}}^{-1/2}$, когда будем рассматривать их как сечения $\bigwedge^{-1/2}(\mathscr{M})$.

Теперь мы можем определить предгильбертово пространство $H_0(\mathscr{M})$, ассоциированное с $\mathscr{M}$, а именно пространство сечений с компактным носителем расслоения $L^Y \otimes \bigwedge^{1/2}(Y)$. Если заданы два таких сечения $e_1 \otimes \sigma_1$ и $e_2 \otimes \sigma_2$, то положим, по определению,

$$(e_1 \otimes \sigma_1,\ e_2 \otimes \sigma_2) = \int\limits_Y \langle e_1,\ e_2 \rangle\, \sigma_1 \cdot \bar{\sigma}_2.$$

Здесь $\langle e_1, e_2 \rangle$ — функция на Y, а $\sigma_1 \cdot \bar{\sigma}_2$ — плотность на Y, так что подынтегральное выражение — плотность с компактным носителем на Y.

Пополнение этого предгильбертова пространства будем обозначать через $H(\mathscr{M})$.

Пусть $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ — расслаивающие поляризации, ассоциированные с отображениями ρ_1 и ρ_2 многообразия X на Y_1 и Y_2. Предположим, что $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ вполне трансверсальны, т. е. $\rho_1 \times \rho_2$: $X \to Y_1 \times Y_2$ — диффеоморфизм. Тогда, как и в § 3, получаем полуторалинейное спаривание $H_0(\mathscr{M}_1)$ с $H_0(\mathscr{M}_2)$. Именно, пусть $e_1 \otimes \sigma_1$ — элемент $H_0(\mathscr{M}_1)$ и $e_2 \otimes \sigma_2$ — элемент $H_0(\mathscr{M}_2)$. Тогда для любого x можно образовать скалярное произведение $\langle e_1(x),\ e_2(x) \rangle$ в L_x и произведение $\langle \sigma_1(x),\ \sigma_2(x) \rangle$, задаваемое метаплектической структурой. Итак, можно положить

$$((e_1 \otimes \sigma_1,\ e_2 \otimes \sigma_2)) = \int\limits_X \langle e_1,\ e_2 \rangle \langle \sigma_1,\ \sigma_2 \rangle\, \omega^n.$$

Эта формула дает нужное спаривание, и, как мы увидим, оно правильно ведет себя в том, что касается фазовых множителей.

Пусть X — метаплектическое многообразие и MpX — расслоение метаплектических реперов. Значит, MpX — это $Mp(n)$-расслоение над X, накрывающее $Sp(n)$-расслоение BpX симплектических реперов. Далее, симплектический автоморфизм f многообразия X индуцирует автоморфизм $\tilde{f}$ расслоения BpX. Если задан автоморфизм g расслоения BpX, то он индуцирует преобразование h многообразия X на себя, причем $\tilde{h}$ не обязательно совпадает с g. (Условие равенства $\tilde{h}$ и g можно выразить при помощи некоторых дифференциальных уравнений на BpX; мы не будем здесь этим заниматься.) Таким образом, мы можем описывать симплектические автоморфизмы X как некоторый класс автоморфизмов расслоения BpX, а именно тех, для которых $\tilde{h} = g$. Аналогично, мы определим *метаплектические автоморфизмы* X как такие автоморфизмы $\hat{g}$ расслоения MpX, что индуцированные автоморфизмы g расслоения BpX являются симплектическими автоморфизмами.

Наконец, предположим, что метаплектическое многообразие X таково, что его симплектическая структура происходит из эрмитова линейного расслоения L. Под *автоморфизмом* X мы будем понимать пару $(\hat{g}, a)$, где $\hat{g}$ — метаплектический автоморфизм X, а a — автоморфизм L, причем $\hat{g}$ и a индуцируют *один и тот же* симплектический автоморфизм g. Обозначим группу всех автоморфизмов X через $G(X)$.

Если $f \in G(X)$ и $u = e_1 \otimes \sigma_1 \in H_0(\mathscr{M})$, то ввиду всего сказанного о f мы получаем элемент $f_* u \in H_0(f_*\mathscr{M})$ и отображение f_*: $H_0(\mathscr{M}) \to H_0(f_*\mathscr{M})$ является изометрией, а значит, продолжается до унитарного преобразования, которое мы также будем обозначать через f_*, т. е. f_*: $H(\mathscr{M}) \to H(f_*\mathscr{M})$. Ясно, что $(fg)_*$: $H(\mathscr{M}) \to H((fg)_*\mathscr{M})$ — композиция f_*: $H(g_*\mathscr{M}) \to H((fg)_*\mathscr{M})$ с g_*: $H(\mathscr{M}) \to H(g_*\mathscr{M})$, другими словами, $G(X)$ действует морфизмами в категории гильбертовых пространств вида $H(\mathscr{M})$.

Аналогично, пусть $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ — две вполне трансверсальные расслаивающие поляризации. Тогда если $u_1 \in H_0(\mathscr{M}_1)$ и $u_2 \in H_0(\mathscr{M}_2)$, то ясно, что

$$((fu_1, fu_2)) = ((u_1, u_2)).$$

Как и в § 3, рассмотрим спаривание между $H_0(\mathscr{M}_1)$ и $H_0(\mathscr{M}_2)$ и определяемое им линейное отображение U из $H_0(\mathscr{M}_1)$ в пространство антилинейных функций на $H_0(\mathscr{M}_2)$. Часто U можно продолжить до унитарного отображения из $H(\mathscr{M}_1)$ в $H(\mathscr{M}_2)$. Тогда мы будем говорить, что $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ *унитарно связаны.*

Например, можно рассмотреть классическое преобразование Фурье, как в § 3. Тогда мы отождествляем $H_0(\mathscr{M}_1)$ с $C_0^\infty(dq)$, а $H_0(\mathscr{M}_2)$ с $C_0^\infty(dp)$. Индуцированное преобразование принимает вид

$$U(f)(p) = e^{-\pi n i/4}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int e^{-ip\cdot q} f(q)\, dq.$$

Обратим внимание на новый фазовый множитель, который входит в эту версию преобразования Фурье. Заметим также, что в теории стандартного преобразования Фурье доказывается, что U продолжается до унитарного отображения из $L^2(dq)$ в $L^2(dp)$. Таким образом, поляризации $q = \mathrm{const}$ и $p = \mathrm{const}$ унитарно связаны. Значит, использование полуформ вместо полуплотностей и использование метаплектической структуры приводит в точности к тому же, что и использование в § 3 индекса Маслова.

Если $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ унитарно связаны и f — автоморфизм, то ясно, что $f_*\mathscr{M}_1$ и $f_*\mathscr{M}_2$ унитарно связаны. Предположим, например, что X — симплектическое векторное пространство, а $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ — поляризации, все листы которых — аффинные подпространства. Если $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ трансверсальны, то можно найти симплектическое преобразование, переводящее $\mathscr{M}_1$ в $q = \mathrm{const}$ и $\mathscr{M}_2$ в $p = \mathrm{const}$, а значит, $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ унитарно связаны. (Будем говорить, что две поляризации на симплектическом многообразии *связаны по Гейзенбергу,* если существует симплектический диффеоморфизм X на симплектическое векторное пространство, переводящий эти две поляризации в трансверсальные аффинные поляризации. Ясно, что две поляризации, связанные по Гейзенбергу, унитарно связаны.)

Пусть V — метаплектическое векторное пространство. Пусть, далее, X, Y и Z — вещественные лагранжевы подпространства и $\mathcal{M}_X$, $\mathcal{M}_Y$, $\mathcal{M}_Z$ — соответствующие вещественные поляризации. Если X, Y и Z попарно трансверсальны, то получаем унитарные отображения

$$U_{Y,X}: H(\mathcal{M}_X) \to H(\mathcal{M}_Y), \quad U_{Z,Y}: H(\mathcal{M}_Y) \to H(\mathcal{M}_Z),$$
$$U_{Z,X}: H(\mathcal{M}_X) \to H(\mathcal{M}_Z),$$

определяемые спариванием; из § 3 следует, что имеет место соотношение транзитивности

$$U_{Z,X} = U_{Z,Y} \circ U_{Y,X}.$$

Как и в § 3, мы расширяем эти унитарные отображения так, чтобы они были определены и для не трансверсальных пар вещественных поляризаций, и тогда в силу инвариантности спаривания относительно метаплектической группы мы получаем представление для $Mp(V)$, которое подробно изучим в следующем параграфе.

7. *Метаплектическое представление*

У метаплектической группы имеется замечательное (бесконечномерное) унитарное представление, упоминавшееся в предыдущем параграфе. Мы подробно опишем его в этом параграфе. Оно будет играть важную роль в дальнейшем. Кроме того, оно дает другой подход, принадлежащий Костанту, к построению полуформ на лагранжевых подпространствах симплектических пространств, проведенному в предыдущих параграфах. Это представление будет описано нами геометрически на основе построений предыдущего параграфа. Однако вычисления будут довольно длинные и запутанные. По этой причине мы начнем с абстрактного описания представления.

Пусть V — симплектическое векторное пространство с симплектической формой (,). Тогда $\mathbf{R} \oplus V$ снабжается структурой алгебры Ли, если положить $[\mathbf{R}, V] = 0$ и $[v, w] = (v, w) \in \mathbf{R}$. При этом $[V, V] = \mathbf{R}$, т. е. эта алгебра Ли нильпотентна. Ее называют *алгеброй Гейзенберга*, поскольку (с точностью до констант) соотношения коммутации в этой алгебре совпадают с известными коммутационными соотношениями Гейзенберга. Ясно, что симплектическая группа $Sp(V)$ действует как группа автоморфизмов алгебры Гейзенберга, если $Sp(V)$ тривиально действует на $\mathbf{R}$. Обозначим через N односвязную группу с алгеброй Ли $\mathbf{R} \oplus V$. Она называется *группой Гейзенберга*.

Далее, по теореме Стоуна — фон Неймана, группа Гейзенберга с точностью до унитарной эквивалентности обладает единственным неприводимым унитарным представлением, при котором $1 \in \mathbf{R}$ представляется умножением на i. Обозначим через σ это представление. Тогда для каждого $g \in Sp(V)$ можно определить новое представление σ^g, полагая

$$\sigma^g(a) = \sigma(ga), \quad a \in \mathbf{R} \oplus V.$$

В силу теоремы Стоуна — фон Неймана тогда существует такой унитарный оператор U_g, что

$$\sigma^g(a) = U_g \sigma(a) U_g^{-1},$$

а поскольку σ неприводимо, U_g определяется однозначно с точностью до скалярного множителя, равного по модулю единице. В частности,

$$U_{g_1} U_{g_2} = c(g_1, g_2) U_{g_1 g_2},$$

где $c\colon Sp(V) \times Sp(V) \to S^1$ — коцикл. Итак, $g \longmapsto U_g$ — это *проективное* представление $Sp(V)$, и в силу общих соображений оно является унитарным представлением универсальной накрывающей группы для $Sp(V)$. Оказывается, рассматриваемое представление на самом деле является представлением двулистной накрывающей, т. е. метаплектической группы $Mp(V)$. Это представление и есть метаплектическое представление. Мы опишем его более явно, и притом не пользуясь теоремой Стоуна — фон Неймана.

Начнем с более явного описания группы N. Как многообразие N можно отождествить с $\mathbf{R} \oplus V$. Мы утверждаем, что групповое умножение в N имеет вид

$$(z_1 \oplus v_1) \cdot (z_2 \oplus v_2) = (z_1 + z_2 + {}^1/_2 (v_1, v_2)) \oplus (v_1 + v_2). \tag{7.1}$$

Легко проверить, что это действительно групповой закон и что отображение $t \longmapsto tz \oplus tv$ определяет однопараметрическую подгруппу. Значит, алгебра Ли группы $\mathbf{R} \oplus V$ совпадает с $\mathbf{R} \oplus V$ как множество, и коммутатор получается антисимметризацией билинейных членов в групповом законе, что, разумеется, приводит к коммутационным соотношениям в алгебре Гейзенберга. Метаплектическая группа действует как группа автоморфизмов N. Поэтому мы можем образовать полупрямое произведение $N \times Mp(V)$, где, как обычно, групповое умножение задается формулой

$$(n_1 \times A_1) \cdot (n_2 \times A_2) = (n_1 \cdot A_1 n_2) \times A_1 A_2, \quad n_i \in N, \quad A_i \in Mp(V).$$

Метаплектическое представление продолжается до неприводимого представления этой большей группы, которой отвечает алгебра Ли $\mathbf{R} \oplus V \oplus sp(V)$. В действительности условие представимости $1 \in \mathbf{R}$ умножением на i означает, что мы рассматриваем несколько иную группу, а именно, при помощи гомоморфизма $(t, v) \longmapsto (e^{it}, v)$

мы заменяем $N=\mathbf{R}\oplus V$ на $N'=S^1\times V$, где S^1 — окружность $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Группа N' имеет ту же алгебру Ли, что и N, и основной в наших рассмотрениях будет группа, являющаяся полупрямым произведением $\mathcal{G}=N'\times Mp(V)$.

Мы утверждаем, что группа $\mathcal{G}$ имеет очень простую геометрическую интерпретацию при помощи конструкций предыдущего параграфа. Действительно, дуальное векторное пространство V^* также имеет симплектическую структуру. (При желании можно отождествить V с V^*, пользуясь симплектической структурой на V.) На V^* можно выбрать метаплектическую структуру. Можно также построить тривиальное линейное расслоение $L=V^*\times\mathbf{C}$ с эрмитовой структурой и связностью, для которых формой кривизны является симплектическая форма. Таким образом, V^* снабжено всеми нужными структурами, и можно рассмотреть его группу автоморфизмов $G(V^*)$. Мы утверждаем, что $\mathcal{G}$ можно отождествить с подгруппой в $G(V^*)$, состоящей из элементов, действующих на V^* *аффинными* преобразованиями.

В самом деле, пусть $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ — симплектический базис в V, т. е. $\alpha=p\,dq=\sum p_i\,dq_i$, где $d\alpha$ — симплектическая форма на V^*. Введем стандартную эрмитову форму на $\mathbf{C}$ и форму связности $i\alpha+dz/z$ на соответствующем главном расслоении. Выбор базиса отождествляет V^* с $\mathbf{R}^{2n}$ и $Bp(V)$ с $\mathbf{R}^{2n}\times Sp(n,\mathbf{R})$, где (x, T) обозначает симплектический репер в x, задаваемый $2n$ столбцами матрицы T. Тогда $\mathbf{R}^{2n}\times Mp(n)$ обычным образом задает метаплектическую структуру.

Элемент $e^{it}\in N'\subset\mathcal{G}$ действует на $L=V^*\times\mathbf{C}$ так: $e^{it}(v^*, z)=(v^*, e^{it}z)$.

Для описания действия $V\subset N'$ на L введем следующее обозначение. Отождествим V с V^* и будем описывать векторы в V как (x, y) или как (q, p), где x, y, q, p — это n-векторы. Тогда вектор $v=(q, p)$ действует на $v^*=(x, y)$ так:

$$v(v^*)=(x+p,\ y-q). \tag{7.2}$$

(В самом деле, векторное поле, отвечающее v, рассматриваемому как функция на V^*, — это постоянное векторное поле $p(\partial/\partial x)-q(\partial/\partial y)$. Переход к экспоненте показывает, что v действует на V^* как сдвиг.) Пусть $v=(q, p)$ действует на $L=V^*\times\mathbf{C}$ следующим образом:

$$v(x,\ y;\ z)=(x+p,\ y-q;\ e^{i[q\cdot x+p\cdot q/2]}z). \tag{7.3}$$

Легко проверить, что

$$v'[v(x,\ y;\ z)]=e^{i[p\cdot q'-p'\cdot q]/2}(v+v')(x,\ y;\ z)=(v'\cdot v)(x,\ y;\ z),$$

где $v'\cdot v$ — произведение v' и v в группе N'.

Теперь опишем действие $Mp(n)$ на L. Это действие определяется действием $Sp(n)$. Мы фиксируем действие $Sp(n)$ на $L=$

$=\mathbf{R}^{2n}\times\mathbf{C}$ требованием, чтобы оно было тривиальным на слое над началом, т. е. чтобы каждый элемент $T\in Sp(n)$ оставлял все точки $\{0\}\times\mathbf{C}$ неподвижными. Тогда

$$T(v,\ z)=\left(Tv,\ e^{i\varphi_T(Tv)}z\right),$$

где функция φ_T выбирается из условий

$$d\varphi_T=(T^{-1})^*\alpha-\alpha,\quad \varphi_T(0)=0.$$

Теперь мы можем вычислить φ, как и в случае $n=1$ в § 3. Пусть

$$T=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\in Sp(n).$$

Тогда

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}D^* & -B^*\\ -C^* & A^*\end{bmatrix}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}(T^{-1})^*\alpha&=(T^{-1})^*\,y\cdot dx=\\ &=(-C^*x+A^*y)\cdot(D^*\,dx-B^*\,dy).\end{aligned}$$

Выражение вида $C^*x\cdot D^*\,dx$ можно переписать в виде $DC^*x\cdot dx$, где $DC^*=CD^*$, $BA^*=AB^*$ и $DA^*-CB^*=I$, поскольку T и T^{-1} симплектичны. Поэтому имеем:

$$\begin{aligned}&(-C^*x+A^*y)\cdot(D^*\,dx-B^*\,dy)-y\cdot dx=\\ &\qquad=-DC^*x\cdot dx-BA^*y\cdot dy+CB^*y\cdot dx+BC^*x\cdot dy=\\ &\qquad=d\left[-{}^1/_2DC^*x\cdot x+C^*x\cdot B^*y-{}^1/_2BA^*y\cdot y\right].\end{aligned}$$

Итак, получаем

$$\varphi_T(x,\ y)=-{}^1/_2DC^*x\cdot x+C^*x\cdot B^*y-{}^1/_2BA^*y\cdot y. \tag{7.4$'$}$$

Заметим, что для любой пары симплектических преобразований T и S

$$\begin{aligned}d\varphi_{T\circ S}&=T^{-1*}S^{-1*}\alpha-\alpha=\\ &=T^{-1*}S^{-1*}\alpha-T^{-1*}\alpha+T^{-1*}\alpha-\alpha=T^{-1*}\,d\varphi_S+d\varphi_T.\end{aligned}$$

Поскольку $\varphi_{T\circ S}(0)=T^{-1*}\varphi_S(0)=\varphi_T(0)=0$, мы заключаем, что

$$\varphi_{T\circ S}(w)=\varphi_S(T^{-1}w)+\varphi_T(w).$$

В частности, полагая $S=T^{-1}$, получаем $\varphi_{T^{-1}}(T^{-1}w)=-\varphi_T(w)$, или

$$\begin{aligned}\varphi_T(Tw)&=-\varphi_{T^{-1}}(w)=\\ &={}^1/_2D^*Cx\cdot x+Cx\cdot By+{}^1/_2B^*Ay\cdot y.\end{aligned} \tag{7.4}$$

Заметим, что если f и g — произвольные симплектические преобразования (т. е. φ_f и φ_g определены с точностью до произвольной константы), то $\varphi_{f\circ g}=f^{-1*}\varphi_g+\varphi_f+\mathrm{const}$. В частности, пусть $v=(q,\ p)$ и $v'=(p,\ -q)$, т. е. v действует на $\mathbf{R}^{2n}$ сдвигом на v'. Пусть T — симплектическое преобразование. Тогда $T\circ v\circ T^{-1}$ действует на $\mathbf{R}^{2n}$ сдвигом на Tv'. Далее,

$$T(v'(T^{-1}(w;\ z)))=((Tv')\,w;\ e^{i\psi(w)}z),$$

где

$$\psi(w)=\varphi_{T^{-1}}(T^{-1}w)+q\cdot x(T^{-1}w)+p\cdot q+\varphi_T(w+T(p,\ -q)).$$

Мы уже знаем в силу упоминавшихся выше общих соображений, что

$$\psi(w)=\varphi_u(w)+\mathrm{const},$$

где $u'=Tv$. Нужно показать, что эта константа равна нулю. Далее, постоянный член в ψ имеет вид

$$p\cdot q+\varphi_T(T(p,\ -q))=p\cdot q-\varphi_{T^{-1}}((p,\ -q))=$$
$$=-{}^1/_2A^*Cp\cdot p+B^*Cp\cdot q-{}^1/_2B^*Dq\cdot q+{}^1/_2p\cdot q.$$

С другой стороны,

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ -q\end{bmatrix}=u'=\begin{bmatrix}\bar p\\ -\bar q\end{bmatrix},$$

т. е.

$${}^1/_2\bar p\cdot\bar q=-{}^1/_2(Ap-Bq)\cdot(Cp-Dq).$$

Раскрывая скобки и пользуясь симплектичностью T, мы получаем, что это выражение совпадает с указанным выше. Это показывает, что $\mathcal{G}$ действует как группа автоморфизмов всех структур, введенных на V^*. Ясно, что $\mathcal{G}$ является подгруппой аффинных преобразований в $G(V^*)$.

Продолжим наши рассмотрения. Выберем некоторую фиксированную аффинную поляризацию $\mathcal{M}$; допустим, что она имеет вид $x=\mathrm{const}$, где x, y — симплектические координаты. Тогда каждый элемент $a\in\mathcal{G}$ индуцирует унитарное отображение a_*: $H(\mathcal{M})\to\to H(a\mathcal{M})$, а спаривание индуцирует унитарное отображение U: $H(a\mathcal{M})\to H(\mathcal{M})$. Композицию этих отображений обозначим через Q_a: $H(\mathcal{M})\to H(\mathcal{M})$. Тогда отображение $a\mapsto Q_a$ дает нужное унитарное представление G.

Сделаем несколько замечаний. Прежде всего, поскольку $N'\subset\subset\mathcal{G}$, мы имеем, в частности, унитарное представление группы Гейзенберга. Кроме того, каждый элемент $t\in\mathbf{R}\subset N$ представляется на пространстве сечений L умножением на e^{it}, а значит, он и на $H(\mathcal{M})$ представляется умножением на e^{it}. (Как мы вскоре увидим, это представление неприводимо, а значит, оно является тем единственным неприводимым представлением группы Гейзенберга, которое выделяется в теореме Стоуна — фон Неймана.) Заметим, что каждый элемент N действует сдвигом на V^*, а потому $n\mathscr{M}'=\mathscr{M}'$ для всякой поляризации $\mathscr{M}'$ и всякого $n\in N$. Таким образом, $Q_n=n_*$ при $n\in N$. Кроме того, мы получаем представление $Q_n^{\mathscr{M}'}=n_*\colon H(\mathscr{M}')\to H(\mathscr{M}')$ на каждом из гильбертовых пространств $H(\mathscr{M}')$.

Пусть $a\in\mathscr{G}$. Тогда $ana^{-1}\in N$ и $Q_{ana^{-1}}=Q_aQ_nQ_a^{-1}$, т. е. при $a\in Mp(n)$ операторы Q_a устанавливают унитарную эквивалентность между представлениями $n\longmapsto Q_n$ и $n\longmapsto Q_{ana^{-1}}$, упоминавшуюся в начале этого параграфа.

Выпишем некоторые явные выражения для этого представления, пользуясь (7.3), (7.4) и поляризацией $x=\mathrm{const}$. Мы можем отождествить $H(\mathscr{M})$ с $L^2(\mathbf{R}^n)$, ставя элементу $H_0(\mathscr{M})$ в соответствие C^∞-функцию $f(x)$ с компактным носителем (выбрав раз и навсегда полуформу $dx^{1/2}$ на $\mathbf{R}^n$). Полагая $v=(q,\ 0)$ в (7.3), получаем

$$(Q_qf)^*(x)=e^{-iq\cdot x}f(x). \tag{7.5}$$

Полагая $v=(0,\ p)$ в (7.3), получаем

$$Q_pf(x)=f(x-p). \tag{7.6}$$

Из (7.5) или (7.6) следует, что представление N на $H(\mathscr{M})$ неприводимо. Обозначим через A_q и A_p соответствующие инфинитезимальные операторы:

$$A_q=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[Q_{-tq}-I],\qquad A_p=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[Q_{-tp}-I].$$

Тогда

$$A_qf(x)=i(q\cdot x)f(x),\qquad A_pf(x)=\sum p_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Напомним, что для всякого представления группы Ли в гильбертовом пространстве H общая область определения всех степеней инфинитезимальных операторов (т. е. общая область определения для универсальной обертывающей алгебры) называется пространством C^∞-векторов этого представления. Ясно, что в нашем случае эта общая область определения состоит из таких $f\in L^2$, что

$$x^\alpha\frac{\partial^{|\beta|}f}{\partial x^\beta}\in L^2$$

для всех α и β. Значит, пространство C^∞-векторов — это в точности пространство Шварца $\mathscr{S}$. Мы можем рассмотреть действие N на $\mathscr{S}$, а также на дуальном пространстве $\mathscr{S}'$ умеренных распределений. Имеем

$$\mathscr{S}\subset H(\mathscr{M})\subset\mathscr{S}'.$$

Заметим, что $\mathscr{S}'$ имеет единственное одномерное подпространство, состоящее из собственных векторов с собственным значением 1 для всех Q_q, а именно пространство, порожденное элементом δ_0.

Аналогично, константы образуют подпространство собственных векторов с собственным значением 1 для Q_p.

Исследуем теперь действие различных элементов $Mp(n)$. Ясно, что при $A \in ML(n) \subset Mp(n)$

$$Q_A f(x) = f(A^{-1}x)(\det A)^{-1/2}. \tag{7.7}$$

Для элемента вида

$$n' = \begin{bmatrix} I & 0 \\ S & I \end{bmatrix}$$

соответствующее преобразование имеет вид

$$Q_{n'} f(x) = e^{-ix\cdot Sx/2} f(x). \tag{7.8}$$

Соответствующее выражение для Q_n при

$$n = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

можно получить при помощи преобразования Фурье, как указывалось в предыдущем параграфе. Найдем представления инфинитезимальных образующих. С этой целью запишем алгебру Ли группы $\mathcal{G}$ как алгебру относительно скобки Пуассона всех (неоднородных) квадратичных полиномов от p и q. Базис этой алгебры Ли состоит из элементов

$$1,\ q_1,\ \ldots,\ q_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n,\quad i \leqslant j = 1,\ \ldots,\ n,$$
$$q_i q_j,\ q_i p_j,\ p_i p_j,\quad i,\ j = 1,\ \ldots,\ n.$$

Операция коммутации имеет вид

$$\{f,\ g\} = \sum \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

В частности, $\{1,\ g\} = 0$ для всех g и

$$\{p_i,\ q_j\} = \delta_{ij},$$
$$\{p_i q_j,\ q_k\} = \delta_{ik} q_j, \qquad \{p_i q_j,\ p_k\} = -\delta_{jk} p_i,$$
$$\{p_i p_j,\ q_k\} = \delta_{ik} p_j + \delta_{jk} p_i, \quad \{p_i p_j,\ p_k\} = 0,$$
$$\{q_i q_j,\ q_k\} = 0, \quad \{q_i q_j,\ p_k\} = -\delta_{ik} q_j - \delta_{jk} q_i.$$

Значит, $p_i q_j$ действует как матрица

$$\begin{bmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ji} \end{bmatrix},$$

где E_{ij} — матрица, у которой $(i,\ j)$-й матричный элемент равен 1, а остальные нулю. Далее, для любого элемента ξ рассматриваемой алгебры Ли соответствующий кососамосопряженный оператор является инфинитезимальной образующей для $Q_{\exp - tE}$. Таким образом, поскольку

$$\exp tE_{ij} = I + tE_{ij} + O(t^2), \quad \det \exp tE_{ij} = I + t\delta_{ij} + O(t^2),$$

мы получаем, что инфинитезимальная образующая $A_{p_i q_j}$ имеет вид

$$x^i \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{1}{2}\delta_{ij}.$$

Продолжая эти рассуждения, мы получим следующую таблицу, дающую представления базисных элементов:

$$\begin{array}{l|l}
f & A_f \\
\hline
1 & i \\
q_k & ix^k \\
p_l & \dfrac{\partial}{\partial x^l} \\
p_i q_j & x^i \dfrac{\partial}{\partial x^j} + \dfrac{1}{2}\delta_{ij} \\
p_k p_l & \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \\
q_k q_l & ix^k x^l
\end{array} \tag{7.9}$$

Пусть, далее, X — произвольное метаплектическое многообразие и

$$\begin{array}{c} Mp(X) \\ \downarrow \\ X \end{array}$$

— расслоение метаплектических реперов X. Поскольку $Mp(X)$ — главное $Mp(n)$-расслоение, любой $Mp(n)$-модуль индуцирует ассоциированное расслоение. В частности, если обозначить через H гильбертово пространство метаплектического представления, мы получим расслоение гильбертовых пространств над X, которое будем обозначать через $H(X)$. Если $H_x = H(X)_x$ — слой в точке $x \in X$, то H_x изоморфно пространству H, где изоморфизм зависит от выбора метаплектического репера в x. Пусть u — гладкое (локальное) сечение $H(X)$ и s — гладкое сечение расслоения метаплектических реперов. Тогда u отвечает (локально определенной) гладкой функции

$$u_{\mathrm{s}}\colon X \to H.$$

Если рассматривать H как $H = L^2(\mathbf{R}^n)$, то u_{s} задается как $u_{\mathrm{s}}(x, r)$, где для каждого $x \in X$ функция $u_{\mathrm{s}}(x, \cdot)$ лежит в $L^2(\mathbf{R}^n)$. Пусть

s' — другое сечение расслоения метаплектических реперов, т. е.

$$s'(x)\,g(x) = s(x),$$

где $g(x) \in Mp(n)$ гладко зависит от x в общей области определения. Тогда, по определению ассоциированного расслоения,

$$u_{s'}(x) = Q_{g(x)} u_s(x). \tag{7.10}$$

Аналогично, исходя из $\mathscr{S} \subset H \subset \mathscr{S}'$ можно построить расслоения $\mathscr{S}(X)$ и $\mathscr{S}'(X)$. Кроме того, поскольку алгебра Гейзенберга $\mathbf{R} \oplus V$ является также модулем над $Mp(n)$, мы можем построить ассоциированное расслоение, которое будет иметь вид $\mathbf{R}(x) \oplus T(X)$, где $\mathbf{R}(X) = X \times \mathbf{R}$ — тривиальное расслоение, а TX — касательное расслоение. Слой $\mathbf{R} \oplus TX_x$ — это алгебра Гейзенберга, поскольку это сумма $\mathbf{R}$ и симплектического векторного пространства TX_x.

Выбор метаплектического репера в x дает изоморфизм между $\mathbf{R} \oplus TX_x$ и $\mathbf{R} \oplus V$. Пусть $\xi_x \in \mathbf{R} \oplus TX_x$, $u_x \in \mathscr{S}'_x$ и s_x — репер в x, т. е. ξ_x соответствует $\xi \in \mathbf{R} \oplus V$, а u_x соответствует $u \in \mathscr{S}'$. Тогда положим

$$A_{\xi_x} u_x = v_x,$$

где v_x соответствует $A_\xi u$. Изменение репера приводит к замене ξ на $a\xi$ и u на $Q_a u$, где $a \in Mp(n)$. Но тогда

$$A_{a\xi} Q_a u = Q_a [Q_a^{-1} A_{a\xi} Q_a] u = Q_a v,$$

т. е. v_x не зависит от выбора метаплектического репера. Таким образом, алгебра Гейзенберга $\mathbf{R} \oplus TX_x$ в каждой точке действует на гильбертовом пространстве H_x в этой точке. Заметим, что это действие внутреннее, оно определяется метаплектической структурой X. Разумеется, каждое TX_x имеет метаплектическую структуру, и данное в начале параграфа абстрактное определение метаплектического представления показывает, что мы получили соответствующее метаплектическое представление на каждом H_x.

Пусть W — лагранжево подпространство в TX_x. Пусть

$$\mathscr{S}'_W = \left\{ u_x \mid A_{\xi_x} u_x = 0 \quad \text{для всех} \quad \xi_x \in W \right\}.$$

Заметим, что $\dim \mathscr{S}'_W = 1$. Действительно, пусть U—дополнительное лагранжево подпространство и $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \xi_1, \ldots, \xi_n$ — симплектический базис в x, где $\zeta \in U$, $\xi \in W$. Мы можем выбрать метаплектический репер s, накрывающий этот репер. Относительно s этот базис соответствует базису $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ на $\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^{n*}$, и при отождествлении H_x с $L^2(\mathbf{R}^n)$ операторы A_{ξ_i} переходят в операторы $\partial/\partial x^i$. Таким образом, пространство $\mathscr{S}'_W$ соответствует константам. Это доказывает одномерность $\mathscr{S}'_W$. Фактически мы доказали больше. А именно, мы построили изоморфизм $\mathscr{S}'_W \to \mathbf{R}$, зависящий от выбора метаплектического репера s. Предположим, что s заменен на sa, где $a \in ML(n) \subset Mp(n)$. Согласно (7.10), это приведет к умножению на $(\det A)^{-1/2}$, где

$$a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{bmatrix}$$

и на ξ действует ${}^tA^{-1}$. Это показывает, что

Пространство $\mathscr{S}'_W$ канонически изоморфно пространству $\bigwedge^{1/2}(W)$ полуформ на W. (7.11)

Другими словами, пространство $\mathscr{S}'_W$ можно отождествить с дуальным пространством к пространству отрицательных полуформ $\bigwedge^{-1/2}(W)$. Поскольку имеется спаривание между $\bigwedge^{-1/2}(U)$ и $\bigwedge^{-1/2}(W)$, если U и W — трансверсальные лагранжевы подпространства в TX_x, то можно рассчитывать, что имеется спаривание между $\mathscr{S}'_U$ и $\mathscr{S}'_W$. Это действительно так. Заметим, что в x имеется гильбертово пространство H_x и, стало быть, между элементами H_x корректно определено скалярное произведение. Это скалярное произведение нельзя продолжить на все пары элементов из $\mathscr{S}'_x$, но можно продолжить на некоторые из них. Мы утверждаем, что если U и W трансверсальны, то определено скалярное произведение между $\mathscr{S}'_U$ и $\mathscr{S}'_W$. Действительно, выберем метаплектический репер, у которого первые n элементов — металинейный базис в U, а последние n элементов — металинейный базис в W. Затем отождествим H_x с $L^2(\mathbf{R}^n)$ так, что $\mathscr{S}'_U$ будет соответствовать мере Дирака в начале, в то время как $\mathscr{S}'_W$ будет соответствовать константам. Ясно, что в этом случае скалярное произведение продолжается, и легко проверить, что оно в самом деле дуально рассмотренному ранее спариванию полуформ.

В действительности мы можем ввести векторное расслоение, которое аналогичным образом приведет к расслоению полуформ, а не к дуальному расслоению. Рассмотрим $\bigwedge^n(TX) \otimes H(X)$ и соответствующее расслоение распределений $\bigwedge^n(TX) \otimes \mathscr{S}'(X)$. Если $W \subset TX_x$ — лагранжево подпространство, то $\bigwedge^n(W)$ одномерно и очевидным образом вкладывается в векторное пространство $\bigwedge^n TX_x$. Ясно, что $\bigwedge^n(W) \otimes \mathscr{S}'_W$ — это в точности расслоение отрицательных полуформ на W. Внешнее произведение дает спаривание $\bigwedge^n(TX_x) \times \bigwedge^n(TX_x) \to \bigwedge^{2n}(TX_x)$, а ω^n отображает это последнее пространство в $\mathbf{R}$. Таким образом, $\bigwedge^n(TX) \otimes H(X)$ — снова расслоение гильбертовых пространств и $\bigwedge^n(TX) \otimes \mathscr{S}'(X)$ — расслоение распределений. На этот раз спаривание между прямыми $\bigwedge^n(W) \otimes \mathscr{S}'_W$ и $\bigwedge^n(U) \otimes \mathscr{S}'_U$ корректно определено для любой пары лагранжевых подпространств в TX_x. Действительно, когда подпространства трансверсальны, оно определяется как прежде, а когда подпространства стремятся к нетрансверсальным, — стремится к нулевому пределу.

Пусть V — метаплектическое векторное пространство и $u \in \mathscr{S}(V)$. Тогда u определяет линейный функционал на $\mathscr{S}'(V)$, а значит, в частности, на любом одномерном подпространстве. Если W — произвольное лагранжево подпространство в V, то u определяет элемент дуального пространства к $\bigwedge^{1/2} W$, т. е. элемент $\bigwedge^{-1/2} W$. Итак, u определяет гладкое сечение расслоения отрицательных полуформ над лагранжевыми подпространствами. Мы можем положить $V = TX_x$ для некоторого метаплектического многообразия X и получить, что гладкое сечение $\mathscr{S}(X)$ определяет гладкое сечение расслоения отрицательных полуформ на лагранжевых подпространствах TX.

До сих пор мы рассматривали метаплектическое представление на языке гильбертова пространства, ассоциированного с вещественной поляризацией. В первой работе по этому вопросу Сигал показал, как получить удобную форму этого представления при помощи аналитических функций многих комплексных переменных. (На самом деле Сигал (см. [13]) построил соответствующую теорию для бесконечного числа степеней свободы.) Баргманн [17] независимо дал конструкцию этого представления, использующую функции комплексного переменного. На нашем языке это сводится к описанию представления при помощи гильбертова пространства, ассоциированного с комплексной поляризацией. Обрисуем коротко идеи, лежащие в основе этого подхода, отсылая читателя к статье Баргманна [17], где подробно излагаются конструкция представления и некоторые интересные приложения. Положим

$$z = (1/\sqrt{2})(p - iq), \quad \bar{z} = (1/\sqrt{2})(p + iq)$$

и рассмотрим форму

$$\beta = i\bar{z}\, dz, \quad d\beta = \omega = dp \wedge dq.$$

(Здесь и далее p обозначает n-вектор $(p_1, \ldots, p_n)$, z — комплексный n-вектор $(z_1, \ldots, z_n)$ и всюду, где нужно, подразумевается суммирование, т. е., например, $dp \wedge dq$ в последней формуле означает $\sum dp_i \wedge dq_i$.) Мы хотим рассмотреть комплексную поляризацию, состоящую из тех комплексных касательных векторов ζ, которые удовлетворяют условию $\zeta \lrcorner dz_i = 0$ при всех i. Это в свою очередь приводит к подпространству пространства сечений расслоения L, состоящему из тех сечений, которые являются ковариантными константами вдоль поляризации. Если s — одно из таких сечений, то любое другое сечение имеет вид fs, где f удовлетворяет условию $\zeta f = 0$ для всех ζ из поляризации. Поляризация порождается векторами $\partial/\partial\bar{z}_i$, и, значит, условие на f состоит в том, что $\partial f/\partial\bar{z} = 0$, т. е. f — голоморфная функция переменных z. Выберем сечение s так, чтобы β была формой связности α_s. Поскольку β не вещественна, сечение s не единичной длины; как мы увидим, этот факт исключительно важен при введении структуры гильбертова пространства.

Обозначим через r сечение L (единичной длины) с $\alpha_r = p\,dq$. Тогда $s = e^{\varphi} r$, где φ определяется (с точностью до аддитивной константы) из условия

$$\beta = \alpha_s = (1/i)\,d\varphi + p\,dq.$$

Фиксируем аддитивную константу требованием $\varphi(0) = 0$. Тогда

$$d\varphi = i\{(i/2)(p + iq)(dp - i\,dq) - p\,dq\} = \\ = (-{}^1/_4)\,d(p^2 + q^2) - (i/2)\,d(pq),$$

т. е.

$$\varphi = -(p^2 + q^2)/4 - ({}^1/_2)\,ipq = -|z|^2/2 - ({}^1/_2)\,ipq.$$

Это показывает, что длина сечения s равна $\|s(q, p)\|^2 = e^{-|z|^2}$. Выберем какую-нибудь ненулевую постоянную полуформу, нормальную к поляризации. Это позволит нам отождествить пространство сечений, ассоциированных с поляризацией, и пространство голоморфных функций, а предыдущее вычисление показывает, что скалярное произведение в этом пространстве целых функций должно иметь вид

$$(f, g) = c\int f(z)\,\overline{g(z)}\,e^{-|z|^2}\,dp\,dq,$$

где c — константа. Вычисление показывает, что эта константа равна $c = (2\pi)^{-n}$. Это исходная точка в представлении Сигала — Баргманна. Обозначим через $\mathcal{F}_n$ пространство голоморфных функций от n комплексных переменных, для которых интеграл (f, f) сходится; здесь

$$(f, g) = (2\pi)^{-n}\int f(z)\,\overline{g(z)}\,e^{-|z|^2}\,dp\,dq.$$

Нетрудно показать, что $\mathcal{F}_n$ — гильбертово пространство и что полиномы образуют в нем плотное подпространство; на самом деле мономы вида $u_m(z) = z^m/(m!)^{1/2}$ образуют ортонормированный базис $\left(\text{где } m = (m_1, \ldots, m_n),\ m! = m_1! \ldots m_n! \text{ и } z^m = z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}\right)$. Для каждого $a \in \mathbf{C}^n$ линейная экспоненциальная функция $e_a(z) = e^{\bar{a}\cdot z}$ принадлежит $\mathcal{F}_n$ и имеет относительно базиса $\{u_m\}$ разложение

$$e_a(z) = \sum \overline{u_m(a)}\,u_m(z).$$

Если $f \in \mathcal{F}_n$ имеет разложение $f = \sum c_m u_m$ относительно этого ортонормированного базиса, то

$$(f, e_a) = \sum c_m u_m(a), \quad \text{или} \quad (f, e_a) = f(a).$$

Таким образом, функционал, дающий значение в точке, является элементом гильбертова пространства, что типично для гильбертовых пространств аналитических функций. Мы можем переписать последнее уравнение так:

$$f(a)=(2\pi)^{-n}\int e^{a\cdot\bar{z}}f(z)\,e^{-|z|^2}\,dp\,dq.$$

Воспользуемся этой интегральной формулой, а также спариванием между гильбертовым пространством H, ассоциированным с вещественной поляризацией $q=\text{const}$, и указанным выше гильбертовым пространством, ассоциированным с комплексной поляризацией, для того чтобы получить явное выражение унитарного отображения, связывающего эти два гильбертовых пространства. Фиксируем постоянную полуформу, нормальную к вещественной поляризации. Мы можем рассматривать H как $L^2(\mathbf{R}^n)$. Спаривание между $\psi\in H$ и $f\in\mathscr{F}_n$ задается тогда (с точностью до постоянного множителя, зависящего от выбора полуформ) следующим образом:

$$\langle\langle\psi,\ f\rangle\rangle=(2\pi)^{-n/2}\int\langle\psi r,\ fs\rangle\,dp\,dq=$$
$$=(2\pi)^{-n/2}\int\psi(q)\,\overline{f(z)}\,e^{-1/2(p^2+q^2)+ipq}\,dp\,dq.$$

Отображение U: $H\to\mathscr{F}_n$, которое мы ищем, характеризуется тем, что $(U\psi,\ f)=\langle\langle\psi,\ f\rangle\rangle$ для всех $f\in\mathscr{F}_n$. В силу воспроизводящего свойства функций e_a, имеем

$$(U\psi)(a)=(U\psi,\ e_a)=\langle\langle\psi,\ e_a\rangle\rangle=$$
$$=(2\pi)^{-n/2}\int\psi(q)\,e^{a\cdot(p-iq)/\sqrt{2}}e^{-1/2(p^2+q^2)+ipq}\,dp\,dq.$$

Можно выполнить интегрирование по p; оно сводится к вычислению преобразования Фурье функции Гаусса. Получим

$$(U\psi)(a)=\int A(a,\ q)\,\psi(q)\,dq,$$

где ядро A (константы выбираются из условия унитарности) имеет вид

$$A(a,\ q)=\pi^{-n/4}e^{-1/2(a^2+q^2)+\sqrt{2}a\cdot q}.$$

Этой формулой пользовался Баргманн [17] (ср. с его уравнением (1.4)) для построения унитарного отображения из H в $\mathscr{F}_n$. В нашей постановке, как мы видим, она является следствием геометрической структуры, в частности спаривания между гильбертовыми пространствами, ассоциированными с различными поляризациями.

Далее, если и f и g голоморфны, то

$$\frac{\partial}{\partial z_j}(f\bar{g}e^{-|z|^2})=\frac{\partial f}{\partial z_j}\bar{g}e^{-|z|^2}-f\cdot\overline{z_j g}e^{-|z|^2}.$$

Поэтому если f и g обе принадлежат $\mathscr{F}_n$, то, как показывает интегрирование по частям, оператору $\partial/\partial z_j$ сопряжен оператор умножения на z_j. Пользуясь явным представлением оператора U

как интегрального преобразования и интегрируя по частям, легко убедиться, что

$$U\frac{\partial}{\partial q_j}U^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(z_j-\frac{\partial}{\partial z_j}\right),$$

$$Uq_jU^{-1}=-\frac{i}{\sqrt{2}}\left(z_j+\frac{\partial}{\partial z_j}\right),$$

что дает явный вид представления алгебры Гейзенберга на $\mathcal{F}_n$ в терминах «операторов рождения и уничтожения» z_j и $\partial/\partial z_j$. При вычислениях с метаплектическим представлением, по крайней мере на уровне алгебры Ли, полезно знать, что образ любого элемента из $sp(V)$ имеет квадратичное выражение через образы элементов алгебры Гейзенберга (а значит, через операторы рождения и уничтожения). Чтобы сформулировать этот факт корректно, удобно воспользоваться понятием градуированной алгебры Ли. Градуированная алгебра Ли g — это $\mathbf{Z}_2$-градуированное векторное пространство $g=g_0+g_1$ вместе с билинейным отображением $g\times g\to g$, для которого $[g_i, g_j]\subset g_{i+j}$ и которое градуировано антисимметрично, т. е.

$$[X, Y]=-(-1)^{ij}[Y, X], \quad \text{если} \quad X\in g_i \quad \text{и} \quad Y\in g_j;$$

кроме того, должно выполняться градуированное тождество Якоби:

$$[X,[Y, Z]]=[[X, Y], Z]+(-1)^{ij}[Y,[X, Z]] \quad \text{при} \quad X\in g_i \quad \text{и} \quad Y\in g_j.$$

Мы отсылаем читателя к [18], где рассматриваются градуированные алгебры Ли и некоторые их применения. Один из примеров, рассмотренных в [18], состоит в том, что полагают $g_0=sp(V)$, $g_1=V$, где V — симплектическое векторное пространство. Коммутатор двух элементов из g_0 определяется как обычный коммутатор в алгебре Ли. Коммутатор $X\in g_0$ с $Y\in g_1$ определяется как образ элемента $Y\in V$ под действием $X\in sp(V)$. Наконец, симметрический коммутатор $g_1g_1\to g_0$ определяется при помощи отождествления $sp(V)$ с $S^2(V)$, после чего берется обычное (симметрическое) умножение. Другой путь состоит в том, что мы рассматриваем $sp(V)$ как совокупность однородных квадратичных полиномов относительно скобки Пуассона, а V — как совокупность однородных линейных полиномов. Симметрическая скобка $g_1\times\times g_1\to g_0$ состоит тогда просто в том, что два линейных полинома перемножаются, давая квадратичный полином. Фиксируем метаплектическое представление группы $N\times Mp(V)$ и обозначим через A инфинитезимальное представление ее алгебры Ли. Алгебру Ли группы N можно отождествить с линейными полиномами. Тогда A_u — образ любого линейного однородного полинома u, и аналогично A_X — образ квадратичного полинома X. Например, таблица (7.9) дает множество значений A_f относительно вещественной поляризации. Если положить $\varkappa(u) = i(i/2)^{1/2} A_u$ и $\varkappa(X) = A_X$, то *$\varkappa$ задает представление градуированной алгебры g.* Этот факт, который довольно легко проверить, дает удобный метод изучать поведение метаплектического представления при ограничении на различные интересные подгруппы. Подробное описание этого метода читатель найдет в работе Стернберга и Вольфа [18].

§ 8. *Некоторые примеры*

В этом параграфе мы изложим довольно бегло несколько примеров квантования и укажем на некоторые возможные направления развития теории. Ясно, что основные аналитические теоремы (такие, как доказательство сходимости интегралов, входящих в спаривание) и многие геометрические вопросы (такие, как удобный критерий унитарной эквивалентности поляризаций) еще предстоит сформулировать и доказать.

Предположим, что имеется метаплектическое многообразие X с эрмитовым линейным расслоением и выбрана поляризация $\mathscr{F}$. Пусть, далее, φ — такая функция, что ξ_φ всюду касается поляризации. Тогда (инфинитезимальный) оператор, ассоциированный с φ на $H(\mathscr{F})$, — это умножение на $i\varphi$. (Например, если $X = T^*M$ и мы рассматриваем кокасательное расслоение, то функции на M квантуются умножением. Это «стандартная» процедура квантования.) В некотором смысле это простейший пример процедуры квантования, в котором вопрос о трансверсальной поляризации и спаривании даже не возникает. Исходя из этого, если мы начинаем с некоторого φ, то надо попытаться найти поляризацию $\mathscr{F}$ с ξ_φ, касательным к $\mathscr{F}$. Неприятность состоит в том, что расслоение $L \otimes \bigwedge^{-1/2}\mathscr{F}$ может не иметь гладких глобальных сечений, являющихся ковариантными константами. Характерный пример, который мы вскоре подробно обсудим, получается, если взять $X = \mathbf{R}^2 - \{0\}$ с координатами q, p и формой $\omega = dp \wedge dq$ и рассмотреть $\varphi = {}^1/_2(p^2 + q^2)$. В этом случае поляризация состоит из касательных к концентрическим окружностям, и, как мы увидим ниже, не существует глобальных сечений $L \otimes \bigwedge^{-1/2}\mathscr{F}$, являющихся ковариантными константами вдоль каждого листа. Однако существуют «обобщенные сечения» в смысле теории распределений, и они сосредоточены на выделенных окружностях. Допуская эти «обобщенные сечения» (идея принадлежит Симмсу), мы получаем «правильное» квантование гармонического осциллятора. (Другой подход, предложенный Костантом и разработанный Блаттнером, Роунсли, Симмсом и Снятыцким, состоит в рассмотрении пучка ростков локально постоянных сечений и использовании высших когомологий этого пучка, в то время как нулевые когомологии отвечают глобальным сечениям. Мы не будем здесь обсуждать этот подход.)

Наше изложение почти буквально следует статье Симмса [7]. Мы полагаем $X=\mathbf{R}^{2n}-\{0\}$ с координатами $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$. Пусть

$$\omega=\sum dp_j \wedge dq_j \quad \text{и} \quad H=\frac{1}{2}\sum(p_j^2+q_j^2).$$

Введем комплексные координаты $z_j=p_j-iq_j$, так что

$$\omega=\frac{1}{2i}\sum dz_j \wedge d\bar{z}_j \quad \text{и} \quad \xi_H=i\sum\left(\bar{z}_j\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}-z_j\frac{\partial}{\partial z_j}\right).$$

(Это случай n-мерного гармонического осциллятора с одной и той же массой m и частотой ν, причем оба значения принимаются равными 1; система единиц выбирается так, чтобы постоянная Планка также равнялась 1. Для произвольных единиц, с постоянной Планка h и общими значениями m и ν имеем

$$\omega=h^{-1}\sum dp_j \wedge dq_j, \quad H=\frac{1}{2m}\sum(p_j^2+m^2\nu^2q_j^2)$$

и

$$z_j=p_j-im\nu q_j, \quad \xi_H=i\nu h\sum\left(\bar{z}_j\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}-z_j\frac{\partial}{\partial z_j}\right).$$

В дальнейшем мы проводим вычисления для случая $h=m=\nu=1$ и переходим к произвольным значениям лишь в окончательном результате, предоставляя читателю проведение необходимых дополнительных выкладок.)

Мы хотим теперь вложить ξ_H в (комплексную) поляризацию. При $n=1$ мы просто берем в качестве $\mathscr{F}$ пространство, порожденное ξ_H. При $n>1$ берем $\mathscr{F}$, порожденное ξ_H и векторными полями

$$z_j\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}-z_k\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}.$$

Заметим, что эти дополнительные векторные поля в каждой точке x все лежат в n-мерном пространстве, порожденном векторами

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\bar{z}_n},$$

и все они удовлетворяют уравнению $\langle\xi, \sum z_j d\bar{z}_j\rangle=0$. Эти поля порождают $(n-1)$-мерное подпространство, а значит, вместе с ξ_H они порождают n-мерное пространство $\mathscr{F}_x$. Для того чтобы убедиться в том, что $\mathscr{F}$ — поляризация, достаточно для каждой координатной окрестности U найти такие функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, что $\xi_{\varphi_1}(x), \ldots, \xi_{\varphi_n}(x)$ порождают $\mathscr{F}_x$ для всех $x\in U$. Обозначим через U_k открытое множество в X, определяемое условием $z_k\neq 0$. Пусть $Z_{jk}=z_j/z_k$, так что функция Z_{jk} определена на U_k и

$$\xi_{Z_{jk}}=\frac{2i}{z_k^2}\left(z_k\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}-z_j\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\right),$$

т. е. векторные поля $\xi_{Z_{jk}}$ ($j=1, \ldots, n$; $j \neq k$) и ξ_H порождают $\mathscr{F}$ на U_k. Это показывает, что $\mathscr{F}$ в самом деле поляризация.

Обозначим через S_k определенное на U_k поле реперов

$$S_k = (\xi_{Z_{1k}}, \ldots, \hat{\xi}_{Z_{kk}}, \ldots, \xi_{Z_{nk}}, \xi_H).$$

На $U_j \cap U_k$ имеем $Z_{lj} = Z_{lk}/Z_{jk}$ и, значит,

$$\xi_{Z_{lj}} = \frac{1}{Z_{jk}} \xi_{Z_{lk}} - \frac{Z_{lk}}{Z_{jk}^2} \xi_{Z_{jk}}.$$

Мы можем явно вычислить матрицу перехода $g(k, j)$, где $S_j = S_k g(k, j)$, и непосредственная выкладка показывает, что

$$\det g(k, j) = \left(\frac{z_k}{z_j}\right)^n.$$

Теперь вернемся к вопросу о метаплектических структурах на X. Поскольку $H^2(X, \mathbf{Z}) = 0$, мы знаем, что X допускает метаплектическую структуру. При $n=1$ имеем $H^1(X, \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2$, т. е. на X имеются две метаплектические структуры, в то время как при $n > 1$ имеем $H^1(X, \mathbf{Z}_2) = \{0\}$, т. е. на X имеется единственная метаплектическая структура, поэтому мы должны исследовать эти два случая отдельно. В обоих случаях метаплектическая структура на X эквивалентна (комплексной) металинейной структуре на $\mathscr{F}$. Опишем теперь эти металинейные структуры. При $n=1$ в качестве первой металинейной структуры можно взять структуру, задаваемую сечением ξ_H. Мы полагаем $MB_1(\mathscr{F}) = X \times ML(1, \mathbf{C})$, где

$$\rho(x, \lambda) = \xi_H(x) r(\lambda), \quad r\colon ML(1, \mathbf{C}) \to GL(1, \mathbf{C}).$$

Для выбора другой металинейной структуры обозначим через ε нетривиальный элемент ядра гомоморфизма $r\colon ML(1, \mathbf{C}) \to GL(1, \mathbf{C})$. Мы можем рассматривать плоскость как $(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}$, где $\mathbf{Z}$ действует на $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ так: $(r, \theta) \longmapsto (r, \theta + 2n\pi)$. Пусть $\mathbf{Z}$ действует на $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times ML(1, \mathbf{C})$ следующим образом: $(r, \theta, \lambda) \longmapsto (r, \theta + 2n\pi, \varepsilon^n \lambda)$; положим

$$MB_2(\mathscr{F}) = (\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times ML(1, \mathbf{C}))/\mathbf{Z}.$$

Имеется очевидная проекция $MB_2(\mathscr{F})$ на X и очевидное действие $ML(1, \mathbf{C})$ на $MB_2(\mathscr{F})$, имеющее вид $[r, \theta, \lambda] \times \lambda' \longmapsto [r, \theta, \lambda\lambda']$, где через [ ] обозначен класс эквивалентности mod $\mathbf{Z}$. Имеется отображение $\rho\colon MB_2(\mathscr{F}) \to B(\mathscr{F})$, задаваемое формулой

$$\rho[s, \theta, \lambda] = \xi_H(se^{i\theta}) r(\lambda).$$

Ясно, что оно превращает $MB_2(\mathscr{F})$ в металинейное расслоение над $\mathscr{F}$. Для того чтобы убедиться в том, что это вторая металинейная структура на $\mathscr{F}$, а значит, что она индуцирует вторую метаплектическую структуру на X, выберем сечения следующим образом. Пусть V_1 и V_2 — подмножества в X, задаваемые условиями $0 < \theta < 2\pi$ и $-\pi < \theta < \pi$ соответственно. Положим

$$u_1(re^{i\theta}) = [r, \theta, 1] \quad \text{на} \quad V_1,$$
$$u_2(re^{i\theta}) = [r, \theta, 1] \quad \text{на} \quad V_2.$$

Тогда

$$u_1(re^{i\theta}) = u_2(re^{i\theta}) \quad \text{при} \quad 0 < \theta < \pi,$$

в то время как

$$u_1(re^{i\theta}) = [r, \theta, 1] = [r, \theta - 2\pi, \varepsilon] = u_2(re^{i\theta})\,\varepsilon \quad \text{при} \quad \pi < \theta < 2\pi.$$

Итак, функции перехода в самом деле умножаются на нетривиальный коцикл на X со значениями в $\mathbf{Z}_2$.

При $n > 1$ единственная металинейная структура на $\mathscr{F}$ поднимает сечения s_k до сечений $\tilde{s}_k$, где $\tilde{s}_j = \tilde{s}_k \tilde{g}(k, j)$ для подходящих $\tilde{g}(k, j) \in ML(n, \mathbf{C})$, накрывающих ранее введенные $g(k, j) \in GL(n, \mathbf{C})$.

Обозначим через $U_{\mathscr{F}}(X)$ алгебру Ли комплексных векторных полей, всюду касающихся $\mathscr{F}$. Обозначим через $\bigwedge^{-1/2}(\mathscr{F})$ пространство гладких отрицательных полуформ на $\mathscr{F}$. Векторные поля $\xi \in U_{\mathscr{F}}$ действуют на $\bigwedge^{-1/2}(\mathscr{F})$ как «производные Ли» D_ξ, удовлетворяя обычным правилам для производных Ли. Кроме того, если $\nu \in \bigwedge^{-1/2}(\mathscr{F})$ и $\nu(\mathbf{s}) \equiv 1$, когда $\mathbf{s}$ — такой металинейный репер, что $\rho\mathbf{s} = (\xi_{\varphi_1}, \ldots, \xi_{\varphi_n})$, то $D_\xi\varphi = 0$.

Положим $\alpha = \frac{i}{2} \sum \bar{z}_j\, dz_j$, т. е. $d\alpha = \omega$. Тогда локально постоянные сечения $L \otimes \bigwedge^{-1/2}(\mathscr{F})$ можно отождествить с множеством всех $\varphi \otimes \nu$, удовлетворяющих для всех $\xi \in U_{\mathscr{F}}$ дифференциальным уравнениям

$$(D_\xi\varphi + 2\pi i \langle \xi, \alpha \rangle \varphi) \otimes \nu + \varphi \otimes D_\xi \nu = 0.$$

Начнем исследование этого уравнения со случая $n = 1$, в котором имеются две метаплектические структуры. Для первой метаплектической структуры глобально определен металинейный репер, накрывающий ξ_H, и можно считать ν тождественной единицей на этом репере, т. е. $D_\xi\nu = 0$. Уравнение для локально постоянных сечений $\varphi \otimes \nu$ тогда приобретает вид

$$D_\xi\varphi + 2\pi i \langle \xi, \alpha \rangle \varphi = 0.$$

Мы можем взять $\xi = \partial/\partial\theta$ и, пользуясь рядом Фурье, искать φ вида $\varphi = e^{iK\theta} f(r)$. Поскольку

$$2\pi i \left\langle \frac{\partial}{\partial\theta}, \alpha \right\rangle = \frac{-2\pi}{2} \bar{z} \frac{\partial z}{\partial\theta} = \frac{-2\pi i r^2}{2},$$

получаем

$$\left(K - \frac{2\pi r^2}{2}\right) f = 0.$$

Таким образом, $K/2\pi \geqslant 0$ — целое, и мы видим, что f должна быть обобщенной функцией: она должна быть кратна дельта-функции Дирака $\delta(r - \sqrt{K/\pi})$. Элемент

$$\hat{e}^{iK\theta}\delta(r - \sqrt{2K}) \otimes \nu$$

является собственным вектором гамильтониана $^1/_2 r^2$ с собственным значением $K/2\pi$.

Для второй металинейной структуры введем сечения u_1 и u_2, как выше, и определим ν_1 и ν_2 условиями $\nu_1(u_1) = 1$ и $\nu_2(u_2) = 1$. Далее, $u_1 = u_2$ при $0 < \theta < \pi$ и $u_1 = u_2\varepsilon$ при $\pi < \theta < 2\pi$. Поэтому

$$\nu_2 = \nu_1 \quad \text{при} \quad 0 < \theta < \pi,$$
$$\nu_2 = -\nu_1 \quad \text{при} \quad \pi < \theta < 2\pi.$$

Предположим, что мы ищем локально постоянное сечение вида

$$e^{iK_1\theta} f_1(r) \otimes \nu_1 \quad \text{на} \quad V_1,$$
$$e^{iK_2\theta} f_2(r) \otimes \nu_2 \quad \text{на} \quad V_2.$$

Как и прежде, делаем вывод, что $K_1 = K_2 \geqslant 0$ и что f_1, f_2 кратны $\delta(r - \sqrt{2K/2\pi})$, где $2\pi K = K_1 = K_2$. Кроме того, должно быть $e^{iK(3\pi/2)} = -e^{iK(-\pi/2)}$, т. е. $e^{2\pi i K} = -1$, откуда следует, что $K = N + {}^1/_2$. Таким образом, для второй металинейной структуры N заменяется на $N + {}^1/_2$. Если вновь ввести константы m, ν, h, получим энергетические уровни $\nu\hbar N$ для первой метаплектической структуры и $\nu\hbar(N + {}^1/_2)$ для второй метаплектической структуры, где $\hbar = h/2\pi$.

Теперь легко понять, почему корректная металинейная структура на каждой окружности нетривиальна. Если отождествить $\mathbf{R}^2$ с $T^*\mathbf{R}^1$, то мы получим метаплектическую структуру на $\mathbf{R}^2$, индуцированную структурой на $\mathbf{R}^1$. Из построения метаплектического представления мы знаем, что $\operatorname{Exp}(\pi J/2) \in Mp(1)$ нетривиально действует в метаплектическом представлении, хотя и тождественно действует на $\mathbf{R}^2$. Таким образом, сделав полный оборот, мы должны перейти к другому элементу метаплектического расслоения, а значит, если мы исследуем индуцированное металинейное расслоение на отдельной окружности, то получим нетривиальное расслоение.

При $n > 1$ мы выбираем сечения $\tilde{s}_k$ расслоения $MB(\mathcal{F})$ как выше, и этот выбор определяет полуформы ν_k на U_k условием $\nu_k(\tilde{s}_k) = 1$, т. е. ν_k — локально постоянные полуформы, определенные на U_k и удовлетворяющие условию

$$\nu_k = \chi(\tilde{g}(k, j))\,\nu_j \quad \text{на} \quad U_j \cap U_k,$$

где $\chi(\tilde{g}(k, j))^2 = z_k^n/z_j^n$.

Введем координаты r, θ_k и $Z_{lk} = z_l/z_k$ $(l \neq k)$ на U_k, где $z_k = |z_k| e^{i\theta_k}$ и $r^2 = \sum z_l \bar{z}_l$. На U_k запишем полуформу в виде $\varphi_k \otimes \nu_k$, а условие ее локального постоянства в виде

$$D_\xi \varphi_k + 2\pi i \langle \xi, \alpha \rangle \varphi_k = 0,$$

где ξ пробегает множество векторных полей

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k}, \ \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{1k}}, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{nk}} \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{kk}} \text{ опускается}\right),$$

которые порождают $U_{\mathcal{F}}(X)$ во всех точках множества U_k. Запишем

$$\varphi_k = e^{2\pi i K_k \theta_k} q_k (Z_{1k}, \ldots, \hat{Z}_{kk}, \ldots, Z_{nk}) f_k(r).$$

Переписывая уравнения в виде

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \theta_k} = \frac{2\pi i r^2}{2} \varphi_k,$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{Z}_{jk}} = -\frac{Z_{jk}}{2 \sum Z_{lk} \bar{Z}_{lk}} \frac{2\pi r^2}{2} \varphi_k,$$

мы видим, что

$$f_k = c\delta\left(r - \sqrt{2K_k/2\pi}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{jk}} \log q_k = \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_{jk}} \log \left(\sum Z_{lk} \bar{Z}_{lk}\right)^{-K_k/2},$$

т. е.

$$q_k = \left(\frac{|z_k|}{r}\right)^{K_k} p_k,$$

где p_k голоморфно зависят от переменных Z_{lk} $(l \neq k)$. Итак, локальное выражение для $\varphi_k \otimes \nu_k$ на U_k имеет вид

$$z_k^{K_k} q_k (Z_{1k}, \ldots, \hat{Z}_{kk}, \ldots, Z_{nk}) r^{-K_k} \delta\left(r - \sqrt{2m\nu\hbar K_k}\right) \otimes \nu_k$$

(где мы вновь ввели параметры m, ν и $\hbar$). Поскольку r — корректно определенная функция на X, сравнение особенностей $\varphi_k \otimes \nu_k$ показывает, что $K_k = K$ не зависит от k. Из правил преобразования следует, что

$$z_k^{2K} p_k^2 \left(\frac{z_1}{z_k}, \ldots, \widehat{\frac{z_k}{z_k}}, \ldots, \frac{z_n}{z_k}\right) = \frac{z_k^n}{z_j^n} z_j^{2K} p_j^2 \left(\frac{z_1}{z_j}, \ldots, \widehat{\frac{z_j}{z_j}}, \ldots, \frac{z_n}{z_j}\right).$$

Поскольку p_k и p_j голоморфны, мы получаем, что

$$2K - n = 2N, \quad N = 0, 1, 2, \ldots,$$

и что p_k — полиномы степени не выше N от своих переменных. Они являются собственными векторами для $H = {}^1/_2 m \sum z_j \bar{z}_j$ с собственными значениями

$$\nu\hbar\left(N+\frac{n}{2}\right), \quad N=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

и кратностями

$$\binom{N+n-1}{N}.$$

Итак, мы получили стандартные энергетические уровни и кратности для n-мерного гармонического осциллятора.

Симмс в [6] показал, как применить процедуру квантования к атому водорода. На $S^2 \times S^2$ нужно ввести комплексную поляризацию и затем найти правильные энергетические уровни и кратности для атома водорода вместе со стандартными представлениями $O(4)$. В действительности группа $O(2,\ 4)$ неприводимо действует на пространстве связанных состояний атома водорода и транзитивно действует на пространстве ненулевых кокасательных векторов к S^3, но мы не будем здесь на этом останавливаться.

Приведем теперь вычисления Блаттнера [4], иллюстрирующие пример спаривания между гильбертовыми пространствами, ассоциированными с двумя вещественными поляризациями, которые унитарно связаны, но не связаны по Гейзенбергу. Рассматриваемые поляризации соответствуют двум системам образующих однополостного гиперболоида в $\mathbf{R}^3$, как обсуждалось в § 3, где гиперболоид рассматривался как орбита группы $SL(2,\ \mathbf{R})$, действующей на пространстве, дуальном к ее алгебре Ли.

Как мы отмечали в § 3, $sl(2,\ \mathbf{R})^*$ можно отождествить с $sl(2,\ \mathbf{R})$, которую можно рассматривать как алгебру всех матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

с формой Киллинга $B(A,\ A') = aa' + {}^1/_2(bc' + cb')$.

Мы интересуемся однополостными орбитами $B = \lambda^2 > 0$. Пусть X — такая орбита и $\beta \in X$. Тогда определение ω дает

$$\omega(\hat{\xi}(\beta),\ \hat{\eta}(\beta)) = B(\beta,\ [\eta,\ \xi]) = B([\xi,\ \beta],\ \eta).$$

Если $\beta = (a,\ b,\ c)$ с $b \neq 0$ и мы выбираем $\xi = (0,\ 0,\ -b^{-1})$, так что $\hat{\xi}(\theta) = [\xi,\ \beta] = (1,\ 0,\ -2\ b^{-1})$ и $\eta = ((2b)^{-1},\ 0,\ 0)$, т. е. $\hat{\eta}(\theta) = [\eta,\ \beta] = (0,\ 1,\ -cb^{-1})$, то

$$\omega(\hat{\xi}(\beta),\ \hat{\eta}(\beta)) = B((1,\ 0,\ -2ab^{-1}),\ (2b)^{-1},\ 0,\ 0) = (2b)^{-1},$$

так что в области, где $b \neq 0$,

$$\omega = (2b)^{-1}\, da \wedge db.$$

Поскольку $2a\,da + b\,dc + c\,db = 0$ на X, мы получаем, что имеются другие локальные представления для ω:

$$\omega = \begin{cases} (2b)^{-1}\, da \wedge db, & b \neq 0, \\ (4a)^{-1}\, db \wedge dc, & a \neq 0, \\ (2c)^{-1}\, dc \wedge da, & c \neq 0. \end{cases}$$

Как мы видели в § 3, имеются в точности две инвариантные прямые в каждой точке $\beta \in X$. Мы видели, что в точке $\beta = (\lambda, 0, 0)$ эти прямые имеют вид $c = 0$ и $b = 0$. Групповая инвариантность (или непосредственная проверка) тогда показывает, что инвариантные прямые в произвольной точке имеют вид

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const},$$

где

$$u = \frac{a+\lambda}{b} = \frac{-c}{a-\lambda}, \quad v = \frac{a-\lambda}{b} = \frac{-c}{a+\lambda}.$$

Мы можем использовать u и v как локальные координаты на открытом множестве U, задаваемом условием $b \neq 0$. Выразим a, b, c через u, v:

$$a = \lambda \frac{u+v}{u-v}, \quad b = \frac{2\lambda}{u-v}, \quad c = \frac{-2\lambda uv}{u-v};$$

получим

$$\omega = \lambda\, (u-v)^{-2}\, du \wedge dv.$$

Выберем в качестве поляризаций $\mathcal{F}_1$: $u = \text{const}$ и $\mathcal{F}_2$: $v = \text{const}$.

Если взять в качестве G универсальную накрывающую группы $SL(2, \mathbf{R})$, то множество всех эрмитовых линейных расслоений со связностью, для которых форма кривизны равна ω и которые однородны относительно G, параметризуется характерами группы G_β, отвечающей инфинитезимальному характеру β. Группа G_β является прямым произведением прямой $\{\exp t\beta\}$ и бесконечной циклической группы, порожденной элементом в G, накрывающим $-I$, т. е. $k(\pi)$, где k — однопараметрическая группа, порожденная элементом

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R}).$$

Таким образом, характеры $\chi(t, z)$ имеют вид $\chi(t, z) = e^{2\pi i \lambda a} s^z$, где s — любое комплексное число, по модулю равное единице, т. е. $\chi(t, z) = e^{2\pi i(\lambda a + rz)}$, где r определено $\operatorname{mod} \mathbf{Z}$. Каждое r дает линейное расслоение, и для каждого линейного расслоения можно выбрать сечения s_1 и s_2, являющиеся ковариантными константами вдоль поляризаций $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, задаваемых соответствующими формами α_1 и α_2. Как показал Блаттнер [4] (при помощи непосредственных вычислений), в локальных координатах u, v одну из форм можно выбрать в виде

$$\alpha_1 = -\lambda\left[(u-v)^{-1}\,du - u\,(1+u^2)^{-1}\,du\right] - r\pi^{-1}(1+u^2)^{-1}\,du,$$

а другую — в виде

$$\alpha_2 = -\lambda\left[(u-v)^{-1}\,dv - v\,(1+v^2)^{-1}\,dv\right] - r\pi^{-1}(1+v^2)\,dv.$$

Тогда вычисление показывает, что если $g_2 = g_2(v)$ и $g_1 = g_1(u)$ — функции, постоянные вдоль соответствующих поляризаций, то

$$\begin{aligned}(g_2 s_2 \otimes dv^{1/2},\ g_1 s_1 \otimes du^{1/2}) &= \\ = \iint\limits_{u\neq v} g_2(v)\,\overline{g_1(u)}&\left[\frac{|v-u|}{(1+u^2)^{1/2}(1+v^2)^{1/2}}\right]^{2\pi i\lambda}\times \\ &\times\exp(-2\pi i r\,[\operatorname{arctg} v - \operatorname{arctg} u])\times \\ &\times\exp(i\pi r\,\operatorname{sgn}(v-u))\,|\lambda|^{-1/2}\,|v-u|\,\frac{|\lambda|\,|du\wedge dv|}{|v-u|^2}.\end{aligned}$$

Это спаривание в том виде, в каком оно получилось, дается сингулярным интегралом, но его можно интерпретировать при помощи процедуры аналитического продолжения. Полученный таким образом оператор совпадает (с точностью до обозначений и нормировок) с (унитарным) сплетающим оператором, введенным Кнаппом и Стейном и связывающим унитарные представления G на каждом из гильбертовых пространств $H(\mathcal{F}_1)$ и $H(\mathcal{F}_2)$.

Разобранный выше пример интересен не только тем, что показывает необходимость проявлять осторожность при введении интегралов, задающих спаривание между поляризациями, но еще больше тем, что это пример пары поляризаций, которые унитарно связаны, но не связаны по Гейзенбергу.

Вопрос о геометрическом описании условия, при котором две трансверсальные поляризации унитарно связаны, остается открытым. Мы коснемся некоторых весьма частных результатов в этом направлении для вещественных поляризаций на плоскости. Каждое расслоение в двумерном случае автоматически является поляризацией, так что наша стратегия будет состоять в том, чтобы фиксировать два расслоения на плоскости и менять форму ω. Тогда возникает задача описать формы ω, для которых две заданные поляризации унитарно связаны. Мы будем иметь дело с соответствующей инфинитезимальной ситуацией. А именно, нас будет интересовать, каким условиям удовлетворяет $\dot{\omega} = (d/dt)\,\omega_t|_{t=0}$, если ω_t — кривая симплектических форм, для которых поляризации унитарно связаны.

Пусть $\omega = e^{\rho}\,dx \wedge dy$, где ρ — некоторая гладкая функция на плоскости. Возьмем поляризации вида $x = \mathrm{const}$ и $y = \mathrm{const}$. Пусть

α_x и α_y — формы, определяемые формулами

$$d\alpha_x = \omega, \quad \alpha_x = f\,dx, \quad f(x, 0) = 0,$$
$$d\alpha_y = \omega, \quad \alpha_y = g\,dy, \quad g(0, y) = 0,$$

так что $\alpha_x - \alpha_y = d\varphi$, где

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = e^{\rho}, \quad \varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = 0.$$

Тогда оператор U: $L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$, ассоциированный со спариванием, имеет вид

$$(Uv)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{\mathbf{R}} e^{i\varphi(x, y)} e^{\rho(x, y)/2} v(x)\,dx.$$

Если $\rho \equiv 0$, то $\varphi = xy$ и оператор U, по существу, является преобразованием Фурье. Если положить $\omega_t = e^{t\rho}\,dx \wedge dy$, то

$$\varphi_t = xy + t\psi(x, y) + \ldots,$$

где $$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = \rho, \quad \psi(x, 0) = \psi(0, y) = 0.$$

Полагая $\dot{U}_0 = \left.\frac{dU_t}{dt}\right|_{t=0}$, получаем

$$(\dot{U}_0 f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int e^{ixy}\left(i\psi(x, y) + \frac{1}{2}\rho(x, y)\right) f(x)\,dx,$$

откуда

$$(U_0^{-1}\dot{U}_0 v)(z) = \frac{1}{2\pi} \int k(x, z) f(z)\,dz,$$

где $$k(x, z) = \int e^{i(x-z)y}\left(i\psi(x, y) + \frac{1}{2}\rho(x, y)\right) dy.$$

Если U_t — однопараметрическое семейство унитарных операторов, то $U_t^{-1}\dot{U}_t$ — косоэрмитов оператор и ядро k должно удовлетворять условию $\overline{k(z, x)} = -k(x, z)$, или

$$\int e^{i(x-z)y}\left(-i\psi(x, y) - \frac{1}{2}\rho(x, y)\right) dy =$$
$$= \int e^{i(x-z)y}\left(-i\psi(z, y) + \frac{1}{2}\rho(z, y)\right) dy.$$

Обозначим через $f(x, \eta)$ преобразование Фурье ψ относительно y. Тогда последнее равенство можно переписать так:

$$f(x+\eta, \eta) - f(x, \eta) = \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \eta) + \frac{\partial f}{\partial x}(x+\eta, \eta)\right).$$

Пусть w — преобразование Фурье f по x. Тогда

$$e^{i\xi\eta} w(\xi, \eta) - w(\xi, \eta) = \frac{i\xi\eta}{2}\left(w(\xi, \eta) + e^{i\xi\eta} w(\xi, \eta)\right),$$

или

$$w(\xi, \eta)(e^{i\xi\eta}-1)=w(\xi, \eta)\frac{i\xi\eta}{2}(e^{i\xi\eta}+1),$$

или

$$w(\xi, \eta)\left(\frac{\xi\eta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\xi\eta}{2}\right)=0.$$

Поскольку уравнение $x-\operatorname{tg} x=0$ имеет корень кратности 3 в начале и простой корень r_K на каждом интервале $(-\pi/2+K\pi, \pi/2+K\pi)$ при $K\neq 0$, то w должна быть сосредоточена на объединении конуса $\xi\eta=0$ и гипербол $\xi\eta=r_K$. Предположим, что w сосредоточена на K-й гиперболе. Поскольку r_K — простой корень,

$$\left(\frac{\xi\eta}{2}-r_K\right)w=0,$$

или после взятия обратного преобразования Фурье

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\psi+r_K\psi=0,$$

откуда при граничных условиях $\psi(x, 0)=\psi(0, y)=0$ следует, что $\psi\equiv 0$. Предположим теперь, что w сосредоточена на $\xi\eta=0$. Поскольку нуль — трехкратный корень уравнения $x-\operatorname{tg} x=0$, имеем $(\xi\eta)^3 w=0$. Значит, $\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\right)^3\psi=0$. Поскольку $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\psi=\rho$, мы получаем условие

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\right)^2\rho=0.$$

Интересно сравнить это условие с (инфинитезимальным) условием связанности поляризаций по Гейзенбергу, которое имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\right)\rho=0.$$

Унитарное условие включает квадрат оператора $(\partial^2/\partial x\,\partial y)$, в то время как условие Гейзенберга — сам оператор. Это наводит на мысль, что класс унитарно связанных поляризаций довольно ограничен. Было бы очень полезно провести эти рассмотрения более строго и понять геометрический смысл унитарности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kostant B. Quantization and unitary representations. I. Prequantization, Lectures in modern analysis and applications, III. — Lecture Notes in Math., vol. **170**, Springer-Verlag, Berlin, 1970, pp. 87—208.
2. Souriau J.-M. Structure des systèmes dynamiques. Maîtrises de mathématiques. — Dunod, Paris, 1970.
3. Auslander L., Kostant B. — *Invent. Math.*, **14** (1971), 255—354.
4. Blattner R. J. Quantization and representation theory. — Proc. Sympos. Pure Math., vol. **26**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1973, pp. 147—165.

5. Kostant B. Symplectic spinors. — Conv. di Geom. Simp. Fis. Mat., INDAM, Rome, 1973.
6. Simms D. J. — *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **73** (1973), 489—491.
7. Simms D. J. Metalinear structures and a geometric quantization of the harmonic oscillator. — Int. Coll. Sympos. Geom., Aix en Provence, 1974.
8. Sternberg S. — *Amer. J. Math.*, **79** (1957), 809—824.
9. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
10. Newlander A., Nirenberg L. — *Ann. of Math.* (2) **65** (1957), 391—404. [Имеется перевод в сб. *Математика*, **3**:6 (1959), 131—145.]
11. Renouard P. Thése. — Paris, 1972.
12. Weil A. — *Acta Math.*, **111** (1964), 143—211.
13. Shale D. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103** (1962), 149—167.
14. Loos O. Symmetric spaces, I, II. — Benjamin, New York and Amsterdam, 1969.
15. Rawnsley J. H. — *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **78** (1975), 345—350.
16. Souriau J.-M. Construction explicite de l'indice de Maslov applications (в печати).
17. Bargmann V. In: Analytic methods in mathematical physics. — Gordon & Breach, 1970, pp. 27—63.
18. Sternberg S., Wolf J. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, **238** (1978), 1—43.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В этой главе мы будем изучать поведение распределений при гладких отображениях многообразий. Мы начнем с элементарных свойств, касающихся опускания (push forward) и поднятия (pull back) распределений, и воспользуемся этими результатами для вывода некоторых интересных формул. Затем мы покажем (существенно используя преобразование Радона), как разложить распределение в суперпозицию распределений более простого вида, и воспользуемся этим разложением, чтобы ввести понятие волнового фронта — подмножества в кокасательном расслоении, отвечающего сингулярным конаправлениям распределений. Введя специальный класс распределений на прямой и расширив его так, чтобы он стал замкнут относительно функториальных операций, мы получим класс распределений, у которых волновые фронты являются лагранжевыми подмногообразиями и которые, по существу, эквивалентны «интегральным операторам Фурье», введенным Хёрмандером. Мы разовьем исчисление этих операторов и ассоциированное исчисление символов и приведем несколько применений этих результатов.

§ 1. *Элементарные функториальные свойства распределений*

Пусть f: $X \to Y$ — гладкое отображение. Если u — некоторая C^∞-функция на Y, то $f^*u = u \circ f$ — это C^∞-функция на X. Таким образом, f индуцирует линейное отображение f^* из $C^\infty(Y)$ в $C^\infty(X)$, где через $C^\infty(X)$ обозначено пространство всех C^∞-функций на X. На $C^\infty(X)$ можно ввести топологию — топологию равномерной сходимости с любым конечным числом производных на каждом компактном подмножестве. (Здесь имеются в виду производные относительно некоторой локальной системы координат. Можно выбрать разбиение единицы, подчиненное координатному покрытию, и написать $u = \sum \varphi u$, а затем дифференцировать каждое φu относительно локальных координат, ассоциированных с φ.) Легко проверить, что f^*: $C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ — непрерывное линейное отображение.

Обозначим через $C_0^\infty(X)$ пространство C^∞-функций на X с компактным носителем; его можно наделить более сильной топологией — последовательность функций $u \in C_0^\infty(X)$ сходится, если все $\operatorname{supp} u$ лежат в некотором *фиксированном* компактном множестве K и u сходятся в $C^\infty(X)$. Если f — собственное отображение, то f^*: $C_0^\infty(Y) \to C_0^\infty(X)$ и это отображение непрерывно относительно указанной топологии.

Распределение на X — это непрерывный линейный функционал на $C_0^\infty(X)$. Отсюда следует, что если f — собственное гладкое отображение из X в Y и ν — распределение на X, то $f_*\nu$ — распределение на Y, где

$$\langle u, f_*\nu\rangle = \langle f^*u, \nu\rangle. \tag{1.1}$$

Если на этих пространствах распределений ввести слабую топологию, то отображение f_* будет непрерывно.

Носитель распределения определяется следующим образом. Точка x *не принадлежит* $\operatorname{supp}\nu$, если существует такая окрестность U точки x, что $\langle w, \nu\rangle = 0$, когда $\operatorname{supp} w \subset U$. Если ν — распределение с компактным носителем, то оно определяет линейный функционал на $C^\infty(X)$. Действительно, пусть φ — некоторая C^∞-функция с компактным носителем, такая, что $\varphi \equiv 1$ в некоторой окрестности $\operatorname{supp}\nu$. Тогда для любой $w \in C^\infty(X)$ положим

$$\langle w, \nu\rangle = \langle \varphi w, \nu\rangle$$

и заметим, что это выражение не зависит от выбора φ. Из этого определения ясно, что $f_*\nu$ определено (по (1.1)) для любого гладкого отображения f, собственного или нет, если ν имеет компактный носитель. (Более общо, $f_*\nu$ определено, если множество $f^{-1}(K) \cap \operatorname{supp}\nu$ компактно для каждого компакта $K \subset Y$, т. е. если $f|_{\operatorname{supp}\nu}$ — собственное.)

Хороший пример распределения на X дается гладкой плотностью ρ на X; соответствующий линейный функционал имеет вид

$$u \longmapsto \int_X u\rho.$$

Поэтому мы будем рассматривать распределение как «обобщенную плотность». Это позволит нам согласовать терминологию. Если через $|\wedge|(X)$ обозначено линейное расслоение плотностей, то через $C^\infty(|\wedge|(X))$ будет обозначаться пространство гладких плотностей, а через $C^{-\infty}(|\wedge|(X))$ — пространство обобщенных плотностей. Спаривание между $\rho \in C^{-\infty}(|\wedge|(X))$ и $u \in C_0^\infty(X)$ будем записывать в виде

$$\langle u, \rho\rangle \quad \text{или} \quad \int_X u \cdot \rho;$$

второе обозначение интерпретируется как интеграл лишь для тех ρ, которые в самом деле являются плотностями.

Более общо, если E — векторное расслоение над X, мы будем обозначать через $C^{\infty}(E)$ пространство гладких сечений E, а через $C^{-\infty}(E)$ — пространство обобщенных сечений E. Обобщенное сечение E — это непрерывный линейный функционал на .

$$C_0^{\infty}(E^* \otimes |\Lambda|(X)).$$

Например, обобщенная функция должна быть непрерывным линейным функционалом на $C_0^{\infty}(|\Lambda|(X))$, т. е. непрерывным линейным функционалом на пространстве гладких плотностей с компактным носителем. *Обобщенная плотность* — это непрерывный линейный функционал на $C_0^{\infty}(|\Lambda|^*(X) \otimes |\Lambda|(X))$, которое изоморфно $C_0^{\infty}(X)$, поскольку расслоение $L^* \otimes L$ канонически тривиально для любого линейного расслоения L. Понятия носителя и т. д. сохраняют смысл, и то же относится к двум обозначениям для спаривания между $u \in C_0^{\infty}(E)$ и $\rho \in C^{-\infty}(E^* \otimes |\Lambda|(X))$. Если бы здесь ρ было настоящим сечением $E^* \otimes |\Lambda|(X)$, то $u \cdot \rho$ означало бы плотность, полученную путем отображения $u \otimes \rho \longmapsto u \cdot \rho$, задаваемого отображением $E \otimes E^* \otimes |\Lambda|(X) \to |\Lambda|(X)$.

Для того чтобы ввести понятия *поднятия* и *опускания* для векторных расслоений, нам потребуется понятие морфизма векторных расслоений. Пусть $E \to X$ и $F \to Y$ — векторные расслоения. Напомним, что f: $E \to F$ — морфизм, если f определяет отображение $X \to Y$ и гладкое сечение $\operatorname{Hom}(f^{\#}F, E)$, т. е. линейное отображение $r(x)$: $F_{f(x)} \to E_x$, гладко зависящее от x. Тогда f^*: $C^{\infty}(F) \to C^{\infty}(E)$ определяется как $f^*u(x) = r(x)\, u(f(x))$, и если f собственное, то f^*: $C_0^{\infty}(F) \to C_0^{\infty}(E)$. Аналогично,

$$f_*: C_0^{-\infty}(E^* \otimes |\Lambda|(X)) \to C_0^{-\infty}(F^* \otimes |\Lambda|(Y))$$

определяется формулой (1.1), и если f собственное, то определено также

$$f_*: C^{-\infty}(E^* \otimes |\Lambda|(X)) \to C^{-\infty}(F^* \otimes |\Lambda|(Y)).$$

Итак, *сечения поднимаются* (pull back), *а обобщенные сечения опускаются* (push forward).

Во избежание путаницы в обозначениях вернемся назад к случаю тривиального расслоения, т. е. к функциям и обобщениым плотностям. Предположим, что обобщенная плотность ν является мерой. Это означает, что ν продолжается до функционала на $C_0^0(X)$ — пространстве непрерывных функций с компактным носителем. (Или, иначе, это означает, что ν непрерывна на $C_0^{\infty}(X)$ в C_0^0-топологии.) Тогда (1.1) имеет смысл для непрерывных функций u и, значит, $f_*\nu$ — снова мера. Итак, опускание меры — мера. Возникает вопрос: если опустить гладкую плотность, будет ли она по-прежнему гладкой? Вообще говоря, ответ отрицателен. Например, если X — точка и $f(X)=y\in Y$, то $\langle u, f_*\nu\rangle = au(y)$ для некоторой константы a, так что $f_*\nu$ не является гладкой (за исключением случая $a=0$ или $\dim Y=0$).

С другой стороны, если f: $X\to Y$ — субмерсия и ρ — гладкая плотность с компактным носителем на X, то $f_*\rho$ — гладкая плотность на Y; она получается интегрированием по слоям. В самом деле, для каждого $y\in Y$ и каждого $x\in f^{-1}(y)$ мы можем отождествить пространство $|\wedge|(TX_x)$ с $|\wedge|T(f^{-1}(y))\otimes|\wedge|TY_y$, и, значит, плотность ρ, ограниченную на слой $f^{-1}(y)$, можно понимать как плотность вдоль этого слоя со значениями на прямой плотностей в y. Мы можем проинтегрировать ее по слою и получить плотность σ на Y, которая будет гладкой. Если u — любая гладкая функция на Y, то

$$\int (f^*u)\,\rho = \int u\sigma,$$

поскольку u зависит только от y и интеграл по X — это повторный интеграл, первый по слою, а второй по Y. (Те же соображения работают, если ρ не обязательно имеет компактный носитель, но f — собственное.)

(Эти рассуждения проходят также и для морфизмов векторных расслоений. На этот раз $r(x)^*$: $E_x^*\to F_y^*$, т. е. если ρ — сечение $E^*\otimes|\wedge|(X)$, то $r(x)^*\rho(x)$ можно отождествить с плотностью на слое в точке x со значениями в векторном пространстве $F_y^*\otimes\otimes|\wedge|(Y)_y$. Значит, интегрирование по слою дает настоящее сечение $F^*\otimes|\wedge|(Y)$.)

Итак, *при субмерсиях гладкие плотности опускаются, а значит, обобщенные функции поднимаются.*

(Или, более общо, если $E\to F$ — гладкий морфизм, то гладкие сечения $E^*\otimes|\wedge|(X)$ с компактным носителем опускаются, а значит, обобщенные сечения F поднимаются.)

Для иллюстрации возможных применений приведенного результата предположим, что f: $X\to Y$ — не обязательно субмерсия. Пусть $A_f\subset X$ — множество критических точек f, т. е. множество таких x, что $\operatorname{rank} df_x<\dim Y$. Пусть ρ — гладкая плотность с компактным носителем на X, т. е. $f_*\rho$ — мера на Y Нас интересует, будет ли $f_*\rho$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на Y. Мы утверждаем, что если A_f имеет меру нуль на X, то $f_*\rho$ абсолютно непрерывна на Y. Обратно, если A_f имеет ненулевую меру, то можно найти такую ρ, что $f_*\rho$ не будет абсолютно непрерывной. Действительно, пусть $C_f=f(A_f)$ — множество критических значений. Тогда по теореме Сарда C_f имеет меру нуль. Пусть $C_{f,\rho}=f(A_f\cap\operatorname{supp}\rho)$. Тогда $C_{f,\rho}$ компактно и имеет меру нуль. Мы знаем, что $f_*\rho$ гладкая на $Y-C_{f,\rho}$. С другой стороны, если A_f имеет меру нуль, то ясно, что

$$\int_{C_{f,\rho}} f_*\rho = \int_{f^{-1}(C_{f,\rho})} \rho = \int_{A_f} \rho + \int_{(X-A_f)\cap f^{-1}(C_{f,\rho})} \rho.$$

Первый интеграл равен нулю, поскольку A_f имеет меру нуль. Второй интеграл равен нулю, поскольку f — субмерсия на $X-A_f$. Значит, $f_*\rho$ дает нуль при интегрировании по любому множеству меры нуль. Обратно, если A_f имеет положительную меру Лебега, то можно найти такую гладкую плотность ρ, что $\int_{A_f} \rho \neq 0$.

Мы видели, как обобщенные функции поднимаются при субмерсиях. Если $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ — две субмерсии, то легко проверить, что при применении к обобщенным функциям на Z

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^*.$$

Это позволяет определить поднятия некоторых обобщенных сечений, даже когда f не является субмерсией. Действительно, предположим, что u — обобщенная функция на Y вида

$$u = g^* v,$$

где v — обобщенная функция на Z, а $g\colon Y \to Z$ — субмерсия. Предположим, что отображение $f\colon X \to Y$ не обязательно является субмерсией, но $g \circ f\colon X \to Z$ — субмерсия. Тогда можно было бы положить $f^*u = (g \circ f)^* v$. Конечно, надо еще показать, что это определение не зависит от выбора представления, т. е. если $g'\colon Y \to Z'$, где $g'^*v' = u$, то $(g' \circ f)^* v' = (g \circ f)^* v$. Это действительно верно. В § 3 мы докажем значительно более общий результат. Поэтому мы отложим доказательство, однако проведем некоторые вычисления, использующие это определение.

Предположим, что w — гладкая функция на Y и $u = wg^*v$, где $g\colon Y \to Z$ — субмерсия, а v — обобщенная функция на Z. (Произведение гладкой функции w и обобщенной функции a определяется как $\langle w \cdot a, \rho\rangle = \langle a, w\rho\rangle$.) Тогда, если $g \circ f$ — субмерсия, можно положить

$$f^*u = f^*wf^*g^*v = f^*w\,(g \circ f)^* v.$$

Опять-таки корректность этого определения будет доказана в § 3.

Предположим, что $Z = \mathbf{R}$ и $v = \delta$ — дельта-функция в начале на $\mathbf{R}$. Значит, $\langle \delta, a\,dt\rangle = a(0)$, если t — стандартная координата на $\mathbf{R}$ и dt — стандартная плотность. Обобщенную функцию $g^*\delta$ можно описать следующим образом. Пусть

$$W = g^{-1}(0);$$

поскольку g — субмерсия, это подмногообразие. Каждая плотность ρ может быть представлена на W в виде $\sigma \otimes dg$, где σ — плотность

вдоль W. Тогда
$$\langle g^*\delta,\ \rho\rangle = \int\limits_W \sigma.$$

Рассматривая $wg^*\delta$, получаем $\langle wg^*\delta,\ \rho\rangle = \int\limits_W w\sigma$. Можно заменить функцию g на функцию g', отвечающую тому же W, и получить ту же обобщенную функцию, если только соответствующим образом изменить w. Действительно, $g = h'g'$ для некоторой функции h', которая не равна нулю на W. Тогда $dg = h'\,dg'$ на W и
$$\rho = \sigma \otimes dg = \sigma' \otimes dg',$$
где $\sigma' = \sigma h'$. Поэтому мы должны взять $w = (h')^{-1} w'$. Следовательно, можно считать w коэффициентом в сечении $|\bigwedge|^{-1}(NW)$, где NW — нормальное расслоение к W. Тогда $wg^*\delta$ определяет сечение $|\bigwedge|^{-1}(NW)$. Поскольку
$$|\bigwedge|(Y) = |\bigwedge|(W) \otimes |\bigwedge|(NW)$$
вдоль W, мы можем спарить сечение $|\bigwedge|^{-1}(NW)$ с сечением $|\bigwedge|(Y)$ (с компактным носителем) и получить плотность вдоль W, которую затем проинтегрировать и в результате получить число.

Если $Z = \mathbf{R}^k$ и δ — это δ-функция в начале $\mathbf{R}^k$, то все остается неизменным, только W теперь имеет коразмерность k. Кроме того, если $F \to Y$ — векторное расслоение и мы возьмем тривиальное линейное расслоение над $\mathbf{R}^k$, то морфизм из F в тривиальное расслоение над $\mathbf{R}^k$ даст сечение $(r(y)\,1)$ расслоения F вдоль W.

Таким образом, если F — векторное расслоение над Y, мы определяем δ-сечение вдоль подмногообразия W в Y как гладкое сечение u расслоения $F|_W \otimes |\bigwedge|^{-1}(NW)$, где
$$\langle u,\ \rho\rangle = \int\limits_W u\rho|_W$$
для любого сечения ρ расслоения $F^* \otimes |\bigwedge|(Y)$. (Это определение имеет смысл для собственно иммерсированных подмногообразий в той же мере, что и для вложенных.)

Если $W = g^{-1}(0)$, где $g\colon Y \to \mathbf{R}^k$, и если $f\colon X \to Y$, то $g \circ f$ — субмерсия тогда и только тогда, когда f трансверсально W. В этом случае $f^{-1}(W)$ — подмногообразие в X и $df\colon TX_x \to TY_y$ порождает отображение $Tf^{-1}(W)_x \to TW_y$ при $x \in f^{-1}(W)$ и в результате индуцирует изоморфизм
$$df^*\colon\ (NW)_y \to (Nf^{-1}W)_x,$$
а значит, и $|\bigwedge|^{-1} NW_y \to |\bigwedge|^{-1} N(f^{-1}W)_x$. Пусть $u = g^*\delta$ — это δ-сечение вдоль W. Тогда $f^*u = (g \circ f)^*\delta$ — это δ-сечение вдоль $f^{-1}W$. Если рассматривать u как сечение $F \otimes |\bigwedge|^{-1} NW$, то $r \otimes df^*$ задает отображение
$$F_y \otimes |\bigwedge|^{-1} NW_y \to E_x \otimes |\bigwedge|^{-1} Nf^{-1}W_x$$

при $x \in f^{-1}W$ и $y = f(x)$, а значит, определяет отображение f^* сечений $F \otimes |\Lambda|^{-1} NW$ в сечения $E \otimes |\Lambda|^{-1} Nf^{-1}W$. Из определений следует, что два способа определения f^*u — как поднятия сечения вдоль W и как $(g \circ f)^* \delta$ — совпадают. (Определение на языке сечений несколько более общее, поскольку оно имеет смысл для собственно иммерсированных подмногообразий.)

Предположим, что $x_1, \ldots, x_m$ — координаты на $U \subset X$, такие, что $f^{-1}W \cap U$ задается уравнениями $x_1 = \ldots = x_k = 0$, а $y_1, \ldots, y_n$ — координаты на $V \subset Y$ (с $f(U) \subset V$), для которых $y_1 = \ldots = y_k = 0$ описывает $W \cap V \subset V$. Тогда сечение $F \otimes |\Lambda|^{-1} NW$ можно представить в виде $u = s \otimes |dy_1 \ldots dy_k|^{-1}$ и f^*u будет сечением вида

$$f^*u = \frac{(rs)}{|J_f|} \otimes |dx_1 \ldots dx_k|^{-1}, \tag{1.2}$$

где J_f — якобиан

$$J_f = \det \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 \ldots \partial f_k/\partial x_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \partial f_1/\partial x_k \ldots \partial f_k/\partial x_k \end{bmatrix}.$$

Это дает локальное выражение (вдоль $f^{-1}W$) поднятия δ-сечения вдоль W.

Исследуем теперь опускание δ-сечения. Пусть $f\colon X \to Y$ и ρ — это δ-сечение расслоения плотностей вдоль подмногообразия $Z \subset X$. По определению, ρ — это сечение расслоения $|\Lambda|(X)|_Z \otimes \otimes |\Lambda|^{-1}(NZ) \sim |\Lambda|(Z)$, т. е. ρ определяет гладкую плотность вдоль Z. Если v — функция на Y, то $\langle f^*v, \rho \rangle = \int (f|_Z)^* v \cdot \rho$. Другими словами,

$$f_*\rho = (f|_Z)_* \rho, \tag{1.3}$$

где слева ρ рассматривается как δ-сечение расслоения плотностей на X, а справа — как гладкая плотность на Z. Если $E \to X$ и $F \to Y$ — векторные расслоения с морфизмом f, а ρ — это δ-сечение $E^* \otimes |\Lambda|(X)$, то ρ можно рассматривать как гладкое сечение $(E|_Z)^* \otimes |\Lambda|(Z)$ и (1.3) снова имеет место.

Отметим одно следствие из (1.3). Предположим, что $f|_Z$ — субмерсия. Тогда $f_*\rho$ — гладкая плотность (или гладкое сечение $F^* \otimes |\Lambda|(Y)$). Например, предположим, что $f\colon X \to Y$ — субмерсия и $Z \subset X$ пересекает каждый слой трансверсально. Тогда $f|_Z$ — субмерсия. Значит, в этом случае опускание δ-плотности вдоль Z — гладкая плотность.

Приведем интересный пример δ-плотности. Пусть $h\colon W \to X$ — дифференцируемое отображение. Тогда можно было бы считать, что $h^*\colon C^\infty(X) \to C^\infty(W)$ задается обобщенным ядром на $W \times X$, т. е.

$$h^*u = \int k(w, x)\, u(x)\, |dx|,$$

так что k рассматривается как обобщенное сечение $|\wedge|(X)$ (где мы для краткости пишем $|\wedge|(X)$ вместо $\pi_X^*|\wedge|(X)$, рассматриваемого как расслоение на $W\times X$). В локальных координатах x и w напишем

$$k(w, x)=\delta(x-h(w))\,|dx| \quad \text{или} \quad k=(x-h)^*\,\delta\otimes|dx|,$$

где δ — это δ-функция на $\mathbf{R}^n$, $n=\dim X$, и, далее,

$$u(h(w))=\int\delta(x-h(w))\,u(x)\,|dx|.$$

Наша задача — дать интерпретацию выражению $\delta(x-h(w))\,|dx|$ как локальному выражению глобально определенного δ-сечения $|\wedge|(X)$ вдоль $Z=\operatorname{graph} h$. Проекция $W\times X$ на X определяет изоморфизм между $N(Z)_z$ и T^*X_x, где $z=(w, x)\in Z$. Мы получаем изоморфизм между $|\wedge|(X)_x$ и $|\wedge|(N(Z))_z$, а значит, отмеченное сечение расслоения

$$|\wedge|(X)\otimes|\wedge|^{-1}(NZ).$$

Это дает δ-сечение k расслоения $|\wedge|(X)$. Покажем, что это сечение совпадает с $\delta(x-h(w))\,|dx|$. Пусть x, w — локальные координаты. Тогда $d(x-h)$ порождает нормальное расслоение к Z и мы отождествляем dx с $d(x-h)$, т. е. наше отмеченное сечение имеет вид $|dx|\otimes|d(x-h)|^{-1}$ вдоль Z. Но δ-сечение $(x-h)^*\delta$ — это в точности $|d(x-h)|^{-1}$ (где мы пишем $|d(x-h)|$ вместо $|d(x_1-h_1)\ldots d(x_n-h_n)|$). Исследуем теперь, что произойдет, если умножить k на некоторую функцию u, а затем опустить на W. Чтобы опустить на W (в нашей схеме), мы должны считать k δ-сечением некоторого расслоения плотностей на $W\times X$. Для этого запишем $|\wedge|(W\times X)=|\wedge|(W)\otimes|\wedge|(X)$, так что $|\wedge|(X)=$ $=|\wedge|^{-1}(W)\otimes|\wedge|(W\times X)$. Значит, k — это δ-сечение расслоения плотностей для $|\wedge|^{-1}(W)$, т. е. сечение $|\wedge|^{-1}(W)\otimes|\wedge|^{-1}(NZ)\otimes$ $\otimes|\wedge|(W\times X)=|\wedge|^{-1}(W)\otimes|\wedge|^{-1}(NZ)\otimes|\wedge|(X)\otimes|\wedge|(W)$, и, по построению, это δ-сечение расслоения плотностей получается при помощи отождествления $|\wedge|(NZ)$ с $|\wedge|(X)$, а значит, дает каноническое сечение $|\wedge|^{-1}(W)\otimes|\wedge|(W)$. Поскольку π: $\operatorname{graph} h\to W$ — диффеоморфизм, интегрирование по слою — тривиальная операция и, значит, π_*ku — гладкая функция на W и

$$\pi_*(ku)(w)=u(h(w)).$$

Предположим, что f: $Y\to W\times X$ трансверсально $\operatorname{graph} h$. Тогда мы можем образовать f^*k и получить δ-сечение $f^\#|\wedge|(X)$ вдоль $f^{-1}(\operatorname{graph} h)$. Применим это к случаю $W=X$ и возьмем $Y=X$, где $f=\Delta$ — диагональное отображение, т. е. $\Delta(x)=(x, x)$. Тогда $\pi\circ\Delta=\mathrm{id}$, так что мы можем отождествить $\Delta^\#|\wedge|(X)$ с $|\wedge|(X)$. Сказать, что Δ трансверсально $\operatorname{graph} h$, — это то же самое, что сказать: h — отображение Лефшеца, т. е. h имеет изолированные неподвижные точки и $\mathrm{id}-dh$ обратимо в каждой из этих неподвижных точек. Тогда $\Delta^{-1}(\operatorname{graph} h)$ совпадает с множеством неподвижных точек и $\Delta^* k$ будет δ-сечением $|\Lambda|(X)$ в этих точках. Для вычисления $\Delta^* k$ пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в окрестности неподвижной точки p, задаваемой условиями $x_1 = \ldots = x_n = 0$, и пусть $y_1, \ldots, y_n$, $z_1 - h_1(y), \ldots, z_n - h_n(y)$ — координаты в окрестности $\operatorname{graph} h$, т. е. $\operatorname{graph} h$ задается приравниванием нулю *последних* n координат. Тогда

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, x_1 - h_1(x), \ldots, x_n - h_n(x)),$$

и в силу (1.2) около p имеем

$$\Delta^* k = \frac{1}{|\det(\mathrm{id} - dh_p)|} |dx| \otimes \delta(x_1, \ldots, x_n).$$

Если X компактно, мы можем проинтегрировать это обобщенное сечение расслоения плотностей (т. е. образовать $\pi_* \Delta^* k$, где теперь $\pi\colon X \to \mathrm{pt}$ — отображение X в точку). Получим

$$\pi_* \Delta^* k = \sum_{h(p) = p} \frac{1}{|\det(\mathrm{id} - dh_p)|}.$$

Если бы k было гладким ядром, $k = k(x, y)\,dx$, то последовательность операций $\pi_* \Delta^* k$ привела бы к $\int k(x, x)\,dx$ и предыдущее равенство можно было бы переписать в более понятном виде

$$\int k(x, x) = \sum \frac{1}{|\det(\mathrm{id} - dh_p)|}.$$

Легко перенести эти рассмотрения на случай морфизма векторных расслоений. Здесь с h связан также элемент $r \in \operatorname{Hom}(E_{h(x)}, E_x)$, и k можно считать обобщенным сечением расслоения $\operatorname{Hom}(E_2, E_1) \otimes \otimes |\Lambda|(X)$, где E_1 — расслоение E, поднятое на $X \times X$ при помощи проекции на первый сомножитель, а E_2 — поднятие E при помощи второй проекции. Тогда $\Delta^* k$ будет δ-сечением $\operatorname{Hom}(E, E) \otimes |\Lambda|(X)$ и, стало быть, $\operatorname{tr} \Delta^* k$ будет сечением $|\Lambda|(X)$. Получаем формулу

$$\pi_* \operatorname{tr} \Delta^* k = \sum_{h(p) = p} \frac{\operatorname{tr} r_p}{|\det(\mathrm{id} - dh_p)|}. \tag{1.4}$$

В следующем параграфе мы укажем несколько интересных применений этой формулы.

Исследуем ситуацию, когда $W = G \times X$, где G — группа Ли, а отображение $h\colon G \times X \to X$ — групповое действие, т. е. $h(a, h(b, x)) = h(ab, x)$. Возьмем $Y = G \times X$, а в качестве f — диагональное отображение Δ, где $\Delta(a, x) = (a, x, x)$. Тогда

$$\Delta^{-1}(\operatorname{graph} h) = \{(a, x) \mid h(a, x) = x\}.$$

Исследуем условие, при котором отображение Δ трансверсально $\operatorname{graph} h$ в некоторой точке (a, x), где $h(a, x) = x$. Образ $d\Delta_{(a, x)}$

состоит из всех векторов вида (ζ, ξ, ξ), где $\xi \in TX_x$ и $\zeta \in g$; g — алгебра Ли группы G, т. е. касательное пространство к G в e, рассматриваемое как множество левоинвариантных векторных полей на G, так что ζ определяет касательный вектор $\zeta_a \in TG_a$. Если $\exp t\zeta$ — однопараметрическая подгруппа, порожденная ζ, то

$$h(a \exp t\zeta, x) = h(a, h(\exp t\zeta, x)).$$

Пусть $\bar{\zeta}$ — векторное поле на X, соответствующее элементу ζ, т. е. $\bar{\zeta}$ — инфинитезимальная образующая однопараметрической подгруппы $h(\exp t\zeta, \cdot)$. Из приведенного выше равенства следует, что касательное пространство к $\operatorname{graph} h$ состоит из всех векторов вида $(\zeta, \xi, d\bar{a}_x(\bar{\zeta}_x + \xi))$, где $\xi \in TX_x$, $\zeta \in g$ и где через $\bar{a}$ обозначено преобразование $z = h(a, z)$. Заметим, что

$$h(a, h(\exp t\zeta, x)) = h(a(\exp t\zeta), x) = h(a(\exp t\zeta) a^{-1}, h(a, x)) = \\ = h(a(\exp t\zeta) a^{-1}, x),$$

поскольку $h(a, x) = x$. Значит, $da_x(\bar{\zeta}_x) = \overline{(\mathrm{Ad}_a\zeta)}_x$, а потому касательное пространство к $\operatorname{graph} h$ состоит из всех векторов вида

$$(\zeta, \xi, \overline{(\mathrm{Ad}_a\zeta)}_x + d\bar{a}_x\xi), \quad \text{где} \quad \xi \in TX_x \quad \text{и} \quad \zeta \in g.$$

Пересечение $\operatorname{im} d\Delta_{(a, x)}$ с касательным пространством к $\operatorname{graph} h$ состоит из векторов вида (ζ, ξ, ξ), где

$$\xi - da_x\xi = \overline{(\mathrm{Ad}_a\zeta)}_x.$$

Поскольку $\dim \operatorname{graph} h = \dim G \times X = \dim G + \dim X$, в то время как $\dim G \times X \times X = \dim G + 2 \dim X$, то необходимое и достаточное условие трансверсальности состоит в том, что размерность рассматриваемого пересечения равна $\dim G$. Далее, касательное пространство к орбите, проходящей через x, порождает подпространство в пересечении, которое уже имеет размерность, равную $\dim G$. Действительно, предположим, что

$$\xi = \bar{\zeta}'_x, \quad \text{где} \quad \zeta' \in g \quad \text{и} \quad \zeta - \mathrm{Ad}_{a^{-1}}(\zeta' - \mathrm{Ad}_a \zeta') \in g_x;$$

здесь g_x — это алгебра изотропии точки x, т. е. множество всех $\eta \in g$ с $\bar{\eta}_x = 0$. Тогда ясно, что (ζ, ξ, ξ) лежит в пересечении. Для каждого такого фиксированного ξ пространство соответствующих ζ имеет размерность, равную $\dim g_x$, в то время как для ξ размерность равна $\dim g - \dim g_x$. Таким образом, трансверсальность эквивалентна тому, что имеются только такие решения. Обозначим через O_x орбиту, проходящую через x. Отображение da_x пространства TX_x в себя сохраняет касательное пространство к орбите. Обозначим через $P_{a,x}$ индуцированное отображение факторпространства TX_x/TO_x. Тогда можно подытожить предыдущее обсуждение в виде следующего утверждения:

Отображение Δ трансверсально $\operatorname{graph} h$ *в точке* (a, x) *тогда и только тогда, когда отображение* $\mathrm{id} - P_{a,x}$ *биективно.*

Заметим, что если bx — какая-нибудь другая точка на орбите O, то $(bab^{-1})\,bx = bx$ и отображения $P_{a,x}$ и $P_{bab^{-1},\,bx}$ сопряжены. Поэтому Δ трансверсально $\operatorname{graph} h$ в точке (a, x) тогда и только тогда, когда оно трансверсально в точке (bab^{-1}, bx).

Пусть $G^+ \subset G$ — такое открытое подмножество в G, что Δ трансверсально $\operatorname{graph} h$ во всех точках (a, x) с $ax = x$, и пусть $Z \subset G^+ \times X$ состоит из всех таких пар (a, x). Мы будем обозначать через Δ также и ограничение Δ на $G^+ \times X$. Тогда $Z = \Delta^{-1} \operatorname{graph} h$ — подмногообразие в $G^+ \times X$ и $\Delta^* k$ — это δ-сечение $|\Lambda|(X)$ вдоль Z. Если проекция π: $Z \to G$ собственная, то $\pi_* \Delta^* k$ — обобщенная функция на G. Заметим, что если G транзитивно действует на X, другими словами, если X является единственной орбитой G, то из данной выше характеристики трансверсальности следует, что все неподвижные точки трансверсальны, поскольку нормальное расслоение тривиально. В этом случае мы можем взять $G^+ = G$ и $\pi_* \Delta^* k$ — обобщенная функция, определенная на G. Эту ситуацию мы подробно изучим в следующем параграфе в связи с теорией характеров. А сейчас мы рассмотрим противоположный случай, когда $G = \mathbf{R}$, т. е. задана однопараметрическая группа $t \longmapsto \exp t\xi$ преобразований X, инфинитезимальной образующей которой является векторное поле ξ. Все точки X являются неподвижными при $t = 0$, и если X не одномерно, то ни одна точка $(0, x)$ не может быть регулярной. Исследуем условие трансверсальности Δ к $\operatorname{graph} h$ во всех неподвижных точках (t, x) при $t \neq 0$.

Неподвижная точка в T может возникнуть или из нуля ξ, или из периодической траектории с периодом T. Если x — нуль ξ, то требование трансверсальности состоит в том, что $d(\exp T\xi)_x$ не имеет собственного значения 1. Далее, ξ индуцирует линейное преобразование $l_x(\xi)$ на TX_x. (Оно имеет вид $l_x(\xi)\,\eta_x = [\xi, \eta]_x$, где $\eta_x \in TX_x$ и η — произвольное векторное поле, принимающее в точке x значение η_x. Значение $[\xi, \eta]_x$ не зависит от выбора продолжения.) Кроме того, $d(\exp T\xi)_x = \exp T l_x(\xi)$. Поскольку $\exp T l_x(\xi)$ не должно иметь собственного значения 1 ни при каком ненулевом T, мы получаем, что $l_x(\xi)$ не может иметь чисто мнимых собственных значений. В частности, $l_x(\xi)$ не может иметь нуль собственным значением, а значит, нули ξ изолированы и, поскольку X компактно, их конечное число. Если x — периодическая точка с периодом T, то проходящая через нее орбита является периодической траекторией. Все точки этой траектории неподвижны относительно T; отображение $P_{T,x}$ называется отображением Пуанкаре. Из условия трансверсальности следует, что не существует близких периодических траекторий, период которых близок к T. Значит, ввиду компактности X имеется лишь конечное число периодических траекторий, периоды которых лежат в произвольном ограниченном интервале на $\mathbf{R}$, и для каждой из этих периодических траекторий отображение Пуанкаре не имеет собственного значения 1.

Итак, Z — объединение множеств вида $\{x\}\times\mathbf{R}^+$, где x — нуль ξ, и множеств вида $\{(x, T)\}$, где T — период некоторой замкнутой траектории и x лежит на этой траектории. Множества вида $\{x\}\times\mathbf{R}^+$ трансверсальны расслоению $\mathbf{R}^+\times X$ над $\mathbf{R}^+$, и, значит, δ-функция вдоль $\{x\}\times\mathbf{R}^+$ порождает гладкую функцию на $\mathbf{R}^+$. Ясно, что каждый нуль ξ дает вклад

$$\frac{1}{|\det(\mathrm{id}-d(\exp t\xi)_x)|}.$$

Исследуем теперь вклады от периодических траекторий.

В этом случае подмножество $\{(x, T)\}=Z_T$, отвечающее периодической траектории, не трансверсально π, а значит, вклад от периодических траекторий не будет гладким. С другой стороны, отображение π имеет постоянный ранг на Z_T и мы можем представить π в виде $\pi=\iota\circ\pi'$, где $\pi'\colon Z_T\to \mathrm{pt}$ — субмерсия, а $\iota(\mathrm{pt})=$ $=T$ — инъекция. Мы видим, что образ доли Δ^*k, сосредоточенной вдоль Z_T, отображается в δ-функцию в T. Вычисление, аналогичное проведенному при выводе формулы для неподвижных точек (которое мы предоставляем читателю), показывает, что коэффициент при этой δ-функции равен

$$\frac{T^{\#}}{|I-P_T|},$$

где $T^{\#}$ — длина *примитивной* периодической траектории, итерацией которой является Z_T. (Например, если Z_T — простая замкнутая кривая, проходимая трижды, то $T=3T^{\#}$.) Далее, P_T — это отображение Пуанкаре в любой точке $x_0\in Z_T$. Поскольку отображения Пуанкаре в разных точках x_0 и x_1 сопряжены, этот детерминант не зависит от выбора x_0. Предположим, что все ненулевые t регулярны в описанном выше смысле. Предыдущие рассмотрения обобщаются на однопараметрическую группу морфизмов векторного расслоения, как и в случае неподвижной точки. Мы получаем тогда

$$\pi_*\Delta^*k=\sum_{x\mid\xi_x=0}\frac{\operatorname{tr} r_{\exp t\xi,\,x}}{|\det(\mathrm{id}-d(\exp t\xi)_x)|}+\sum\frac{T^{\#}\operatorname{tr} r_{\exp T\xi,\,x}}{|\det(\mathrm{id}-P_T)|}\delta(t-T),$$

где последняя сумма берется по множеству периодических траекторий, а формула имеет место в смысле обобщенных функций на $\mathbf{R}^+$.

§ 2. Следы и характеры

В этом параграфе мы воспользуемся элементарными результатами предыдущего параграфа для вывода некоторых интересных формул. Будем рассматривать параметризованное семейство отображений некоторого многообразия X в себя. Итак, предположим, что X и Y — дифференцируемые многообразия и задано дифференцируемое отображение

$$f\colon Y\times X\to X.$$

Предположим, что это действие локально транзитивно; это означает, что для каждой пары (y, x) отображение $TY_y\to TX_{f(y,x)}$ вида $\eta\longmapsto df_{(y,x)}(\eta, 0)$ сюръективно.

Например, в случае, который нас будет более всего интересовать, $Y=G$ — группа Ли и $f\colon G\times X\to X$ — действие группы Ли, т. е.

$$f(a, f(b, x))=f(ab, x).$$

Если L_a — левое умножение на a, то каждый элемент $\zeta\in TG_a$ можно представить в виде $dL_a\eta$, где $\eta\in TG_e$. Дифференцируя имеющееся уравнение по b, т. е. полагая $b=b_t$, где $b_0=e$ и $b'(0)=\eta$, получаем

$$df_{(a,x)}(0, df_{(e,x)}(\eta, 0))=df_{(a,x)}(dL_a\eta, 0).$$

Поскольку отображение $x\longmapsto ax$ является диффеоморфизмом для любого фиксированного a, мы видим, что для того, чтобы групповое действие G было локально транзитивным, достаточно, чтобы отображение $df_{(e,x)}\colon TG_e\to TX_x$ было сюръективным при каждом x. Рассмотрим отображение $F\colon Y\times X\to X\times X$, $F(y, x)=(f(y, x), x)$. Если f локально транзитивно, то F трансверсально диагонали $\boldsymbol{\Delta}$. Предположим, что f локально транзитивно. Тогда мы можем построить *изотропное расслоение* $Z\subset Y\times X$, где

$$Z=F^{-1}(\boldsymbol{\Delta})=\Delta^{-1}\operatorname{graph} f$$

и $\Delta\colon Y\times X\to Y\times X\times X$ — диагональное отображение. Имеем

$$Z=\{(y, x)\mid f(y, x)=x\}.$$

Касательное пространство к Z в точке $(y, x)\in Z$ состоит из таких (η, ξ), что

$$df(\eta, \xi)=\xi.$$

Транзитивность показывает, что для любого заданного ξ можно найти такое η, что это равенство имеет место. Значит, $f|_Z$ — субмерсия.

Напомним теперь следующий элементарный подсчет. Пусть $F\colon Y\times X\to W$ трансверсально некоторому подмногообразию $W'\subset W$ и $Z=F^{-1}W'$. Пусть $\pi\colon Z\to Y$ — ограничение на Z проекции $Y\times X$

на Y, и пусть F_y: $X \to W$ — отображение $F_y(x) = F(y, x)$. Тогда y — регулярное значение π в том и только том случае, когда F_y трансверсально W'. Действительно, утверждение, что $(y, x) \in Z$ — регулярная точка π, означает, что для каждого η можно найти такое ζ, что

$$dF(\eta, \zeta) \in TW'.$$

Из трансверсальности F следует, что $\{dF(\eta, \xi)\} + TW'$ порождает все TW, т. е. π регулярно в точке (y, x) тогда и только тогда, когда $\{dF(0, \xi - \zeta)\} + TW'$ также порождает все TW, т. е. когда F_y трансверсально W' в точке (y, x).

Применяя это к F: $Y \times X \to X \times X$ и полагая f_y: $X \to X$, где $f_y(x) = f(y, x)$, мы видим, что y — регулярное значение π: $Z \to Y$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{graph} f_y \quad \text{трансверсален} \quad \Delta \subset X \times X.$$

Таким образом, y — регулярное значение π в том и только том случае, когда f_y — отображение Лефшеца, т. е. когда для каждой неподвижной точки x отображения f_y отображение $(\mathrm{id} - df_y)$: $TX_x \to TX_x$ является изоморфизмом.

Если $E \to X$ — векторное расслоение, то параметризованное семейство морфизмов — это гладкое отображение f: $Y \times X \to X$ вместе с гладким сечением r, где $r(y, x)$: $E_{f(y, x)} \to E_x$. Если обозначить через E_1, E_2 векторное расслоение E, поднятое на $X \times X$ при помощи проекций соответственно на первый и второй сомножители, то r — сечение $F^{\#}\operatorname{Hom}(E_1, E_2)$.) Например, если G — группа, действующая автоморфизмами векторного расслоения E, т. е. g: $E_x \to E_{f(g, x)}$, то $r(g, x) = g^{-1}$: $E_{f(g, x)} \to E_x$.

Для каждого фиксированного y отображение f_y^* переводит $C^\infty(E)$ в $C^\infty(E)$ и гладко зависит от y. Действительно, пусть E' — векторное расслоение E, поднятое на $Y \times X$ при помощи проекции на второй сомножитель. Таким образом, имеет место диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d] & E' \arrow[d] & E \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\iota_y"] & Y \times X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

где

$$f_y = f \cdot \iota_y, \quad \iota_y(x) = (y, x).$$

Значит, f^* переводит $C^\infty(E)$ в $C^\infty(E')$. В силу сказанного в § 1, f^* задается ядром k, являющимся δ-сечением, ассоциированным с $\operatorname{graph} f$. Чтобы педантично описать расслоение для k, введем π_1, π_2, π_3 — проекции $Y \times X \times X$ на каждый из трех сомножителей, и пусть $E_2 = \pi_2^{\#} E$, $E_3 = \pi_3^{\#} E$, причем мы будем писать $|\Lambda|(X)$

вместо $\pi_3^{\#}|\Lambda|(X)$. Тогда k — обобщенное сечение расслоения

$$\operatorname{Hom}(E_3, E_2) \otimes |\Lambda|(X).$$

Мы находимся точно в ситуации § 1 с $W = Y \times X$. Можно образовать $\Delta^* k$, поскольку Δ: $Y \times X \to Y \times X \times X$ трансверсально $\operatorname{graph} f$ по предположению, и рассмотреть $\operatorname{tr} \Delta^* k$, который является δ-сечением $|\Lambda|(X)$ вдоль Z. Предположим, что это сечение имеет компактный носитель в направлении X. (Например, предположим, что X компактно.) Тогда, будучи сечением $|\Lambda|(X)$, оно может быть опущено так, что получится обобщенная функция

$$\pi_{Y*}(\operatorname{tr} \Delta^* k)$$

на Y, которую мы будем рассматривать как обобщенную функцию, которая каждому y относит $\operatorname{tr} f_y^*$. Если бы $k = K\,|dx|$ было настоящим ядром на $Y \times X$, то оператор

$$u \longmapsto \int K(y, x_1, x_2)\, u(x_2)\, |dx_2|$$

был бы оператором Гильберта — Шмидта, а именно

$$\int \operatorname{tr} K(y, x, x)\, |dx| = \pi_{Y*}(\operatorname{tr} \Delta^* k)(y).$$

В нашем случае правая часть определена как обобщенная функция. Заметим, что *для регулярных значений π_{Y*} обобщенная функция является настоящей функцией и имеет место формула*

$$\pi_{Y*}(\operatorname{tr} \Delta^* k)(y) = \sum_{x \mid f_y(x) = x} \frac{\operatorname{tr} r(y, x)}{|\det(\mathrm{id} - df_y(x))|}. \tag{2.1}$$

В самом деле, $\operatorname{tr} \Delta^* k$ — это δ-сечение вдоль Z. Согласно (1.3) (где Z заменяется прообразом регулярных значений), получаем, что $\pi_{Y*}(\operatorname{tr} \Delta^* k)$ — функция и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X \supset (\Delta \circ \iota_y)^{-1} \operatorname{graph} f_y & \xrightarrow{\iota_y} & Z \subset Y \times X \\ \Big\downarrow \pi & & \Big\downarrow \pi_Y \\ y = \mathrm{pt} & & Y \end{array}$$

индуцирует равенство

$$\pi_* \operatorname{tr}(\Delta \circ \iota_y)^* k_y = \pi_* \iota_y^* (\operatorname{tr} \Delta^* k) = \pi_{Y*}(\operatorname{tr} \Delta^* k)(y);$$

доказываемый результат следует теперь из (1.4), примененного к отображению Лефшеца f_y.

На самом деле мы можем следующим образом интерпретировать $\pi_{Y*}(\operatorname{tr} \Delta^* k)$ как «обобщенный след». Вначале заметим, что $\operatorname{graph} f \subset Y \times X \times X$ трансверсален слоям $\pi_2 \times \pi_3$: $Y \times X \times X \to X \times X$, т. е. $\operatorname{graph} f$ расслаивается над $X \times X$. Действительно, касательное пространство к $\operatorname{graph} f$ содержит все векторы вида $(\eta, \xi, df\eta + df\xi)$, и транзитивность гарантирует, что две последние компоненты могут быть произвольными. Касательные к слою $\pi_2 \times \pi_3$ — это все векторы $(\eta', 0, 0)$. Все эти векторы вместе порождают $T(Y\times X\times X)_{(y,\,x,\,f(y,\,x))}$. Обозначим через $\pi_{X\times X}$ проекцию $Y\times X\times X \to X\times X$, и пусть ρ — произвольная гладкая плотность с компактным носителем на Y (ее можно считать определенной на $Y\times X\times X$). Мы можем образовать $k_\rho = (\pi_{X\times X})_*(k\rho)$; в силу (1.3) это гладкое сечение $\operatorname{Hom}(E, E)\otimes|\Lambda|(X)$ на $X\times X$, а значит, оно определяет оператор Гильберта — Шмидта на $C^\infty(E)$. Его след, по определению, равен

$$\pi_* \operatorname{tr} \Delta^* k_\rho, \qquad \pi\colon\ X \to \mathrm{pt}.$$

Если символически записать $\rho = \rho(y)\,dy$ и $k = K(y, x_1, x_2)\,dx_2$, то

$$K_\rho(x_1, x_2) = \int_Y K(y, x_1, x_2)\,\rho(y)\,dy,$$

$$\operatorname{tr} k_\rho = \int_X \int_Y \operatorname{tr} K(y, x, x)\,\rho(y)\,dy\,dx.$$

Перемена порядка интегрирования показывает, что мы можем интерпретировать $\operatorname{tr} k_\rho$ так:

$$\operatorname{tr} k_\rho = \operatorname{tr} \int \rho(y)\, f_y^*\,dy.$$

Действительно, $k\rho$ — это δ-сечение на $\operatorname{graph} f$, и из (1.3) опять-таки следует, что

$$\pi_{X*}\,\Delta^*(k\rho) = \Delta^*(\pi_{X\times X})_*(k\rho),$$

где $\pi_X\colon Z \to X$. Ситуацию описывает следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, hook] & \operatorname{graph} f \arrow[d, hook] \\
Y\times X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\pi_X"] & Y\times X\times X \arrow[d, "\pi_{X\times X}"] \\
X \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & X\times X \\
\mathrm{pt} &
\end{tikzcd}$$

Далее, $\pi_{X*}\,\Delta^*(k\rho)$ является ядром $\int f_y^*\rho(y)\,dy$. Итак, доказано

Предложение 2.1. *Пусть f — локально транзитивное действие Y морфизмами векторного расслоения $E \to X$, где X — компактное многообразие. Пусть $Z = \Delta^{-1}\operatorname{graph} f$ и $\pi\colon Z \to Y$. Для каждой* *гладкой плотности с компактным носителем* ρ *на* Y *оператор*

$$\int_Y \rho(y) f_y^* \, dy \colon \; C^\infty(E) \to C^\infty(E)$$

компактен, и его след, рассматриваемый как функционал над ρ, *определяет обобщенную функцию на* Y, *которую мы будем обозначать через* $\operatorname{tr} f^*$. *Имеем*

$$\operatorname{tr} f^* = \pi_* \operatorname{tr} \Delta^* k,$$

где k — *ядро* f^*, *являющееся* δ-*сечением вдоль* $\operatorname{graph} f$. *Для регулярных значений* π *обобщенная функция* $\operatorname{tr} f^*$ *является на самом деле функцией, и имеет место формула*

$$\operatorname{tr} f_y^* = \sum_{x \mid f_y(x) = x} \frac{\operatorname{tr} r(y, x)}{|\det(\mathrm{id} - df_y(x))|}.$$

Важный пример такой ситуации мы имеем, когда G — группа Ли, а H — такая ее замкнутая подгруппа, что $G/H = X$ компактно. Пусть задано (конечномерное) представление σ группы H на некотором векторном пространстве V, и пусть χ_σ — его характер

$$\chi_\sigma(h) = \operatorname{tr} \sigma(h).$$

Тогда обычным образом σ определяет векторное расслоение E над X, на котором G действует как группа автоморфизмов. Представление I_σ группы G на $C^\infty(E)$, имеющее вид

$$I_\sigma(g)\, u = f_{g^{-1}}^* u,$$

называется *представлением, индуцированным* σ *на* G. Из предложения 2.1 следует, что для любой гладкой плотности ρ с компактным носителем на G оператор

$$\int I_\sigma(g)\, \rho(g^{-1})\, dg$$

компактен и его след, рассматриваемый как функционал на ρ, является обобщенной функцией на G, которую мы будем называть *характером индуцированного представления* и обозначать через χ_{I_σ} (или просто через χ, если не возникает недоразумений), так что

$$\chi_{I_\sigma}(g) = \operatorname{tr} f^*{}_{g^{-1}}.$$

Мы доказали, что χ — гладкая функция для регулярных g и соответствующие значения даются формулой (2.1). При вычислении (2.1) нужно иметь в виду, что утверждение: $x \in X$ — неподвижная точка для $f_{g^{-1}}$ — означает, что $x = aH$ для некоторого $a \in G$ (определенного с точностью до правого умножения на $h \in H$), удовлетворяющего условию

$$g^{-1} aH = aH, \quad \text{т. е.} \quad a^{-1} g a \in H.$$

Имеем также $\operatorname{tr} r(g, x) = \chi_\sigma(a^{-1}ga)$ (это выражение не зависит от выбора a). Теперь исследуем знаменатель в (2.1). Мы можем написать

$$f_{g^{-1}} = f_a \cdot f_{a^{-1}g^{-1}a} \circ f_{a^{-1}},$$

так что

$$\det(\mathrm{id} - df_{g^{-1}}) = \det(\mathrm{id} - df_{a^{-1}g^{-1}a}).$$

Возьмем $h = a^{-1}g^{-1}a$. Мы хотим вычислить df_h при действии на TX_H. Можно отождествить TX_H с TG_e/TH_e. Пусть ξ — элемент TG_e и $(\exp t\xi)H$ — кривая в X, которая им порождается. Тогда

$$h(\exp t\xi)H = [h(\exp t\xi)h^{-1}]H = (\exp t[\operatorname{Ad} h\xi])H.$$

Дифференцирование показывает, что

$$df_h = \operatorname{Ad} h \quad \text{для} \quad h \in H \quad \text{при действии на} \quad TG_e/TH_e, \tag{2.2}$$

т. е. мы получаем формулу

$$\chi_{I_\sigma}(g) = \sum_{\substack{x \mid f_g x = x \\ x = aH}} \frac{\chi_\sigma(a^{-1}ga)}{|\det(\mathrm{id} - \operatorname{Ad}(a^{-1}g^{-1}a))_{TG_e/TH_e}|}. \tag{2.3}$$

Заметим, что из (2.2) следует, что при $\eta \in TH_e$ и достаточно малых значениях s элемент $(\exp s\eta H)$ будет регулярным элементом для π_Y: $Z \to Y$, т. е. преобразование $\mathrm{id} - df_{\exp s\eta}$ обратимо, если $\operatorname{ad}\eta$ индуцирует изоморфизм на TG_e/TH_e. Действительно,

$$\operatorname{Ad} \exp s\eta = \mathrm{id} + s \operatorname{ad} \eta + O(s^2),$$

откуда при малых значениях $|s|$ следует, что преобразование $\mathrm{id} - \operatorname{Ad}\exp s\eta$ обратимо, если это имеет место для $\operatorname{ad}\eta$. Заметим, что множество сингулярных точек Z является аналитическим подмногообразием и, следовательно, будет собственным аналитическим подмногообразием (и, в частности, множеством меры нуль), если существует хотя бы одна регулярная точка. Если же регулярных точек нет, то все множество Z отображается при π_Y на множество сингулярных значений, которое должно содержать $\operatorname{supp}\chi$. Таким образом, мы доказали (пользуясь замечаниями из § 1 о том, когда опускание гладкое)

Предложение 2.2. *Если существует такое $\eta \in TH_e$, что $\operatorname{ad}\eta$ индуцирует изоморфизм на TG_e/TH_e, то характер χ представляется локально интегрируемой функцией на G и функция χ гладкая на непустом множестве в G. Если такого η нет, то χ сосредоточен на собственном подмножестве в G.*

Проиллюстрируем (2.3) на примере. Предположим, что мы взяли $G = SL(n, \mathbf{R})$. Любую матрицу F можно однозначно представить в виде произведения $F=ODT$, где O — ортогональная матрица, D — диагональная матрица с положительными элементами и T — верхняя треугольная матрица с единицами на диагонали, т. е. $G=K\cdot A\cdot N$, где K — группа ортогональных матриц, и т. д.

[Напомним доказательство этого факта, который является частным случаем так называемого разложения Ивасавы. Из элементарной линейной алгебры известно, что всякую матрицу можно представить в виде суммы кососимметрической матрицы и верхней треугольной матрицы. Переход к экспонентам дает нужное разложение в окрестности единицы. Для получения глобального результата воспользуемся следующей леммой о группах. Пусть G — связная топологическая группа, а G_1 и G_2 — такие подгруппы, что G_1 компактна, а G_2 связна. Предположим, что существуют такие окрестности U_1 в G_1 и U_2 в G_2, что U_1U_2 — окрестность в G. Тогда $G=G_1\cdot G_2$.

Доказательство. Для любого $a\in G_1$ можно найти такую окрестность W элемента e в G_2, что $aWa^{-1}\subset U_1U_2$. Несколько меньшая окрестность W обслуживает близкие a, и, значит, ввиду компактности G_1, можно найти W, обслуживающую все элементы G_1. Поэтому $WG_1\subset G_1G_2$ и $(W\cdot W)\,G_1=W\,(WG_1)\subset WG_1G_2\subset G_1G_2$ и т. д., а поскольку G_2 связна, степени W исчерпывают всю G_2, так что $G_2G_1\subset G_1G_2$. Далее, $G_1\,(G_1G_2)=G_1G_2$ и $G_2\,(G_1G_2)=(G_2G_1)\,G_2\subset G_1G_2$, так что $(G_1G_2)\,(G_1G_2)\subset G_1G_2$ и $(G_1G_2)^{-1}=G_2G_1\subset G_1G_2$. Значит, G_1G_2 — открытая подгруппа и, ввиду связности G, она совпадает со всей группой G. Доказательство леммы окончено. В случае $SL(n)$ однозначность разложения очевидна. Если $ODT=I$, то матрица O одновременно ортогональная и треугольная с положительными элементами на диагонали, а значит, $O=I$.]

Возьмем $H=AN$. (В общем случае для вещественной полупростой группы берем $H\supset MAN$, где M — централизатор A в K.) Тогда если $A=(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)$, то ясно, что собственные значения $\mathrm{Ad}\,A$ в TG_e/TH_e — это $\lambda_j\lambda_i^{-1}\,(j>i)$. Поэтому знаменатель в (2.3) для этого случая имеет вид $|\Pi\,(1-\lambda_j\lambda_i^{-1})|$, и мы получаем формулу, принадлежащую Гельфанду — Наймарку.

Разумеется, в общем случае условие трансверсальности в предложении 2.2 не обязательно выполнено. Например, если G — нильпотентная группа, это условие никогда не выполняется. Кроме того, в ряде интересных случаев пространство X не компактно, так что выражение $\pi_{G*}\,\mathrm{tr}\,\Delta^*k$ не определено непосредственно как абсолютно сходящийся интеграл. (Во многих случаях оно определено как осциллирующий интеграл.)

Рассмотрим случай индуцированного характера компактной группы. Предположим, что G — компактная группа и H — ее замкнутая подгруппа, так что $X=G/H$ автоматически компактно. В этой ситуации G и H имеют выделенные плотности, которые мы будем обозначать через dg и dh; они отвечают мере Хаара с полной мерой 1. Пусть ψ — характер некоторого неприводимого представления группы G; вычислим $\langle\psi dg,\ \chi_{I_\sigma}\rangle$. Имеем

$$\langle\psi dg,\ \chi_{I_\sigma}\rangle=\langle\psi dg,\ \pi_{\sigma*}\operatorname{tr}\Delta^*k\rangle=\langle(\pi^*\psi)\,dg,\ \operatorname{tr}\Delta^*k\rangle.$$

Это интеграл по Z от δ-сечения расслоения $|\bigwedge|(G\times X)$. Пользуясь обозначением

$$\delta(x-f(g,\ x))=\Delta^*\delta(x_2-f(g,\ x_1)),$$

мы можем символически записать

$$\langle\pi^*\psi\,dg,\ \operatorname{tr}\Delta^*k\rangle=\iint\psi(g)\,(\operatorname{tr}r_{g,x})\,\delta(x-f(g^{-1},\ x))\,dx\,dg.$$

Это интеграл по расслоению над X, так что мы можем вначале проинтегрировать по слоям, а затем по X. Слой над $x=aH$ — это $G_x=aHa^{-1}$, и интеграл по этому слою равен

$$\int_{G_x}\psi(g)\,\chi_\sigma(a^{-1}ga)\,dg_x=\int_H\psi(aga^{-1})\,\chi_\sigma(h)\,dh=\int_H\psi(g)\,\chi_\sigma(h)\,dh;$$

это целое число, не зависящее от x. Поскольку объем X равен 1, мы получаем, что

$$\int\psi(g)\,\chi_{I_\sigma}(g)\,dg=\int_H\psi|_H(h)\,\chi_\sigma(h)dh. \tag{2.4}$$

Левая часть этого равенства определяется как спаривание обобщенной функции с гладкой плотностью. В правой части стоит настоящий интеграл, и он равен сплетающему числу $\psi|_H$ с σ. (Если σ — неприводимое представление, то это кратность, с которой σ входит в разложение $\psi|_H$.) В этом смысле (2.4) можно интерпретировать как вариант (на языке характеров) формулы двойственности Фробениуса.

Наметим некоторые дальнейшие применения методов, которыми мы пользовались при получении предложения 2.1. Предположим, что имеется последовательность дифференциальных операторов на векторных расслоениях

$$0\to C^\infty(E_1)\xrightarrow{d_1}C^\infty(E_2)\xrightarrow{d_2}\dots\xrightarrow{d_{N-1}}C^\infty(E_N)\to 0,$$

являющаяся комплексом, т. е. $d^2=0$, точнее $d_{i+1}\circ d_i=0$, $i=0,\dots$ $\dots,N$.

Предположим, что группы гомологий $H(E_i)$ конечномерны, например что это эллиптический комплекс. Предположим также, что $f\colon Y\times X\to X$ — транзитивное семейство морфизмов для каждого E_i и

$$f_y^*d=df_y^*$$

для каждого i. Другими словами, мы предполагаем, что для любого y имеет место ситуация, описанная Атья — Боттом [2]. Для произвольной гладкой плотности ρ с компактным носителем оператор $f_\rho^* = \int\limits_Y f_y^* \rho(y)\, dy$ является компактным оператором на каждом $C^\infty(E_i)$ и

$$f_\rho^* d = d f_\rho^*.$$

Далее, элементарная алгебраическая проверка показывает, что для компактных операторов (см. Атья, Ботт [2, § 7])

$$\sum (-1)^i \operatorname{tr} f_\rho^* \big|_{E_i} = \sum (-1)^i \operatorname{tr} f_\rho^* \big|_{H(E_i)}.$$

Пусть k_{E_i} — ядро f^* на E_i и $k_{H(E_i)}$ — ядро f^* на $H(E_i)$. Мы можем утверждать справедливость следующего равенства для обобщенных функций:

$$\sum (-1)^i \pi_{Y*} (\operatorname{tr} \Delta^* k_{E_i}) = \sum (-1)^i \pi_{Y*} (\operatorname{tr} \Delta^* k_{H(E_i)}). \tag{2.5}$$

В частности, пользуясь предложением 2.1 для регулярных значений y, мы получаем формулу Атья — Ботта для неподвижных точек:

$$\sum (-1)^i \pi_{Y*} \operatorname{tr} \Delta^* k_{H(E_i)}(y) = \sum_{x \mid f_y(x) = x} \frac{\operatorname{tr} r(y, x)}{|\det(\mathrm{id} - df_y(x))|}. \tag{2.6}$$

Итак, мы доказали, что если морфизм Лефшеца f_y можно вложить в транзитивное семейство морфизмов, то формула Атья — Ботта (2.6) имеет место. Разумеется, вообще говоря, морфизм Лефшеца нельзя вложить в транзитивное семейство, т. е. это не дает общего доказательства формулы Атья — Ботта. В одном из следующих параграфов мы покажем, как можно для той же цели воспользоваться эллиптичностью комплекса вместо транзитивности семейства. Достоинство приведенного выше рассуждения в том, что оно опирается лишь на элементарные соображения из § 1. Кроме того, в ряде применений формулы Атья — Ботта транзитивные семейства существуют. Например, возьмем $E_i = \bigwedge^i(X)$ с обычным оператором d; это приводит к обычной теореме Лефшеца о неподвижных точках. В этом случае от $f\colon Y \times X \to X$ требуется только, чтобы это было транзитивное семейство диффеоморфизмов, и легко при помощи чисто локальных геометрических средств вложить любой диффеоморфизм в транзитивное семейство диффеоморфизмов. Таким образом, мы доказали теорему Лефшеца о неподвижных точках. При выводе формулы Вейля для характеров из (2.6), как это сделано у Атья — Ботта [2], также существует естественное транзитивное семейство, т. е. опять-таки эта формула получается при помощи элементарных соображений.

Наконец, Атья и Ботт доказали очень интересную формулу вычетов для нулей набора n полиномов $P_1, \ldots, P_n$ над $\mathbf{C}^n$. Не приводя формулировку теоремы, отметим лишь, что в доказательстве каждому P_i ставится в соответствие отображение комплексного проективного n-мерного пространства в себя, и это отображение вкладывается в транзитивное семейство при помощи проективных коллинеаций.

§ 3. Волновой фронт

В двух предыдущих параграфах мы рассмотрели операторы поднятия и опускания для отображений и сечений векторных расслоений довольно специального вида. Теперь мы хотим обобщить эти понятия. Основаная идея состоит в следующем. Если f: $X \to Y$ — субмерсия, то, как мы видели в § 1, поднятие f^*u определено для любой обобщенной функции u. С другой стороны, если u — гладкая функция, то f^*u определено всегда, вне зависимости от того, является f субмерсией или нет. Эти два случая можно рассматривать как крайние проявления следующего феномена: f трансверсально «особенностям u» (где, конечно, нужно еще определить, что мы понимаем под «особенностями u»). В первом примере f, будучи субмерсией, трансверсально всему на свете, а во втором u не имеет особенностей. Вплоть до недавнего времени особенности u описывались подмножеством в Y, называемым *сингулярным носителем* u. Большой шаг вперед был сделан благодаря Сато [3] и Хёрмандеру [4], которые первыми поняли, что особенности u лучше описывать при помощи подмножества в T^*Y, названного *волновым фронтом*. Цель этого параграфа — ввести понятие волнового фронта и изучить его функториальные свойства.

Начнем с понятия сингулярного носителя. Пусть u — обобщенное сечение некоторого векторного расслоения F над Y. Определим замкнутое множество $\operatorname{sing\,supp} u \subset Y$ условием: $y \in Y$ *не принадлежит* $\operatorname{sing\,supp} u$, если существует такая C^∞-функция φ с компактным носителем, что $\varphi(y) \neq 0$ и φu — настоящее сечение F, т. е. если $\varphi u \in C^\infty(F) \subset C^{-\infty}(F)$. Ясно, что если f: $X \to Y$ — морфизм из $E \to X$ в $F \to Y$, для которого $f(X) \cap \operatorname{sing\,supp} u = \varnothing$, то можно определить f^*u следующим образом. Каждая точка $x \in X$ имеет такую компактную окрестность W, что $f(W) \cap \operatorname{sing\,supp} u = \varnothing$. Тогда можно найти такую C^∞-функцию φ, что

$$\varphi \equiv 0 \quad \text{на} \quad \operatorname{sing\,supp} u, \quad \varphi \equiv 1 \quad \text{на } f(W).$$

Легко убедиться, что φu — гладкое сечение, а значит, корректно определено $f^*(\varphi u)$ на W, и что все так определенные и собранные вместе $f^*(\varphi u)$ задают гладкое сечение E. Легко также проверить, что так определенное сечение не зависит от выбора покрытия окрестностями; достаточно сравнить, что происходит при двух разных выборах. Наметим другой путь доказательства единственности. Пусть K — некоторое замкнутое подмножество в Y. Обозначим через $C_K^{-\infty}(F)$ подпространство в $C^{-\infty}(F)$, состоящее из тех обобщенных сечений, у которых сингулярный носитель лежит в K. На $C_K^{-\infty}(F)$ можно ввести топологию, более сильную, чем слабая топология, наследуемая из $C^{-\infty}(F)$. Грубо говоря, мы вводим топологию так, чтобы последовательность $\{u_\alpha\}$ сходилась, если: (i) $\{u_\alpha\}$ сходится в слабой топологии и (ii) для каждого компактного множества A, для которого $A \cap K = \emptyset$, имеет место равномерная сходимость $\{u_\alpha\}$ вместе с любым конечным числом производных. Тогда $C^\infty(F) \subset C_K^{-\infty}(F)$ и $C^\infty(F)$ плотно в $C_K^{-\infty}(F)$ относительно этой топологии. Проверяется, что если $f(X) \cap K = \emptyset$, то отображение $u \longmapsto f^*u \in C^{-\infty}(E)$, определенное на $C^\infty(F)$, непрерывно в топологии, наследуемой из $C_K^{-\infty}(F)$, а значит, продолжается до единственного отображения $f^*\colon C_K^{-\infty}(F) \to C^{-\infty}(E)$.

Непосредственно из определений следует, что если $f\colon X \to Y$ — субмерсия, т. е. f^*u определено для любого u, то

$$\operatorname{sing\,supp} f^*u \subset f^{-1}(\operatorname{sing\,supp} u).$$

Если $f\colon Y \to Z$ — субмерсия, являющаяся собственным отображением (или если u имеет компактный носитель), так что f_*u определено, то

$$\operatorname{sing\,supp} f_* u \subset f(\operatorname{sing\,supp} u).$$

Обратимся теперь к определению волнового фронта. В дальнейшем мы не будем упоминать векторные расслоения, а обычно будем говорить о функциях и плотностях. Или мы будем говорить о сечениях, не указывая явно векторных расслоений и морфизмов. Это делается для того, чтобы не усложнять обозначений. Все понятия без труда переносятся на случай векторных расслоений.

Пусть u — обобщенная плотность на X и $l \in T^*X_x$ — ненулевой ковектор. Будем говорить, что u является *гладкой в* l, если выполняется следующее условие.

Пусть S — любое вспомогательное многообразие и $f\colon S \times X \to \mathbf{R}$ — какое-то гладкое отображение, такое, что $df_s(x) = l$, где $f_{s'}(x') = f(s', x')$. Пусть $F\colon S \times X \to S \times \mathbf{R}$ определяется формулой

$$F(s, x) = (s, f(s, x)).$$

Тогда существует такая C^∞-функция b с компактным носителем, определенная на X (а значит, и на $S \times X$), что:

(i) $b(x) \neq 0$,

(ii) $F_*(bu)$ — гладкая плотность на $S \times \mathbf{R}$ в окрестности s.

Интуитивно говоря, мы называем u гладкой в l, если для любой функции f на X с $df = l$ обобщенная плотность $f_* u$ гладкая на $\mathbf{R}$. Мы добавляем срезающую функцию b, потому что $f_* u$ не обязательно определено и потому что мы не хотим учитывать особенности, привносимые f вдалеке от x. Мы вводим S затем, чтобы иметь гладкую зависимость от параметров.

Заметим, что $f_*(bu)$ корректно определено, поскольку «интегрирование» ведется в направлении X, а bu имеет в этом направлении компактный носитель. Заметим также, что если плотность u гладкая в l, то она гладкая и в tl для любого $t \neq 0$ (поскольку умножение на t — диффеоморфизм $\mathbf{R}$). Через $[l]$ будем обозначать прямую, проходящую через l.

Обозначим через PT^*X проективизированное кокасательное расслоение, т. е. PT^*X_x состоит из всех прямых в T^*X_x, проходящих через начало. Определим проективный волновой фронт $PWF(u) \subset PT^*X$, полагая

$$[l] \in PWF(u), \quad \textit{если} \quad u \textit{ не является гладкой в } \ l.$$

В таком виде определение довольно громоздко. Мы сделаем некоторые упрощения, но вначале приведем несколько предварительных результатов. Если через π обозначить проекцию $PT^*X \to X$, то ясно, что

$$PWF(u) \subset \pi^{-1}(\operatorname{sing\,supp} u).$$

Изучение того, что происходит над $\operatorname{sing\,supp} u$, мы начнем со следующего предложения.

Предложение 3.1. *Пусть $g\colon X \to \mathbf{R}$ — субмерсия и v — обобщенная функция на $\mathbf{R}$ с $\operatorname{sing\,supp} v = \{0\}$. Пусть $u = hg^*v$, где h — некоторая гладкая функция. Тогда*

$$PWF(u) \subset [N(g^{-1}(0))],$$

где через $[Ng^{-1}(0)]$ обозначено проективизированное нормальное расслоение к $g^{-1}(0)$, т. е. множество всех $[dg_x]$, $x \in g^{-1}(0)$. Для любой $v \in C^{-\infty}(\mathbf{R})$ имеем

$$PWF(hg^*v) \subset \{[dg_x] \mid x \in g^{-1}(\operatorname{sing\,supp} v)\}.$$

Доказательство. Поскольку $\operatorname{sing\,supp} u \subset g^{-1}(0)$, нам нужно рассмотреть только случай $x \in g^{-1}(0)$. Если $[l] \neq [dg_x]$ и f — некоторое параметризованное семейство функций с $df_s = l$, мы можем ввести локальные координаты вблизи x вида $(x^1, x^2, \ldots, x^n)_{s'}$, где $x^1 = g$ и $x^2 = f_{s'}$. Пусть $bdx = b(x^1, x^2, \ldots, x^n)\,dx^1 \ldots dx^n$ — гладкая плотность с компактным носителем и $w = w(s', t)$ — гладкая функция с компактным носителем на $S \times \mathbf{R}$. Мы можем записать F^*w как $w(x^2)$, оставляя неявной зависимость от s' (т. е. мы пишем $w(x^2)$ вместо $w(x^2, s')$). Тогда

$$\begin{aligned}\langle F_*[g^*(v)\,bdx],\ w\rangle &= \langle g^*(v)\,bdx,\ F^*w\rangle = \\ &= \langle g^*(v),\ (F^*w)\,bdx\rangle = \langle v,\ g_*(F^*w)\,bdx\rangle = \\ &= \left\langle v,\ \int w(x^2)\,b(\cdot,\ x^2, \ldots, x^n)\,dx^2 \ldots dx^n\right\rangle = \\ &= \int w(x^2)\,\langle v,\ b(\cdot,\ x^2, \ldots, x^n)\rangle\,dx^2 \ldots dx^n.\end{aligned}$$

Итак, $(F_*u) = \left[\int \langle v,\ hb(\cdot,\ x^2, \ldots, x^n)\rangle\,dx^3 \ldots dx^n\right] dx^2$ будет гладкой на $S \times \mathbf{R}$, что и требовалось доказать.

Пусть wdt — обобщенная плотность с компактным носителем на $\mathbf{R}$. По определению, ее преобразование Фурье имеет вид

$$\hat{w}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle w\,dt,\ e^{-i\tau\cdot t}\rangle,$$

и, как хорошо известно, wdt — гладкая плотность тогда и только тогда, когда $\hat{w}(\tau)$ стремится к нулю быстрее всех степеней на $\pm\infty$. Итак, если u — обобщенная плотность на X, гладкая для некоторого $l \in T^*X_x$, то $(f_{s*}bu)^\wedge(\tau)$ стремится к нулю быстрее всех степеней при $\tau \to \pm\infty$, т. е.

$$\langle bu,\ e^{-i\tau f_{s'}}\rangle = O(|\tau|^{-N}) \quad \text{для всех} \quad N \tag{3.1}$$

при $\tau \to \pm\infty$. Теперь мы можем ввести несколько уточненное понятие волнового фронта, называя *u гладкой вперед* в конаправлении l, если (3.1) имеет место при $\tau \to +\infty$. В (3.1) левую часть нужно рассматривать как асимптотическую функцию на S, и (3.1) утверждает, что эта асимптотическая функция на S обращается в нуль вблизи s. Итак, соотношение (3.1) имеет место равномерно по s' вблизи s; ему удовлетворяют (равномерно) также и частные производные. Назовем волновым фронтом u множество $WF(u)$ таких $l \neq 0$, что *u не является* гладкой вперед в l. Отметим, что если $l \in WF(u)$, то $al \in WF(u)$ для всех положительных вещественных a. Итак, если обозначить через ST^*X косферическое расслоение, т. е. множество лучей, исходящих из начала в T^*X, то волновой фронт определяется проекцией из начала подмножества $SWF(u) \subset ST^*X$, а именно $WF(u)$ — это прообраз $SWF(u)$ относительно проекции $T^*X - 0_X$ на ST^*X. Теперь мы можем уточнить предложение 3.1.

Предложение 3.2. *Пусть v — обобщенная функция на $\mathbf{R}$ с $WF(v) = \{(0,\ \sigma) \mid \sigma > 0\} \subset T^*\mathbf{R} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$. Пусть $g\colon X \to \mathbf{R}$ — субмерсия.*

Тогда

$$WF(g^*v) \subset \{\lambda\, dg(x) \mid \lambda > 0,\ g(x) = 0\}.$$

Учитывая предложение 3.1, мы должны только проверить соотношение $-dg(x) \notin WF(g^*v)$. Итак, мы доказываем, что $\langle bg^*v, e^{i\tau f_{s'}}\rangle = O(|\tau|^{-N})$ для всех N, если f: $S \times X \to \mathbf{R}$ — некоторая функция с $df_s(x) = dg(x)$ и b — подходящая плотность. Мы можем ввести координаты $x^1, \ldots, x^n$ в окрестности U на X с $g = x^n$ и записать $S \times U = S \times V \times I$, где $V \subset \mathbf{R}^{n-1}$ и $I \subset \mathbf{R}$. Запишем $x = (x^1, \ldots, x^n) = (y, x^n)$ и положим $\bar{S} = S \times V$. Мы можем считать f определенной на $\bar{S} \times I$, и тогда $f_{s', y}$ — функция единственного переменного x^n. Предположим, что наша точка x имеет координаты (0, 0). Тогда $df_{s,0} = dx^n$, а следовательно, по определению $WF(v)$,

$$\langle cv, e^{i\tau f_{s', y}}\rangle = O(|\tau|^{-N})$$

равномерно по (s', y) вблизи $(s, 0)$, где c — какая-то подходящая плотность с компактным носителем на $\mathbf{R}$, не равная нулю в 0. Пусть $d(y)$ — любая гладкая плотность с компактным носителем в окрестности нуля в V. Тогда

$$\langle (d \otimes c)\, g^*v, e^{i\tau f_{s'}}\rangle = \int_V d(y) \langle cv, e^{i\tau f_{s', y}}\rangle$$

и последнее выражение есть $O(|\tau|^{-N})$ для всех N.

Пока наши определения различных вариантов волновых фронтов были весьма неявными, поскольку зависели от произвольных функций на вспомогательных пространствах параметров. Теперь же мы покажем, что достаточно рассматривать локально определенные линейные функции, считая параметрами их коэффициенты. Это не только даст способ находить волновые фронты, но и позволит обобщить понятие поднятия на более широкие классы отображений и обобщенных функций. Нашими основными средствами будут преобразование Радона при рассмотрении проективных волновых фронтов и преобразование Фурье при рассмотрении сферических волновых фронтов. Поскольку изучение проективных волновых фронтов проще и нагляднее, мы вначале разовьем эту теорию, хотя теория сферических волновых фронтов более изящна.

Начнем с напоминания некоторых фактов о преобразовании Радона. Пусть пространство $\mathbf{R}^n$ снабжено стандартной плотностью dx, так что мы можем отождествить функции u с плотностями udx. Обозначим через S^{n-1} единичную сферу и через $d\Omega$ индуцированную объемную плотность. Для точки $\Omega \in S^{n-1}$ определим отображение ρ_Ω: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ следующим образом:

$$\rho_\Omega(x) = x \cdot \Omega,$$

Для любой компактно сосредоточенной (обобщенной) функции u образуем $\rho_{\Omega *}(udx)$; это компактно сосредоточенная (обобщенная) плотность на $\mathbf{R}$. Мы утверждаем, что имеет место следующая формула:

$$\hat{u}(t\Omega)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{(n-1)/2}(\rho_{\Omega *}(udx))^{\wedge}(t). \tag{3.2}$$

Здесь крышечка в левой части обозначает преобразование Фурье на $\mathbf{R}^n$, а в правой части — преобразование Фурье на $\mathbf{R}$. В самом деле, обозначим через $d\beta_{c,\Omega}$ индуцированную плотность (меру Лебега) на гиперплоскости $\Omega\cdot x=c$. Получим

$$\begin{aligned}\hat{u}(t\Omega)&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\int e^{-it(\Omega\cdot x)}u(x)\,dx=\\&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itc}\left(\int\limits_{\Omega\cdot x=c}u(x)\,d\beta_{c,\Omega}\right)dc=\\&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{(n-1)/2}[\rho_{\Omega *}udx]^{\wedge}(t),\end{aligned}$$

или, повторяя те же шаги,

$$\begin{aligned}\hat{u}(t\Omega)&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\langle udx,\ e^{-it\Omega\cdot x}\rangle=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\langle udx,\ e^{-it\rho_{\Omega}(x)}\rangle=\\&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\langle\rho_{\Omega *}udx,\ e^{-it(\cdot)}\rangle=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{(n-1)/2}[\rho_{\Omega *}udx]^{\wedge}(t).\end{aligned}$$

Пользуясь (3.2) и основными фактами о преобразовании Фурье, мы покажем теперь, как восстановить u, если известны все $\rho_{\Omega *}u$. Пусть u — гладкая функция с компактным носителем. В силу формулы обращения для преобразования Фурье, имеем

$$\begin{aligned}u(x)&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\int\hat{u}(k)\,e^{ik\cdot x}\,dk=\\&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{S^{n-1}}\hat{u}(t\Omega)\,t^{n-1}e^{it\Omega\cdot x}\,dt\,d\Omega=\\&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{(n-1)/2}\int\limits_{S^{n-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\rho_{\Omega *}udx]^{\wedge}(t)\,t_+^{n-1}e^{it(\Omega\cdot x)}\,dt\,d\Omega,\end{aligned}$$

где $t_+=t$ при $t\geqslant 0$ и $t_+=0$ при $t<0$. В дальнейшем мы будем часто иметь дело с функцией t_+^{n-1} (и ее обратным преобразованием Фурье). Введем оператор I^r на плотностях в $\mathbf{R}^1$, задаваемый формулой

$$[I^r v]^{\wedge}(t)=\hat{v}(t)\,t_+^r,$$

или

$$[I^r v](c) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t_+^r \hat{v}(t)\, e^{itc}\, dt.$$

Тогда мы можем переписать последнее выражение для $u(x)$ в виде

$$u(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int I^{n-1}[\rho_{\Omega *}(udx)](\Omega \cdot x)\, d\Omega,$$

или

$$u(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int \rho_\Omega^* \{I^{n-1}[\rho_{\Omega *}(udx)]\}\, d\Omega. \tag{3.3}$$

Формула (3.3) известна как формула обращения для преобразования Радона. Заметим, что каждая из операций, участвующих в этой формуле, имеет смысл для обобщенных функций или плотностей. Итак, операторы

$$\rho_{\Omega *} : C_0^{-\infty}(|\Lambda| \mathbf{R}^n) \to C_0^{-\infty}(|\Lambda| \mathbf{R}),$$
$$I^{n-1} : C_0^{-\infty}(|\Lambda| \mathbf{R}) \to C^{-\infty}(\mathbf{R}),$$
$$\rho_\Omega^* : C^{-\infty}(\mathbf{R}) \to C^{-\infty}(\mathbf{R}^n)$$

имеют смысл и непрерывны, а интеграл в (3.3) корректно определен. Таким образом, поскольку гладкие сечения плотны в множестве обобщенных сечений, равенство (3.3) имеет место для обобщенных сечений. В конце параграфа мы обсудим, следуя И. М. Гельфанду, более общие ситуации, приводящие к соотношениям типа (3.3).

Пусть теперь X — дифференцируемое многообразие и U — координатная карта на X. Вложим U как подмножество в $\mathbf{R}^n$ при помощи координат и определим отображение ρ: $U \times S^{n-1} \to \mathbf{R}$ формулой

$$\rho(x, \Omega) = \rho_\Omega(x) = \Omega \cdot x.$$

Косферическое расслоение ST^*U можно отождествить с $U \times S^{n-1}$ (и рассматривать как подрасслоение в T^*U, а не как фактор-расслоение).

Предложение 3.3. *Обобщенная функция u является гладкой в (x_0, Ω_0) тогда и только тогда, когда существует такая гладкая плотность $b = hdx$ с компактным носителем и с $b(x_0) \neq 0$, что $\rho_{\Omega *}(bu)$ является гладкой по Ω в окрестности Ω_0.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Мы можем взять $S = S^{n-1}$ и $f = \rho$, так что $d\rho_\Omega(x) = (x, \Omega)$. Для доказательства достаточности предположим, что f: $S \times U \to \mathbf{R}$ — произвольное параметризованное семейство, для которого $df_{s_0}(x_0)=(x_0,\ \Omega_0)$. Далее,

$$bu=\left[\int \rho_\Omega^*\,[I^{n-1}\rho_{\Omega *}(bu)]\,d\Omega\right]dx,$$

т. е.

$$f_{s*}bu=\int f_{s*}\,\{\rho_\Omega^*\,[I^{n-1}\rho_{\Omega *}(bu)]\,dx\}\,d\Omega.$$

Интеграл справа можно разбить на две части. Для Ω, близких к $\pm\Omega_0$, выражение $\rho_\Omega^*[I^{n-1}\rho_{\Omega *}(bu)]$ гладко по предположению. С другой стороны, для Ω, лежащих вне некоторой окрестности $\pm\Omega_0$, как мы знаем из предложения 3.1, волновой фронт $\rho_\Omega^* v$ содержится в множестве векторов $(x,\ t\Omega)$, где v — любая обобщенная функция на $\mathbf{R}$. Значит, для s, достаточно близких к s_0, мы получаем гладкость $f_{s*}\rho_\Omega^* v$, что и требовалось доказать.

Теперь мы можем усмотреть, что выбор b в определении волнового фронта несуществен.

Предложение 3.4. *Предположим, что* $\rho_{\Omega *}(bu)$ — *гладкая плотность. Тогда будут гладкими и* $\rho_{\Omega *}(hbu)$ *для всех гладких функций* h. *В частности, по предложению* 3.3

$$PWF(hu)\subset PWF(u). \tag{3.4}$$

Действительно,

$$\rho_{\Omega *}h(bu)=\rho_{\Omega *}\int h\rho_\Omega^* I^{n-1}\rho_{\Omega *}(bu)\,d\Omega,$$

и мы можем опять разбить интеграл на две части: в одной из них подынтегральное выражение гладкое, а в другой мы вносим $\rho_{\Omega *}$ под знак интеграла и применяем предложение 3.1.

Предложение 3.5. *Множество* $PWF(u)$ — *замкнутое подмножество в* PT^*X.

Доказательство. Из предложения 3.3 непосредственно следует, что множество, где плотность u гладкая, открыто.

Обозначим через π проекцию $\pi\colon PT^*X\to X$. Как мы уже видели, $\pi(PWF(u))\subset \operatorname{sing\,supp} u$. Теперь мы утверждаем, что

$$\pi(PWF(u))=\operatorname{sing\,supp} u. \tag{3.5}$$

Доказательство. Предположим, что $x\notin\pi(PWF(u))$. Тогда около x существует координатная карта, обладающая тем свойством, что для каждого $\Omega_0\in S^{n-1}$ имеется такая функция b, что $\rho_{\Omega *}bu$ — гладкая плотность по Ω около Ω_0. Мы можем покрыть S^{n-1} конечным числом таких окрестностей, а затем, выбирая h с достаточно малым носителем и применяя (3.4), доказать, что существует *единая* функция b, для которой $\rho_{\Omega *}bu$ будет гладкой для всех Ω. Теперь, применяя формулу обращения для преобразования Радона, получаем, что bu — гладкая плотность, и тем самым (3.5) доказано.

Пусть f: $X \to Y$ — гладкое отображение. Мы знаем, как подмножества $A \subset T^*X$ отображаются в подмножества $df_*A \subset T^*Y$, а именно $df_*A = \{l \in T^*Y \mid l \in T^*Y_{f(x)},\ df_x^*l \in A$ для некоторого $x\}$.

Мы хотим дать аналогичное определение для подмножеств PT^* с учетом того, что df_x^* может переводить ненулевые векторы в нуль. В соответствии с этим если A — подмножество в PT^*X, то полагаем

$$df_*A = \{[l] \in PT^*Y \mid l \in T^*Y_{f(x)} \text{ для некоторого } x \text{ и либо } df_x^*l = 0, \text{ либо } [df_x^*l] \in A\}.$$

Легко проверить, что если A — компактное подмножество в PT^*X, то df_*A — компактное подмножество в PT^*Y. Легко проверить также, что если g: $Y \to Z$ — другое гладкое отображение, то

$$dg_* \circ df_* = d\,(g \circ f)_*.$$

Пусть теперь u — обобщенная плотность с компактным носителем на X. Мы утверждаем, что

$$PWF\,(f_*u) \subset df_*PWF\,(u). \tag{3.6}$$

В самом деле, предположим, что $[l] \notin df_*PWF\,(u)$. Пусть для g: $S \times Y \to \mathbf{R}$ имеем $dg_{s_0}(y_0) = l$. Тогда $g \circ (\mathrm{id} \times f)$: $S \times X \to \mathbf{R}$ — субмерсия для s, близких к s_0, и для любого $x_0 \in f^{-1}(y_0)$. Кроме того, для любого $x_0 \in f^{-1}(y_0) \cap \operatorname{supp} u$ мы можем найти такую функцию b с малым носителем около x_0, что плотность $(g_s \circ f)_*(bu)$ будет гладкой. Можно покрыть $f^{-1}(y_0) \cap \operatorname{supp} u$ конечным числом окрестностей, на которых b определены и отличны от нуля. Уменьшая окрестности, умножая на b^{-1} и пользуясь разбиением единицы, мы можем добиться того, что $b \equiv 1$ вблизи $f^{-1}(y_0) \cap \operatorname{supp} u$. Таким образом, мы можем предполагать, что плотность $(g_s \circ f)_*(bu)$ гладкая, где $b = f^*c$ для некоторой C_0^∞-функции, которая определена около y_0, причем $c(y_0) = 1$. Но тогда плотность

$$g_{s*}cf_*(u) = g_{s*}f_*(bu) = (g_s \circ f)_*(bu)$$

гладкая для s, близких к s_0, и y, близких к y_0.

Как мы увидим ниже, (3.6) вместе с замечаниями в конце § 4 гл. IV можно рассматривать как утверждение о том, что особенности концентрируются на огибающих — вариант принципа Гюйгенса. Подробнее мы поговорим об этом позднее. А сейчас обратимся к проблеме обобщения понятия *поднятия*.

Пусть W — подмножество в PT^*Y и f: $X \to Y$ — дифференцируемое отображение. Будем говорить, что f *трансверсально* W, если для любого l с $[l] \in W$ и $l \in T^*Y_{f(x)}$ имеем $df_x^*l \neq 0$. Например, если Z — подмногообразие в Y и $W = PN\,(Z)$ состоит из нормальных направлений к Z, то утверждение, что f трансверсально к W, означает, что f трансверсально к Z. Действительно, если f трансверсально к Z, то для каждого $x \in X$ при $f(x) \in Z$ должно быть $df_x TX_x + TZ_{f(x)} = TY_{f(x)}$. Но это то же самое, что отсутствие в $T^*Y_{f(x)}$ таких $l \neq 0$, которые равны нулю и на $TZ_{f(x)}$, и на $df_x TX_x$, т. е. то же самое, что трансверсальность f к $PN(Z)$.

Предположим, что f трансверсально к W. Тогда для любого $[l] \in W$ при $l \in T^*X_{f(x)}$ элемент $[df_x^* l]$ корректно определен, и мы полагаем

$$df^*W = \{[df_x^* l] \mid l \in T^*Y_{f(x)}, \quad [l] \in W\}.$$

Мы видели в § 1, что если f трансверсально подмногообразию Z, то можно определить f^*v, когда v есть δ-сечение вдоль Z. Теперь мы обобщим это, определив f^*v в том случае, когда $PWF(v) \subset W$ и f трансверсально W, где W — некоторое замкнутое подмножество в PT^*Y. Вначале опишем f^*v, введя некоторые дополнительные объекты, а затем докажем независимость f^*v от выбора этих объектов, дав описание f^*v при помощи предельного перехода, как это делалось в начале параграфа. Для любого заданного $x \in X$ можно найти координатные окрестности U точки x и V точки $f(x)$ со следующими свойствами:

(i) $f(U) \subset V \subset \mathbf{R}^n$;

(ii) существуют такие непересекающиеся замкнутые подмножества S_1 и S_2 на S^{n-1}, что $\pi^{-1}V \cap W \subset V \times S_1$ и $\{[l] \mid l \in T^*Y_{f(x')}, x' \in U, df_{x'}^* l = 0\} \subset V \times S_2$.

Далее, для любой $u \in C_0^\infty(|\Lambda| X)$ можно покрыть $\operatorname{supp} u$ конечным числом таких U с соответствующими V, которые покрывают $f(\operatorname{supp} u)$. Пользуясь разбиением единицы на X и Y, можно при определении $\langle u, f^*v \rangle$ заменить X и Y на U и V, удовлетворяющие (i) и (ii), и предполагать, что v имеет компактный носитель. Пусть ψ_1 и ψ_2 задают разбиение единицы на сфере, причем $S_1 \subset \operatorname{supp} \psi_1$ и $S_2 \cap \operatorname{supp} \psi_1 = \emptyset$, $S_1 \cap \operatorname{supp} \psi_2 = \emptyset$. Тогда

$$v = \int \rho_\Omega^* [I^{n-1} \rho_{\Omega *} v \, dy] \, d\Omega =$$

$$= \int \psi_1 \rho_\Omega^* [I^{n-1} \rho_{\Omega *} v \, dy] \, d\Omega + \int \psi_2 \rho_\Omega^* [I^{n-1} \rho_{\Omega *} v \, dy] \, d\Omega.$$

Второй интеграл является гладкой функцией, и его поднятие корректно определено. Что касается первого интеграла, то f трансверсально каждой из поверхностей $\rho_\Omega^{-1}(c)$, $c \in \mathbf{R}$, и, значит,

$$f^* \psi_1 \rho_\Omega^* [I^{n-1} \rho_{\Omega *} v \, dy]$$

определяется, как в § 1. Поэтому мы можем, по определению, положить

$$f^*v = \int f^* \psi_1 \rho_\Omega^* [I^{n-1} \rho_{\Omega *} v \, dy] \, d\Omega + f^* \int \psi_2 \rho_\Omega^* [I^{n-1} \rho_{\Omega *} v \, dy] \, d\Omega.$$

Для проверки того, что это определение не зависит от произвола в выборе входящих в него объектов, мы поступим следующим образом. Введем топологию в пространстве обобщенных функций, волновой фронт которых содержится в W. Мы покажем, что гладкие функции плотны в этой топологии, а значит, существует не более одного способа продолжить f^* по непрерывности с гладких функций. Будет доказана непрерывность данного выше определения для v с достаточно малым носителем и тем самым будет доказано глобальное существование и единственность f^*.

Прежде чем сделать это, отметим один результат, который непосредственно следует из локального описания f^*v. Из предложения 3.1 мы знаем, что волновой фронт $f^*\psi_1\rho_\Omega^*[I^{n-1}\rho_{\Omega*}v\,dy]$ для каждого Ω содержится в множестве всех ковекторов вида df^*l, где $l=(y,\ \Omega)$. Исходя из этого, интегрированием по S_1 (и измельчением покрытия $PWF(v)$) получаем, что

$$PWF(f^*v)\subset df^*(PWF(v)). \qquad (3.7)$$

Пусть Y — многообразие и Z — замкнутое подмножество в PT^*Y. Пусть $C_Z^{-\infty}(Y)\subset C^{-\infty}(Y)$ состоит из таких обобщенных функций v на Y, что $PWF(v)\subset Z$. Введем топологию на пространстве $C_Z^{-\infty}(Y)$. Мы хотим описать эту топологию при помощи семейства полунорм. Прежде всего мы хотим, чтобы она была сильнее слабой топологии, поэтому для каждого $\rho\in C_0^\infty(|\bigwedge|X)$ мы рассмотрим полунорму $|\ |_\rho$ вида

$$|v|_\rho=|\langle v,\ \rho\rangle|.$$

Далее, пусть U — произвольная координатная окрестность и S — любое вспомогательное пространство, а $f\colon S\times U\to\mathbf{R}$ таково, что $df_s(x)\neq 0$ и $[df_s(x)]\notin Z$ для всех $x\in U$ и $s\in S$. Пусть b — плотность с компактным носителем на U, т. е. плотность $f_{s*}(bu)$ гладкая на $S\times\mathbf{R}$. Пусть, далее, $c\in C_0^\infty(S)$, т. е. плотность $c(s)f_{s*}(bu)$ компактно сосредоточенная и гладкая на $S\times\mathbf{R}$. Для каждого k мы можем ввести C^k-норму $\|\ \|_k$ относительно некоторого выбора координат на S и $\mathbf{R}$. Тогда для четверки f, b, c, k введем полунорму

$$|v|_{f,b,c,k}=\|cf_*(bv)\|_k.$$

Мы утверждаем, что имеет место

Предложение 3.6. $C^\infty(Y)$ *плотно в* $C_Z^{-\infty}(Y)$.

Действительно, прежде всего заметим, что, как показывает доказательство предложения 3.2, достаточно в определении топологии ограничиться теми f, которые фигурируют в качестве ρ в преобразовании Радона. Итак, доказательство предложения 3.6 можно свести к случаю, когда $Y\subset\mathbf{R}^n$, а Z заменяется множеством вида $Y\times C$, где C — замкнутое подмножество в $\mathbf{R}^n$.

Далее, если v — любая обобщенная функция с компактным носителем на $\mathbf{R}^n$ и h — любая гладкая функция, то их свертка является гладкой функцией

$$(v \bigstar h)(x) = \langle v,\ h_x\, dy\rangle,$$

где $h_x(y) = h(x-y)$. Как обычно, мы иногда будем писать

$$v \bigstar h(x) = \int h(x-y)\, v(y)\, dy.$$

Правая часть определена при $v \in C_0^\infty$ и $h \in C^\infty$ и совпадает с левой частью. При $v \in C_0^{-\infty}$ мы возьмем левую часть по определению, а правую часть будем считать условным формальным выражением. Заметим, что

$$\begin{aligned}\langle v \bigstar h_1,\ h_2\rangle &= \int\int h_1(x-y) v(y)\, dy \cdot h_2(x)\, dx = \\ &= \int v(y) \left(\int h_1(-(y-x))\, h_2(x)\, dx\right) dy = \\ &= \langle v,\ h_1^r \bigstar h_2\rangle,\end{aligned}$$

где $h_1^r(x) = h_1(-x)$. Отсюда ясно, что $v \bigstar h_1 \to v$ при $h_1 \to \delta$ в $C^{-\infty}$. Заметим также, что для гладких функций h_1 и h_2 с компактным носителем, а значит, и для обобщенных функций

$$\rho_{\Omega *}(h_1 \bigstar h_2) = (\rho_{\Omega *} h_1) \bigstar (\rho_{\Omega *} h_2).$$

Действительно, не уменьшая общности, мы можем предполагать, что $\Omega = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$. Тогда равенство примет вид

$$\begin{aligned}&\int [h_1(x_1-y_1,\ \ldots,\ x_n-y_n)\, h_2(y_1,\ \ldots,\ y_n)\, dy_1 \ldots dy_n]\, dx_2 \ldots dx_n = \\ &= \left[\int h_1(x_1-y_1,\ \ldots,\ x_n-y_n)\, dx_2 \ldots dx_n\right] h_2(y_1,\ \ldots,\ y_n)\, dy_1 \ldots dy_n = \\ &= \int \left[\int h_1(x_1-y_1, \ldots, x_n-y_n)\, dx_2 \ldots dx_n\right] [h_1(y_2, \ldots, y_n)\, dy_2 \ldots dy_n]\, dy_1 = \\ &= \rho_{\Omega *} h_1 \bigstar \rho_{\Omega *} h_2(x_1).\end{aligned}$$

Пусть, далее, h — произвольная C^∞-функция с компактным носителем на $\mathbf{R}^n$ и с $\int h\, dx = 1$; положим

$$h_R = R^{-n} h(Rx).$$

Ясно, что $h_R \to \delta$ в $C^{-\infty}(\mathbf{R}^n)$ и

$$\rho_{\Omega *} h_R(x) = R^{-1}(\rho_{\Omega *} h)(Rx) \quad \text{или} \quad \rho_{\Omega *}(h_R) = (\rho_{\Omega *} h)_R,$$

так что

$$\rho_{\Omega *} h_R \to \delta \quad \text{в} \quad C^{-\infty}(\mathbf{R}^1).$$

Пусть, далее, Ω пробегает некоторое открытое множество на сфере, причем плотность $\rho_{\Omega *} v$ остается гладкой. Тогда

$$\rho_{\Omega *}(h_R \bigstar v) = (\rho_{\Omega *} h)_R \bigstar \rho_{\Omega *} v$$

стремится к $\rho_{\Omega*}v$ в C^∞-топологии на $\mathbf{R}^1$, причем зависимость от параметров гладкая. Итак, мы полностью доказали предложение 3.6. Ясно, что локальное определение f^* гладкое в $C_Z^{-\infty}$-топологии. В результате доказано

Предложение 3.7. *Пусть Z — замкнутое подмножество в PT^*Y и f: $X \to Y$ — гладкое отображение, трансверсальное Z. Если $v \in C_Z^{-\infty}(Y)$ и $v_i \in C^\infty(Y)$, причем $v_i \to v$ в $C_Z^{-\infty}(Y)$, то f^*v_i сходятся в $C^{-\infty}(X)$ к некоторому элементу f^*v, не зависящему от выбора v_i. При этом имеет место формула* (3.7).

Вернемся теперь к равенству (3.6) и поясним, почему фактически оно выражает принцип Гюйгенса. Предположим, что $X = Y \times S$, где S — некоторое пространство параметров, и пусть f: $X \to Y$ — естественная проекция. Пусть $Z \subset Y \times S$ — гиперповерхность, трансверсально пересекающая каждое $Y \times \{s\}$ и, значит, определяющая семейство гиперповерхностей, которые мы будем обозначать через Z_s. Предположим, что k — обобщенная плотность на X, волновой фронт которой содержится в ненулевом нормальном расслоении $\mathcal{N}^{\cdot}(Z)$ к Z. Предположим также, что $\mathcal{N}^{\cdot}(Z)$ трансверсально отображению f в смысле гл. IV. Это означает, что оно трансверсально пересекается с $H \subset T^*X$, где $H \subset T^*X$ состоит из всех ковекторов, лежащих в df^*T^*Y. В локальных координатах $H \subset T^*X$ состоит из точек вида $(y, s; \xi, 0)$, поскольку $f(y, s) = y$ и потому $df^*_{(y,\,s)}(y; \xi) = (y, s; \xi, 0)$. Тогда $\mathcal{N}^{\cdot}(Z) \cap H$ состоит в точности из нормальных к Z ковекторов вида $(y, s; \xi, 0)$, а $df_*\mathcal{N}^{\cdot}(Z)$ состоит в точности из нормалей к огибающей поверхностей Z_s. Итак, (3.6) утверждает, что особенности f_*k сконцентрированы вдоль огибающей поверхностей Z_s. Если понимать f_* как своего рода непрерывную суперпозицию, то это и есть принцип Гюйгенса в контексте теории распределений. Заметим, что на самом деле (1.3) — это частный случай, когда огибающей нет.

Исследуем теперь мультипликативные свойства волновых фронтов. Если X и Y — гладкие многообразия, то имеем очевидные отображения

$$C^\infty(X) \otimes C^\infty(Y) \to C^\infty(X \times Y),$$

$$C^\infty(|\wedge| X) \otimes C^\infty(|\wedge| Y) \to C^\infty(|\wedge|(X \times Y))$$

и т. д., причем все образы плотны в своих множествах значений. Имеются соответствующие отображения для обобщенных сечений и плотностей. Действительно, при $u \in C^{-\infty}(|\wedge| X)$ и $v \in C^{-\infty}(|\wedge| Y)$ определим $u \boxtimes v \in C^{-\infty}(|\wedge|(X \times Y))$, замечая, что для каждого $h \in C_0^\infty(X \times Y)$ функция

$$h_v(x) = \langle v,\ h(x, \cdot)\rangle$$

лежит в $C_0^\infty(X)$. Значит, мы можем положить

$$\langle u \boxtimes v,\ h\rangle = \langle u,\ h_v\rangle.$$

Если взять $h(x,\ y) = h_1(x)\,h_2(y)$, то ясно, что

$$\langle u \boxtimes v,\ h\rangle = \langle u,\ h_1\rangle\,\langle v,\ h_2\rangle,$$

и этого достаточно для того, чтобы показать, что мы могли также определить

$$(u \boxtimes v,\ h) = \langle v,\ h_u\rangle, \quad \text{где} \quad h_u(y) = \langle u,\ h(\cdot,\ y)\rangle.$$

Отметим, что *неверно*, что $PT^*(X\times Y) = PT^*X\times PT^*Y$, из-за существования ненулевых ковекторов в $T^*(X\times Y) = T^*X\times T^*Y$ вида $(l_1,\ 0)$ и $(0,\ l_2)$. Однако ясно, что (как множество) $PT^*(X\times Y)$ равно

$$PT^*(X\times Y) = PT^*X\times PT^*Y \cup PT^*X\times 0_Y \cup 0_X\times PT^*Y,$$

где через 0_Y обозначены нулевые ковекторы на Y (которые мы могли бы отождествить с Y) и аналогично 0_X. Мы утверждаем, что

$$PWF(u \boxtimes v) \subset PWF(u)\times PWF(v) \cup PWF(u)\times 0_Y \cup 0_X\times PWF(v). \tag{3.8}$$

Действительно, это чисто локальный вопрос, и по предложению 3.3 нужно только показать, что если для некоторых ξ, η элемент $[(x,\ y,\ \xi,\ \eta)]$ не принадлежит правой части (3.8), то

$$\langle h(u \boxtimes v),\ e^{i(r\xi\cdot x + s\eta\cdot y)}\rangle = O((r^2+s^2)^{-N})$$

для всех N при какой-то подходящей функции h. Можно выбрать $h(x,\ y) = h_1(x)\,h_2(y)$. Но тогда

$$\langle h_1 h_2 u \boxtimes v,\ e^{i(r\xi\cdot x + s\eta\cdot y)}\rangle = \langle h_1 u,\ e^{ir\xi\cdot x}\rangle\,\langle h_2 v,\ e^{is\eta\cdot y}\rangle$$

и правая часть равна $O((r^2+s^2)^{-N})$ для любого N.

До сих пор наши рассмотрения касались только проективных волновых фронтов. Покажем теперь, как можно доказать аналогичные результаты для сферических волновых фронтов. Можно было бы показать непосредственно, при помощи интегрирования по частям и преобразования Фурье, что достаточно пользоваться линейными функциями в (3.1). Это первоначальный подход Хёрмандера [4] (он *определял* волновой фронт локально при помощи преобразования Фурье, а затем показывал, что локальное определение не зависит от системы координат). Мы не будем повторять здесь его аргументацию, а вместо этого наметим другой подход. Если вернуться назад и исследовать предложение 3.2, то станет ясно, что, пока мы не умеем эффективно описывать волновой фронт на $\mathbf{R}^1$, оно малосодержательно. Этот дефект будет устранен, если мы докажем

Предложение 3.8. *Пусть u — обобщенная функция с компактным носителем на $\mathbf{R}^1$, и пусть $\hat{u}(\tau)=O(\tau^{-N})$ при $\tau\to+\infty$ для всех N. Тогда u — гладкая вперед для всех x, т. е. $WF(u)\subset\subset\{(x, \xi)\mid\xi<0\}$. Кроме того, если u — гладкая вперед в 0, это свойство имеет место и для всех hu при $h\in C_0^\infty(\mathbf{R})$.*

Доказательство. Мы воспользуемся преобразованием Гильберта. Напомним, что для $v\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ преобразование Гильберта Hv определяется формулой

$$(Hv)^\wedge(\tau)=\theta(\tau)^\wedge v(\tau),$$

где θ — функция Хевисайда, $\theta(\tau)=1$ при $\tau>0$ и $\theta(\tau)=0$ при $\tau\leqslant 0$. Правая часть — это умеренное распределение (т. е. элемент пространства $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$), быстро убывающее на бесконечности. Таким образом, $Hv\in C^\infty(\mathbf{R})$. Аналогично, если $v\in C_0^{-\infty}(\mathbf{R})$, то $Hv\in\in C^{-\infty}(\mathbf{R})$. Итак, H: $C_0^{-\infty}(\mathbf{R})\to C^{-\infty}(\mathbf{R})$ — непрерывное линейное отображение, и потому оно определяется своим ограничением на плотном подпространстве $C_0^\infty(\mathbf{R})$, которое H отображает в $C^\infty(\mathbf{R})\subset\subset C^{-\infty}(\mathbf{R})$. При $v\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ имеем

$$Hv(x)=\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(y)}{x-y}\,dy,$$

где интеграл берется в смысле главного значения по Коши, т. е.

$$Hv(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{v(y)}{x-y}\,dy.$$

Заметим, что $\hat{u}(\tau)=O(\tau^{-N})$ для всех N при $\tau\to+\infty$ тогда и только тогда, когда $(Hu)^\wedge(\tau)=O(\tau^{-N})$ при $\tau\to\pm\infty$, т. е. тогда и только тогда, когда Hu гладкая

Предложение 3.8 будет доказано, если мы докажем следующее:

(i) Пусть f_s — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\mathbf{R}^1$, гладко зависящий от некоторого параметра s. Тогда

$$f_s^*\circ H=H\circ f_s^*+k_s,$$

где k_s — сглаживающий оператор (интегральный оператор с C^∞-ядром), гладко зависящий от s.

(ii) Пусть $h_s\in C^\infty(\mathbf{R})$ гладко зависит от s. Тогда $h_sHu=$ $=H(h_su)+k_su$, где k_s имеет C^∞-ядро, гладко зависящее от s.

При доказательстве утверждений (i) и (ii) мы не обращаем внимания на явную зависимость от s. Достаточно доказать нужные неравенства для операторов на C_0^∞, поскольку C_0^∞ плотно в $C_0^{-\infty}$.

Для доказательства (i) заметим, что

$$f^*Hv(x)=\frac{1}{i}\int\frac{v(y)}{f(x)-y}\,dy=\frac{1}{i}\int\frac{v(f(y))}{f(x)-f(y)}f'(y)\,dy$$

и

$$Hf^*v(x)=\frac{1}{i}\int\frac{v(f(y))}{x-y}\,dy.$$

Далее,

$$\frac{1}{f(x)-f(y)}=\frac{1}{(x-y)f'(y)\,[1+g(x,\ y)(x-y)]},$$

где $g(x,\ y)$ гладко зависит от x и y. Мы можем написать

$$\frac{1}{1+g(x,\ y)(x-y)}=1+(x-y)\,h(x,\ y),$$

где h — гладкая функция. Тогда

$$f^*Hv=\frac{1}{i}\int\frac{v(f(y))}{f(x)-f(y)}f'(y)\,dy=\frac{1}{i}\int\left[\frac{v(f(y))}{x-y}+v(f(y))\,h(x,\ y)\right]dy,$$

так что

$$(f^*H-H^*f)\,v=\frac{1}{i}\int v(f(y))\,h(x,\ y)\,dy=$$
$$=\frac{1}{i}\int v(y)\,h(x,f^{-1}(y))\,(f^{-1})'(y)\,dy$$

и (i) доказано. Аналогично для (ii)

$$[(hH-Hh)\,v](x)=\frac{1}{i}\int\frac{[h(x)-h(y)]\,v(y)}{x-y}\,dy=\frac{1}{i}\int r(x,\ y)\,v(y)\,dy,$$

где $r(x,\ y)=[h(x)-h(y)]/(x-y)$ — гладкая функция от x и y. Это доказывает предложение 3.8. Теперь мы можем сформулировать аналоги предложений 3.3—3.7 для сферических волновых фронтов вместо проективных.

Предложение 3.9. *Пусть u — обобщенная плотность, определенная на X. Пусть U — система координат на X и $U\times S^{n-1}$ дает соответствующую тривиализацию ST^*X над U. Тогда $(x_0,\ \Omega_0)\notin SWF(u)$ в том и только том случае, если существует такая срезающая функция b, отличная от нуля в x_0, что $H\rho_{\Omega*}(bu)$ является гладкой на $\mathbf{R}$, где H — преобразование Гильберта. Это равносильно тому, что $\langle bu,\ e^{i\tau\Omega\cdot x}\rangle$ — асимптотический нуль при $\tau\to\infty$ для Ω, близких к Ω_0. В частности, множество $SWF(u)$ замкнуто в ST^*X, а WFX замкнуто в T^*X-0_X. Если $f\colon X\to Y$ — гладкое отображение и u имеет компактный носитель, то*

$$WF(f_*u)\subset\{l\in T^*Y\mid 0\neq l\in T^*Y_{f(x)}\quad\text{и}\quad df_x^*l\subset WF(u)\cup 0_X\}.\qquad(3.9)$$

Если v — обобщенная функция на Y и f трансверсально $WF(v)$, то f^*v определяется по непрерывности и

$$WF(f^*v)\subset df^*WF(v).\qquad(3.10)$$

Если u и v — обобщенные функции на X и Y, то

$$WF(u \boxtimes v) \subset WF(u) \times WF(v) \cup WF(u) \times 0_Y \cup 0_X \times WF(v). \quad (3.11)$$

Имеется ряд следствий из (3.9) — (3.11) (и их более слабые проективные варианты), которые стоит привести.

Начнем с вопроса об умножении на обобщенные функции. Пусть u и v — настоящие функции. Тогда их произведение uv, т. е. попросту $uv(x) = u(x)\,v(x)$, можно описать более абстрактно как

$$uv = \Delta^*(u \boxtimes v),$$

где $\Delta: X \to X \times X$ — диагональное отображение, $\Delta(x) = (x, x)$. Для того чтобы придать смысл этому выражению для обобщенных сечений, нужно знать, что Δ трансверсально $WF(u \times v)$. Далее, $d\Delta^*(x, x, \xi, \eta) = (x, \xi + \eta)$, т. е. нормальное расслоение к Δ состоит из всех ковекторов вида $(x, x, \xi, -\xi)$. Мы применим (3.11) и получим

Предложение 3.10. *Пусть u и v — обобщенные функции. Предположим, что $0 \neq \xi + \eta$ для любых $\xi \in WF(u)$ и $\eta \in WF(v)$ (где $\xi, \eta \in T^*X_x$). Тогда uv определяется по непрерывности и*

$$WF(uv) \subset (WF(u) + WF(v)) \cup WF(u) \cup WF(v)$$

(где через $WF(u) + WF(v)$ обозначено множество всех ковекторов вида $\xi + \eta$ с $\xi \in WF(u)$ и $\eta \in WF(v)$).

Пусть X, Y и Z — дифференцируемые многообразия и K — сечение $|\Lambda|Y$ над $X \times Y$, а L — сечение $|\Lambda|Z$ над $Y \times Z$. Для гладких сечений (компактно сосредоточенных на Y) композиция этих двух ядер $K \circ L$ — это сечение $|\Lambda|Z$ над $X \times Z$, имеющее вид

$$K \circ L(x, z) = \int_Y K(x, y)\,L(y, z),$$

или, более абстрактно,

$$K \circ L = \pi_* \Delta^* K \boxtimes L,$$

где $K \boxtimes L$ — сечение $|\Lambda|Y \otimes |\Lambda|Z$ над $X \times Y \times Y \times Z$, $\Delta: X \times Y \times Z \to X \times Y \times Y \times Z$ — диагональное отображение $\Delta(x, y, z) = (x, y, y, z)$ и $\pi: X \times Y \times Z \to X \times Z$ — проекция на первый и третий сомножители. Для того чтобы определить $K \circ L$ в случае обобщенных сечений, мы применяем наш критерий и получаем

Предложение 3.11. *Предположим, что K — обобщенное сечение $|\Lambda|Y$ над $X \times Y$ и L — обобщенное сечение $|\Lambda|Z$ над $Y \times Z$. Предположим, что ни в каком T^*Y_y не существует такого $\eta \neq 0$, что $(0, \eta)_{(x, y)} \in WFK$ и $(-\eta, 0)_{(y, z)} \in WFL$. Тогда композиция $K \circ L$ определена по непрерывности и*

$$WF(K \circ L) \subset \{(x, y; \xi, \zeta) \mid \text{существует некоторое } (y, \eta) \text{ с } (x, y; \xi, \eta) \in WFK \text{ и } (y, z; -\eta, \zeta) \in WFL\}.$$

В заключение этого параграфа посмотрим еще раз на преобразование Радона с точки зрения, предложенной Гельфандом и др. [5]. Пусть X и Y — дифференцируемые многообразия и Z — многообразие, которое расслоено над X и над Y, так что мы имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Предположим для простоты, что X, Y, Z снабжены не обращающимися в нуль плотностями, так что мы можем отождествлять функции с плотностями. Тогда, отправляясь от любой обобщенной функции u на X, мы можем образовать π^*u, и если выполнены соответствующие условия компактности, то можно образовать $\rho_*\pi^*u$. Это дает возможность переходить из $C_0^\infty(X)$ в $C^\infty(Y)$ и из $C_0^{-\infty}(X)$ в $C^{-\infty}(Y)$. Аналогично можно двигаться в обратную сторону, образуя $\pi_*\rho^*v$ при $v \in C_0^\infty(Y)$ или $C_0^{-\infty}(Y)$. Например, мы можем взять $X = \mathbf{R}^n$ и $Y = S^{n-1} \times \mathbf{R}$, а в качестве $Z \subset X \times Y$ взять множество таких $(x; \Omega, t)$, что $x \cdot \Omega = t$. Мы можем считать $S^{n-1} \times \mathbf{R}$ состоящим из ориентированных гиперплоскостей, и тогда Z состоит из таких пар (x, h), где x — точка $\mathbf{R}^n$, h — ориентированная гиперплоскость, что $x \in h$. И X, и Y имеют естественные плотности, отображение $X \times Y \to \mathbf{R}$, переводящее $(x; \Omega, t)$ в $x \cdot \Omega - t$, индуцирует плотность на Z. (Фактически мы рассматриваем обобщенную плотность $\delta(x \cdot \Omega - t)$ на $X \times Y$.) В этом случае если $u \in C_0^\infty(X)$, то

$$\rho_*\pi^*u(\Omega, t) = \rho_{\Omega*}u(t) = \int_{x \cdot \Omega = t} u,$$

в то время как

$$\pi_*\rho^*v(x) = \int_{S^{n-1}} v(\Omega, \Omega \cdot x)\, d\Omega.$$

Заметим, что, когда Z — подмногообразие в $X \times Y$, пересечение $\rho^{-1}(y) \cap \operatorname{supp} \pi^*u \subset \operatorname{supp} u \times y$ компактно, и можно без труда образовать $\rho_*\pi^*u$, если u имеет компактный носитель. (Разумеется, $\rho_*\pi^*u$ не обязательно имеет компактный носитель. Например, для классического преобразования Радона $\pi_*\rho^*v$ не будет, вообще говоря, иметь компактный носитель для компактно сосредоточенных v на $S^{n-1} \times \mathbf{R}$.)

В качестве других примеров возьмем $X = \mathbf{P}^n$ (прямые, проходящие через начало в $\mathbf{R}^{n+1}$) и $Y = \mathbf{P}^{n*}$ (гиперплоскости, проходящие через начало в $\mathbf{R}^{n+1}$); см. Гельфанд и др. [5]. Вещественное проективное n-пространство можно заменить комплексным или кватернионным проективным n-пространством или проективной плоскостью над числами Кэли; см. Хелгасон [6]. Во всех этих случаях имеется формула обращения. Можно также рассмотреть $X = G_n(k) = \{k$-мерные подпространства в $\mathbf{R}^n\}$ и $Y = G_{n-k}(k)$, где $k < n-k$ и $Z = \{(x, y) \mid x \subset y\}$; см. Хелгасон [6].

Исследуем общую ситуацию, когда Z — подмногообразие в $X \times Y$, и выясним, при каких условиях Z определяет двойное расслоение. Обозначим через π ограничение проекции π_X: $X \times Y \to X$ на Z. Утверждение, что π — субмерсия, означает, что $d\pi^*$ инъективно. Далее, для любого $\xi \in T^*X$ имеем $d\pi_X^*\xi = (\xi, 0)$ и $d\pi^*\xi$ — ограничение $(\xi, 0)$ на Z. Итак, мы хотим быть уверены, что нормальное расслоение NZ *не содержит векторов вида* $(\xi, 0)$ *с* $\xi \neq 0$ *или* $(0, \eta)$ *с* $\eta \neq 0$.

Поскольку оператор $\rho_*\pi^*$: $C_0^\infty(X) \to C^\infty(Y)$ задается δ-сечением вдоль Z, мы знаем, что его волновой фронт состоит из ненулевых векторов в NZ. Предположим, что X и Y компактны, т. е. мы можем образовать композицию операторов

$$(\pi_*\rho^*) \circ (\rho_*\pi^*):\ C^\infty(X) \to C^\infty(X).$$

По формуле (3.9) волновой фронт этого оператора состоит из таких (ξ_1, ξ_2), что существует η, для которого $(\xi_1, \eta) \in WF(\rho_*\pi^*)$ и $(-\eta, \xi_2) \in WF(\pi_*\rho^*)$ (где для краткости мы обозначаем через $WF(\rho_*\pi^*)$ волновой фронт распределения, являющегося ядром $\rho_*\pi^*$, и т. д.). В частности, предположим, что отображения $SN^*Z \to ST^*X$ и $SN^*Z \to ST^*Y$ оба биективны. Тогда $\xi_2 = -\xi_1$ и $WF(\pi_*\rho^*\rho_*\pi^*) \subset N\Delta$, где $\Delta \subset X \times X$ — диагональ. В действительности, как мы увидим позднее, этого достаточно для того, чтобы утверждать, что $\pi_*\rho^*\rho_*\pi^*$ — эллиптический псевдодифференциальный оператор, и это дает возможность получить локально формулу обращения для оператора $\rho_*\pi^*$. Условие биективности отображений $SN^*Z \to ST^*X$ и $SN^*Z \to ST^*Y$ в указанных выше примерах выполнено.

Пользуясь результатами из дифференциальной топологии, можно показать, что если двойное расслоение удовлетворяет указанному выше условию биективности и X, Y компактны, то оно удивительно напоминает проективные примеры. Например, $Z \subset X \times Y$ имеет коразмерность 1, 2, 4 или 8 и слои диффеоморфны вещественному, комплексному, кватернионному проективному пространству или проективной плоскости над числами Кэли.

§ 4. Лагранжевы распределения

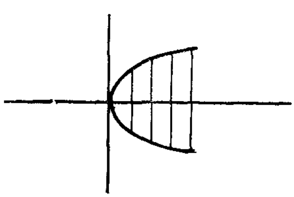
В оставшейся части этой главы мы займемся выделением хорошего семейства обобщенных сечений — оно должно хорошо вести себя относительно функториальных операций — и изучением различных свойств этих обобщенных сечений. В некотором смысле обобщенные сечения, которые мы будем рассматривать, являются обобщениями δ-сечений; они возникают при замыкании класса δ-сечений относительно операции опускания. Так, например, мы хотим рассмотреть обобщенное сечение вида $\pi_* a g^* \delta$ на многообразии X, где

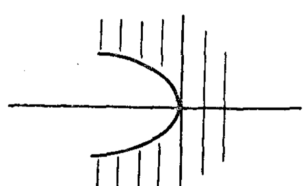
$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{R} \\ X & \end{tikzcd}$$

π и g — субмерсии, a — гладкая функция (или плотность), определенная на W. Чтобы проиллюстрировать, какого сорта сечения при этом возникают, рассмотрим случай, когда $X = \mathbf{R}$, $W = \mathbf{R}^2$, а $g_{\pm}(x, t) = x \pm t^2$, $\pi(x, t) = x$. Мы хотим рассмотреть $\pi_* a g^* \delta$, где $a = a(x, t)$ — какая-то функция с компактным носителем по t. Для начала проведем выкладки с заменой δ на функцию Хевисайда x_+^0, где $x_+^0(x) = 1$ при $x > 0$ и $x_+^0(x) = 0$ при $x < 0$. (Более общо, мы полагаем, $x_+^\lambda = x^\lambda$ при $x > 0$ и $x_+^\lambda(x) = 0$ при $x < 0$. Мы следуем обозначениям Гельфанда — Шилова [8]. Напомним, что производная x_+^0 в начале — это и есть δ.) Пусть морфизм, ассоциированный с g и π, определяется выбором плотностей $|dx|$ на $\mathbf{R}$ и $|dx \wedge dt|$ на $\mathbf{R}^2$. Кроме того, в нашем предварительном вычислении будем предполагать, что $a = a(t)$ тождественно равно 1 для t, близких к нулю, и что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(t)\,dt = A$. Тогда

$$g^* x_+^0 = \begin{cases} 1 & \text{на } \ g^{-1}(\mathbf{R}^+), \\ 0 & \text{на } \ g^{-1}(\mathbf{R}^-), \end{cases}$$

и мы получаем картинки


g_-


g_+

где заштрихованы области, на которых $g^*x_+^0=1$. Для g_- имеет место формула

$$\pi_* a g_-^* x_+^0 = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x<0, \\ \int\limits_{-x^{1/2}}^{x^{1/2}} a(t)\,dt = 2x_+^{1/2}+\gamma(x) \quad \text{при} \quad x\geqslant 0, \end{cases}$$

где γ — гладкая функция от x, равная нулю вблизи $x=0$, и $\pi_* a g_-^* x_+^0 = A$ для больших значений x. Аналогично, для g_+ получаем

$$\pi_* a g_+^* x_+^0 = \begin{cases} A \quad \text{при} \quad x>0, \\ A-\int\limits_{-|x|^{1/2}}^{|x|^{1/2}} a(t)\,dt = A-2x_-^{1/2}-\gamma(-x) \quad \text{при} \quad x\leqslant 0. \end{cases}$$

(Здесь $x_-^\lambda(x)=x_+^\lambda(-x)$.) Итак, мы можем написать

$$\pi_* a g_-^* x_+^0 \equiv 2x_+^{1/2} \quad \text{и} \quad \pi_* a g_+^* x_+^0 \equiv -2x_-^{1/2}, \tag{4.1}$$

где символ $\equiv$ означает равенство по модулю гладких функций.

Проведем теперь несколько иное вычисление, заменяя x_+^0 на δ и беря при этом $g=g_-$, $a=a(x, t)$. (Это вычисление имеет не только иллюстративную ценность, но будет играть решающую роль в наших дальнейших общих рассмотрениях.)

Пусть $h\in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Тогда

$$\langle \pi_* a g^*\delta, h\rangle = \int\limits_Z a(x, t)\,h(x)\,\nu,$$

где $Z\subset\mathbf{R}^2$ — подмногообразие $x=t^2$ и ν — индуцированная плотность. Если параметризовать Z при помощи t, то $d(x-t^2)\wedge dt = dx\wedge dt$, т. е. $\nu=dt$ и рассматриваемый интеграл принимает вид

$$\int\limits_{\mathbf{R}} a(t^2, t)\,h(t^2)\,dt.$$

Предположим вначале, что $a(x, t)=a(t)$, т. е. что a зависит только от второго переменного. Мы можем написать разложение $a=a_e+a_o$, где $a_e(t)={}^1/_2[a(t)+a(-t)]$ — четная, а $a_o(t) = {}^1/_2[a(t)-a(-t)]$ — нечетная функции. Поскольку $h(t^2)$ четна, имеем

$$\langle \pi_* a g^*\delta, h\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} a_e(t)\,h(t^2)\,dt = 2\int\limits_0^\infty a_e(t)\,h(t^2)\,dt.$$

Воспользуемся теперь хорошо известным утверждением, принадлежащим Уитни, о том, что каждая четная C^∞-функция a_e может быть представлена в виде $a_e(t)=b(t^2)$, где $b\in C^{\infty}$ [1]. Тогда

$$2\int_0^\infty a_e(t)\,h(t^2)\,dt=2\int_0^\infty b(t^2)\,h(t^2)\,dt=\int_0^\infty b(u)\,h(u)\,u^{-1/2}\,du,$$

так что

$$\pi_* a g^*\delta = b x_+^{-1/2}, \tag{4.2}$$

где $x_+=x$ при $x>0$ и $x_+=0$ при $x<0$.

Если a гладко зависит от каких-нибудь дополнительных параметров, то b тоже гладко зависит от этих параметров. Взяв в (4.2) $a\equiv 1$ вблизи начала, мы увидим, что в наш набор обобщенных функций хорошо было бы включить $x_+^{-1/2}$. Утверждение (4.2) можно усилить при помощи следующего трюка. Обозначим через T_c сдвиг на c на прямой или на плоскости в направлении x, т. е. $T_c(x,t)=(x+c,t)$. Тогда $T_c\circ g(x,t)=x+t^2+c=g\circ T_c(x,t)$ и, значит,

$$g^*\circ T_c^*=T_c^*\circ g^*;$$

умножение на a тоже коммутирует с T_c, поскольку a зависит только от t. Наконец, $\pi\circ T_c=T_c\circ\pi$, а потому $T_c^*\pi_*=\pi_*T_c^*$. Итак,

$$(\pi_* a g^*)\,T_c^* u = T_c^*\pi_* a g^* u$$

для всех $u\in C^{-\infty}(\mathbf{R})$. Отсюда следует, что

$$v\bigstar \pi_* a g^* u=\pi_* a g^*(v\bigstar u)$$

для всех $v\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ и, стало быть, для всех $v\in C_0^{-\infty}(\mathbf{R})$. В частности, взяв $u=\delta$, получим

$$\pi_* a g^* v=\left(b(x)\,x_+^{-1/2}\right)\bigstar v,$$

если либо a, либо v имеет компактный носитель. Здесь a, а значит, и b может зависеть от дополнительных параметров. В частности, рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{R}\times\ \mathbf{R}\times\mathbf{R} & \xrightarrow{G} & \mathbf{R}\times\mathbf{R} \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \\
\mathbf{R}\xrightarrow{\ \Delta\ }\mathbf{R}\times\mathbf{R} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
(s,x,t)\longmapsto(s,x+t^2)\\
\downarrow\\
(s,x)
\end{array}$$

---

[1] *Доказательство.* Пусть $\sum a_n t^n$ — разложение Тейлора a_e в 0. Поскольку a_e четна, можно оставить только четные степени t. Итак, $\sum a_n t^n=\sum c_n t^{2n}$. По теореме Бореля (см. § 2 гл. II) можно найти C^∞-функцию c с разложением Тейлора $\sum c_n t^n$. Тогда функция $a_e(t)-c(t^2)=d(t)$ равна в точке 0 нулю вместе со всеми своими производными, а значит, $d\left(t^{1/2}\right)$ принадлежит C^∞. Полагаем $b(t)=c(t)+d\left(t^{1/2}\right)$.

где $\Delta x=(x,\ x)$. Пусть $A(s,\ x,\ t)=a(s,\ t)$. Тогда

$$\Delta^*\pi_{2*}AG^*=\pi_*ag^*,\quad \pi_{2*}AG^*v=\int B(x,\ y)\,y_{+}^{-1/2}\,v(x-y)\,dy.$$

Значит,

$$\pi_*ag_{-}^*v(x)=\int b(x,\ y)\,y_{+}^{-1/2}v(x-y)\,dy \tag{4.3$_-$}$$

в смысле обобщенных функций, где $b(x,\ t^2)={}^1/_2[a(x,\ t)+a(x,-t)]$. Точно такое же вычисление показывает, что

$$\pi_*ag_{+}^*v(x)=\int b(x,\ y)\,y_{-}^{-1/2}v(x-y)\,dy. \tag{4.3$_+$}$$

Вернемся к нашему исходному обсуждению. Мы видели, что, начиная с δ и применяя π_*g^*, мы получаем $x_{+}^{-1/2}$. Применяя π_*g^* еще раз, мы получим $x_{+}^{-1/2}\bigstar x_{+}^{-1/2}$. Позднее в этом параграфе мы укажем общий рецепт вычисления (при помощи преобразования Фурье) такого рода сверток. Сейчас вычислим ее непосредственно (по крайней мере с точностью до постоянного множителя). Ясно, что $x_{+}^{-1/2}\bigstar x_{+}^{-1/2}=0$ при $x<0$. При $x>0$ имеем

$$x_{+}^{-1/2}\bigstar x_{+}^{-1/2}(r)=\int (r-y)_{+}^{-1/2}y_{+}^{-1/2}\,dy=$$
$$=\int (r-rz)_{+}^{-1/2}(rz_{+})^{-1/2}\,r\,dz=\int (1-z)_{+}^{-1/2}z_{+}^{-1/2}\,dz=c,$$

т. е. получается некоторое положительное число, не зависящее от r. Другими словами,

$$x_{+}^{-1/2}\bigstar x_{+}^{-1/2}=cx_{+}^{0}.$$

По тем же соображениям для любых $a,\ b>-1$ имеем

$$x_{+}^{a}\bigstar x_{+}^{b}=c(a,\ b)\,x_{+}^{a+b+1},\quad c(a,\ b)>0.$$

Наш набор основных распределений на прямой должен поэтому включать $x_{+}^{n/2}$ для всех $n\geqslant-1$. Далее, наиболее общее распределение, сосредоточенное в начале, — это линейная комбинация производных δ-функции. Итак, если мы хотим начать с производных δ-функции, то мы должны рассматривать $x_{+}^{n-1/2}$ для всех значений n. Если разрешается отображение $x\longmapsto -x$, то мы должны также рассматривать x_{-}^{λ} для различных полуцелых значений λ. Все это примеры *однородных* обобщенных функций, т. е. таких, что если обозначить через M_c умножение на c, то

$$M_c^*x_{+}^{\lambda}=c^{\lambda}x_{+}^{\lambda},\qquad M_c^*\delta=c^{-1}\delta$$

и т. д. Теория однородных обобщенных функций прекрасно и подробно изложена в книге Гельфанда — Шилова [8]. Здесь мы разовьем часть этой теории с несколько иной точки зрения.

Функция f, определенная на $\mathbf{R}^+$, называется *символом порядка* r, если для каждого $n \geqslant 0$ существует такая константа c_n, что

$$|f^{(n)}(\tau)| \leqslant c_n \tau^{r-n} \quad \text{при} \quad \tau > 1.$$

(Здесь нас интересует случай вещественнозначных функций f. Если бы f принимала значения в векторном пространстве, то при всех n должны были бы выполняться подобные неравенства с полунормами, задающими топологию на векторном пространстве; в частности, так было бы в случае, когда f принимает значения в некотором функциональном пространстве.) Заметим, что если f — символ порядка r и g — символ порядка s, то fg — символ порядка $r+s$. Кроме того, если h — такой символ порядка r, что $|h(\tau)| \geqslant d\tau^r$ для некоторого $d > 0$ и всех $\tau > 1$, то $1/h$ — символ порядка $-r$.

Пусть φ — символ порядка 1, для которого $|\varphi'| \geqslant d > 0$. Пусть, далее, f — символ порядка r. Тогда

$$e^{i\varphi} f = \frac{1}{i\varphi'}(e^{i\varphi})' f = \left(\frac{e^{i\varphi} f}{i\varphi'}\right)' + e^{i\varphi}\left(\frac{if}{\varphi'}\right)',$$

где $g = (if/\varphi')'$ — символ порядка $r-1$. Интегрирование дает (для некоторого $a > 0$)

$$\int_a^\tau e^{i\varphi} f = \frac{e^{i\varphi} f}{i\varphi'}(\tau) - \frac{e^{i\varphi} f}{i\varphi'}(a) + \int_a^\tau e^{i\varphi} g.$$

Нас будет интересовать значение, которое можно придать выражению $\int_a^\infty e^{i\varphi} f$. Если бы можно было пренебречь членом, отвечающим верхнему пределу интеграла:

$$\lim_{\tau\to\infty} [e^{i\varphi} f / i\varphi'](\tau),$$

то мы свели бы интеграл $\int e^{i\varphi} f$, где f — символ порядка r, к интегралу $\int e^{i\varphi} g$, где g — символ порядка $r-1$. Если f — функция с компактным носителем (или символ степени, меньшей -1), то законно интегрирование по частям, поскольку не будет граничного члена на бесконечности. Для общего символа степени r *определим* интеграл $\int^\infty e^{i\varphi} f$ при помощи n последовательных интегрирований по частям так, чтобы $r - n < -1$. Это дает способ регуляризовать интеграл. Эту регуляризационную процедуру можно обосновать, показав, что символы с компактным носителем плотны в подходящей топологии и что эта процедура — продолжение по непрерывности; см. Хёрмандер [4].

Так, например, интеграл

$$\int_0^\infty e^{ixt}t^{\lambda-1}\,dt$$

приобретает смысл для $x \neq 0$ и любого значения λ. (Здесь интегрирование по частям может потребоваться и при $t=0$.)

Для вычисления этого интеграла заметим, что при $x>0$ можно сделать замену переменных и получить

$$\int_0^\infty e^{ixt}t^{\lambda-1}\,dt = x^{-\lambda}\int_0^\infty e^{is}s^{\lambda-1}\,ds = c_\lambda x^{-\lambda},$$

где

$$c_\lambda = \int_0^\infty e^{is}s^{\lambda-1}\,ds = \int e^{iz+(\lambda-1)\log z}\,dz,$$

а интегрирование ведется по положительной вещественной полуоси. По теореме Коши, если $\lambda>0$, мы можем заменить положительную вещественную полуось на положительную мнимую полуось. Значит,

$$c_\lambda = e^{\pi\lambda i/2}\int_0^\infty e^{-s}s^{\lambda-1}\,ds = e^{\pi\lambda i/2}\Gamma(\lambda),$$

если $\lambda>0$. На комплексные значения λ (отличные от $\lambda=-1, -2, \ldots$) это соотношение продолжается аналитически.

При $x<0$

$$\int_0^\infty e^{ixt}t^{\lambda-1}\,dt = |x|^{-\lambda}\int_0^\infty e^{-is}s^{\lambda-1}\,ds,$$

и, продолжая аналитически на отрицательную вещественную полуось, получаем

$$|x|^{-\lambda}e^{-\pi\lambda i/2}\Gamma(\lambda) = c_\lambda e^{-\pi\lambda i}\,|x|^{-\lambda}.$$

Заметим, что

$$\lim_{y\to+0}(x+iy)^\mu = \begin{cases} x^\mu, & x>0, \\ e^{\pi\mu i}\,|x|^\mu, & x<0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Обозначим этот предел через $(x+i0)^\mu$; имеем

$$\int_0^\infty e^{ixt}t^{\lambda-1}\,dt = e^{\pi\lambda i/2}\Gamma(\lambda)\,(x+i0)^{-\lambda} =$$

$$= \Gamma(\lambda)\left[e^{\pi\lambda i/2}x_+^{-\lambda} + e^{-\pi\lambda i/2}x_-^{-\lambda}\right]$$

при $x \neq 0$. Отметим, что как *распределение* $(x+i0)^\mu$ имеет смысл даже около $x=0$. Действительно, при $\mu>0$ функция

$$(x+i0)^\mu = \begin{cases} x^\mu, & x>0, \\ e^{\pi\mu i}\,|x|^\mu, & x<0, \end{cases}$$

интегрируема около $x=0$, т. е. для любой функции $a \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$ корректно определено выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\,(x+i0)^\mu\,dx = \langle a,\ (x+i0)^\mu\rangle.$$

При $\mu<0$ интеграл

$$\langle a,\ (x+i0)^\mu\rangle = \frac{e^{\pi\mu i}}{\Gamma(-\mu)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{ixt} a(x)\, t^{-\mu-1}\,dx\,dt$$

сходится для t, близких к нулю, а для больших значений $|t|$ его можно регуляризовать интегрированием по частям по x.

Итак, $(x+i0)^\lambda$ — обобщенная функция, голоморфно зависящая от λ. Ее волновой фронт состоит из $(0,\ \xi)$, $\xi>0$. Кроме того, она является однородной степени λ в том смысле, что

$$M_a^*(x+i0)^\lambda = a^\lambda (x+i0)^\lambda, \quad a>0,$$

где через M_a: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ обозначено умножение на a. Мы отсылаем читателя к книге Гельфанда — Шилова [8], где подробно изучены все однородные распределения.

Поскольку волновой фронт для $(x+i0)^\lambda$ — самый простой из всех возможных, мы будем пользоваться в качестве основных распределений на $\mathbf{R}^1$ этими распределениями или близкими к ним вместо δ и ее производных. На самом деле мы будем интересоваться поведением обобщенных функций u по модулю гладких функций, а значит, поведением $\hat{u}$ на бесконечности, а не в нуле. Поэтому мы поступим следующим образом. Пусть χ_+ — такая C^∞-функция вещественного переменного, что $\chi_+(\tau)=0$ при $\tau<\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ и $\chi_+(\tau)=1$ для всех больших значений τ. Будем обозначать через χ_+ любую функцию такого типа. Аналогично определим χ_-, полагая $\chi_-(\tau)=\chi_+(-\tau)$. Для каждого m введем класс обобщенных функций

$$v_m^\pm(x) = \int_{\mathbf{R}} \chi_\pm(\tau)\, e^{i\tau x}\,|\tau|^m\,d\tau. \tag{4.5}$$

Значит, $WF(v_m^\pm)=\Lambda_0^\pm$, где Λ_0^+ — множество положительных ковекторов в $T^*\mathbf{R}_0$, а Λ_0^- — множество отрицательных ковекторов.

Обобщенные функции $v_m^\pm$ однородны степени $-m-1$ по модулю гладких функций:

$$M_a^* v_m^\pm \equiv a^{-m-1} v_m^\pm, \quad a>0,$$

где $\equiv$ означает, что правая и левая части отличаются на гладкую функцию. Заметим, что

$$v_m^+ \bigstar v_n^+ \equiv v_{m+n}^+, \quad v_m^- \bigstar v_n^- \equiv v_{m+n}^- \quad \text{и} \quad v_m^+ \bigstar v_n^- \equiv 0; \tag{4.6}$$

это можно проверить непосредственно, пользуясь тем, что преобразование Фурье переводит свертку в умножение. Отметим также, что имеют место формулы (при $m \neq$ целым отрицательным)

$$v_m^+ \equiv e^{\pi i(m+1)/2}(x+i0)^{-m-1} = i\Gamma(m+1)\left[e^{\pi i m/2} x_+^{-m-1} - e^{-\pi i m/2} x_-^{-m-1}\right] \tag{4.7}$$

и

$$\begin{aligned} v_m^- &\equiv e^{-\pi i(m+1)/2}(x-i0)^{-m-1} = \\ &= i\Gamma(m+1)\left[-e^{-\pi i m/2} x_+^{-m-1} + e^{\pi i m/2} x_-^{-m-1}\right]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Разрешая их относительно $x_+^{-1/2}$ и $x_-^{-1/2}$, получаем

$$x_+^{-1/2} = \frac{1}{2}\left[(x+i0)^{-1/2} + (x-i0)^{-1/2}\right] \equiv \frac{1}{2\Gamma(1/2)}\left[e^{-\pi i/4} v_{-1/2}^+ + e^{\pi i/4} v_{-1/2}^-\right] \tag{4.9}$$

и

$$\begin{aligned} x_-^{-1/2} &= \frac{i}{2}\left[(x+i0)^{-1/2} - (x-i0)^{-1/2}\right] \equiv \\ &\equiv \frac{i}{2}\frac{1}{\Gamma(1/2)}\left[e^{-\pi i/4} v_{-1/2}^+ - e^{\pi i/4} v_{-1/2}^-\right] = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(1/2)}\left[e^{\pi i/4} v_{-1/2}^+ + e^{-\pi i/4} v_{-1/2}^-\right]. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Заметим, что если $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — инверсия:

$$h(x) = -x,$$

то $h^* x_+ = x_-$, т. е. из (4.7), (4.8) следует (для нецелых m, а тогда в силу аналитического продолжения и для всех m), что

$$h^* v_m^+ = v_m^-, \quad h^* v_m^- = v_m^+. \tag{4.11}$$

Пусть, далее, X — произвольное дифференцируемое многообразие и Λ — однородное лагранжево подмногообразие в T^*X. Мы хотим связать с Λ класс распределений на X. Все эти распределения будут иметь волновые фронты на Λ и задаваться при помощи локальных описаний, т. е. мы допускаем суммы $\sum u$, где каждое u имеет компактный носитель в открытом множестве на X, над которым задана локальная параметризация Λ:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \Lambda = \pi_* f^* T\mathbf{R}_0 = \pi_* N(f^{-1}(0)) \\ X & & \end{array}$$

Рассмотрим $u = \pi_* a f^* v_m^\pm$. Пользуясь (4.1), (4.2), обсудим независимость этого класса от выбора локальной параметризации.

Из гл. IV мы знаем, что любые две параметризации одного и того же лагранжева подмногообразия могут быть получены одна из другой (с точностью до диффеоморфизма) при помощи последовательности следующих двух операций:

(i) замены f на $g = bf$, где b: $Z \to \mathbf{R}$ — гладкая функция, не обращающаяся в нуль на $f^{-1}(0)$;

(ii) замены Z на $Z \times \mathbf{R}$ и f на g, где $g(z, w) = f(z) \pm w^2$.

Исследуем эффект от применения (i). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{R} \\ \mathbf{R} & \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} M(x, c) &= cx \\ \pi(x, c) &= x \end{aligned}$$

т. е. $\pi^* v_m^\pm(x) = v_m^\pm(x)$ и $M^* v_m^\pm(x) \equiv c^{-m-1} v_m^\pm(x)$, или

$$M^* v_m^\pm = c^{-m-1} v_m^\pm + \text{гладкая функция}.$$

Далее (предполагая, что $b > 0$, и меняя знаки, если $b < 0$), имеем

$$g = M \circ (f, b), \quad \text{где} \quad (f, b)\colon Z \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+,$$

откуда

$$g^* v_m^\pm = (f, b)^* v_m^\pm = b^{-m-1} f^* v_m^\pm + \text{гладкая функция}.$$

Итак, с точностью до гладких функций введенный класс сохраняется при (i).

Исследуем теперь (ii). Поскольку $df \neq 0$, мы можем ввести на Z координаты $x^1, \ldots, x^n$ с $x^1 = f$. Будем считать, что $x = x^1$, а через $x' = (x^2, \ldots, x^n)$ обозначим остальные координаты. Мы хотим сравнить отображения

$$\begin{tikzcd} Z \times \mathbf{R} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{R} \\ X & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{R} \\ X & \end{tikzcd}$$

которые можно скомбинировать следующим образом:

$$\begin{tikzcd} Z \times \mathbf{R} \arrow[d, "\pi_Z"'] & \overset{(x', x, w)}{\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{x \pm w^2}{\mathbf{R}} \\ Z \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi_X"'] & \underset{(x', x)}{\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}} \arrow[r] & \underset{x}{\mathbf{R}} \\ X & & \end{tikzcd}$$

и исследовать $\pi_{X*}\pi_{Z*}ag^* v_m^{\pm}$. Ясно, что мы вернулись в одномерную ситуацию, а x' играет роль параметра. Применяя $(4.3)_{\pm}$, получаем

$$\pi_* a g_{\mp}^* v_m^{\pm} = \pi_* \int b(x, x', y)\, y_{\mp}^{-1/2} v_m^{\pm}(x-y)\, dy, \tag{4.12}$$

где $2b(x, x', y^2) = a(x, x', y) + a(x, x', -y)$. Разложим b по формуле Тейлора вблизи $y=0$:

$$b(x, x', y) = b_0(x, x') + b_1(x, x')\, y + \ldots + b_N(x, x')\, y^N + \\ + b_{N+1}(x, x', y)\, y^{N+1}.$$

Остаточный член $b_{N+1}(x, x', y)\, y^{N+1} y_{\mp}^{-1/2} = b(x, x', y)\, y_{\pm}^{N-1/2}$ можно сделать гладким, если выбрать N достаточно большим. Каждый из остальных членов будет давать в (4.8) выражение вида $\pi_* u$, где

$$u = b_k(x, x')\left[y_{\pm}^{k-1/2} \bigstar v_m^{\pm}\right].$$

Поскольку $y_{\pm}^{k-1/2}$ — линейная комбинация $v_{k-1/2}^{\pm}$, можно применить (4.6) и убедиться, что $\pi_* u$ имеет нужный вид. Заметим, что при изменении параметризации мы потеряли «градуировку», но сохранили ассоциированную «фильтрацию», правда со сдвигом $\pm 1/2$. Это наводит на мысль, что мы заменяем конечные суммы локально на ряды, сходящиеся по модулю какой-то (а значит, и любой) локальной фильтрации. Мы можем также заменить выражение

$$v_m^{+}(x) = \int \chi_+(\tau)\, \tau^m e^{i\tau x}\, d\tau$$

на

$$r_m^{+}(x) = \int \chi_+(\tau)\, s(\tau)\, e^{i\tau x}\, d\tau,$$

где s — произвольный символ степени m. Тогда можно следующим образом записать локальное выражение для $\pi^* a f^* r_m$. Пусть $y_1, \ldots, y_d$ — координаты на X и $\theta_1, \ldots, \theta_q$ — координаты на слоях Z, т. е. $y_1, \ldots, y_d, \theta_1, \ldots, \theta_q$ — координаты на Z. Тогда

$$\pi_* a f^* r_m = \int\int a(y, \theta)\, \chi_+(\tau)\, e^{i\tau f(y, \theta)} s(\tau)\, d\tau\, d\theta.$$

С точностью до небольших изменений (перехода от «неоднородных» координат к «однородным») мы получили введенные Хёрмандером [4] «интегральные операторы Фурье».

Заметим, наконец, что постоянный член в разложении Тейлора функции b равен $a(x', x, 0)$. Если скомбинировать (4.12) с (4.9) и (4.10) и разложить $a(x', x, 0) = a(x', 0, 0) + x[\ldots]$, то получится

$$\pi_* a g_{\pm}^* v_m^{+} = \pi_* \left[a(x', 0, 0) \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{\pm i\pi/4} v_{m-1/2}^{+}\right] + \ldots, \tag{4.13}$$

где $\pm$ соответствует $\pm w^2$ в $g(z, w) = f(z) \pm w^2$, и

$$\pi_* a g_{\pm}^* v_m^- = \pi_* \left[a(x', 0, 0) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\pm i\pi/4} v_{m-1/2}^- \right] + \ldots \qquad (4.14)$$

Обозначим через $I(X, \Lambda)$ пространство всех распределений μ на X, которые можно представить с точностью до произвольного порядка гладкости как локально конечную сумму распределений вида $\pi_* a \varphi^* v_m^+$, где

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

— локальная параметризация Λ. Будем считать, что степень μ равна k, если $k+(d-1)/2$ — наибольшее целое m, фигурирующее в этой сумме, а d — размерность слоя в Z. (Отметим, что в соответствии с этим соглашением v_m^+ имеет степень $m+1/2$.) Из сказанного выше ясно, что степень не зависит от параметризации. Обозначим через $I_k(X, \Lambda)$ пространство всех распределений степени $\leqslant k$, так что $I(X, \Lambda)$ фильтруется по k:

$$\ldots \supset I_k(X, \Lambda) \supset I_{k-1}(X, \Lambda) \supset \ldots.$$

Пересечение всех I_k равно $C^\infty(X)$. Теперь докажем, что эта фильтрация обладает так называемым «свойством Миттаг-Леффлера»:

Предложение 4.1. *Для заданной последовательности* $\mu_k, \mu_{k-1}, \ldots$ *с* $\mu_l \in I_l(X, \Lambda)$ *существует такое* $\mu \in I_k(X, \Lambda)$, *что при всех* $N \leqslant k$

$$\mu - \sum_N^k \mu_l \in I_{N-1}(X, \Lambda).$$

Доказательство. Это локальная задача, поэтому мы можем задать Λ параметризацией

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbf{R}^N & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

и при $r = m + (N - 1/2)$ написать

$$\mu_i = \pi_* a_i \varphi^* v_{r-i} = \int_0^\infty a_i(x, z)\, e^{is\varphi(x, z)} s^{r-i} \chi(s)\, ds\, dz,$$

где $\chi=0$ для малых s и $\chi=1$ для больших s. Пусть

$$a(x, z, s)=\sum a_i(x, z)\, s^{r-i}\chi(s/M_i),$$

где M_i очень быстро стремится к бесконечности. Тогда

$$\mu=\int a(x, z, s)\, e^{is\varphi(x, z)}\, ds\, dz$$

обладает требуемыми свойствами.

§ 5. Символическое исчисление

Мы связали с каждым лагранжевым подмногообразием в T^*X класс обобщенных функций. Этот класс снабжен фильтрацией, ассоциированной с каждой локальной параметризацией. При переходе от одной параметризации к другой фильтрации сохраняются, а старшие члены преобразуются по сравнительно простому закону (4.13). Это наводит на мысль, что каждой обобщенной функции, ассоциированной с Λ, можно поставить в соответствие некоторый геометрический объект на Λ, причем так, что это соответствие функториально, т. е. ведет себя согласованным образом при опусканиях и поднятиях. Опыт, приобретенный нами в гл. II, IV и V, подсказывает, что такими геометрическими объектами будут, скорее всего, полуплотности или полуформы; так и оказывается на самом деле. Поэтому мы опишем коротко некоторые функториальные свойства морфизмов этих объектов.

Напомним, что если $f\colon X\to Y$ — гладкое отображение, мы называем его морфизмом на полуплотностях, когда задано также гладкое сечение

$$r(x)\in \operatorname{Hom}(|\Lambda|^{1/2}TY_{f(x)},\ |\Lambda|^{1/2}TX_x).$$

Аналогично, если X и Y — металинейные многообразия, то

$$r(x)\in \operatorname{Hom}(\Lambda^{1/2}TY_{f(x)},\ \Lambda^{1/2}TX_x).$$

Заметим теперь, что задание такого r означает задание полуплотности (или полуформы) некоторого типа на нормальном расслоении к $\operatorname{graph} f$.

Действительно, точку $\mathscr{N}(\operatorname{graph} f)$ можно отождествить с $z=(x, f(x), -df^*\eta, \eta)$, где $\eta\in T^*Y_{f(x)}$; значит, мы имеем точную последовательность, определяемую проекцией на $\operatorname{graph} f$, а затем на X:

$$0\to T^*Y_y\to T(\mathscr{N}\operatorname{graph} f)_z\to TX_x\to 0$$

(где мы отождествили TT^*Y_y с T^*Y_y). Поэтому

$$|\Lambda|^{1/2}\mathscr{N}(\operatorname{graph} f)_z\cong|\Lambda|^{1/2}TX_x\otimes|\Lambda|^{-1/2}TY_{f(x)}= \\ =\operatorname{Hom}(|\Lambda|^{1/2}TY_{f(x)},\ |\Lambda|^{1/2}TX_x).$$

Итак, морфизм определяет полуплотность на $\mathscr{N}^{\circ}(\operatorname{graph} f)$, которая «постоянна вдоль слоев» $\mathscr{N}^{\circ}(\operatorname{graph} f)$ над $\operatorname{graph} f$. Обратно, если задана такая полуплотность, постоянная вдоль $\mathscr{N}^{\circ}$, то мы получаем морфизм из X в Y. Аналогично, если X и Y — металинейные многообразия, то $T^*(X\times Y)$ — метаплектическое многообразие, и лагранжево подмногообразие $\mathscr{N}^{\circ}(\operatorname{graph} f)$ снабжается металинейной структурой. Как и выше, имеем

$$\textstyle\bigwedge^{1/2}(\mathscr{N}^{\circ}(\operatorname{graph} f))_z = \bigwedge^{1/2} TX_x \otimes \bigwedge^{-1/2} TY_{f(x)} = \\ = \operatorname{Hom}(\bigwedge^{1/2} TY_{f(x)}, \ \bigwedge^{1/2} TX_x).$$

Теперь мы хотим воспользоваться этим отождествлением для того, чтобы показать, как морфизм $f\colon X\to Y$ индуцирует операцию опускания f_* полуплотностей (полуформ) на $\Lambda_X \subset T^*X$ в полуплотности (полуформы) на $f_*\Lambda_X$ (если выполнено условие трансверсальности, нужное для того, чтобы $f_*\Lambda_X$ было лагранжевым подмногообразием) и операцию поднятия f^* полуформ (полуплотностей) на $\Lambda_Y \subset T^*Y$ в полуформы (полуплотности) на $f^*\Lambda_Y \subset$ $\subset T^*X$. Напомним определения опускания и поднятия для лагранжевых подмногообразий. Они задаются как расслоенные произведения в следующих диаграммах:

$$\begin{tikzcd} \Lambda_X \arrow[d] & f_*\Lambda_X \arrow[l, dashed] \arrow[d, dashed] \\ T^*X & \Lambda \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Lambda_Y \arrow[d] & f^*\Lambda_Y \arrow[l, dashed] \arrow[d, dashed] \\ T^*Y & \Lambda \arrow[l] \end{tikzcd}$$

опускание — поднятие

где $\quad \Lambda = \mathscr{N}^{\circ}(\operatorname{graph} f) \subset T^*(X\times Y) = T^*X\times T^*Y$

и требование трансверсальности состоит в том, что отображения трансверсальны.

Мы утверждаем следующее. Пусть $A\to B$ и $C\to B$ — трансверсальные отображения и D — их расслоенное произведение:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] & D \arrow[l] \arrow[d] \\ B & C \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Предположим, что заданы полуплотности на A и C, а также отрицательная полуплотность на B. Тогда мы получаем полуплотность на D, и аналогично обстоит дело для металинейных многообразий и полуформ. В самом деле, утверждение, что $A\to B$

и $C \to B$ трансверсальны, означает, что отображение $A \times C \to B \times B$ трансверсально диагонали Δ, и тогда D — прообраз диагонали. Итак, мы имеем для $d=(a, c) \in D$ точную последовательность

$$0 \to TD_d \to TA_a \oplus TC_c \to (TB_b \oplus TB_b)/T\Delta_b \to 0.$$

Поскольку $(TB_b \oplus TB_b)/T\Delta_b \cong TB_b$, получаем

$$|\wedge|^{1/2} TD_d \cong |\wedge|^{1/2} TA_a \otimes |\wedge|^{1/2} TC_c \otimes |\wedge|^{-1/2} TB_b$$

и аналогично для $\wedge^{1/2}$. Заметим теперь, что T^*X (или T^*Y) снабжено канонической формой объема, которая возникает из старшей ненулевой внешней степени симплектической формы. Значит, имеется каноническая полуформа, отрицательная полуплотность и т. д. на T^*X. Итак, для заданного морфизма f: $X \to Y$ мы имеем полуплотность (полуформу) на Λ и отрицательную полуплотность (полуформу) на T^*X. Значит, полуплотность (полуформа) на Λ_X определяет в диаграмме опускания полуплотность (полуформу) на $f_*\Lambda_X$. В действительности мы будем в основном интересоваться случаем, когда f: $X \to Y$ — субмерсия; в этом случае удобно, имея в виду использование (4.13), умножить полуформу (полуплотность), полученную так из полуформы (полуплотности) σ на Λ_X при помощи диаграммы опускания, на $(e^{i\pi/4}\sqrt{2\pi})^k$, где k — размерность слоя; именно эта форма будет обозначаться через $f_*\sigma$.

Для полуформы (полуплотности) μ на Λ_Y мы просто применяем диаграмму поднятия (без нормирующих множителей) и получаем $f^*\mu$ — полуформу (полуплотность) на $f^*\Lambda_Y$.

Проиллюстрируем операцию поднятия, проведя вычисления для частного случая, когда $Y = \mathbf{R}$ и $\Lambda_Y = \Lambda_0^+ = T^*\mathbf{R}_0^+$ состоит из положительных ковекторов в начале. Возьмем $\alpha = |d\xi|^{1/2}$ в качестве полуплотности на Λ_Y. Здесь x — стандартная линейная координата на $\mathbf{R}$ и ξ — дуальная координата. Если f: $X \to \mathbf{R}$ — субмерсия и $S = f^{-1}(0)$, то $f^*\Lambda_0^+$ состоит из всех положительных нормальных ковекторов $\xi\, df$, $\xi > 0$, к S. Морфизм f отображает $|dx|^{1/2}$ в полуплотность ν на X. В точках S мы можем написать $\nu = \mu \otimes |df|^{1/2}$, где μ — полуплотность на S. Мы утверждаем, что

$$f^* |d\xi|^{1/2} = \mu \otimes |d\xi|^{1/2},$$

где $f^*\Lambda_0^+$ отождествлено с $S \times \Lambda_0^+$.

Действительно, введем на X локальные координаты (x, y), где

$$x = x^1 \quad \text{и} \quad y = (x^2, \ldots, x^n),$$

так что $f(x, y) = x$ и S задается уравнением $x = 0$. Тогда $\mathscr{N}(\operatorname{graph} f)$ состоит из всех точек вида $(x, y;\ \xi, 0) \times (x, -\xi)$, где (ξ, η) дуальны (x, y). В этих координатах $T(\mathscr{N}(\operatorname{graph} f))$ порождается всеми векторами вида

$$u_y = (0,\ 1;\ 0,\ 0) \times (0,\ 0),$$

$$u_\xi = (0,\ 0;\ 1,\ 0) \times (0,\ -1),$$

$$u_x = (1,\ 0;\ 0,\ 0) \times (1,\ 0).$$

Во всех вычислениях мы можем обращаться с y как с параметром, забыть про u_y и рассматривать $\mathscr{N}(\operatorname{graph} f)$ как множество точек вида $(x,\ x;\ \xi,\ -\xi)$ в $\mathbf{R}^4 = T^*\mathbf{R} \times T^*\mathbf{R}$.

Тогда $\mathscr{N}(T \operatorname{graph} f)_z = C$ состоит из всех векторов вида $(a,\ -b,\ a,\ b) \in T^*\mathbf{R} \times T^*\mathbf{R}$, где $z \in \mathscr{N}(\operatorname{graph} f)$. Пусть $A = T\Lambda_0^+ \subset T^*\mathbf{R}$, т. е. $A \subset \mathbf{R}^2$ состоит из всех векторов вида $(0,\ c)$. Тогда

$$0 \to D \to A \oplus C \to (B \oplus B)/\Delta \to 0,$$

где $B = \mathbf{R}^2$ и отображения $C \to B$, $A \to B$ имеют вид $(a,\ -b,\ a,\ b) \longmapsto (a,\ b)$ и $(0,\ c) \longmapsto (0,\ c)$. Итак, в $A \oplus C = \mathbf{R}^3$ имеем

$$D = \{(0,\ c,\ c)\}.$$

Пусть $v = (0,\ 1,\ 1)$. Наша стандартная процедура показывает тогда, что

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi},\ f^* \,|\, d\xi \,|^{1/2} \right\rangle = \gamma \otimes \alpha\,(w_1,\ w_2,\ v)\,\beta\,(w_1,\ w_2),$$

где $\gamma \otimes \alpha = |\,dx\,|^{1/2} \otimes |\,d\xi\,|^{1/2} \otimes |\,d\xi\,|^{1/2}$ и $\beta = |\,dx\,|^{-1/2} \otimes |\,d\xi\,|^{-1/2}$, а w_1, w_2 — любые такие векторы, что w_1, w_2, v порождают $A \oplus C$. Можно выбрать $w_1 = (1,\ 0,\ 0)$ и $w_2 = (0,\ 1,\ 0)$ и получить, что рассматриваемое выражение на самом деле равно 1. Итак, мы доказали следующее:

Пусть f: $X \to \mathbf{R}$ — субмерсия и $\Lambda_0^+ = T^*\mathbf{R}_0^+$, т. е. $f^*\Lambda_0^+$ состоит из положительных кратных df в $S = f^{-1}(0)$. Можно отождествить $f^*\Lambda_0^+$ с $S \times \Lambda_0^+$. Если f — морфизм полуплотностей, то можно написать

$$f^* \,|\, dx \,|_s^{1/2} = \mu_s \otimes |\, df \,|_s^{1/2} \quad \text{при} \quad s \in S.$$

Тогда

$$f^* \,|\, d\xi \,|^{1/2} = \mu \otimes |\, d\xi \,|^{1/2}, \tag{5.1}$$

где ξ — дуальная координата к x. Если X — металинейное многообразие и f — морфизм полуформ, то

$$f^*\, d\xi^{1/2} = \mu \otimes d\xi^{1/2}, \quad f^*\, \overline{d\xi^{1/2}} = \mu \otimes \overline{d\xi^{1/2}}. \tag{5.2}$$

Теперь мы в состоянии сформулировать основную теорему этого параграфа. Всюду в дальнейшем через $I_m(X,\ \Lambda)$ обозначается пространство обобщенных полуформ на X степени m, ассоциированное с Λ (степень определяется как в предыдущем параграфе). Предположим для простоты, что все многообразия X, Y и т. д. металинейны. Обозначим через $S^m(\Lambda)$ пространство однородных полуформ на Λ степени m. (Здесь если μ — полуформа на Λ и M_t: $\Lambda \to \Lambda$ — ограничение на Λ умножения на t, то мы называем μ однородной степени m, когда $M_t^*\mu = t^m\mu$.)

Теорема 5.1. *Существует единственный функтор* σ: $I_m(X, \Lambda)/I_{m-1}(X, \Lambda) \to S^m(\Lambda)$, *описываемый следующими условиями:*

(a) *Если* f: $X \to Y$ *трансверсально* Λ_Y, *так что* $f^*\nu \in I_m(X, f^*\Lambda_Y)$ *для* $\nu \in I_m(Y, \Lambda_Y)$, *то*

$$\sigma(f^*\nu) = f^*\sigma(\nu). \tag{5.3}$$

(b) *Если* f: $X \to Y$ — *субмерсия, трансверсальная* $\Lambda_X \subset T^*X$, *так что* $f_*\mu \in I_{m-d/2}(Y, f_*\Lambda_X)$, то

$$\sigma(f_*\mu) = f_*\sigma(\mu). \tag{5.4}$$

(c) *Если* $\Lambda_0 = T^*\mathbf{R}_0^+$ *и* x, ξ — *канонические координаты на* $T^*\mathbf{R}$, *то*

$$\sigma(v_m^+\,dx^{1/2}) = \xi^m\,d\xi^{1/2}. \tag{5.5}$$

Доказательство. Сначала покажем, что (5.5) согласовано с (5.3) и (5.4) в частном случае Λ_0^+. Итак, предположим, что мы рассматриваем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}\times\mathbf{R} & \xrightarrow{\;g\;} & \mathbf{R} \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \\ \mathbf{R} & & \end{array} \qquad \begin{aligned} g = g_\pm &= x \pm w^2 \\ g^*dx^{1/2} &= (dx \wedge dw)^{1/2} \end{aligned}$$

и сравниваем $\sigma(\pi_*ag^*v_m^+)$ с $\pi_*(ag^*\sigma(v_m^+))$. Согласно (4.13), (4.14),

$$\sigma(\pi_*ag_\pm^*v_m^+) = \sigma\left(\frac{a(0)}{2\sqrt{\pi}}e^{\pm i\pi/4}v_{m-1/2}^+\right) = \frac{a(0)}{2\sqrt{\pi}}e^{\pm i\pi/4}\xi^{m-1/2}d\xi^{1/2} \quad \text{на } \Lambda_0^+.$$

Вычислим теперь

$$\pi_*ag^*\sigma(v_m^+) = \pi_*ag^*\,\xi^m\,d\xi^{1/2} \quad \text{на} \quad \Lambda_0^+.$$

Вначале вычислим $g^*\xi^m d\xi^{1/2}$. По формуле (5.2) это совпадает с $\mu \otimes \xi^m d\xi^{1/2}$, где μ — полуформа на параболе $x \pm w^2 = 0$, индуцированная полуформой $(dx \wedge dw)^{1/2}$ на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Поскольку $d(x \pm w^2) \wedge dw = dx \wedge dw$ и поскольку мы можем считать w координатой на параболе, имеем

$$g^*\xi^m\,d\xi^{1/2} = dw^{1/2} \otimes \xi^m\,d\xi^{1/2}.$$

Теперь нужно умножить на a и применить операцию опускания, отвечающую диаграмме

$$\begin{array}{ccc} g^*\Lambda_0 & \longleftarrow & \pi_* g^*\Lambda_0 = \Lambda_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^*(\mathbf{R}\times\mathbf{R}) & \longleftarrow & \mathcal{N}(\mathrm{graph}\,\pi) \end{array}$$

Соответствующие локальные координаты и полуформы следующие:

на $T^*(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ — координаты x, ξ, w, η и полуформа $(d\xi\wedge dx)^{1/2}\otimes$ $\otimes(d\eta\wedge dw)^{1/2}$;

на $g^*\Lambda_0^+$ — координаты w_1, ξ_1, где $g^*\Lambda_0\subset T^*(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ состоит из всех точек вида $(\pm w_1^2,\ w_1,\ \xi_1,\ \pm 2w_1\xi_1)$, и полуформа $dw_1^{1/2}\otimes$ $\otimes d\xi_1^{1/2}$;

на $\mathcal{N}(\mathrm{graph}\,\pi)$ — координаты x_2, w_2, ξ_2.

Здесь мы рассматриваем $\mathcal{N}(\mathrm{graph}\,\pi)\subset T^*(\mathbf{R}\times\mathbf{R})\times T^*\mathbf{R}=$ $=T^*(\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ как множество точек вида $(x_2,\ w_2,\ x_2;\ \xi_2,\ 0,\ -\xi_2)$. Морфизм π переводит $(dx_2\wedge dw_2)^{1/2}$ в $dx^{1/2}$, а значит, соответствующая полуформа на $\mathcal{N}(\mathrm{graph}\,\pi)$ — это $(dx_2\wedge dw_2\wedge d\xi_2)^{1/2}$.

По нашему общему рецепту мы должны поступить следующим образом. Замечаем, что множество точек в $g^*\Lambda_0^+\times\mathcal{N}(\mathrm{graph}\,\pi)$, которые отображаются в одну и ту же точку $T^*(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$, действительно состоит из точек с $w=0$, $x=0$ и проекция на $T^*\mathbf{R}$ дает Λ_0^+.

Далее, пусть $z=(0,\ \xi)$ — точка Λ_0^+ и $\partial/\partial\xi$ — касательный вектор в z. Его образом в $Tg^*\Lambda_0\oplus T\mathcal{N}(\mathrm{graph}\,\pi)$ является

$$u_\xi=\left(0,\ \frac{\partial}{\partial\xi}\right)\oplus\left(0,\ 0,\ \frac{\partial}{\partial\xi}\right)=(0,\ 1)\oplus(0,\ 0,\ -1).$$

Присоединим векторы

$$v_1=(1,\ 0)\oplus(0,\ 0,\ 0),$$
$$v_2=(0,\ 0)\oplus(-1,\ 0,\ 0),$$
$$v_3=(0,\ 0)\oplus(0,\ -1,\ 0),$$
$$v_4=(0,\ 0)\oplus(0,\ 0,\ -1).$$

Образы v_1, v_2, v_3, v_4 в $T^*(\mathbf{R}^2)\cong(T^*(\mathbf{R}^2)\times T^*(\mathbf{R}^2))/\Delta$ имеют вид

$$w_1=\pm 2w\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial w}\pm 2\xi\frac{\partial}{\partial\eta},\quad w_2=\frac{\partial}{\partial x},\quad w_3=\frac{\partial}{\partial w},\quad w_4=\frac{\partial}{\partial\xi},$$

так что

$$[d\xi^{1/2} \otimes dw^{1/2} \otimes (dx \wedge dw \wedge d\xi)^{1/2}] \cdot (u_\xi,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4) \times$$
$$\times [d\xi \wedge dx \wedge d\eta \wedge dw]^{-1/2} (w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4) = \frac{1}{\sqrt{\pm 2\xi}}.$$

Значит,

$$\pi_* a g_+^* \xi_+^m d\xi^{1/2} = \frac{e^{+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \xi_+^m d\xi^{1/2} = \frac{e^{+i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}} \xi_+^{m-1/2} d\xi^{1/2}.$$

Для g_- мы получаем тот же ответ, умноженный на $(-1)^{-1/2}$, и согласованность формул доказана.

Мы доказали, что замена тождественной параметризации Λ_0^+ на ту, которая задает Λ_0^+ как $\pi_* g_+^* \Lambda_0^+$, не меняет отображения символов и совместима с (5.3), (5.4) и (5.5). Теперь мы воспользуемся этим фактом для того, чтобы показать, что замена любой локальной параметризации

$$\begin{array}{ccc} Z \xrightarrow{\ f\ } \mathbf{R} & & \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \\ X & & \end{array} \quad \text{на} \quad \begin{array}{c} Z \times \mathbf{R} \xrightarrow{\ f'_\pm\ } \mathbf{R} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} \qquad\qquad \\ Z \qquad\qquad \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \qquad\qquad \\ X \qquad\qquad \end{array} \qquad f_\pm(z, t) = f(z) \pm t^2$$

тоже согласована. Действительно, если ввести координаты $z_1 = f$, $z_2, \ldots, z_n$, мы опять можем считать $z_2, \ldots, z_n$ параметрами. Поскольку все параметризации Λ_0^+ могут быть получены при помощи последовательности таких операций, это доказывает согласованность для Λ_0^+. В применении к любому Λ это показывает тогда, что σ корректно определено для любого Λ. Воспользуемся следующей леммой.

Лемма 5.1. *Пусть $\Lambda \subset T^*X$ — однородное лагранжево подмногообразие и $0 \neq \lambda \in \Lambda$. Тогда существует отображение f: $X \to \mathbf{R}$, которое является субмерсией около $\pi\lambda$ и трансверсально Λ, так что $f_*\Lambda = T^*\mathbf{R}_0^+$ и $f_*(\lambda) = (0,\ 1)$.*

Предположим на время, что лемма доказана. Пусть

$$\begin{array}{c} Z \xrightarrow{\ g\ } \mathbf{R} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} \qquad \\ X \qquad \end{array}$$

— локальная параметризация Λ и $u=\pi_* a g^* v$. Тогда

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{R} \\ X \arrow[d, "f"'] & \\ \mathbf{R} & \end{tikzcd}$$

задает параметризацию Λ_0 и, значит, $\sigma(f_*\pi_* a g^* v)=\sigma(f_* u)$ зависит только от u. С другой стороны, из инвариантности Λ_0 следует, что

$$\sigma(f_*\pi_* a g^* v)=\sigma((f\circ\pi)_*\, a g^* v)=$$
$$=(f\circ\pi)_*\, a g^*\sigma(v)=f_*\circ\pi_* a g^*\sigma(v).$$

Но последнее выражение задает значение $\pi_* a g^*\sigma(v)$; оно не зависит от выбора параметризации и зависит только от u.

Итак, доказано, что символ σ корректно определен. Исследуем теперь его поведение относительно поднятий. Пусть $\Lambda_Y \subset T^*Y$ — однородное лагранжево подмногообразие и $g\colon X\to Y$ — гладкое отображение, трансверсальное Λ_Y. Пусть

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{R} \\ Y & \end{tikzcd}$$

— локальная параметризация Λ_Y. Мы можем образовать расслоенное произведение

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\pi'"'] & Z \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Поскольку g трансверсально Λ_Y, отсюда следует, что $f'=f\circ g'$ — субмерсия в 0 и f' задает параметризацию для $g'^*\Lambda_Y$. Тогда для $v=v_m^+$ на $\mathbf{R}$

$$g^*\pi_* a f^* v=\pi'_* g'^* a f^* v=\pi'_*(g'^* a)\, f'^* v$$

задает параметризацию $g^* u$, где $u=\pi_* a f^* v$. Итак,

$$\sigma(g^* u)=\pi'_*(g'^* a)\,\sigma(f'^* v)=\pi'_*(g'^* a)\, g'^*\sigma(f^* v)=$$
$$=\pi'_* g'^* a\sigma(f^* v)=g^*\sigma(u).$$

Это доказывает функториальность σ относительно поднятий.

Если $g\colon X \to Y$ — субмерсия, трансверсальная Λ, и

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

— локальная параметризация Λ, то мы можем просто расширить диаграмму и получить в качестве локальной параметризации $g_*\Lambda$

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ X & & \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

Опять-таки, если $u = \pi_* af^*v$, то $g_*u = (g \circ \pi)_* af^*v$, т. е.

$$\sigma(g_*u) = \sigma[(g \circ \pi)_* af^*v] = \sigma[g_*\pi_* af^*v] = \\ = g_*\sigma[\pi_* af^*v] = g_*\sigma(u).$$

Таким образом, мы доказали теорему 5.1 при условии справедливости леммы 5.1.

Доказательство леммы 5.1. Выберем лагранжево подмногообразие, трансверсальное Λ и вертикали и пересекающее Λ в λ. Локально это подмногообразие можно записать как $\operatorname{graph} df$ и выбрать f так, чтобы $f(\pi\lambda) = 0$. Тогда f — субмерсия в $\pi\lambda$, поскольку $df(\pi\lambda) = \lambda \neq 0$. «Горизонтальное» расслоение H для этой субмерсии состоит из всех $r\,df$, $r \neq 0$. Поскольку Λ пересекает $\operatorname{graph} df$ трансверсально, мы получаем, что Λ пересекает H трансверсально и $\Lambda \cap H$ состоит из кратных df. Итак, в конической окрестности λ имеем $f_*\Lambda = T\mathbf{R}_0^+$ и $f_*(\lambda) = (0, 1)$, что доказывает лемму 5.1, а значит, и теорему.

Приложение к § 5

Опишем коротко, как развить символическое исчисление, не пользуясь формализмом полуформ. Это позволит построить символическое исчисление для многообразий, не допускающих металинейной структуры (например, для вещественного проективного пространства). Описываемые здесь идеи принадлежат Хёрмандеру [4].

Напомним из § 3 и 5 гл. IV, что лагранжево многообразие $\Lambda \subset T^*X$ имеет каноническое вещественное линейное расслоение

$\mathfrak{M}_\Lambda$ — расслоение Маслова. Оно локально плоское в том смысле, что обладает канонической локально плоской связностью, значит, можно говорить о локально постоянных сечениях Λ. Кроме того, оно обладает рядом интересных функториальных свойств, которые обсуждались в гл. IV. Напомним эти свойства.

Пусть f: $X \to Y$ трансверсально $\Lambda_Y \subset T^*Y$ и $\Lambda_X = f^*\Lambda_Y$. По определению, Λ_X снабжено отображением в Λ_Y. В гл. IV показано, что расслоение Маслова для Λ_X является поднятием относительно этого отображения расслоения Маслова для Λ_Y. Поэтому сечения $\mathfrak{M}_{\Lambda_Y}$ могут быть подняты в сечения $\mathfrak{M}_{\Lambda_X}$.

Пусть, далее, π: $Y \to X$ — расслаивающее отображение и $\Lambda_X = \pi_*\Lambda_Y$. По определению, Λ_X снабжено иммерсией в Λ_Y, и $\mathfrak{M}_{\Lambda_X}$ — поднятие $\mathfrak{M}_{\Lambda_Y}$ относительно этой иммерсии; итак, мы получаем операцию опускания π_* (относительно $\Lambda_X \to \Lambda_Y$ операцию поднятия) сечений $\mathfrak{M}_{\Lambda_Y}$ в сечения $\mathfrak{M}_{\Lambda_X}$.

Напомним, наконец, что если Λ_X — конормальное расслоение подмногообразия в X, то ассоциированное расслоение Маслова допускает каноническую тривиализацию.

Хёрмандер определяет $I_k(X, \Lambda)$ так же, как мы в § 4, за исключением того, что: (1) он дает определение степени k, отличающееся (тривиальным образом) от нашего, и (2) $\mu \in I_k(X, \Lambda)$ — полуплотности, а не полуформы. (Поэтому они имеют смысл даже тогда, когда многообразие не является металинейным.) У Хёрмандера символ для $\mu \in I(X, \Lambda)$ — это сечение $|\wedge|^{1/2}\Lambda \otimes \mathfrak{M}_\Lambda$. Поскольку $\mathfrak{M}_\Lambda$ локально постоянно, можно говорить об однородных символах для этого расслоения любой предписанной степени однородности; при соглашении о степенях, принятом в конце § 4, $\mu \in I_k(X, \Lambda)$ имеет символ, однородный степени k. (Как мы уже отмечали, Хёрмандер придерживается *другого* соглашения о степенях.) Чтобы определить этот символ, определим его вначале для наших основных распределений $v_n^+\sqrt{|dx|}$, полагая

$$\sigma\left(v_n^+\sqrt{|dx|}\right) = \xi_+^n\sqrt{|d\xi|} \tag{5.6}$$

(ср. с (5.5)). Лагранжево многообразие в этом примере — конормальное расслоение; поэтому, как мы отмечали выше, его расслоение Маслова имеет каноническое постоянное сечение. Мы можем интерпретировать (5.6) как сечение расслоения полуплотностей, умноженного на расслоение Маслова, рассматривая правую часть как тензорное произведение на это каноническое постоянное сечение.

Для определения символьного отображения в общем случае мы поступим так же, как при доказательстве теоремы 5.1. Требование функториальности автоматически приводит нас к определению символьного отображения. Нужно только проверить непротиворечивость этого определения. Это сводится к повторению выкладки, предшествующей лемме 5.1, с использованием различных канонических сечений расслоений Маслова вместо формализма полуформ.

Сделаем одно заключительное замечание. На металинейном многообразии полуформа μ, принадлежащая $I_k(X, \Lambda)$, определяет полуформу $\sigma(\mu)$ на Λ. У Хёрмандера полуплотность μ, принадлежащая $I_k(X, \Lambda)$, определяет полуплотность, умноженную на сечение расслоения Маслова. Это наводит на мысль, что сечение расслоения Маслова — это объект, который преобразует полуплотность на X в полуформу на X, затем берется символ этой полуформы на Λ и преобразуется в полуплотность на Λ. Это можно следующим образом сформулировать немного точнее. Для произвольного металинейного многообразия пусть MZ — линейное расслоение $\bigwedge^{1/2} Z \otimes |\bigwedge|^{-1/2} Z$.

Тогда для металинейного многообразия X и $\Lambda \subset T^*X$ расслоение Маслова должно иметь вид

$$\mathfrak{M}_\Lambda = M\Lambda \otimes \pi^* (MX)^{-1},$$

где $\pi\colon \Lambda \to X$ — проектирование. Это действительно так, но мы не будем здесь приводить доказательство.

§ 6. *Интегральные операторы Фурье*

Пусть X и Y — это n-мерные многообразия и $\Phi\colon T^*X - 0 \to T^*Y - 0$ — однородное симплектическое преобразование. (Однородность означает, что $\Phi(az) = a\Phi(z)$ при $z \in T^*X - 0$.) Мы укажем, как связать с Φ семейство операторов из $C_0^\infty(\bigwedge^{1/2} Y)$ в $C^\infty(\bigwedge^{1/2} X)$.

Пусть π и ρ — проекции $X \times Y$ на X и Y соответственно, и пусть $\varkappa$ — обобщенное сечение линейного расслоения $\pi^* \bigwedge^{1/2} \otimes \rho^* \overline{\bigwedge}^{1/2}$. Тогда $\varkappa$ следующим образом определяет оператор K: $C_0^\infty(\bigwedge^{1/2} Y) \to C^\infty(\bigwedge^{1/2} X)$:

$$\mu \longmapsto K\mu = \pi_* \varkappa \rho^* \mu. \tag{6.1}$$

Заметим, что произведение $\varkappa\rho^*\mu$ — это сечение $\pi^* \bigwedge^{1/2} \otimes \rho^* |\bigwedge|$; поэтому интегрирование по слою π_* преобразует его в сечение $\bigwedge^{1/2} X$. (Заметим также, что интеграл по слою имеет смысл, поскольку $\varkappa\rho^*\mu$ компактно сосредоточено на слоях π.) Наконец, отметим, что можно считать $\varkappa$ обобщенной полуформой на $X \times Y$, если только снабдить $X \times Y$ следующей металинейной структурой: произведение заданной металинейной структуры на X и сопряженной к заданной металинейной структуре на Y. Поскольку $WF(\varkappa\rho^*\mu) \subset WF(\varkappa)$, мы получаем простой критерий гладкости правой части (6.1), а именно: $\pi_* WF(\varkappa) = \varnothing$; это верно, если $WF(\varkappa)$ не содержит векторов вида $(x, \xi, y, 0)$.

Пусть Γ_Φ — множество точек $\{(x, \xi, y, \eta) \mid (x, \xi, y, -\eta) \in \in \operatorname{graph} \Phi\}$. Это замкнутое однородное лагранжево подмногообразие в $T^*(X \times Y) - 0$. Мы хотим изучить класс операторов, определяемый следующим образом.

Определение 6.1. Оператор указанного выше вида K называется *интегральным оператором Фурье порядка* k, ассоциированным с Φ, если $\varkappa \in I_{k+n/2}(\Gamma_\Phi)$. Множество всех таких операторов будем обозначать через $(\mathrm{F.I.})^k\Phi$. *Псевдодифференциальный оператор* — это интегральный оператор Фурье, ассоциированный с тождественным симплектическим преобразованием.

Заметим, что Γ_Φ не содержит элементов вида $(x, \xi, y, 0)$; значит, K отображает гладкие полуформы в гладкие полуформы. Символ распределения $\varkappa$ — это гладкая полуформа, однородная степени $k+n/2$ на Γ_Φ. Однако имеется каноническая проекция $\beta\colon \Gamma_\Phi \xrightarrow{\cong} T^*X - 0$ и на T^*X имеется каноническая полуформа $\Omega_X^{n/2}$, однородная степени $n/2$ и нигде не обращающаяся в нуль. Каждая полуформа на Γ_Φ может быть однозначно представлена в виде произведения некоторой функции и полуформы $\beta^*\Omega_X^{n/2}$. В частности, это имеет место для символа распределения $\varkappa$ в определении 6.1. Функцию, которую мы получим при этом, будем называть *символом оператора* K и обозначать через $\sigma(K)$. Заметим, что она будет иметь ту же степень однородности, что и K.

Замкнутое множество C в $S^*X \times S^*Y$ будем называть *собственным*, если собственными являются ограничения на C проекций π и ρ. Распределение $\varkappa$ из (6.1) называется *собственно сосредоточенным*, если его носитель является собственным множеством. Если $\varkappa$ собственно сосредоточено, то из (6.1) ясно, что K переводит компактно сосредоточенные полуформы в компактно сосредоточенные полуформы.

Если замкнутое множество $C \subset S^*X \times S^*Y$ собственное, то это верно и для его проекции на $X \times Y$. В частности, это верно для сферического образа введенного выше множества Γ_Φ; его проекцию на $X \times Y$ будем обозначать через Γ'_Φ. Пусть U — окрестность Γ'_Φ, замыкание которой — собственное множество (ясно, что такую окрестность U можно найти), и пусть ρ — гладкая функция с носителем в U, равная 1 в несколько меньшей окрестности Γ'_Φ. Тогда если $\varkappa \in I(X \times Y, \Gamma_\Phi)$, то это верно и для $\rho\varkappa$. Записав $\varkappa = \rho\varkappa + (1-\rho)\varkappa$, где распределение $\rho\varkappa$ собственно сосредоточенное, а $(1-\rho)\varkappa$ гладкое, мы докажем

Предложение 6.1. *Каждый интегральный оператор Фурье может быть представлен в виде суммы оператора с гладким ядром и собственно сосредоточенного оператора.*

Заметим, что композиция собственно сосредоточенных операторов корректно определена и является собственно сосредоточенным оператором. Пусть Φ: $T^*X - 0 \to T^*Y - 0$ и Ψ: $T^*Y - 0 \to T^*Z - 0$ — однородные симплектические преобразования. Наша ближайшая цель — доказать

Предложение 6.2. *Если $K \in (\mathrm{F.I.})^k\Phi$ и $L \in (\mathrm{F.I.})^l\Psi$ собственно сосредоточены, то $K \circ L$ принадлежит $(\mathrm{F.I.})^{k+l}\ \Psi \circ \Phi$ и его символ имеет вид $\tilde{\sigma}(K)\tilde{\sigma}(L)$, где $\tilde{\sigma}(K)$ и $\tilde{\sigma}(L)$ перенесены на $\Gamma_{\Psi\circ\Phi}$ при помощи отождествлений*

$$\begin{aligned} &\Gamma_{\Psi\circ\Phi} \to \Gamma_\Phi, \quad (x,\ \xi,\ z,\ \gamma) \mapsto (x,\ \xi,\ \Phi(x,\ \xi)), \ \text{и} \\ &\Gamma_{\Psi\circ\Phi} \to \Gamma_\Psi, \quad (x,\ \xi,\ z,\ \gamma) \mapsto (\Phi(x,\ \xi),\ z,\ \gamma). \end{aligned}$$

Для доказательства прежде всего потребуется более детальное изучение распределений из $I_m(X,\ \Lambda)$, где Λ — конормальное расслоение к некоторому подмногообразию в X. Достаточно сделать это локально; пусть $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^l$ с координатами $x = (t,\ y)$, $t = (t_1,\ \ldots,\ t_k)$, $y = (y_1,\ \ldots,\ y_l)$, и пусть Λ — конормальное расслоение к подмногообразию $t = 0$; значит, если $\xi = (\tau,\ \eta)$ — соответствующие кокасательные координаты, то в $(x,\ \xi)$-пространстве расслоение Λ задается условиями $t = 0$, $\eta = 0$.

Лемма 6.3. *Если Λ такое, как описано выше, и $\mu \in I_m(X,\ \Lambda)$, то*

$$\mu = \int b(y,\ \tau)\, e^{it\tau}\, d\tau \tag{6.2}$$

по модулю распределений более низкого порядка, где $b(y,\ \tau)$ равно нулю для малых τ и однородно степени $m - k/2$ по τ для больших τ.

Доказательство. Заданное Λ описывается параметризацией

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n \times S^{k-1} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathbf{R} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \mathbf{R}^n & & \end{array}$$

где $\varphi(x,\ \omega) = t \cdot \omega$, $\omega \in S^{k-1}$. Поэтому при $r = m - 1 + k/2$

$$\pi_* a\varphi^* v_r^+ = \int a(x,\ \omega) \int_0^\infty e^{is\varphi(x,\ \omega)} s^r \chi(s)\, ds\, d\omega,$$

где $\chi(s) = 0$ для малых s и 1 для больших s. Полагая $\tau = s\omega$ и $\tilde{a}(x,\ \tau) = \int_0^\infty \chi(s)\, a(x,\ \omega)\, s^{r-(k-1)}\, ds$ и замечая, что $t \cdot \tau = s\varphi(x,\ \omega)$, получаем

$$\pi_* a\varphi^* v_r^+ = \int \tilde{a}(x,\ \tau)\, e^{it\tau}\, d\tau.$$

Наконец, пусть $\tilde{a}(x, \tau) = b(y, \tau) + \sum t_j b_j(x, \tau)$. Интегрирование по частям дает

$$\pi_* a\varphi^* v_r^+ = \int b(y, \tau)\, e^{it\tau}\, d\tau - \int \sum \frac{1}{i} \frac{\partial b_j}{\partial \tau_j} e^{it\tau}\, d\tau.$$

Поскольку второе слагаемое имеет более низкую степень однородности, чем первое, это доказывает (6.2), а значит, доказана и лемма.

Доказательство следующей формулы мы оставляем читателю в качестве упражнения. Если μ задается интегралом (6.2), то

$$\sigma(\mu) = b(y, \tau) \sqrt{dy\, d\tau}. \tag{6.3}$$

Возвращаясь к доказательству предложения 6.2, отметим, что, как показано в § 3, композицию двух интегральных операторов можно разложить на операции опускания, поднятия и внешнего тензорного произведения. Поэтому рассмотрим сначала внешние произведения лагранжевых распределений. Пусть $\mu_i \in I_{k_i}(X_i, \Lambda_i)$, $i = 1, 2$, и C — произвольная коническая окрестность множества $\Lambda_1 \times 0 \cup 0 \times \Lambda_2$ в $T^*(X_1 \times X_2)$. Тогда имеет место

Предложение 6.4. *Существует представление* $\mu_1 \boxtimes \mu_2 = \nu + \nu'$, *где* $WF(\nu) \subset C$ *и* $\nu' \in I_{k_1+k_2}(X_1 \times X_2, \Lambda_1 \times \Lambda_2)$. *Кроме того, на дополнении к* C

$$\sigma(\nu') = \sigma(\mu_1) \boxtimes \sigma(\mu_2).$$

Доказательство. Вначале докажем это для наших основных распределений $v_{k_1}^+$ и $v_{k_2}^+$ на вещественной прямой. Их внешние тензорные произведения могут быть записаны как

$$\left(\int \rho(\xi_1)\, \xi_1^{k_1 - 1/2} \rho(\xi_2)\, \xi_2^{k_2 - 1/2} e^{ix\cdot\xi}\, d\xi\right) \sqrt{dx}. \tag{6.4}$$

Пусть $\varphi(\theta)$ — функция, равная нулю при $\theta \leqslant 0$ и $\theta \geqslant \pi/2$ и равная единице при $\varepsilon/2 < \theta < \pi/2 - \varepsilon/2$. Пусть

$$v_{k_1}^+ \boxtimes v_{k_2}^+ = \nu + \nu', \tag{6.5}$$

где ν и ν' получаются из (6.4) умножением подынтегрального выражения на $1 - \varphi(\theta)$ и $\varphi(\theta)$ соответственно. Ясно, что $WF(\nu)$ содержится в множестве

$$\left\{(r, \theta) \mid 0 < \theta < \varepsilon \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \theta < \frac{\pi}{2}\right\} \tag{6.6}$$

и что ν' имеет нужный символ на дополнении к этому множеству по лемме 6.3 и формуле (6.3).

Теперь перейдем к общему случаю. Пусть Λ_i, $i = 1, 2$, параметризуются диаграммами

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}_i & \xrightarrow{\varphi_i} & \mathbf{R} \\ {\scriptstyle \pi_i}\downarrow & & \\ X_i & & \end{array}$$

и пусть $\mu_i = (\pi_i)_* a_i \varphi_i^* v_{k_i}^+$, $i = 1, 2$. Тогда

$$u_1 \boxtimes u_2 = (\pi_1 \times \pi_2)_* a_1 a_2 \varphi_1^* \times \varphi_2^* v_{k_1}^+ \boxtimes v_{k_2}^+.$$

Разлагая $v_{k_1}^+ \boxtimes v_{k_2}^+$ согласно (6.5) и замечая, что если ε достаточно мало, то результат применения $(\pi_1 \times \pi_2)_* (\varphi_1 \times \varphi_2)^*$ к множеству (6.6) содержится в произвольной конической окрестности множества $\Lambda_1 \times 0 \bigcup 0 \times \Lambda_2$, мы получаем нужное утверждение, и предложение 6.4 доказано.

Теперь вернемся к доказательству предложения 6.2. Если интегральные операторы Фурье K и L из этого предложения имеют своими ядрами Шварца $\varkappa(x, y) \sqrt{dx\,dy}$ и $\lambda(y, z) \sqrt{dy\,dz}$, то их композиция имеет своим ядром

$$\left(\int \varkappa(x, y) \lambda(y, z)\,dy\right) \sqrt{dx\,dz},$$

которое как распределение должно иметь вид $\pi^* \Delta^* \varkappa \boxtimes \lambda$, где Δ: $X \times Y \times Z \to X \times Y \times Y \times Z$ — диагональное отображение и π: $X \times Y \times Z \to X \times Z$ — проекция $(x, y, z) \longmapsto (x, z)$. Мы можем написать $\varkappa \boxtimes \lambda = \nu + \nu'$, причем ν выбрано так, что его волновой фронт в $T^*(X \times Y \times Y \times Z)$ не пересекается с множеством

$$\{(x, \xi, y, \eta, y, -\eta, z, \gamma)\}, \tag{6.7}$$

а ν' — лагранжево распределение на $\Gamma_\Phi \times \Gamma_\Psi$, соответствующее произведению символов $\sigma(\varkappa) \boxtimes \sigma(\lambda)$ в окрестности точки (6.7). Поскольку $WF(\nu)$ не пересекается с множеством (6.7), $WF(\Delta^*\nu)$ не содержит элементов вида $(x, \xi, y, 0, z, \gamma)$, а потому $\pi_* WF(\Delta^*\nu)$ пусто, т. е. $\pi_* \Delta^* \nu$ — гладкое распределение. Как и в случае $\pi_* \Delta^* \nu'$, это лагранжево распределение, ассоциированное с лагранжевым многообразием $\pi_* \Delta^* \Gamma_\Phi \times \Gamma_\Psi = \Gamma_{\Phi \circ \Psi}$.

Как обстоит дело с порядком $\pi_* \Delta^* \nu'$? Если $\dim X = n$, то $\varkappa$ имеет порядок $k + n/2$, а λ — порядок $l + n/2$; поэтому $\varkappa \boxtimes \lambda$ и $\Delta^* \varkappa \boxtimes \lambda$ имеют порядок $k + l + n$. Оператор π_* уменьшает порядок на $n/2$, поскольку это интегрирование по слою размерности n, значит, порядок $\pi_* \Delta^* \varkappa \boxtimes \lambda$ равен $k + l + n/2$, как и требуется.

Наконец, проверим, что $\pi_* \Delta^* \sigma(\varkappa) \boxtimes \sigma(\lambda)$, т. е. символ $\pi_* \Delta^* \nu'$, является нужным произведением символов. Пусть β: $T^*Z \to T^*W$ — симплектическое преобразование. Оно отображает лагранжевы подмногообразия в $T^*(X \times Y \times Y \times Z)$ на лагранжевы подмногообразия в $T^*(X \times Y \times Y \times W)$ при помощи правого действия; точно так же оно отображает лагранжевы подмногообразия в $T^*(X \times Z)$ на лагранжевы подмногообразия в $T^*(X \times W)$. Легко проверить, что для фиксированного лагранжева подмногообразия $\Lambda \subset T^*(X \times Y \times Y \times W)$

$$\beta^* \pi_* \Delta^* \Lambda = \pi_* \Delta^* \beta^* \Lambda,$$

при условии, что определены соответствующие поднятия и опускания. (Это условие выполнено, поскольку π и Δ действуют только на множитель Y в произведении $X\times Y\times Y\times Z$.) Кроме того, если σ — полуформа на Λ, то

$$\beta^*\pi_*\Delta^*\sigma=\pi_*\Delta^*\beta^*\sigma.$$

Поэтому проверка того, что $\pi_*\Delta^*\sigma(\varkappa)\boxtimes\sigma(\lambda)$ — соответствующее произведение символов, сводится к проверке этого для $\Psi=\mathrm{id}$. Те же соображения, примененные к левой части, показывают, что можно ограничиться случаем, когда и Φ и Ψ тождественны. Кроме того, ясно, что если умножить $\varkappa$ на функцию f, а λ на функцию g, то $\Delta^*\pi^*\varkappa\boxtimes\lambda$ умножится на fg, т. е. нам нужно рассмотреть лишь случай, когда и $\varkappa$ и λ равны $\Omega_X^{n/2}$. Однако мы увидим ниже, что если $\Phi=\mathrm{id}$, то $\Omega_X^{n/2}$ — символ ядра Шварца единичного оператора. Но композиция единичного оператора с самим собой — снова единичный оператор. Тем самым предложение 6.2 доказано.

Интегральный оператор Фурье называется *эллиптическим*, если его символ нигде не обращается в нуль. Из предложения 6.2 следует

Предложение 6.5. *Пусть $K\in(\mathrm{F.I.})^k\Phi$ — собственно сосредоточенный эллиптический интегральный оператор Фурье. Тогда существует такой собственно сосредоточенный интегральный оператор Фурье $L\in(\mathrm{F.I.})^{-k}\Phi^{-1}$, что $\mathrm{id}-K\circ L$ и $\mathrm{id}-L\circ K$ — собственно сосредоточенные операторы с гладкими ядрами.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что единичный оператор принадлежит $(\mathrm{F.I.})^0(\mathrm{id})$ и имеет символ 1. Действительно, достаточно проверить это для $X=\mathbf{R}^n$. Ядро Шварца единичного оператора на $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ — это $\delta(x-y)$, поэтому утверждение следует из леммы 6.3 при $\Lambda=N^*\Delta$.

Далее, если оператор $\mathrm{id}-K\circ L$ сглаживающий, то $\tilde\sigma(K)\tilde\sigma(L)=1$, где $\tilde\sigma$ — поднятия на T^*X, поэтому должно быть $\tilde\sigma(L)=1/\tilde\sigma(K)$. Выберем в качестве L_1 любой оператор из $(\mathrm{F.I.})^{-k}\Phi^{-1}$ с этим символом. Тогда $\mathrm{id}-K\circ L_1$ принадлежит $(\mathrm{F.I.})^{-1}(\mathrm{id})$. Пусть ρ — его символ; возьмем в $(\mathrm{F.I.})^{-k-1}\Phi^{-1}$ любой такой оператор L_2, что $\tilde\sigma(L_2)=\rho/\tilde\sigma(K)$. Тогда $\mathrm{id}-K\circ(L_1+L_2)$ принадлежит $(\mathrm{F.I.})^{-2}\Phi^{-1}$. Продолжая этот процесс дальше, мы найдем такие $L_1, L_2, \ldots$, что

$$\mathrm{id}-K\circ(L_1+\ldots+L_N)\in(\mathrm{F.I.})^{-N}(\mathrm{id}).$$

Наконец, ввиду свойства Миттаг-Леффлера из предложения 4.1, найдется такой оператор $L\in(\mathrm{F.I.})^{-k}\Phi^{-1}$, что

$$L-(L_1+\ldots+L_N)\in(\mathrm{F.I.})^{-N-k}\Phi^{-1}.$$

Тогда оператор $\mathrm{id}-K\ L$ — сглаживающий. Пользуясь аналогичными соображениями, построим такой оператор L', что оператор

$\mathrm{id} - L' \circ K$ сглаживающий; обычные рассуждения о единственности обратных операторов показывают, что оператор $L' - L$ сглаживающий, т. е. мы можем заменить L' на L, и доказательство окончено.

Для псевдодифференциальных операторов основное лагранжево многообразие Γ_{id} — это $N^*\Delta$, т. е. множество $\{(x, \xi, x, -\xi) \mid \xi \in T^*X_x\}$. Отождествим его с T^*X при помощи отображения $(x, \xi, x, -\xi) \longmapsto (x, \xi)$. Будем говорить, что псевдодифференциальный оператор K *гладкий* в точке (x, ξ), если для соответствующего ядра Шварца $\varkappa$ множество $WF(\varkappa)$ не содержит (x, ξ). Будем говорить, что K имеет порядок l в точке (x, ξ), если существует такой псевдодифференциальный оператор K' порядка l, что $K - K'$ гладкий в точке (x, ξ). Те же рассуждения, что и выше (индукция по порядку), доказывают

Предложение 6.6. *Пусть K — псевдодифференциальный оператор порядка k, для которого $\sigma(K)(x, \xi) \neq 0$. Тогда существует такой псевдодифференциальный оператор L порядка $-k$, что $\mathrm{id} - K \circ L$ и $\mathrm{id} - L \circ K$ гладкие в (x, ξ).*

Воспользуемся этим результатом для того, чтобы дать новое определение волнового фронта. Однако прежде необходимо сделать одно замечание о действии интегральных операторов Фурье на распределения. Пусть K — оператор, принадлежащий, скажем, $(\mathrm{F.I.})\,\Phi$, и пусть μ — распределение с компактным носителем. Мы покажем, что $K\mu$ корректно определено и

$$WF(K\mu) \subset \Phi WF(\mu). \tag{6.8}$$

Правильный путь определения $K\mu$ состоит, конечно, в том, чтобы рассмотреть $\pi_* \varkappa \rho^* \mu$, где $\varkappa$ — ядро Шварца оператора K. Мы покажем, что это имеет смысл, проводя некоторый вариант рассуждений, которыми мы пользовались в § 3 для определения произведения двух распределений. Именно, $WF(\rho^*\mu) \subset \{(x, 0, y, \eta) \mid (y, \eta) \in WF(\mu)\}$ и $WF(\varkappa) \subset \{(x, \xi, y, -\eta) \mid (y, \eta) = \Phi(x, \xi)\}$; поэтому, согласно § 3, волновой фронт $\varkappa\rho^*\mu$ содержится в множестве

$$\{(x, \xi, y, -\eta + \eta') \mid (y, \eta) = \Phi(x, \xi),\ (y, \eta') \in WF(\mu)\}. \tag{6.9}$$

Заметим, что $\varkappa\rho^*\mu$ корректно определено, поскольку (6.9) не содержит нулевых векторов. Чтобы точка (x, ξ) принадлежала опусканию этого множества, должно существовать y, для которого $(x, \xi, y, 0)$ принадлежит этому множеству, т. е. существует точка вида (6.9), для которой $\eta = \eta'$. Значит, $WF(K\mu) \subset \Phi WF(\mu)$, как и утверждалось.

Если псевдодифференциальный оператор K гладкий в (x, ξ), то $(x, \xi, x, -\xi)$ не принадлежит множеству WF соответствующего распределения $\varkappa$, поэтому только что проведенные рассуждения показывают, что для всех μ имеем $(x, \xi) \notin WF(K\mu)$.

Пусть μ — фиксированное распределение и K — псевдодифференциальный оператор. Тогда если $\sigma(K)(x_0, \xi_0) \neq 0$ и $K\mu$ гладкое, то μ гладкое в (x_0, ξ_0). В самом деле, по предложению 6.6, мы можем выбрать такой оператор L, что $M = \mathrm{id} - L \circ K$ гладкий в (x_0, ξ_0), и записать $\mu = LK\mu + M\mu$, где оба слагаемых гладкие в (x_0, ξ_0). Это наполовину доказывает следующее

Предложение 6.7. *Точка $(x_0, \xi_0) \notin WF(\mu)$ тогда и только тогда, когда существует псевдодифференциальный оператор K, для которого $\sigma(K)(x_0, \xi_0) \neq 0$ и распределение $K\mu$ гладкое.*

Для доказательства другой половины предложения потребуется

Лемма 6.8. *Пусть $w \in I(X, \Lambda)$, $(x_0, \xi_0) \in \Lambda$ и V — коническая окрестность точки (x_0, ξ_0) в T^*X. Тогда существует распределение $w' \in I(X, \Lambda)$, гладкое вне V и такое, что $w - w'$ гладкое в окрестности точки (x_0, ξ_0).*

Считая эту лемму доказанной, выберем такой псевдодифференциальный оператор K, что $\mathrm{id} - K$ — гладкий оператор в окрестности (x_0, ξ_0) и K гладкий на волновом фронте μ. Тогда $K\mu$ — гладкое распределение.

Для доказательства леммы выберем параметризацию

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ X & & \end{array}$$

лагранжева подмногообразия Λ в окрестности (x_0, ξ_0) так, чтобы w было суммой членов вида $\pi_* a\varphi^* v_m^+$, а w' — суммой членов $\pi_* \rho a\varphi^* v_m^+$, где ρ — срезающая функция, равная 1 на окрестности критической точки, соответствующей (x_0, ξ_0).

Рассмотрим теперь несколько примеров. Вначале вернемся к обобщенному преобразованию Радона, описанному в § 3. Заданы n-мерные многообразия X и Y и подмногообразие $Z \subset X \times Y$ коразмерности l, причем ограничения на Z проекций

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ {\scriptstyle \pi}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \rho} \\ X & & Y \end{array}$$

являются расслоениями. По заданной гладкой плотности $\varkappa$ на Z определяем преобразование Радона:

$$K\colon C_0^\infty(Y) \to C^\infty(|\Lambda|X)$$

формулой

$$\mu \longmapsto \pi_* \varkappa \rho^* \mu. \tag{6.10}$$

Это определение допускает различные варианты (фиксируя ненулевые полуплотности на X и Y, мы можем превратить K в оператор на полуплотностях, ничего существенного в нем не меняя). Ясно, что ядро Шварца $\varkappa$ оператора K — это δ-распределение, сосредоточенное на Z. Предположим, что проекции

$$\begin{tikzcd}
 & NZ-0 \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\
T^*X-0 & & T^*Y-0
\end{tikzcd}$$

биективны. (В силу сказанного в § 3 это условие можно считать условием эллиптичности преобразования Радона.) Тогда отображение Φ:

$$\Phi(x, \xi) = (y, -\eta), \quad (y, \eta) = \rho\pi^{-1}(x, \xi),$$

есть однородное симплектическое преобразование; значит, по лемме 6.3 оператор K принадлежит $(\mathrm{F.I.})^{(l-n)/2}\Phi$. Символ K — это, по существу, плотность $\varkappa$, входящая в (6.10); поэтому если $\varkappa \neq 0$ всюду, то K эллиптичен. Оператор

$$C_0^\infty(X) \ni \mu \longmapsto \rho_* \varkappa \pi^* \mu$$

— это транспонированный оператор ${}^tK$ и по тем же причинам является эллиптическим интегральным оператором Фурье типа $(\mathrm{F.I.})^{(l-n)/2}\Phi^{-1}$. Значит, $K \circ {}^tK$ и ${}^tK \circ K$ — эллиптические псевдодифференциальные операторы порядка $l-n$. Хелгасон [6] показал, что в случае классических симметрических пространств ранга 1 они имеют вид $P(\Delta)^{-1}$, где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами, а P — полином порядка $(n-l)/2$. Это фактически содержится в формуле обращения для преобразования Радона на этих пространствах.

Прежде чем перейти ко второму примеру, заметим, что если K — псевдодифференциальный оператор на $\mathbf{R}^n$ и $\varkappa$ — его ядро Шварца, то, по лемме 6.3, $\varkappa$ можно представить в виде суммы гладкой функции и выражения вида

$$\int a(x, \xi)\, e^{i(x-y)\cdot\xi}\, d\xi, \quad a(x, \xi) \sim \sum_{i=m}^{-\infty} a_i(x, \xi), \tag{6.11}$$

где $a_i(x, \xi)$ однородны степени i. Выражение $a(x, \xi)$ обычно называется *полным символом* оператора K. В § 1 гл. II мы показали, что дифференциальные операторы тоже можно записывать в таком виде. Фактически мы показали, что дифференциальный оператор $P(x, D) = \sum p_\alpha(x) D^\alpha$ можно записать в виде

$$\mu \longmapsto \int \sum p_\alpha(x)\, \xi^\alpha e^{ix\cdot\xi} \hat{\mu}(\xi)\, d\xi.$$

Заменяя $\hat{\mu}$ на $\int e^{-iy\cdot\xi}\mu(y)\,dy$, мы получим (6.11) с $a(x, \xi) = \sum p_\alpha(x)\xi^\alpha$. Итак, доказано

Предложение 6.9. *Дифференциальный оператор — это псевдодифференциальный оператор, у которого полный символ есть полиномиальная функция от* ξ.

Отметим, что символ оператора P, определенный в гл. II, а именно $\sum\limits_{|\alpha|=m} p_\alpha(x)\xi^\alpha$, совпадает с определенным здесь символом.

В качестве примера применения техники этого параграфа докажем несколько стандартных результатов об эллиптических дифференциальных операторах.

Предложение 6.10. *Пусть X — компактное многообразие и P: $C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ — эллиптический дифференциальный оператор. Тогда ядро и коядро P конечномерны.*

Для доказательства нам потребуется элементарная лемма о сглаживающих операторах. В этой лемме многообразие X произвольно.

Лемма 6.11. *Пусть K: $C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(X)$ имеет гладкое ядро Шварца $k(x, y)\,dy$, и предположим, что*

$$\sup_{x,\, y} |k| \int\limits_{y,\, k(x,\, y) \neq 0} dy < \frac{1}{2}. \tag{6.12}$$

Тогда оператор $\mathrm{id} - K$ *обратим и обратный оператор имеет вид* $\mathrm{id} - L$, *где L — сглаживающий оператор.*

Формально L задается рядом Неймана

$$L = -(K + K \circ K + K \circ K \circ K + \ldots). \tag{6.13}$$

Мы докажем лемму, если покажем, что правая часть (6.13) сходится к гладкому пределу. Ядро Шварца m-го члена ряда равно

$$k_m(x, y) = \int k(x, z_1)\, k(z_1, z_2) \ldots k(z_{m-1}, y)\, dz_1 \ldots dz_{m-1},$$

поэтому $\sup \left| \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} k_m(x, y) \right|$ можно мажорировать константой, не зависящей от m, умноженной на $(m-1)$-ю степень величины

$$\sup |k(z, z')| \int\limits_{z,\, k(z,\, z') \neq 0} dz.$$

Следовательно, в силу (6.12) m-й член можно мажорировать константой, умноженной на $(1/2)^{m-1}$, откуда видно, что ряд сходится в C^∞-топологии. Доказательство окончено.

Для доказательства предложения 6.10 выберем такой псевдодифференциальный оператор Q, что $PQ = \mathrm{id} - A$ и $QP = \mathrm{id} - B$, где A и B — сглаживающие операторы. Пусть $a(x, y)\,dy$ — ядро Шварца оператора A. По теореме Стоуна — Вейерштрасса можно аппроксимировать a в C^0-топологии гладкой функцией вида

$$a' = \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\, g_i(y),$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти функцию a' такого вида, так чтобы $|a - a'| < \varepsilon$. Пусть $a'' = a - a'$ и

$$A = A' + A'',$$

где A' и A'' — операторы с ядрами $a'\,dy$ и $a''\,dy$. Тогда A' — сглаживающий оператор конечного ранга и для достаточно малых ε оператор $I - A''$ обратим (по лемме), причем обратный оператор снова имеет вид: единичный оператор плюс сглаживающий оператор. Пусть $Q' = Q \circ (\mathrm{id} - A'')^{-1}$. Тогда $\mathrm{id} - P \circ Q'$ — сглаживающий оператор конечного ранга. По аналогичным соображениям можно найти Q'' так, чтобы оператор $\mathrm{id} - Q'' \circ P$ был сглаживающим оператором конечного ранга, т. е. мы доказали, что оператор P *обратим с точностью до сглаживающих операторов конечного ранга*, а это равносильно утверждению предложения 6.10.

Наконец, покажем, что эллиптический дифференциальный оператор всегда локально разрешим.

Предложение 6.12. *Если P — эллиптический дифференциальный оператор на $\mathbf{R}^n$, $\mu \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $x_0 \in \mathbf{R}^n$, то существует такая функция $v \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, что $Pv = \mu$ в окрестности точки x_0.*

Доказательство. По предложению **6.5** существует такой псевдодифференциальный оператор Q, что $P \circ Q = \mathrm{id} - A$, где A — сглаживающий оператор. Пусть $a(x, y)\,dy$ — ядро Шварца оператора A. Пусть, далее, ρ — срезающая функция, равная 1 вблизи x_0 и сосредоточенная в малой окрестности точки x_0. Тогда $\rho A \rho$ имеет ядро Шварца $\rho(x)\, a(x, y)\, \rho(y)\, dy$. По лемме 6.10 оператор $\mathrm{id} - \rho A \rho$ обратим, если только носитель ρ достаточно мал, а обратный оператор снова имеет вид: единичный плюс сглаживающий. Пусть $v = (\mathrm{id} - \rho A \rho)^{-1} \mu$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu &= v - \rho A \rho v = \rho v - A \rho v + (1 - \rho)(v + A \rho v) = \\ &= PQ\rho v + (1 - \rho)(v + A \rho v). \end{aligned}$$

Значит, $\mu = PQ\rho v$ в окрестности точки x_0.

§ 7. Транспортное уравнение

Пусть P — дифференциальный оператор порядка m на расслоении полуформ над многообразием X, т. е. P: $C^\infty(\Lambda^{1/2}X) \to C^\infty(\Lambda^{1/2}X)$. В этом параграфе мы опишем, что происходит при применении P к обобщенной полуформе типа рассмотренных в § 4. Однако прежде надо обсудить некоторые результаты из гл. II. Если X — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, то можно тривиализовать расслоение полуформ, отождествляя $f \in C^\infty(X)$ с $f\sqrt{dx}$. Тогда P можно записать через координаты в виде $\sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \quad D_i = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Пусть $p(x, \xi) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ и $p_k(x, \xi) = \sum\limits_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) \xi^\alpha$. *Главный символ* (или просто *символ*) оператора P — это

$$\sigma(P) = p_m(x, \xi), \tag{7.1}$$

а *субглавный символ* — это

$$\sigma_{\text{sub}}(P) = p_{m-1} - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \sum \frac{\partial^2 p_m}{\partial x^i \, \partial \xi_i}. \tag{7.2}$$

И (7.1), и (7.2) внутренне определяются как функции на T^*X (мы обычным образом отождествляем T^*X с (x, ξ)-пространством) и имеют смысл, когда X — многообразие, а не только подмножество в $\mathbf{R}^n$. Подробности см. в § 6 гл. II.

Если заданы два дифференциальных оператора P и Q порядков l и m соответственно, то имеют место следующие формулы для главного и субглавного символов $P \circ Q$:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad \sigma(P \circ Q) = \sigma(P)\,\sigma(Q); \\ &\text{II.} \quad \sigma_{\text{sup}}(P \circ Q) = \sigma(P)\,\sigma_{\text{sub}}(Q) + \sigma(Q)\,\sigma_{\text{sub}}(P) + \frac{1}{2i}\{\sigma(P),\ \sigma(Q)\}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Доказательство. Запишем $P\mu$ как $\int p(x, \xi) e^{ix\cdot\xi} \hat{\mu}(\xi)\, d\xi$, $Q\mu$ как $\int q(x, \xi) e^{ix\cdot\xi} \hat{\mu}(\xi)\, d\xi$ и $P \circ Q\mu$ как $\int r(x, \xi) e^{ix\cdot\xi} \hat{\mu}(\xi)\, d\xi$. Вначале докажем, что

$$r(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha p}{\partial \xi^\alpha} D_x^\alpha q. \tag{7.4}$$

Доказательство. Применим $P(x, D)$ к $\int q(x, \xi) e^{ix\cdot\xi} \hat{\mu}(\xi)\, d\xi$ и воспользуемся формулой

$$P e^{ix\cdot\xi} q = e^{ix\cdot\xi} \sum \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha p}{\partial \xi^\alpha} D_x^\alpha q.$$

(См. гл. II, (1.4).) Доказательство окончено.

Согласно (7.4), член порядка $l+m$ в $r(x, \xi)$ равен $p_l q_m$, откуда следует (7.3) I. Член порядка $l+m-1$ равен

$$p_l q_{m-1} + p_{l-1} q_m + \frac{1}{i}\sum \frac{\partial p_l}{\partial \xi_j}\frac{\partial q_m}{\partial x^j},$$

так что субглавная часть $P \circ Q$ равна

$$p_l q_{m-1} + p_{l-1} q_m + \frac{1}{i}\sum \frac{\partial p_l}{\partial \xi_j}\frac{\partial q_m}{\partial x^j} - \frac{1}{2i}\sum \frac{\partial^2 p_l q_m}{\partial \xi_j\, \partial x^j},$$

а это выражение совпадает с (7.3) II.

Теперь будет доказана

Теорема 7.1. *Если* $\mu \in I_k(X, \Lambda)$, *то* $P\mu \in I_{k+m}(X, \Lambda)$ *и* $\sigma(P\mu) = \sigma(P)\,\sigma(\mu)$.

Доказательство. Достаточно провести доказательство для случая, когда X — открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$, а Λ задается параметризацией

$$\begin{tikzcd} X \times \mathbf{R}^N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbf{R} \\ X & \end{tikzcd}$$

Кроме того, ввиду (7.3) I, можно ограничиться дифференциальными операторами нулевого и первого порядков. Для операторов нулевого порядка теорема тривиальна, поэтому нужно проверить ее только для одного оператора $\left(1/\sqrt{-1}\right)(\partial/\partial x^i)$. Применяя этот оператор к $\mu = \pi_* a \varphi^* v_r$, $r = k + (N-1)/2$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x^i}\mu = \pi_* a \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\varphi^* \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{d}{dt} v_r + \pi_* \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial a}{\partial x^i}\varphi^* v_r \tag{7.5}$$

по правилу дифференцирования сложной функции. Оба слагаемых принадлежат $I_{k+1}(X, \Lambda)$, а второе слагаемое на самом деле лежит в $I_k(X, \Lambda)$; значит, в том, что касается символа, вторым слагаемым можно пренебречь. Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{d}{dt} v_r = \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{d}{dt}\int_0^\infty s^r e^{ist}\, ds = \int_0^\infty s^{r+1} e^{ist}\, ds = v_{r+1}$$

и $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \xi_i$ на критическом множестве φ, символ (7.5) имеет вид $\xi_i \sigma(\mu)$. Но ξ_i — символ оператора $\left(1/\sqrt{-1}\right)(\partial/\partial x^i)$, и доказательство окончено.

Из теоремы 7.1 можно вывести такое следствие. Если $\sigma(P) = 0$ на Λ, то $P\mu \in I_{k+m-1}(X, \Lambda)$. В этом случае вычислить $\sigma(P\mu)$ не так просто. Наш предыдущий опыт (§ 6 гл. II) подсказывает, что с этим должно быть связано транспортное уравнение, и это действительно так.

Пусть $p_m = \sigma(P)$ и η_{p_m} — гамильтоново векторное поле, связанное с p_m. Напомним, что если $p_m = 0$ на Λ, то η_{p_m} касается Λ, т. е. η_{p_m} можно рассматривать как векторное поле на Λ и, будучи таковым, оно действует как дифференцирование Ли на все внутренне определенные объекты на Λ, включая полуформы. Обозначим производную Ли вдоль η_{p_m} через $D_{\eta_{p_m}}$. Для заданного $\mu \in I_k(X, \Lambda)$ мы докажем следующую формулу:

$$\sigma(P\mu) = \frac{1}{\sqrt{-1}} D_{\eta_{p_m}} \sigma(\mu) + \sigma_{\text{sub}}(P)\,\sigma(\mu) \tag{7.6}$$

для символа $P\mu$. (Ср. с (6.8) из гл. II.)

Доказательство формулы (7.6). Это доказательство будет разбито на серию лемм.

Лемма 7.1. *Формула* (7.6) *имеет место, если P — оператор порядка m, главный символ которого тождественно равен нулю (т. е. оператор порядка m, который на самом деле является оператором порядка $m-1$).*

Это сразу следует из теоремы 7.1.

Лемма 7.2. *Если* (7.6) *имеет место для Q с $\sigma(Q) = 0$ на Λ, то* (7.6) *имеет место для всех операторов вида $P \circ Q$.*

Доказательство. Пусть p и q — главные символы P и Q. Поскольку $q = 0$ на Λ, имеем $\eta_{pq} = p\eta_q$ на Λ. Пусть $\sigma = \sigma(\mu)$. Как показано в гл. II (см. формулу (6.7) в конце § 6),

$$D_{p\eta_q}\sigma = pD_{\eta_q}\sigma + \frac{1}{2}\{q, p\}\,\sigma;$$

отсюда в силу (7.3) II

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} D_{\eta_{pq}}\sigma + \sigma_{\text{sup}}(P \circ Q)\,\sigma =$$
$$= p\frac{1}{\sqrt{-1}} D_{\eta_q}\sigma + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\{q, p\}\,\sigma + p\sigma_{\text{sub}}(Q)\,\sigma + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\{p, q\}\,\sigma =$$
$$= p\left(\frac{1}{\sqrt{-1}} D_{\eta_q}\sigma + \sigma_{\text{sub}}(Q)\,\sigma\right).$$

Но последнее выражение — это $\sigma(P \circ Q\mu)$ по теореме 7.1. Лемма 7.2 доказана.

Лемма 7.3. *Достаточно доказать* (7.6) *для случая, когда Λ — конормальное расслоение подмногообразия в X.*

Доказательство. Если проекция

$$\begin{array}{c} \Lambda \subset T^*X \\ \pi \big\downarrow \quad\quad \\ X \quad\quad \end{array}$$

имеет постоянный ранг в окрестности точки (x_0, ξ_0), то Λ — конормальное расслоение около (x_0, ξ_0) (см. § 5 гл. IV). Поскольку π имеет постоянный ранг на плотном открытом подмножестве в Λ, достаточно доказать (7.6) в этом случае. Лемма доказана.

Пусть $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^l$ с координатами $x = (t, y)$ и Λ — конормальное расслоение на подмногообразии $t = 0$. Тогда по лемме 6.3 из § 6 каждое $\mu \in I_m(X, \Lambda)$ можно представить в виде

$$\int b(y, \tau) e^{it\tau} d\tau \tag{7.7}$$

по модулю членов более низкого порядка, где функция $b(y, \tau)$ равна нулю для малых τ и однородна степени $m - k/2$ по σ для больших τ. Кроме того, символ μ равен

$$\sigma(\mu) = b(y, \tau) \sqrt{dy\, d\tau}. \tag{7.8}$$

Теперь докажем (7.6). По лемме 7.3 достаточно сделать это для случая, когда Λ определяется в $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^l$ уравнением $t = \eta = 0$. Поскольку символ $\sigma(P) = p_m(x, \xi)$ равен нулю на Λ, мы можем записать

$$p_m(x, \xi) = \sum \alpha_i(x, \xi) t^i + \sum \beta_i(x, \xi) \eta_i.$$

По леммам 7.1 и 7.2 достаточно доказать (7.6) для операторов, имеющих символами t^i и η_i, например для операторов «умножения на t^i» и операторов $\left(1/\sqrt{-1}\right)(\partial/\partial y^i)$. Если μ равно (7.7), то

$$t^i\mu = \int t^i b(y, \tau) e^{it\tau} d\tau = \frac{1}{\sqrt{-1}} \int b(y, \tau) \frac{\partial}{\partial\tau_i} e^{it\tau} d\tau =$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(-\frac{\partial b}{\partial\tau_i}(y, \tau) \right) e^{it\tau} d\tau$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial y^i} \mu = \int \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial y^i} b(y, \tau) e^{it\tau} d\tau.$$

С t^i ассоциировано гамильтоново векторное поле $-\partial/\partial\tau_i$, а с η_i — поле $\partial/\partial y^i$; субглавные части обоих этих операторов равны нулю в силу (7.2); значит, согласно 7.8, наше доказательство окончено.

Основным применением формулы (7.6) является

Предложение 7.1. *Предположим, что для любого m и любого $\beta \in S^{m+k-1}(\Lambda)$ существует $\alpha \in S^m$, удовлетворяющее условию*

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} D_{\eta_p}\alpha + \sigma_{\text{sub}}(P)\alpha = \beta. \tag{7.9}$$

Тогда если $\alpha_0 \in S^m(\Lambda)$ удовлетворяет однородному уравнению $(1/\sqrt{-1}) D_{\eta_p}\alpha_0 + \sigma_{\text{sub}}(P)\alpha_0 = 0$, то существует $\mu \in I_m(X, \Lambda)$, для которого $\sigma(\mu) = \alpha_0$ и $P\mu \in C^\infty$.

Доказательство. Выберем $\mu_0 \in I_m$ так, чтобы $\sigma(\mu_0) = \alpha_0$. Тогда, согласно (7.6), $P\mu_0 \in I_{m+k-2}$. Пусть β_{-1} — символ $P\mu_0$; найдем $\alpha = \alpha_{-1}$ из уравнения (7.9) при $\beta = \beta_{-1}$. Выберем μ_1 так, чтобы $\sigma(\mu_1) = \alpha_{-1}$. Тогда $P(\mu_0 + \mu_1) \in I_{m+k-3}$. Продолжая этот процесс, построим $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ так, чтобы $\mu_i \in I_{m-i}$ и $P(\mu_0 + \ldots + \mu_{N-1}) \in I_{m+k-N-1}$. Применив предложение 4.1, мы закончим доказательство.

Условия предложения 7.1 будут выполнены, если траектории потока η_p на Λ допускают глобальное C^∞-кросс-сечение. Пусть, например, X — компактное ориентированное риманово многообразие и Δ — оператор Лапласа — Бельтрами. (Мы определяем Δ как $dd^* + d^*d$, т. е. на $\mathbf{R}^n$ он лишь знаком отличается от обычного лапласиана.) Пусть $\delta(x-y)$ — это δ-функция на диагонали в $X \times X$. Мы покажем, что, по крайней мере с точностью до C^∞-функций, существует «прямое» фундаментальное решение волнового уравнения $(d^2/dt^2 - \Delta)\mu = 0$, т. е. существует обобщенная функция $\mu_+(x, y, t)$ на $X \times X \times \mathbf{R}$, которая при фиксированном y удовлетворяет условиям $(d^2/dt^2 - \Delta)\mu_+ \in C^\infty$, $\mu_+(x, y, 0) = \delta(x-y)$ и $WF(\mu_+)$ содержится в $\tau - |\xi|$.

Доказательство. Вначале заметим, что $\delta(x-y) \in I_{n/2}(N^* \operatorname{diag})$. В самом деле, локально $\delta(x-y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} d\xi + \ldots$ (точки означают члены более низкого порядка); следовательно, по лемме 6.3, $\delta(x-y) \in I_{n/2}(N^* \operatorname{diag})$. Пусть $p = \tau - |\xi|$ и C — лагранжево многообразие в $T^*(X \times X \times \mathbf{R})$, состоящее из интегральных кривых $\gamma(t)$ для η_p, которые обладают свойством

$$\gamma(0) \in \{(x, \xi, x, -\xi, 0, |\xi|)\}.$$

Для фиксированного y_0 проекция C на $X \times \mathbf{R}$ — это световой конус с вершиной в y_0; он состоит из всех таких точек (x, t), что x можно соединить с y_0 геодезической длины $|t|$. Подмногообразие $t = 0$ в C — глобальное кросс-сечение для η_p-потока, т. е. выполнены условия предложения 7.1. При этом мы не только можем решить (7.9) глобально, но и задать α при $t = 0$. Другими словами, мы можем найти такое μ_+, удовлетворяющее

$$\frac{d^2}{dt^2}\mu_+ - \Delta\mu_+ \in C^\infty,$$

что $\mu_+(x, y, t)=\delta(x-y)$ при $t=0$. Поскольку $\tau-|\xi|$ равно нулю на C, мы доказали нужное утверждение.

Замечание. Тем же способом можно построить «обратное» фундаментальное решение, т. е. фундаментальное решение μ с $WF(\mu_-)$, содержащимся в $\tau+|\xi|=0$.

Мы закончим этот параграф описанием того, как обобщить теорию транспортного уравнения на псевдодифференциальные операторы. Теорема 7.1 обобщается непосредственно.

Теорема 7.3. *Пусть* P: $C_0^\infty(\Lambda^{1/2}X)\to C^\infty(\Lambda^{1/2}X)$ — *псевдодифференциальный оператор порядка* m. *Тогда если* $\mu\in I_k(X, \Lambda)$, *то* $P\mu\in I_{k+m}(X, \Lambda)$ *и* $\sigma(P\mu)=\sigma(P)\sigma(\mu)$.

Доказательство очень мало отличается от доказательства предложения 6.2, и мы лишь наметим его. Напишем $P\mu=\pi_*\Delta^*\varkappa\boxtimes\mu$, где $\varkappa$ — ядро Шварца оператора P, Δ: $X\times X\to X\times X\times X$ — диагональное отображение $\Delta(x, y)=(x, y, y)$ и π — обычная проекция. По предложению 6.4, $\varkappa\boxtimes\mu$ можно представить в виде $\nu+\nu'$, где $WF(\nu)$ содержится в малой конической окрестности множества «угловых» точек $\Gamma_{\mathrm{id}}\times 0\cup 0\times\Lambda$, ν' — лагранжево распределение с волновым фронтом, сосредоточенным на $\Gamma_{\mathrm{id}}\times\Lambda$, и символ равен $\sigma(\varkappa)\boxtimes\sigma(\mu)$ на дополнении к малой конической окрестности «угла». Из фактов, доказанных в § 3, о поднятиях и опусканиях волновых фронтов легко вывести, что $WF(\pi_*\Delta^*\nu)$ — пустое множество, а значит, $\pi_*\Delta^*\nu$ — гладкое распределение. Поэтому $P\mu$ — лагранжево распределение с символом $\pi_*\Delta^*\sigma(\varkappa)\boxtimes\sigma(\mu)$. Остается лишь проверить, что

$$\pi_*\Delta^*\sigma(\varkappa)\boxtimes\sigma(\mu)=\sigma(P)\sigma(\mu). \tag{7.10}$$

Если $\sigma(\varkappa)$ умножить на функцию f, то левая часть (7.10) умножится на f; поэтому достаточно проверить (7.10) для одного нигде не обращающегося в нуль символа $\sigma(\varkappa)$. Однако мы уже проверили (7.10) для большого числа таких символов $\sigma(\varkappa)$ (по теореме 7.1, для дифференциальных операторов формула (7.10) справедлива), и теорема доказана.

Для того чтобы обсудить аналог (7.6), вначале определим понятие субглавного символа для псевдодифференциальных операторов. Локально это сделать легко. Если

$$P\mu=\int P(x, \xi)e^{ix\xi}\hat{\mu}(\xi)\,d\xi, \quad P(x, \xi)\sim P_m(x, \xi)+P_{m-1}(x, \xi)+\ldots,$$

то

$$\sigma_{\mathrm{sub}}(P)=P_{m-1}-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\sum\frac{\partial P_m}{\partial x^i\,\partial\xi_i},$$

как в (7.2). Проблема в том, чтобы показать, что это выражение внутренне определено как функция на кокасательном расслоении. Это не очень трудно, но мы не будем здесь этим заниматься.

(См., например, Дёйстермат и Хёрмандер [9], § 5.2.) Как только символ $\sigma_{\text{sub}}(P)$ определен, формулы (7.3), (7.4) довольно легко доказываются, а (7.6) следует из теоремы 7.3, подобно тому как для дифференциальных операторов (7.6) следует из теоремы 7.1.

§ 8. Некоторые применения к спектральной теории

Как и выше, пусть X — компактное ориентированное риманово многообразие, и пусть Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на нем. Хорошо известно (см., например, Уорнер [12]), что Δ имеет полное ортонормированное семейство собственных функций $e_1, e_2, \ldots$ и что соответствующие собственные значения неотрицательны и стремятся к $+\infty$. Из e_i можно построить два фундаментальных решения волнового уравнения:

$$v_+(x, y, t) = \sum e^{it\sqrt{\lambda_\alpha}} e_\alpha(x)\,\bar{e}_\alpha(y) \quad \text{и} \quad v_-(x, y, t) = \sum e^{-it\sqrt{\lambda_\alpha}} e_\alpha(x)\,\bar{e}_\alpha(y).$$

Оказывается, что с точностью до C^∞-функций v_+ и v_- совпадают с построенными выше функциями μ_+ и μ_-. Мы не будем доказывать это здесь, хотя доказательство и не сложно. Идея в том, чтобы показать, что и μ_+ и v_+ удовлетворяют дифференциальному уравнению первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{\Delta}\right) w = 0 \mod C^\infty, \tag{8.1}$$

с одними и теми же начальными данными при $t = 0$. Для v_+ это очевидно. Чтобы показать это для μ_+, нужно знать немного больше об операторе $\sqrt{\Delta}$. Согласно одной теореме Сили, $\sqrt{\Delta}$ — псевдодифференциальный оператор с символом $\sqrt{\sigma(\Delta)} = |\xi|$ (см. [16]). Пусть

$$w_+ = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{\Delta}\right)\mu_+.$$

Поскольку $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\mu_+ \in C^\infty$, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{\Delta}\right) w_+ \in C^\infty. \tag{8.2}$$

По теореме 7.3 символ левой части (8.2) равен $(\tau + |\xi|)\,\sigma(w_+)$. Однако μ_+ и w_+ принадлежат $I(C)$ (см. § 7), и на C имеем $|\xi| = \tau \neq 0$, поэтому из (8.2) следует, что $\sigma(w_+) = 0$. Предположим, что $w_+ \in I_k(C)$. Равенство нулю его символа влечет за собой включение $w_+ \in I_{k-1}(C)$ и, по индукции, $w_+ \in I_{k-l}(C)$ для всех l. Значит, $w_+ \in C^\infty$.

Обсудим теперь некоторые следствия того факта, что $\mu_+ = v_+ \mod C^\infty$. Рассмотрим отображения

$$\Delta\colon X \times \mathbf{R} \to X \times X \times \mathbf{R}, \quad (x, a) \mapsto (x, x, a),$$
$$\text{и} \quad \pi\colon X \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad (x, a) \mapsto a.$$

Волновым фронтом распределения μ_+, по построению, является множество $C=\{(x,\ \xi,\ y,\ \eta,\ t,\ \tau)\}$, где $\tau=|\xi|$ и $(x,\ -\xi)$ соединено с $(y,\ \eta)$ геодезической длины $|t|$. Поскольку $\tau\neq 0$ для любого элемента C, распределение $\Delta^*\mu_+$ корректно определено и его волновой фронт содержится в Δ^*C. Заметим, что Δ^*C — это множество всех $(x,\ \xi+\eta,\ t,\ \tau)$, для которых $(x,\ \xi,\ x,\ \eta,\ t,\ \sigma)\in C$. Волновой фронт распределения $\pi_*\Delta^*\mu_+$ — это множество всех таких $(t,\ \tau)$, что существует $(x,\ 0,\ t,\ \tau)\in\Delta^*C$. Это означает, что если $(t,\ \tau)\in WF(\pi_*\Delta^*\mu_+)$, то существует геодезическая длины $|t|$, для которой $(y,\ \eta)=(x,\ \xi)$, т. е. замкнутая геодезическая с периодом t. С другой стороны,

$$\pi_*\Delta^*v_+=\sum e^{it\sqrt{\lambda_\alpha}}\int e_\alpha(x)\,\bar{e}_\alpha(x)\,dx=\sum e^{it\sqrt{\lambda_\alpha}}.$$

Поскольку $\mu_+-v_+\in C^\infty$, мы доказали

Предложение 8.1. *Сумма $\sum e^{it\sqrt{\lambda_\alpha}}$ корректно определена как обобщенная функция на* $\mathbf{R}$. *Кроме того, если T принадлежит ее сингулярному носителю, то существует замкнутая геодезическая на X с периодом T.*

Если Δ и π удовлетворяют условию трансверсальности типа описанного в § 5, то мы можем воспользоваться техникой § 5 для получения более точной информации о $\pi_*\Delta^*\mu_+$. Не вдаваясь в подробности, опишем один результат, который можно получить таким способом (см. Дёйстермат и Гийемин [13]). Пусть η — гамильтоново векторное поле, ассоциированное с функцией $(x,\ \xi)\longmapsto|\xi|$. Если $(x,\ \xi)$ лежит на замкнутой геодезической γ периода T, то $\exp T\eta$ отображает $(x,\ \xi)$ на себя. Пусть N — касательное пространство к T^*X в точке $(x,\ \xi)$, профакторизованное по двумерному подпространству, порожденному η и касательным вектором к образующей конуса $\{(x,\ \lambda\xi)\mid\lambda\in\mathbf{R}^+\}$. Производная от $\exp T\eta$ отображает N на себя. Обозначим это отображение через P_γ. Будем говорить, что геодезическая γ находится *в общем положении*, если выполнено условие Лефшеца: $\det(I-P_\gamma)\neq 0$. Оказывается, если существует лишь одна замкнутая геодезическая γ с периодом T, причем она находится в общем положении, то $\sum e^{it\sqrt{\lambda_\alpha}}$ имеет простой полюс в $t=T$ и справедлива следующая формула для вычета:

$$\lim_{t\to T}(t-T)\left(\sum e^{it\sqrt{\lambda_\alpha}}\right)=\frac{|\gamma|}{\pi}\,i^\sigma\,|\det(I-P_\gamma)|^{-1/2},\qquad(8.3)$$

где σ — индекс Морса для γ, а $|\gamma|$ — длина γ (которая не обязательно равна T, так как γ может несколько раз наматываться на одну и ту же орбиту). Эта формула показывает, что если каждая замкнутая геодезическая с периодом $\neq 0$ находится в общем положении и не существует двух замкнутых геодезических с одинаковым периодом, то *периоды замкнутых геодезических совпадают с особенностями* $\sum e^{it\sqrt{\lambda_\alpha}}$.

Далее, можно ожидать, что $\sum e^{it\sqrt{\lambda_\alpha}}$ имеет сильную особенность при $t=0$, поскольку каждая точка $x \in X$ — замкнутая геодезическая с периодом 0. Посмотрим, какова точная природа этой особенности. Напомним, что для компактного риманова многообразия существует такое положительное число r, что при всех x отображение $\exp_x\colon T_x \to X$ является диффеоморфизмом открытого шара радиуса r в T_x на подмножество в X, состоящее из всех точек y с $d(x, y) < r$. Для заданных $\omega \in T_x^*$ и $(x, y) \in X \times X$ с $d(x, y) < r$ пусть $\varphi(x, y, \omega) = \langle \omega, v \rangle$, где $v \in T_x$ удовлетворяет условию $\exp_x v = y$. Например, если $X = \mathbf{R}^n$, то можно взять $r = +\infty$ и $\varphi(x, y, \omega) = (x-y)\cdot\omega$. Положим

$$Z = \{(x, y, \omega, t) \mid x, \ y \in X, \ t \in \mathbf{R}, \ \omega \in T_x^*, \ |\omega| = 1, \ d(x, y) < r\}$$

и рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{R} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ X \times X \times \mathbf{R} & & \end{array} \tag{8.4}$$

где $\psi(x, y, \omega, t) = t + \varphi(x, y, \omega)$. Мы покажем, что при $|t| < r$ эта диаграмма описывает параметризацию C.

Доказательство (при помощи леммы Гаусса). Слой над (x, y, t) — это косфера $S_x^* = \{\omega \in T_x^* \mid |\omega| = 1\}$. Ограничение φ на этот слой — линейная функция $\langle v, \omega \rangle$, где $v \in T_x$ удовлетворяет условию $\exp_x v = y$. Поэтому если (x, y, ω, t) принадлежит критическому множеству ψ (множеству, где ψ и ее производные по слою равны нулю), то должно быть $v = c\omega$ для некоторого $c \in \mathbf{R}$, а поскольку $\psi = 0$, то $-t = c$. Значит,

$$(x, y, \omega, t) \in \{\text{критическое множество}\} \Leftrightarrow y = \exp_x(-t)\,\omega.$$

(Здесь мы отождествили $\omega \in T_x^*$ с соответствующим ему элементом в T_x при помощи изоморфизма $T_x^* \cong T_x$, задаваемого формой $\langle\ ,\ \rangle_x$.) Далее, вычислим $d_y\varphi$ в точке критического множества. Отождествим T_y с T_y^* при помощи $\langle\ ,\ \rangle_y$, и пусть η — элемент T_y^*, соответствующий единичному касательному вектору к геодезической, соединяющей x с y. Покажем, что $d_y\varphi = \eta$. Пусть $v(s)$ — кривая в T_x с $v(0) = v$, и пусть $y(s) = \exp_x v(s)$. Тогда $\varphi(x, y(s), \omega) = \omega \cdot v(s)$. Предположим вначале, что $v(s)$ лежит на сфере фиксированного радиуса a в T_x. Тогда $(d/ds)\,\varphi(x, y(s), \omega) = \omega \cdot \dot v(0) = (v(0)/a)\cdot \dot v(0) = 0$ при $s = 0$. С другой стороны, по лемме Гаусса dy/ds — перпендикуляр к касательному вектору к геодезической, соединяющей x с y, так что $(dy/ds)\cdot\eta=0$ при $s=0$. Будем теперь менять y так, чтобы менялась лишь длина v, а направление сохранилось, т. е. положим $y(s)=\exp_x s\omega$ с $y=y(a)$, $a=|v|$. Тогда

$$(d\varphi/ds)(x,\ \omega,\ y(s))=1=\eta\cdot(dy/ds)\quad\text{при}\quad s=a.$$

Это доказывает, что $d_y\varphi=\eta$. Аналогично показывается, что $d_x\varphi=-\omega$. Поскольку $d_t\psi=1$, отсюда следует, что (8.4) — параметризация C, как и утверждалось.

Поскольку $\mu_+\in I_{n/2}(X\times X\times\mathbf{R},\ C)$, существует такая функция $a=a(x,\ y,\ \omega,\ t)$ на Z, что

$$\mu_+=\pi_*a\psi^*v_{n-1}^+=\int\int_0^\infty a(x,\ y,\ \omega,\ t)\,s^{n-1}e^{is\psi}\,ds\,d\omega \tag{8.5}$$

с точностью до элементов $I_{(n/2)-1}(X\times X\times\mathbf{R},\ C)$. При $t=0$ имеем $\mu_+=\delta(x-y)$ и $\psi(x,\ y,\ \omega,\ 0)=\varphi(x,\ y,\ \omega)=(x-y)\cdot\omega+O(|x-y|^2)$ локально; сравнивая (8.5) со стандартным представлением δ-функции через плоские волны:

$$\delta(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\int_0^\infty e^{is(x-y)\cdot\omega}s^{n-1}\,ds\,d\omega,$$

мы видим, что

$$a(x,\ y,\ \omega,\ 0)=\frac{1}{(2\pi)^n}+O(|x-y|). \tag{8.6}$$

Можно записать $a(x,\ y,\ \omega,\ t)$ как $a(x,\ y,\ \omega,\ 0)+tb(x,\ y,\ \omega,\ t)$. Вклад от второго слагаемого в (8.5) равен

$$\int\int_0^\infty tb(x,\ y,\ \omega,\ t)\,s^{n-1}e^{ist}e^{is\varphi}\,ds\,d\omega. \tag{8.7}$$

Поскольку $te^{ist}=\left(1/\sqrt{-1}\right)(d/ds)\,e^{ist}$, подынтегральное выражение в (8.7) можно заменить при помощи интегрирования по частям на подынтегральное выражение порядка $O(s^{n-2})$. Значит, с точностью до элементов из $I_{(n/2)-1}$

$$\mu_+=\int\int_0^\infty a(x,\ y,\ \omega,\ 0)\,s^{n-1}e^{ist}e^{is\varphi}\,ds\,d\omega. \tag{8.8}$$

Если под интегралом в (8.8) положить $x=y$, то в силу (8.6)

$$\mu_+(x,\ x,\ t)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int d\omega\int_0^\infty e^{ist}s^{n-1}\,ds, \tag{8.9}$$

Наконец, интегрируя (8.9) по X, получаем при $|t|<r$

$$\sum e^{it\sqrt{\lambda_\alpha}}=\frac{\operatorname{vol}(S^*X)}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty s^{n-1}e^{ist}\,ds+\ldots \tag{8.10}$$

(точками обозначены аналогичные члены, содержащие более низкие степени s).

Чтобы пользоваться этой формулой, умножим правую часть на функцию с носителем в $|t|<r$ и сделаем обратное преобразование Фурье. Функция, которая будет участвовать в этом, должна обладать следующими свойствами:

(a) $\hat\rho\geqslant 0$;
(b) $\rho(0)=1$;
(c) $\hat\rho>c>0$ при $-1<s<1$.

Для построения такой функции рассмотрим четную функцию ρ_0, которая неотрицательна и имеет носитель в интервале $-r/2<$ $<t<r/2$; пусть $\rho_1=\rho_0\bigstar\rho_0$. Тогда $\hat\rho_1\geqslant 0$ и для подходящих α, $\beta>0$ функция $\rho=\alpha\rho_1(t/\beta)$ обладает свойствами (b) и (c). Из (b) вытекает следующая

Лемма 8.1. *При* $s\geqslant 0$

$$\hat\rho\bigstar s_+^{n-1}=s_+^{n-1}+O(s^{n-2}).$$

Доказательство. Имеем

$$\hat\rho\bigstar s_+^{n-1}=\int\limits_{-\infty}^{s}(s-z)^{n-1}\hat\rho(z)\,dz=$$

$$=s^{n-1}\int\limits_{-\infty}^{s}\hat\rho(z)\,dz+(1-n)s^{n-2}\int\limits_{-\infty}^{s}z\hat\rho(z)\,dz+\ldots.$$

Поскольку $\hat\rho(z)$ быстро убывает, каждый из интегралов $\int\limits_{-\infty}^{s}z^k\hat\rho(z)\,dz$ можно записать как $\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^k\hat\rho(z)\,dz$ с остаточным членом порядка $O(s^{-N})$ с произвольным N. Поскольку $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat\rho(z)\,dz=\rho(0)=1$, это доказывает лемму.

Умножая (8.10) на $\rho(t)$ и взяв преобразование Фурье, получаем

$$\sum\hat\rho(s-\mu_i)=\frac{\operatorname{vol}(S^*X)}{(2\pi)^n}\hat\rho\bigstar s_+^{n-1}+O(s^{n-2}),$$

где $\mu_i=\sqrt{\lambda_i}$. Поэтому из леммы получается следующая формула:

$$\sum\hat\rho(s-\mu_i)=\frac{\operatorname{vol}(S^*X)}{(2\pi)^n}s_+^{n-1}+O(s^{n-2}). \tag{8.11}$$

В качестве первого применения этой формулы получим верхнюю оценку для числа собственных значений в любом единичном интервале.

Лемма 8.2. *Число собственных значений оператора* $\sqrt{\Delta}$, *содержащихся в интервале* $(s-1,\ s+1)$, *ограничено сверху величиной* $(\mathrm{const})\, s^{n-1}$.

Доказательство. Если μ_i — такое собственное значение, то его вклад в (8.11) $\geqslant 1/c$ ввиду свойства (c). Лемма доказана.

Из этого утверждения выводится следующая теорема об асимптотическом распределении собственных значений.

Предложение 8.2. *Пусть* $g(s)$ — *число собственных значений оператора* $\sqrt{\Delta}$ *в интервале между* 0 *и* s. *Тогда*

$$g(s)=\frac{\mathrm{vol}\,(S^*X)}{(2\pi)^n}\,\frac{s_+^n}{n}+O(s^{n-1}).$$

Доказательство. Левую часть (8.11) можно записать как $\hat{\rho}\bigstar(dg/ds)$ или $(d/ds)(\hat{\rho}\bigstar g)$; поэтому, если проинтегрировать ее от 0 до s, получим

$$\hat{\rho}\bigstar g=\frac{\mathrm{vol}\,(S^*X)}{(2\pi)^n}\,\frac{s_+^n}{n}+O(s^{n-1}). \tag{8.12}$$

Далее,

$$(g-\hat{\rho}\bigstar g)(s)=g(s)-\int g(s-z)\,\hat{\rho}(z)\,dz=$$
$$=\int (g(s)-g(s-z))\,\hat{\rho}(z)\,dz.$$

По лемме 8.2, $|g(s)-g(s-z)|\leqslant C(|s|+|z|)^{n-1}|z|$; значит,

$$|(g-\hat{\rho}\bigstar g)(s)|\leqslant C\int(|s|+|z|)^{n-1}|z|\,\hat{\rho}(z)\,dz.$$

Поскольку $\hat{\rho}(z)$ быстро убывает, правую часть можно оценить при помощи $O(s^{n-1})$, т. е. в (8.12) мы можем заменить $\hat{\rho}\bigstar g$ на g. Доказательство окончено.

Замечание. Приведенное доказательство предложения 8.2 принадлежит Хёрмандеру. (На самом деле Хёрмандер доказал его для значительно более широкого класса операторов.)

В качестве последнего примера применения техники этого параграфа дадим доказательство формулы Атья — Ботта для неподвижных точек. Пусть

$$0\to C^\infty(E^1)\xrightarrow{d}C^\infty(E^2)\xrightarrow{d}\ldots\xrightarrow{d}C^\infty(E^N)\to 0 \tag{8.13}$$

— комплекс дифференциальных операторов, определенный на компактном многообразии X. Назовем его *эллиптическим*, если лапласиан $\square=dd^t+d^td$ эллиптичен в обычном смысле для дифференциальных операторов на векторных расслоениях (имеет биективный символ). Пусть (f, r) — морфизм комплекса (8.13) в смысле § 2, т. е. $f\colon X \to X$ — отображение Лефшеца и $r\colon f^*E^i \to E^i$ — такой морфизм векторных расслоений, что индуцированное отображение $f^*\colon C^\infty(E^i) \to C^\infty(E^i)$ коммутирует с d. Формула Атья — Ботта утверждает, что сумма

$$\sum (-1)^i \operatorname{tr} f^*\colon C^\infty(E^i) \to C^\infty(E^i) \tag{8.14}$$

равна альтернированной сумме следов на гомологиях, если только следы в (8.14) определены в соответствии с правилом, данным в § 2. В § 2 мы показали, что в случае, когда морфизм (f, r) можно вложить в транзитивное семейство таких морфизмов $\{(f_y, r_y) \mid y \in Y\}$, имеется элементарное доказательство этой формулы. Основной шаг в этом доказательстве — показать, что $\int f_y^* \rho(y)\, dy$ — сглаживающий оператор для всех $\rho \in C_0^\infty(Y)$.

Поучительно посмотреть, как вкладывается f в транзитивное семейство морфизмов для самого простого из всех эллиптических комплексов — комплекса де Рама. Здесь f^* — это «поднятие» на i-формы, которое определено для любого отображения $f\colon X \to X$ и автоматически коммутирует с d. Чтобы вложить f в транзитивное семейство, выберем такие векторные поля $v_1, \ldots, v_N$ на X, что $v_1(x), \ldots, v_N(x)$ порождают T_x для всех $x \in X$. Тогда для $y = (y_1, \ldots, y_N)$

$$f_y = \exp y_1 v_1 \circ \exp y_2 v_2 \circ \ldots \circ \exp y_N v_N \circ f \tag{8.15}$$

— транзитивное семейство.

Если задан произвольный эллиптический комплекс, то имеется в некотором смысле естественная замена этой конструкции. Пусть $\square$ — определенный выше оператор Лапласа. Тогда $d\square = dd^t d = \square d$, т. е. $\square$ также является морфизмом комплекса (8.13), хотя и не того типа, как рассмотренный выше. Поскольку комплекс эллиптичен, $\square$ — положительный самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор, а $\sqrt{\square}$ — положительный самосопряженный эллиптический псевдодифференциальный оператор. Оба они имеют самосопряженные расширения на $L^2(E^i)$, поэтому, согласно спектральной теореме, можно рассмотреть экспоненту от $i\sqrt{\square}$ и получить однопараметрическую группу унитарных операторов $\exp it\sqrt{\square}$. Ясно, что $(1/i)(d/dt)\exp\left(it\sqrt{\square}\right) = \sqrt{\square}\exp it\sqrt{\square}$, поэтому если $k(x, y, t)$ — ядро Шварца оператора $\exp it\sqrt{\square}$, то оно удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{\square_x}\right) k(x, y, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{\square_y}\right) k(x, y, t) = 0, \qquad k(x, y, 0) = \delta(x - y). \tag{8.16}$$

Таким образом, если бы, например, $\square$ был обычным оператором Лапласа — Бельтрами, то из результатов двух последних параграфов

фов мы могли бы довольно много узнать о $k(x, y, t)$. К сожалению, в настоящее время неизвестно, в какой мере эти результаты допускают обобщение на эллиптические операторы на векторных расслоениях. Однако некоторые тривиальные факты о волновых фронтах обобщаются на векторные расслоения, а это все, что потребуется для нашего доказательства. Прежде всего нужно обобщить понятие волнового фронта на сечения векторных расслоений.

Определение. Пусть μ — обобщенное сечение векторного расслоения E. Точка (x, ξ) принадлежит волновому фронту для μ, если для некоторого гладкого сечения s дуального расслоения она принадлежит волновому фронту для $\langle \mu, s\rangle$.

Пусть, далее, D: $C_0^\infty(E) \to C^\infty(E)$ — псевдодифференциальный оператор. Будем говорить, что D эллиптичен в точке (x, ξ), если отображение $\sigma(D)(x, \xi)$ биективно. Мы утверждаем, что имеет место

Лемма 8.3. *Если $D\mu$ — гладкое сечение и оператор D эллиптичен в точке (x, ξ), то сечение μ гладкое в точке (x, ξ), т. е. $(x, \xi) \notin WF(\mu)$.*

Доказательство в точности повторяет доказательство предложения 6.6. А именно, ввиду эллиптичности можно построить такой псевдодифференциальный оператор Q, что оператор $QD - I$ гладкий в точке (x, ξ).

Применяя эту лемму к двум уравнениям (8.16), которым удовлетворяет k, получаем следующее утверждение.

Лемма 8.4. *Если $(x, \xi, y, \eta, t, \tau) \in WF(k)$, то*

$$\tau = \gamma_j(x, \xi) = \gamma_k(y, \eta), \tag{8.17}$$

где $\gamma_j(x, \xi)$ — собственное значение $\sigma(\sqrt{\Box})(x, \xi)$ и $\gamma_k(y, \eta)$ — собственное значение $\sigma(\sqrt{\Box})(y, \eta)$.

Ввиду эллиптичности $\gamma_j(x, \xi)$ и $\gamma_k(y, \eta)$ больше нуля при $\xi \neq 0$ или $\eta \neq 0$; поэтому из леммы 8.4 следует

Предложение 8.3. *Если $(x, \xi, y, \eta, t, \tau) \in WF(k)$, то $\tau \neq 0$.*

В качестве следствия получаем

Предложение 8.4. *При $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ оператор*

$$\int \rho(t) \exp \sqrt{-1}\, t \sqrt{\Box}\, dt \tag{8.18}$$

сглаживающий.

Доказательство. Ядро Шварца оператора (8.18) получается из $\rho(t) k(x, y, t)$ опусканием относительно π: $X \times X \times \mathbf{R} \to X \times X$.

В силу результатов § 3 волновой фронт этого опускания содержится в множестве таких (x, ξ, y, η), что $(x, \xi, y, \eta, t, 0) \in \in WF(\rho k)$. Однако по предложению 8.3 это множество пусто, т. е. $\pi_* \rho k$ — гладкое отображение.

Рассматривая композицию (8.18) с f^*, мы видим, что оператор

$$\int \rho(t) \left(\exp \sqrt{-1}\, t \sqrt{\Box}\right) f^*\, dt \tag{8.19}$$

сглаживающий. Теперь доказательство формулы Атья — Ботта получается по плану, изложенному в § 2, а именно, мы рассматриваем след (8.19) как распределение на $C_0^\infty(\mathbf{R})$ и замечаем, что, как и в § 2, альтернированная сумма следов (8.19) равна альтернированной сумме следов на гомологиях. Проведение доказательства во всех подробностях мы предоставляем читателю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Наймарк М. А. Унитарные представления классических групп. — Тр. Матем. ин-та АН СССР, **36** (1950), 1—288.
2. Atiyah M. F., Bott R. — *Ann. of Math.* (2), **86** (1967), 374—407.
3. Sato M. — Conf. on Functional Analysis and related topics (Tokyo, April 1969), Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1970, pp. 91—94.
4. Hörmander L. — *Acta Math.*, **127** (1971), 79—183. [Имеется перевод: сб. Математика, **16** : 1 (1972), 17—61; **16** : 2 (1972), 67—136.]
5. Гельфанд И. М., Граев М. И., Шапиро З. Я. — *Функц. анализ и прилож.*, **3** : 2 (1969), 24—40.
6. Helgason S. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 435—446.
7. Gabor A. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, **170** (1972), 239—244.
8. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1958.
9. Duistermaat J. J., Hörmander L. — *Acta Math.*, **128** (1972), 183—269.
10. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. Пер. с англ. — М.: Мир, 1964.
11. Seeley R. T. Singular integrals (Proc. Sympos. Pure Math., Chicago, Ill., 1966). — Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1967, 288—307.
12. Warner F. W. Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. — Scott, Foresman, Glenview, Ill., 1971.
13. Duistermaat J. J., Guillemin V. — *Invent. Math.*, **29** (1975), 39—80.
14. Chazarain J. — *Invent. Math.*, **24** (1974), 65—82.
15. Colin de Verdeère Y. — *Compositio Math.*, **27** (1973), 159—184.
16. Кириллов А. А. — *Функц. анализ и прилож.*, **1** : 4 (1967), 84—85.
17. Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 1. Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1948.
18. Wallach N. Harmonic analysis on homogeneous spaces. — Dekker, New York, 1973.
19*. Guilemin V., Sternberg S. — *Amer. J. Math.*, **101** (1979), № 4, 915—955.
20*. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — М.: Физматгиз, 1962.
21*. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г. — *Функц. анализ и прилож.*, **11** : 3 (1977), 12—19.
22*. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Шапиро З. Я. — *Функц. анализ и прилож.*, **13** : 2 (1979), 11—31.
23*. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространствах. Современные проблемы математики (Итоги науки и техники). — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1980.

Приложение к главе VI

§ 1. Пусть G — группа Ли, dg — мера Хаара на G и f — гладкая функция с компактным носителем на G. Если задано унитарное представление U: $g \longmapsto U(g)$ группы G в гильбертовом пространстве H, то определим на H ограниченный оператор U_f формулой

$$U_f = \int U(g) f(g)\, dg. \tag{A1.1}$$

Пусть $\hat{G}$ — множество неприводимых унитарных представлений группы G. Формула (A1.1) ставит в соответствие функции f (операторнозначную) функцию $\hat{f}$ на $\hat{G}$, а именно $\hat{f}(U) = U_f$. Основной проблемой гармонического анализа на группах Ли является проблема восстановления f по $\hat{f}$, или, другими словами, обращения теоретико-группового «преобразования Фурье». Оказывается, если формула обращения существует, то она имеет довольно специальный вид.

Чтобы уяснить, каков этот вид, рассмотрим простой случай, когда группа G *конечна*. Пусть $L(G)$ — пространство комплекснозначных функций на G; $L(G)$ является алгеброй относительно свертки. Левое регулярное действие G на $L(G)$ оставляет инвариантной билинейную форму

$$(f_1, f_2) = \sum_{g \in G} f_1(g) \bar{f}_2(g);$$

поэтому $L(G)$ можно разложить в прямую сумму неприводимых унитарных представлений группы G:

$$L(G) = \sum m_i V^i. \tag{A1.2}$$

(*Обозначения*: G действует на V^i как унитарное представление U^i, а m_i — кратность, с которой U^i входит в регулярное представление.) Пусть, далее, $f \in L(G)$ и L_f — действие f на $L(G)$ при помощи свертки. Из (A1.2) получаем

$$\operatorname{tr} L_f = \sum m_i \operatorname{tr} (L_f \mid_{V_i}).$$

Пусть r — мощность G. Нормированная мера Хаара на G — это число точек, деленное на r, т. е. $L_f \mid_{V_i} = r U_f^i$ по (A1.1). Итак, мы можем переписать нашу формулу в виде

$$\operatorname{tr} L_f = \sum r m_i \operatorname{tr} U_f^i = \sum r m_i \chi^i(f), \tag{A1.3}$$

где $\chi^i(f)$ — по определению, *характер представления* U^i. С другой стороны, $L_f = \sum\limits_{g \in G} f(g) L_g$ и $\operatorname{tr} L_g = r$ или 0, в зависимости от того, $g = e$ или $g \neq e$. Итак, из (A1.3) получаем

$$f(e) = \sum m_i \chi^i(f). \tag{A1.4}$$

Это так называемая *формула Планшереля* для группы G. Если применить ее к функции $L_a^* f$, левому сдвигу f на элемент $a \in G$, то получится эквивалентная формула

$$f(a) = \sum m_i \operatorname{tr}\left(U_f^i U^i(a)^*\right). \qquad (A1.5)$$

Эта формула решает проблему обращения преобразования Фурье, явно выражая f через $\hat{f}$.

Эти результаты приводят нас к стандартной форме проблемы обращения преобразования Фурье для групп Ли: найти такую меру μ на пространстве $\hat{G}$ (классов эквивалентности) неприводимых унитарных представлений группы G, чтобы для каждой функции $f \in C_0^\infty(G)$

$$f(e) = \int_{\xi \in \hat{G}} \chi^\xi(f)\, d\mu(\xi), \qquad (A1.6)$$

где $\chi^\xi(f) = \operatorname{tr} U_f^\xi$. Мера μ называется *мерой Планшереля* группы G. В рассмотренном выше примере она представляет собой кратность, с которой представление ξ входит в левое регулярное представление. Приведем несколько примеров реализации формулы (A1.6) (некоторые из них наверняка хорошо известны читателю в других обличьях).

Пример 1. $G = \mathbf{R}^n$. Неприводимые унитарные представления группы G все одномерны и имеют вид $x \longmapsto e^{-i\langle x, \xi\rangle}$, где $\xi \in (\mathbf{R}^n)^*$. Преобразование Фурье функции f — это ее обычное преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x)\, e^{-i\langle x, \xi\rangle}\, dx,$$

а (A1.6) — обычная формула обращения для преобразования Фурье

$$f(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

с мерой Планшереля $d\xi/(2\pi)^n$.

Пример 2. $G = T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ — стандартный n-тор. Все неприводимые унитарные представления группы G одномерны и имеют вид $x \longmapsto e^{-2\pi i\langle x, k\rangle}$, где $k \in \mathbf{Z}^n$. Формула Планшереля принимает вид

$$f(0) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \hat{f}(k), \quad \hat{f}(k) = \int_{T^n} f e^{-2\pi i\langle x, k\rangle}\, dx,$$

т. е. это стандартная формула обращения для рядов Фурье. На этот раз мера Планшереля — это мера на $\mathbf{Z}^n$, равная числу точек в множестве.

Пример 3. $G = H^n$ — группа Гейзенберга размерности $2n+1$. Эта группа, рассматриваемая как многообразие, представляет собой $\mathbf{R}^{2n+1}$ с координатами $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ и t; левоинвариантные векторные поля на этой группе — это поля

$$\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \eta_i = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \zeta = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{A1.7}$$

Они удовлетворяют стандартным условиям коммутации Гейзенберга: $[\eta_i, \xi_j] = \delta_{ij}\zeta$. У группы G имеются унитарные неприводимые представления двух видов.

I. Одномерные представления. Они получаются из представлений факторгруппы $H^n/\mathbf{R} \cong \mathbf{R}^{2n}$, $\mathbf{R} \cong \exp t\zeta$, которые идентичны представлениям, описанным в примере 1.

II. Однопараметрическое семейство бесконечномерных представлений, по одному представлению для каждого $\tau \in \mathbf{R} - \{0\}$. Все эти представления реализуются в пространстве $L^2(\mathbf{R}^n)$, и операторы представления имеют вид

$$(x, y, t) \longmapsto e^{i\tau(x \cdot q + t + x \cdot y/2)} T_y^*. \tag{A1.8}^\tau$$

Здесь $q_1, \ldots, q_n$ — стандартные координаты в $\mathbf{R}^n$, а T_y — сдвиг на y. При этом ξ_i оказываются представленными умножениями на $\sqrt{-1}\tau q_i$, η_i — операторами $\partial/\partial q_i$, а ζ — умножением на $\sqrt{-1}\tau$. Эти представления (представления Стоуна — фон Неймана) обсуждались в гл. V. Для получения формулы Планшереля заметим вначале, что если мы сделаем частичное преобразование Фурье по переменным x, t, не меняя y, то, согласно (A1.7), векторные поля ξ_i, η_i и ζ преобразуются в операторы $\sqrt{-1}(\xi_i + \tau y_i)$, $\partial/\partial y_i$, $\sqrt{-1}\tau$, где τ и ξ — дуальные переменные к t и x. Эти операторы с точностью до констант совпадают с образами ξ_i, η_i и ζ в представлении Стоуна — фон Неймана с параметром τ. Переформулируем это, рассмотрев унитарное отображение $L^2(\mathbf{R}^{2n+1}) \to L^2(\mathbf{R}^{2n+1})$, задаваемое частичным преобразованием Фурье по переменным x, t. Это отображение разлагает $L^2(\mathbf{R}^{2n+1})$ в «прямой интеграл» неприводимых представлений:

$$L^2(\mathbf{R}^{2n+1}) \cong \int H_{\xi, \tau} d\xi\, d\tau. \tag{A1.9}$$

Здесь $H_{\xi,\tau}$ — копия $L^2(\mathbf{R}^n)$ и представление группы Гейзенберга в нем изоморфно представлению Стоуна — фон Неймана с параметром τ. Разложение (A1.9) называется «разложением Планшереля» $L^2(H^n)$.

Чтобы получить формулу Планшереля, запишем обычную формулу обращения для преобразования Фурье в виде

$$f(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int \tilde{f}(\xi, 0, \tau)\; d\xi\, d\tau, \tag{A1.10}$$

где $\tilde{f}(\xi, y, \tau)$ — частичное преобразование Фурье f по x и t. Мы покажем, что (A1.10) — это фактически формула Планшереля для

H^n. Чтобы сделать это, мы должны вычислить след U_f^τ для представления (A1.8)$^\tau$. Интегрируя (A1.8)$^\tau$, получаем для U_f^τ выражение

$$\int e^{i\tau(x\cdot q+t+x\cdot y/2)}T_y^* f(x,\ y,\ t)\,dx\,dy\,dt,$$

или

$$\int \tilde{f}\left(\tau\left(q+\frac{y}{2}\right),\ y,\ \tau\right)T_y^*\,dy.$$

Покажем, что этот оператор является интегральным оператором с гладким ядром. По определению, этот оператор, примененный к функции $g=g(q)$, равен

$$\int \tilde{f}\left(\tau\left(q+\frac{y}{2}\right),\ y,\ \tau\right)g(q+y)\,dy,$$

или

$$\int \tilde{f}\left(\tau\left(\frac{y+q}{2}\right),\ y-q,\ \tau\right)g(y)\,dy,$$

и, как и утверждалось, этот оператор имеет гладкое ядро

$$\tilde{f}\left(\tau\left(\frac{y+q}{2}\right),\ y-q,\ \tau\right). \tag{A1.11}$$

Для вычисления его следа положим $y=q$ и проинтегрируем (A1.11) по y. Это дает

$$\operatorname{tr} U_f^\tau=\int \tilde{f}(\tau y,\ 0,\ \tau)\,dy=\tau^{-n}\int \tilde{f}(y,\ 0,\ \tau)\,dy. \tag{A1.12}$$

Поэтому (A1.10) можно переписать в виде

$$f(0)=\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int \operatorname{tr} U_f^\tau \tau^n\,d\tau, \tag{A1.13}$$

а это и есть формула Планшереля; в частности, мера Планшереля для H^n равна $\tau^n\,d\tau/(2\pi)^{n+1}$. Заметим, что в формулу Планшереля входят лишь представления типа II.

Пример 4. G — компактная группа Ли. Теорема Петера — Вейля утверждает, что все неприводимые представления G конечномерны и что регулярное представление в $L^2(G)$ разлагается в прямую сумму неприводимых:

$$L^2(G)=\sum m_i H^i,$$

где каждое представление H^i входит с кратностью $m_i=\dim H^i$. (Доказательство теоремы Петера — Вейля см. в [18].) Формула Планшереля в этом случае совпадает с формулой Планшереля для конечных групп, а именно

$$f(e)=\sum m_i\chi^i(f),$$

где $\chi^i(f)$ — значение на f характера представления H^i.

Мы закончим эти общие замечания, отметив, что формула Планшереля для нильпотентных групп Ли, основанная на «методе орбит» из гл. V, была получена А. А. Кирилловым [16]. Оставшаяся часть этого приложения будет посвящена доказательству формулы Планшереля для некоторых некомпактных полупростых групп. Результаты, которые мы описываем, были получены независимо Хариш-Чандрой и Гельфандом — Наймарком в начале пятидесятых годов. Подход, принятый здесь, в основном следует работам Гельфанда — Наймарка.

§ 2. Нам нужно договориться о некоторых обозначениях и привести некоторые элементарные факты о полупростых группах Ли. Пусть G — полупростая группа Ли и K — ее максимальная компактная подгруппа. Тогда существуют векторная группа A и нильпотентная группа N, содержащиеся в G и такие, что отображение умножения $K\times A\times N\to G$ — диффеоморфизм. Это *разложение Ивасавы* группы G (см. [18]). Пусть M — централизатор A в K и $B=MAN$. Тогда B называется *борелевской* подгруппой в G. Факторгруппа $G/B=K/M$ компактна. Пример, который можно все время иметь в виду, — это $SL(n, \mathbf{C})$. В этом примере $K=$ $=SU(n)$, N — группа треугольных матриц с единицами на диагонали, A — группа диагональных матриц с положительными вещественными элементами, M — группа диагональных матриц с элементами, по модулю равными единице, и B — группа треугольных матриц.

Поскольку группа MA — произведение компактной и абелевой групп, все ее неприводимые унитарные представления конечномерны. Пусть $\sigma\in\widehat{MA}$ — такое представление. Тогда σ можно продолжить до представления группы B при помощи гомоморфизма $B\to B/N=MA$, а затем индуцировать представление G (см. § 2 гл. VI). Представления G, полученные таким образом, называются представлениями *основной серии*. Как мы увидим ниже, для комплексных групп только такие представления входят в формулу Планшереля.

В § 5 нам потребуются элементарные факты об алгебре Ли группы G. Обозначим через $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}$ и т. д. алгебры Ли введенных выше подгрупп; напомним, что $\mathfrak{g}$ снабжена невырожденной симметрической квадратичной формой $\langle\ ,\ \rangle$ — формой Киллинга.

Лемма 2.1. $\mathfrak{n}$ — *максимальное изотропное подпространство в* $\mathfrak{g}$ *относительно* $\langle\ ,\ \rangle$, *а аннуляторное пространство для* $\mathfrak{n}$ *совпадает с* $\mathfrak{b}$.

Доказательство этого факта можно найти, например, в [18]. Мы проверим его лишь для $SL(n, \mathbf{C})$. Здесь $\mathfrak{n}$ — алгебра верхних треугольных матриц с нулями на диагонали, а $\mathfrak{b}$ — алгебра верхних треугольных матриц; таким образом, если $A\in\mathfrak{n}$ и $B\in\mathfrak{b}$, то

$AB \in \mathfrak{n}$ и $\mathrm{tr}\, AB = 0$. Это показывает, что $\mathfrak{n}$ изотропно и что $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{n}^{\perp}$. Поскольку $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{b} = \dim \mathfrak{n}$, то $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}^{\perp}$, как и утверждалось.

§ 3. В этом параграфе мы опишем «F_f-формализм» Хариш-Чандры, который, по-видимому, является существенной составной частью всех доказательств формулы Планшереля. Вначале напомним основные факты, доказанные ранее о характерах индуцированных представлений. Пусть пока G — произвольная связная группа Ли, dg — мера Хаара на ней, B — замкнутая компактная подгруппа в G и $X = G/B$.

1. Пусть U: $g \longmapsto U(g)$ — представление группы G, индуцированное с B. Тогда для $f \in C_0^{\infty}(G)$ оператор $U_f = \int U(g) f(g)\, dg$ является оператором Гильберта — Шмидта и $f \longmapsto \mathrm{tr}\, U_f$ — распределение на G.

Это распределение и называется *характером* U.

2. Предположим, что B обладает следующим свойством: существует такой элемент $\xi \in \mathfrak{b}$, что $\mathrm{ad}(\xi)$: $\mathfrak{g}/\mathfrak{b} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$. Тогда для каждого U, индуцированного с B, его характер локально является функцией из L^1 на G[1]).

3. Пусть L_g: $X \to X$ — левое действие g на X. Элемент g называется *регулярным*, если L_g — отображение Лефшеца. Пусть σ — представление B, E^{σ} — индуцированное векторное расслоение на X, $L_g^{\#}$ — индуцированное действие g на E^{σ} и χ — характер соответствующего индуцированного представления. Тогда ограничение χ на множество регулярных элементов G есть гладкая функция, которая выражается формулой

$$\chi(g) = \sum_{gx = x} \frac{\mathrm{tr}\, L_g^{\#}\colon E_x^{\sigma} \to E_x^{\sigma}}{|\, I - (dL_g)_x \,|}. \tag{A3.1}$$

4. Пусть F: $G \times X \to X \times X$ — отображение $(g, x) \longmapsto (x, gx)$. Пусть $Z = F^{-1}(\Delta)$ и π: $Z \to G$ — ограничение на Z проекции $G \times X$ на G. Тогда для заданного представления σ группы B существует каноническая гладкая мера μ_{σ} на Z, зависящая только от σ, для которой

$$\chi_{\sigma} = \pi_* \mu_{\sigma}, \tag{A3.2}$$

где χ_{σ} — характер представления, индуцированного представлением σ. При $\sigma = 0$ мера μ_0 строится следующим образом. Если $z = (g, x)$ принадлежит Z, то должно быть $gx = x$. Значит, dF_z отображает $T_g \oplus T_x$ на $T_x \oplus T_x$. Отождествляя нормальное пространство к диагонали в (x, x) с T_x при помощи отображения

---

[1]) Характеры первоначально определяются как обобщенные *плотности*; однако ввиду наличия меры Хаара можно не различать функции и плотности.

$(v, -v) \longmapsto v$, получаем точную последовательность

$$0 \to T_zZ \to T_g \oplus T_x \to T_x \to 0,$$

и стандартный функториальный прием приводит к каноническому отождествлению $|\Lambda| T_zZ \cong |\Lambda| T_g$. Плотность μ_0 в z — это плотность из левого множества, соответствующая мере Хаара из правого. Для произвольного представления σ группы B пусть h_σ — функция

$$h_\sigma(z) = h_\sigma(g, x) = \operatorname{tr} L_g^{\#}\colon E_x^\sigma \to E_x^\sigma. \tag{A3.3}$$

Тогда для μ_σ имеет место формула

$$\mu_\sigma = h_\sigma \mu_0. \tag{A3.4}$$

Доказательства утверждений 1—4 можно найти в § 2 гл. VI. А теперь вернемся к интересующему нас случаю полупростой группы Ли G. Пусть B — борелевская подгруппа, а K, A, M и N — как в § 2; $\widehat{MA}$ — множество всех классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений MA; элементы $\widehat{MA}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с представлениями основной серии. Рассмотрим следующую диаграмму отображений:

$$\begin{tikzcd} & B \times K \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ MA & & G \end{tikzcd} \tag{A3.5}$$

где π — композиция двух проекций $B \times K \to B$, $B \to B/N = MA$ и ρ — отображение $(b, k) \longmapsto kbk^{-1}$ Заметим, что ρ — собственное, а π — расслаивающее отображение. Основной результат этого параграфа состоит в следующем.

Теорема 3.1. *Существует гладкая не обращающаяся в нуль мера ν на $B \times K$ со следующими свойствами:*

(i) *ν инвариантна относительно K;*

(ii) *для заданной $f \in C_0^\infty(G)$ пусть $F_f = \pi_* \rho^* f\nu$; тогда характер σ на элементах MA и характер χ_σ соответствующего индуцированного представления связаны соотношением*

$$\chi_\sigma(f) = \int_{MA} \sigma(m\,a) F_f. \tag{A3.6}$$

Доказательство. Рассмотрим главное M-расслоение $K \xrightarrow{\varkappa} K/M = X$. Пусть $F_1\colon G \times K \to X \times X$ — отображение

$$G \times K \xrightarrow{\varkappa} G \times X \xrightarrow{F} X \times X,$$

и пусть $Z_1=\varkappa^{-1}(Z)=F_1^{-1}(\Delta)$. Тогда $Z_1 \xrightarrow{\varkappa} Z$ — главное M-расслоение над Z. Пусть μ_0 — мера (А3.2) и μ_1 — единственная M-инвариантная мера на Z_1, для которой $\varkappa_*\mu_1=\mu_0$. Пусть π_1 — ограничение на Z_1 проекции $G\times K$ на G. Поскольку $\pi_1=\pi\circ\varkappa$, (А3.2) можно переписать в виде

$$\chi_0=(\pi_1)_*\,\mu_1. \tag{А3.7}$$

Сделаем теперь тривиальное замечание, которое является, по существу, основным шагом в доказательстве теоремы 3.1. Пусть Φ: $G\times K\to G\times K$ — отображение $(g,\ k)\longmapsto(kgk^{-1},\ k)$. Мы утверждаем, что Φ диффеоморфно отображает $B\times K$ на Z_1. Действительно, взяв композицию Φ с F_1, получим $F_1\circ\Phi(g,\ k)=F_1(kgk^{-1},\ k)=(\overline{k},\ \overline{kg})$, где $\overline{k}$ и $\overline{kg}$ — образы k и kg в G/B. При этом $\overline{k}=\overline{kg}$ тогда и только тогда, когда $g\in B$; значит, $(F_1\circ\Phi)^{-1}(\Delta)=\Phi^{-1}(Z_1)=B\times K$. Итак, Φ отображает $B\times K$ на Z_1, что и утверждалось.

Заметим, далее, что $\pi_1\circ\Phi(b,\ k)=kbk^{-1}=\rho(b,\ k)$; поэтому если мы положим $\nu=\Phi^*\mu_1$, то сможем переписать (А3.7) как

$$\chi_0=\rho_*\nu. \tag{А3.8}$$

Ясно, что ν — гладкая не обращающаяся в нуль мера на $B\times K$. Мы утверждаем, что она инвариантна относительно K. Чтобы убедиться в этом, возьмем $a\in K$. С a связаны следующие диффеоморфизмы:

1) на G: $g\longmapsto aga^{-1}$;
2) на Z: $(g,\ x)\longmapsto(aga^{-1},\ ax)$;
3) на Z_1: $(g,\ k)\longmapsto(aga^{-1},\ ak)$;
4) на $B\times K$: $(b,\ k)\longmapsto(b,\ ak)$.

Мы предоставляем читателю проверить, что эти диффеоморфизмы коммутируют с π_1, $\varkappa$, ρ и т. д. Поскольку χ_0 — характер и K действует на G присоединенным представлением, χ_0 является K-инвариантным. Отсюда следует, что μ_0, μ_1 и ν также K-инвариантны, что и требовалось доказать.

Теперь найдем формулу, аналогичную (А3.8), для индуцированных характеров с нетривиальными $\sigma\in\widehat{MA}$. Рассмотрим отображение $\varkappa\circ\Phi$: $B\times K\to Z$. Пусть h_σ — функция (А3.3) и $\tilde{h}_\sigma$ — ее поднятие на $B\times K$. Мы утверждаем, что $\tilde{h}_\sigma=\pi^*\sigma$, где π — левое отображение в диаграмме (А3.5). Действительно, $\tilde{h}_\sigma(b,\ k)=h_\sigma(kbk^{-1},\ x)$, где x — образ k в $X=G/B$. Значит,

$$\tilde{h}_\sigma(b,\ k)=\operatorname{tr}\left(L^{\#}_{kbk^{-1}}\colon\ E^\sigma_x\to E^\sigma_x\right)=\operatorname{tr}\left(L^{\#}_b\colon\ E^\sigma_0\to E^\sigma_0\right)=\sigma(b),$$

как и утверждалось. Из (А3.4) и (А3.2) выводим формулу

$$\chi_\sigma=\rho_*(\pi^*\sigma)\,\nu. \tag{А3.9}$$

Применяя χ_σ к $f \in C_0^\infty(G)$, получаем

$$\chi_\sigma(f) = \int\limits_{B \times K} \pi^* \sigma \rho^* f \nu = \int\limits_{MA} \sigma \pi_* \rho^* f \nu = \int\limits_{MA} \sigma F_f,$$

а это и есть доказываемая нами формула (А3.6).

§ 4. Переходим к основной части доказательства формулы Планшереля. Это формула обращения, данная И. М. Гельфандом, для некоторых типов обобщенных преобразований Радона. Пусть

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ Y & & X \end{tikzcd}$$

— диаграмма гладких многообразий и отображений, причем π — расслаивающее отображение, а ρ — собственное. Пусть ν — гладкая нигде не обращающаяся в нуль плотность на Z. Определим

$$R\colon\ C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(|\wedge| Y),$$

полагая $Rf = \pi_* \rho^* f \nu$. Нам хотелось бы для функций $f \in C_0^\infty(X)$ уметь находить f, если известно Rf, или, более геометрически, для данной точки $x_0 \in X$ находить значение f в точке x_0 через интегралы f по слоям расслоения $Z \xrightarrow{\pi} Y$. Ниже будут описаны некоторые предположения, при которых это можно сделать.

Предположим, что существуют такие функции $\varphi \in C^\infty(X)$ и ψ, $\theta \in C^\infty(Y)$, что выполняются следующие условия.

Аксиома I. $\pi^* \psi = \rho^* \varphi$.

Аксиома II. Плотность $\rho_*(\pi^* \theta \nu)$ принадлежит $C^\infty(|\wedge| X)$ и отлична от нуля в x_0.

Аксиома III. φ имеет невырожденную критическую точку в x_0. Тогда, полагая $\mu = \rho_*(\pi^* \theta \nu)$, получаем

$$\int e^{i\lambda\varphi} f\, d\mu = \int\limits_Z e^{i\lambda\rho^*\varphi} \rho^* f \pi^* \theta\, d\nu =$$

$$= \int\limits_Z e^{i\lambda\pi^*\psi} \pi^* \theta \rho^* f\, d\nu = \int\limits_Y e^{i\lambda\psi} \theta \{\pi_* \rho^* f\, d\nu\},$$

где λ — большой вещественный параметр. Сравнивая две части этого равенства, получаем формулу

$$\int\limits_X e^{i\lambda\varphi} f\, d\mu = \int\limits_Y e^{i\lambda\psi} \theta R f. \tag{A4.1}$$

Если носитель f достаточно мал, то применение метода стационарной фазы к левой части (А4.1) определяет f в x_0, а правая часть зависит только от Rf, поэтому мы получили нужную формулу.

§ 5. Мы выведем формулу Планшереля, применяя (A4.1) к диаграмме (A3.5) для плотности ν, фигурирующей в теореме 3.1. Для этого нам придется сделать довольно сильные предположения о регулярности индуцированных характеров группы G. К сожалению, эти предположения выполняются только для комплексных полупростых групп и лишь небольшого числа типов вещественных полупростых групп.

Рассмотрим характер χ_0 группы G, индуцированный с тривиального представления группы B. Мы уже знаем, что χ_0 локально — функция из L^1, гладкая на множестве регулярных точек группы G. Кроме того, из формулы (A3.1) следует, что она положительна в регулярной точке g, если L_g: $G/B \to G/B$ имеет хотя бы одну неподвижную точку. Рассмотрим теперь случай, когда G — *комплексная* полупростая группа, например $G = SL(n, \mathbf{C})$. Пусть $G^{\#}$ — множество регулярных точек группы G. Тогда $G - G^{\#}$ имеет вещественную коразмерность 2 в G, т. е. множество $G^{\#}$ связно. Поэтому для $g_1 \in G^{\#}$ и $g_2 \in G^{\#}$ операторы L_{g_1} и L_{g_2} имеют одинаковое число неподвижных точек и характер χ_0 положителен на $G^{\#}$. В частности, $\alpha = 1/\chi_0$ — корректно определенная гладкая функция на $G^{\#}$. Нам потребуется следующая

Лемма 5.1. *Функция α продолжается до непрерывной функции на G, и ограничение α на B — гладкая функция, являющаяся поднятием гладкой функции θ на B/N.*

Доказательство этой леммы требует существенного использования техники групп Ли; поэтому мы ограничимся здесь доказательством для случая $SL(n, \mathbf{C})$. Пусть A — элемент $SL(n, \mathbf{C})$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — комплексные собственные значения A. Элемент A принадлежит $G^{\#}$ тогда и только тогда, когда все λ_i различны. По формуле (A3.1) (см. также формулу (2.3) из § 2 гл. VI и обсуждение вслед за предложением 2.2) значение характера χ_0 в точке A равно

$$\frac{1}{\chi_0(A)} = \frac{1}{n!} \prod_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|. \tag{A5.1}$$

Выражение $\prod\limits_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)$ — это симметрический полином от $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_n$, поэтому его можно записать как полиномиальную функцию от коэффициентов характеристического полинома A, а значит, как гладкую функцию $p(A)$ от A. Согласно (A5.1), $1/\chi_0(A) = |p(A)|$ — корректно определенная непрерывная функция на G. На B каждую матрицу можно однозначно представить в виде произведения нильпотентной матрицы и диагональной матрицы с элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на диагонали; таким образом, на B мы можем записать (A5.1) как

$$\frac{1}{n!}\prod_{i<j}|\lambda_i-\lambda_j|^2,$$

а это и есть гладкая функция от $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, определенная на $B/N=MA$. Тем самым лемма 5.1 для $SL(n, \mathbf{C})$ доказана. Чтобы применить формулу обращения из § 4 к диаграмме

$$\begin{tikzcd} & B\times K \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ MA & & G \end{tikzcd}$$

мы должны найти функции $\varphi\in C^\infty(G)$ и ψ, $\theta\in C^\infty(MA)$, удовлетворяющие аксиомам I, II и III. В качестве θ мы можем взять функцию θ из леммы 5.1. Действительно, для функции $\alpha=1/\chi_0$ имеем $\alpha(kbk^{-1})=\alpha(b)$; значит, $\pi^*\theta=\rho^*\alpha$ и

$$\rho_*(\pi^*\theta)\nu=\alpha\rho_*\nu=\alpha\chi_0\,dg=dg. \tag{A5.2}$$

Построим φ и ψ следующим образом. Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$ и т. д. — алгебры Ли групп G, B, N и т. д. Пусть $\langle\ ,\ \rangle$ — форма Киллинга на $\mathfrak{g}$. Она невырожденна и инвариантна относительно действия Ad на G. Кроме того, $\mathfrak{n}$ — максимальное изотропное подпространство в $\mathfrak{g}$ относительно $\langle\ ,\ \rangle$, а аннуляторное пространство для $\mathfrak{g}$ — это $\mathfrak{b}$ (по лемме 3.1). Пусть φ^0: $\mathfrak{g}\to\mathbf{R}$ — квадратичная функция $x\mapsto\langle x, x\rangle$. Экспоненциальное отображение exp: $\mathfrak{g}\to G$ диффеоморфно отображает окрестность нуля на окрестность $\mathscr{O}$ точки e. Пусть φ — функция на $\mathscr{O}$, соответствующая функции φ^0 на $\mathfrak{g}$. Функция φ имеет невырожденную критическую точку в e, поскольку φ^0 имеет невырожденную критическую точку в 0. Имеет место следующая

Лемма 5.2. $\rho^*\varphi$ *постоянна на слоях* π.

Доказательство. K действует на $K\times B$ левым умножением (на K) и действует на G присоединенным действием. Отображение ρ сплетает эти два действия, а exp сплетает присоединенные действия на G и $\mathfrak{g}$; таким образом, $\rho^*\varphi$ принимает одинаковые значения в (k, b) и (e, b). Поэтому нам надо только показать, что ограничение φ на B постоянно на слоях расслоения $B\to B/N$. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{b} \arrow[r, "\exp"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ \mathfrak{b}/\mathfrak{n} \arrow[r, "\exp"] & B/N \end{tikzcd}$$

коммутативна; поэтому для того, чтобы доказать постоянство φ на слоях $B \to B/N$, достаточно доказать постоянство φ^0 на слоях $\mathfrak{b} \to \mathfrak{b}/\mathfrak{n}$. Но $\varphi^0(b+n) = \langle b+n,\ b+n \rangle = \langle b,\ b \rangle = \varphi^0(b)$, поскольку b ортогонален n. Доказательство окончено.

Поскольку ограничение формы $\langle\ ,\ \rangle$ на $\mathfrak{b}$ имеет $\mathfrak{n}$ своим аннуляторным пространством, эта форма индуцирует невырожденную квадратичную функцию ψ^0 на $\mathfrak{b}/\mathfrak{n}$. Пусть ψ — продолжение этой функции на B/N при помощи экспоненциального отображения. Мы доказали, что

$$\pi^*\psi = \rho^*\varphi, \tag{A5.3}$$

т. е. φ и ψ удовлетворяют аксиоме I. Заметим, что ψ также имеет невырожденную критическую точку в единице; этот факт нам сейчас пригодится.

Теперь рассмотрим формулу (A4.1) применительно к диаграмме

$$\begin{array}{ccc} & B \times K & \\ {}^{\pi}\swarrow & & \searrow^{\rho} \\ MA & & G \end{array}$$

взяв в качестве ν нашу фиксированную плотность на $B \times K$, а φ, ψ и θ — как в (A5.2) и (A5.3). Комбинируя формулы (A3.6) и (A4.1), получаем

$$\int_G e^{i\lambda\varphi(g)} f(g)\, dg = \int_{MA} e^{i\lambda\psi}\theta(ma) F_f(ma). \tag{A5.4}$$

Применим метод стационарной фазы к обеим частям (A5.4). Главный член слева с точностью до некоторых постоянных множителей равен $\lambda^{-n/2} f(e)$, где n — вещественная размерность G. Главный член справа имеет порядок $\lambda^{-k/2}$, где k — вещественная размерность MA. Однако, поскольку $k < n$, этот член должен обратиться в нуль, так же как и все члены в разложении по методу стационарной фазы вплоть до порядка l, где $l = (n-k)/2$. Итак, по методу стационарной фазы правая часть дает вклад

$$\lambda^{-n/2} P(D) F_f(e),$$

где $P(D)$ — однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка $2l$. Из (A5.4) выводим формулу

$$f(e) = (P(D) F_f)(e). \tag{A5.5}$$

Пользуясь формулой обращения преобразования Фурье для группы MA и формулой (A3.6) для характера χ_σ, последнюю формулу можно переписать в виде

$$f(e) = c \int_{MA} \chi_\sigma(f) P(\sigma)\, d\sigma. \tag{A5.6}$$

Это и есть формула Планшереля для G.

СОСТАВНЫЕ АСИМПТОТИКИ

§ 0. *Введение*

Пусть V — топологическое векторное пространство. Напомним, что в гл. II мы называли две функции f_1 и f_2 на $\mathbf{R}^+$ со значениями в V *асимптотически равными*, если для всех N имеем $\tau^N (f_1(\tau) - f_2(\tau)) \to 0$ (в топологии V) при $\tau \to \infty$. Класс эквивалентности функций относительно этого отношения эквивалентности был назван *асимптотическим элементом* V. В частности, если $V = C^\infty(X)$, $C^\infty(|\wedge|^{1/2} X)$, $C^\infty(\wedge^{1/2} X)$ и т. д., то говорят об асимптотических функциях, асимптотических полуплотностях, асимптотических полуформах и т. д. на многообразии X. Цель этой главы — развить теорию таких асимптотических объектов на многообразии, параллельную теории распределений, построенной в гл. VI. В частности, мы покажем, что для асимптотических объектов можно определить *частотное множество*, аналогичное волновому фронту для распределений. Вначале мы определим его локально, пользуясь асимптотическим аналогом преобразования Фурье, принадлежащим Лере [1], а затем глобально при помощи интегрирования асимптотик с быстро осциллирующими пробными функциями. Наконец, как и в § 3 гл. VI, мы покажем, что локальное и глобальное определения совпадают.

Аналогом лагранжевых распределений из § 4 гл. VI будет специальный класс асимптотик, называемых *составными асимптотиками*. Чтобы определить их, мы вначале напомним определение лагранжевых распределений. Пусть $\Lambda \subset T^*X$ — однородное лагранжево многообразие с параметризацией

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

так что $\Lambda = \pi_* \varphi^* \Lambda_0$, где Λ_0 — кокасательное пространство в начале $\mathbf{R}$. Тогда лагранжево распределение, ассоциированное с Λ, можно записать в виде

$$\int a(x, \theta, \tau)\, e^{i\tau\varphi(x, \theta)}\, d\theta\, d\tau,$$

где $a(x, \theta, \tau)$ допускает асимптотическое разложение вида

$$a(x, \theta, \tau) \sim \sum_{-\infty}^{m} a_i(x, \theta)\tau^i; \qquad (0.2)$$

при этом x меняется на X, а θ — переменные вдоль слоев Z. Точная формулировка приведена в лемме 4.1 из гл. VI. *Составная асимптотика* — это, грубо говоря, асимптотика вида

$$\int a(x, \theta, \tau) e^{i\tau\varphi} d\theta. \qquad (0.3)$$

Значит, (0.1) получается из (0.3) интегрированием по частотной переменной τ. Оказывается, частотное множество (0.3) лежит в неоднородном лагранжевом многообразии $\Lambda' = \pi_* \varphi^* \Lambda_1$, где Λ_1 — это $\operatorname{graph} dt$ в $T^*\mathbf{R}$, а t — стандартная координата на $\mathbf{R}$.

Простого аналога символического исчисления из § 5 гл. VI для составных асимптотик, по-видимому, не существует, исключая тот случай, когда ограничение на Λ канонической 1-формы α на T^*X является точной формой. Если это не так, но Λ удовлетворяет условиям квантования Бора — Зоммерфельда из § 7 гл. II, то можно развить символическое исчисление для «$\mathbf{Z}$-асимптотик», когда мы рассматриваем последовательности, а не функции, т. е. разрешаем параметру τ принимать только целочисленные значения. Сами условия Бора — Зоммерфельда приобретают в рамках этой главы более простой вид, поскольку мы рассматриваем полуформы, а не полуплотности.

Вторая половина главы посвящена локальной теории составных асимптотик. В § 5 мы изучаем точечное поведение составных асимптотик. В § 6—9 мы изучаем локальное поведение асимптотик, когда фазовые функции удовлетворяют некоторым условиям общего положения. Результаты § 5, по существу, принадлежат И. Н. Бернштейну, а § 6—9 составляют содержание совместной работы Гийемина и Шеффера, которая частично перекрывается с результатами, полученными независимо Дёйстерматом [2] и Арнольдом [3].

§ 1. *Асимптотическое преобразование Фурье*

Напомним, что пространство Шварца $\mathcal{S}$ состоит из функций f на $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющих условиям

$$|x^\alpha D^\beta f| \leqslant C_{\alpha,\beta} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

где $C_{\alpha,\beta}$ — константы, которые могут зависеть от f. Сейчас мы хотим рассмотреть асимптотические элементы пространства $\mathcal{S}$ и с этой целью рассмотрим функции $f\colon \mathbf{R}^+ \to \mathcal{S}$, удовлетворяющие условиям

$$|x^\alpha D_\tau^\beta f(\tau)| \leqslant C_{\alpha,\beta}$$

для некоторых $C_{\alpha,\beta}$ (зависящих от f). Напомним, что мы пользуемся обозначениями

$$(D_\tau)_j = \frac{1}{\tau\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{и} \quad D_\tau^\beta = \left(D_\tau\right)_1^{\beta_1} \ldots \left(D_\tau\right)_n^{\beta_n}.$$

Как обычно, будем считать $f_1\colon \mathbf{R}^+ \to \mathscr{S}$ и $f_2\colon \mathbf{R}^+ \to \mathscr{S}$ эквивалентными, если их разность, *как элемент* $\mathscr{S}$, есть асимптотический нуль; это означает, что

$$\lim_{\tau\to\infty} \tau^N \sup_x \left| x^\alpha D_\tau^\beta (f_1 - f_2) \right| = 0$$

для любых фиксированных α, β и N. Пространство классов эквивалентности будем обозначать через $\mathscr{AS}$ (или $\mathscr{AS}(\mathbf{R}^n)$).

Для любой $f\colon \mathbf{R}^+ \to \mathscr{S}$ определим ее *асимптотическое преобразование Фурье*, полагая

$$\hat{f}(\xi, \tau) = e^{-\pi i n/4}\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{n/2} \int f(x, \tau)\, e^{-i\tau\xi\cdot x}\, dx. \tag{1.1}$$

Напомним, что обычное преобразование Фурье функции $u \in \mathscr{S}$ определяется как

$$\tilde{u}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int u(x)\, e^{-i\xi\cdot x}\, dx.$$

Таким образом, связь между асимптотическим преобразованием Фурье и обычным дается формулой

$$\hat{f}(\xi, \tau) = e^{-\pi i n/4}\tau^{n/2}\tilde{f}(\tau\xi, \tau). \tag{1.2}$$

Заметим, что интегрирование по частям дает

$$\xi^\alpha D_\tau^\beta \hat{f}(\xi, \tau) = e^{-\pi i n/4}\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{n/2} \int x^\beta D_\tau^\alpha f(x, \tau)\, e^{-i\tau\xi\cdot x}\, dx, \tag{1.3}$$

и, значит, $\hat{f}(\cdot, \tau)$ принадлежит $\mathscr{S}$.

Определим обратное преобразование Фурье, полагая

$$\check{g}(x, \tau) = e^{\pi i n/4}\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{n/2} \int g(\xi, \tau)\, e^{i\tau\xi\cdot x}\, d\xi = $$
$$= e^{\pi i n/4}\tau^{n/2}\tilde{g}(\tau x, \tau),$$

где

$$\tilde{g}(x, \tau) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int g(\xi, \tau)\, e^{i\xi\cdot x}\, d\xi$$

— обычное обратное преобразование Фурье. Заметим, что если положить $g(\xi, \tau) = \tilde{f}(\tau\xi, \tau)$, то

$$\tilde{g}(x, \tau) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int \tilde{f}(\tau\xi, \tau)\, e^{i\xi\cdot x}\, d\xi,$$

откуда, полагая $\zeta = \tau\xi$, получаем

$$\tau^{-n}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int \tilde{f}(\zeta, \tau)\, e^{i\zeta\cdot\tau^{-1}x}\, d\zeta = \tau^{-n} f(\tau^{-1}x, \tau)$$

по формуле обращения для преобразования Фурье. Итак, имеем

$$f=(\hat{f})^{\vee}. \tag{1.4}$$

Из (1.3) следует, что если $f\sim 0$, то $\hat{f}\sim 0$, и обратно. Значит, мы можем рассматривать асимптотическое преобразование Фурье как преобразование $\mathcal{AS}(\mathbf{R}^n)\to\mathcal{AS}(\mathbf{R}^{n*})$.

Для любого элемента $[f]\in\mathcal{AS}$ следующим образом определим его носитель. Точка $x\in\mathbf{R}^n$ не принадлежит $\operatorname{supp} f$, если существует такая C^∞-функция b с $b(x)\neq 0$, что $[bf]=0$. Например, если a — это C^∞-функция и $a\in\mathcal{S}$, $a\not\equiv 0$, то $f(x,\tau)=a(\tau x)$ определяет элемент $[f]\in\mathcal{AS}$ с $\operatorname{supp}[f]=\{(0)\}$. Аналогично, если $a\in\mathcal{S}$ и $a(x,\tau)=a(x)$, $a\not\equiv 0$, то (1.2) показывает, что $\operatorname{supp}\hat{a}=\{(0)\}$. Заметим, что не исключен случай, когда

$$\operatorname{supp}[f]=\varnothing \quad \text{и} \quad [f]\neq 0.$$

Пусть, например, $C(x)$ — такая C^∞-функция, что $C(x)=0$ при $|x|\leqslant 1$ и $C(x)\equiv 1$ при $|x|\geqslant 2$; положим

$$f(x,\tau)=C\left(\frac{x}{(\log\tau)^{1/2}}\right)e^{-x^2}.$$

Тогда для любого фиксированного x имеем $f(x,\tau)=0$ при $\log\tau\geqslant|x|^2$, т. е. $\operatorname{supp} f=\varnothing$. С другой стороны, при $\log\tau>4$

$$\left|\sup_x f(x,\tau)\right|\geqslant e^{-\log\tau}=\frac{1}{\tau},$$

и поэтому $[f]\neq 0$.

Отсюда (применяя формулу обращения для асимптотического преобразования Фурье) мы заключаем, что возможен случай, когда $\operatorname{supp}[\hat{f}]=\varnothing$, а $[f]\neq 0$. Более узкое функциональное пространство, в котором такого рода патологий не возникает, мы построим в § 3.

Приведем еще некоторые примеры. Согласно (1.2), $f(x,\tau)=a(x)e^{i\tau\eta\cdot x}$ имеет своим асимптотическим преобразованием Фурье $e^{-\pi in/4}\tau^{n/2}\tilde{a}(\tau(\xi-\eta))$. Значит, $\operatorname{supp}\hat{f}=\{\eta\}$. Предположим, что мы рассматриваем

$$f(x,\tau)=a(x,\tau)e^{i\tau\varphi},\quad a(x,\tau)\sim\sum\frac{a_n(x)}{\tau^n},$$

где в противоположность линейному случаю мы предполагаем, что гессиан $d^2\varphi$ невырожден в каждой точке x. Можно применить метод стационарной фазы к интегралу

$$\hat{f}(\xi,\tau)=e^{-\pi in/4}\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{n/2}\int a(x,\tau)e^{i\tau(\varphi-\xi\cdot x)}\,dx. \tag{1.5}$$

Критические точки функции $\varphi - \xi \cdot x$ — это такие значения x, что

$$d_x\varphi = \xi. \tag{1.6}$$

Для того чтобы дать геометрическую интерпретацию этого равенства, напомним определение преобразования Лежандра (см. Стернберг [4, стр. 162]). Если φ — произвольная функция, определенная на векторном пространстве V, то $d\varphi_x \in T^*V_x$ можно рассматривать как элемент V^* относительно естественного отождествления TV_x с V, а значит, T^*V_x с V^*. Таким образом, φ определяет отображение $\mathscr{L}_\varphi$: $V \to V^*$, называемое *преобразованием Лежандра*, связанным с φ. Предположим, что $\mathscr{L}_\varphi$ — диффеоморфизм (по крайней мере локально). Тогда $\mathscr{L}_\varphi^{-1}$ — снова преобразование Лежандра, связанное с функцией

$$\psi(\xi) = \xi \cdot x - \varphi, \quad x = x(\xi),$$

где $x \in V$ рассматривается как функция от ξ при помощи $\mathscr{L}_\varphi^{-1}$. Действительно,

$$d_\xi\psi = x + \xi \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} - d_x\varphi \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} = x,$$

поскольку $d_x\varphi(x(\xi)) = \xi$. Временно предположим теперь, что $\mathscr{L}_\varphi$ — в самом деле диффеоморфизм. Тогда (1.6) имеет единственное решение и, применяя к интегралу метод стационарной фазы, получаем

$$\hat{f}(\xi, \tau) = b(\xi, \tau)\, e^{-i\tau\psi(\xi)}.$$

Здесь b дается формулой стационарной фазы. Например, $b(\xi, \tau) = \sum b_n(\xi)\tau^{-n}$, где $b_0(\xi) = e^{\pi i \operatorname{sign} H\psi/2} a_0(x(\xi))$ и т. д. Заметим, что если носители всех $a_i(x)$ содержатся в некотором множестве $K \subset \mathbf{R}^n = V$, то носители всех b_j будут содержаться в $\mathscr{L}_\varphi(K)$. Это наводит на мысль, что носитель надо считать лежащим на $\operatorname{graph} \mathscr{L}_\varphi \subset V + V^*$. Для этого мы должны были рассмотреть подмножество в $V + V^*$ (в данном случае подмножество на $\operatorname{graph} \mathscr{L}_\varphi$), проекция которого на V дает $\operatorname{supp} f$, а проекция на V^* дает $\operatorname{supp} \hat{f}$. Мы осуществим это (заменив $V + V^* = T^*V$ на T^*M, где M — произвольное многообразие, а функции — на полуплотности) в следующем параграфе. Отметим также, что проведенный анализ указывает на возможное обобщение понятия преобразования Лежандра. Действительно, $\operatorname{graph} \mathscr{L}_\varphi = \Lambda$ — это лагранжево подмногообразие в $V + V^*$, обладающее тем свойством, что проекции Λ на V и на V^* — диффеоморфизмы. Мы можем отказаться от этих условий и определить *отношение Лежандра* как произвольное лагранжево подмногообразие в $V + V^*$. Тогда $a(x)\, e^{i\tau\xi_0 \cdot x}$ будет соответствовать лагранжеву подмногообразию $\{\xi = \xi_0,\ x \text{ произвольно}\}$, в то время как $a(\tau(x - x_0))$ — лагранжеву подмногообразию $\{\xi \text{ произвольно},\ x = x_0\}$.

§ 2. Частотное множество

Пусть $[\nu]$ — асимптотическая полуплотность (или полуформа) на многообразии M. Мы хотим связать с $[\nu]$ подмножество $F([\nu])$ в T^*M, называемое *частотным множеством* для $[\nu]$. Интуитивно, $F([\nu])$ должно состоять из тех (относительных) частот, на которых ν осциллирует. Нам будет легче описать те ковекторы, которые *не принадлежат* $F([\nu])$. Грубо говоря, ковектор $\gamma \in T^*M_x$ не принадлежит $F([\nu])$, если для любой функции ψ, определенной вблизи x, с $d\psi(x) = \gamma$ существует такая полуплотность ρ с $\rho(x) \neq 0$, что

$$[(\nu, \rho e^{i\tau\psi})] = 0.$$

В действительности мы хотим, чтобы это имело место не только для таких ψ, что $d\psi(x) = \gamma$, но также и для всех «близких» ψ, т. е. чтобы множество ковекторов γ, не принадлежащих $F([\nu])$, было открытым. Мы сформулируем это несколько окольным путем, который, однако, будет полезен, когда мы станем изучать поведение $F([\nu])$ при дифференцируемых отображениях.

Пусть N — некоторое другое многообразие и π: $M \times N \to M$, ρ: $M \times N \to N$ — естественные проекции. Мы хотим, чтобы π и ρ были морфизмами, т. е. чтобы $\pi^*[\nu]$ была асимптотической полуплотностью (или полуформой) на $M \times N$. Пусть ψ — такая гладкая функция на $M \times N$, что $d_M\psi_{(x, y)} = \gamma$. Здесь d_M означает дифференцирование в направлении M. Потребуем, чтобы существовала такая гладкая функция b с компактным носителем, определенная на M, что

$$[\rho_* e^{-i\tau\psi}\pi^* b\nu] = 0 \quad \text{вблизи} \quad y. \tag{2.1}$$

Если c — функция с малым носителем и $c(y) \neq 0$, то (2.1) можно перефразировать так:

$$[c\rho_* e^{-i\tau\psi}\pi^* b\nu] = 0. \tag{2.2}$$

Отметим, что на данном этапе очень сложно проверять, выполнено ли условие этого определения. Оно утверждает, что $\gamma \notin F([\nu])$, *если для любых N, π, ρ и ψ можно найти такие b и c, что имеет место* (2.2).

Для того чтобы проиллюстрировать данное определение, вычислим частотное множество для какой-нибудь простой асимптотики. Напомним, что простая асимптотическая полуплотность имеет вид $ae^{i\tau\varphi}$, где $a \sim \sum_j^{\infty} a_n\tau^{-n}$ и a_n — полуплотности на M. Мы утверждаем, что имеет место

Предложение 2.1. *Для простой асимптотики $\nu \sim ae^{i\tau\varphi}$*

$$F([\nu]) \subset \operatorname{graph} d\varphi.$$

Действительно, пусть N, π, ρ и ψ таковы, как в определении, причем $d_M\psi_{(x_0,\, y_0)} = \gamma \notin \operatorname{graph} d\varphi$. Мы можем выбрать локальные координаты около x_0 и y_0 и малые окрестности около x_0 и y_0 таким образом, что $|d_M\psi(x, y) - d\varphi(x)| > c > 0$, где $|\ |$ обозначает, например, евклидово расстояние в локальных координатах. Если выбрать b и c с достаточно малыми носителями, то ясно, что выражение (2.2) является асимптотикой суммы членов вида

$$\tau^{-n} \int d_n(x, y)\, e^{i\tau(\varphi(x) - \psi(x, y))}\, dx.$$

Повторное интегрирование по частям показывает, что это асимптотический нуль.

Для того чтобы сделать определение доступным проверке, покажем теперь, что достаточно рассматривать $N = \mathbf{R}^n$ и линейные функции ψ. Прежде всего ясно (поскольку морфизм π произволен и у нас есть свобода в выборе b), что можно считать носитель ν лежащим в некоторой координатной карте, т. е. предполагать, что M — открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$. Допустим, что $\gamma = (x_0, \xi_0)$ при отождествлении T^*M с $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Выберем стандартную полуплотность $\sqrt{dx\, d\xi}$ на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Тогда определены морфизмы

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & M \times \mathbf{R}^n \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ M & & \mathbf{R}^n \end{tikzcd}$$

Возьмем теперь $\psi(x, \xi) = x \cdot \xi$ и напишем $\nu = a(x, \tau)\, dx^{1/2}$.

Тогда можно найти такую функцию b, что

$$\rho_* e^{-i\tau\psi} \pi^* b\nu = \int b(x)\, a(x, \tau)\, e^{-i\tau\xi\cdot x}\, dx$$

является асимптотическим нулем для ξ, близких к ξ_0. Другими словами,

$$[\widehat{ba}(\xi, \tau)] = 0 \quad \text{для} \quad \xi, \quad \text{близких к} \quad \xi_0. \tag{2.3}$$

Заметим, между прочим, что если (2.3) имеет место и u — произвольная гладкая функция с компактным носителем, то мы имеем также

$$[\widehat{uba}(\xi, \tau)] = 0 \quad \text{для} \quad \xi, \quad \text{близких к} \ \xi_0.$$

Действительно,

$$\widehat{uba}(\xi, \tau) = \int \hat{u}(\eta, \tau)\, \widehat{ba}(\xi - \eta, \tau)\, d\eta.$$

Далее, согласно (1.3), мы знаем, что $\widehat{ba}(\zeta, \tau) = O(\tau^k)$ для некоторого большого k, и, поскольку $u \in \mathscr{S}$,

$$\hat{u}(\eta, \tau) = O(\tau^{-N}) \quad \text{для любого} \quad N$$

равномерно по η при $|\eta| \geqslant \varepsilon$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$. Теперь, если (2.3) имеет место при $|\xi - \xi_0| < 2\varepsilon$, мы можем написать

$$\int \hat{u}(\eta, \tau)\, ba(\xi - \eta, \tau)\, d\eta = \int\limits_{|\eta| < \varepsilon} + \int\limits_{|\eta| \geqslant \varepsilon}.$$

Если $|\eta| < \varepsilon$ и $|\xi - \xi_0| < \varepsilon$, то первый является асимптотически нулем в силу (2.3). Второй асимптотически равен нулю как произведение $O(\tau^{-N}) \cdot O(\tau^k)$.

Мы видели, что если $(x_0, \xi_0) \notin F([\nu])$, то (2.3) имеет место. Важный результат состоит в том, что верно и обратное утверждение:

Предложение 2.2. *Пусть M — открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$ и $[\nu]$ — асимптотическая полуплотность на M. Тогда $(x_0, \xi_0) \notin F([\nu])$ в том и только том случае, когда* (2.3) *имеет место.*

Доказательство. Предположим, что (2.3) имеет место. Пусть N — некоторое другое многообразие и

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

— морфизмы, а ψ: $M \times N \to \mathbf{R}$ — такое отображение, что $d_M \psi_{(x_0, y_0)} = (x_0, \xi_0)$. Пусть y — локальные координаты на N. Поскольку нам разрешено умножать на c, можно предполагать, что $\rho_* e^{-i\tau\psi} \pi^* b\nu$ имеет носитель в такой координатной окрестности и что

$$\rho_* e^{-i\tau\psi} \pi^* b\nu = \int u(x, y, \tau)\, e^{-i\tau\psi(x, y)}\, b(x)\, a(x, \tau)\, dx,$$

где u получается из морфизмов. Далее,

$$b(x)\, a(x, \tau) = e^{\pi i n/2} \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{n/2} \int \widehat{ba}(\xi, \tau)\, e^{i\tau\xi \cdot x}\, d\xi.$$

Подставляя это выражение в предыдущий интеграл, получаем

$$\iint u(x, y, \tau)\, \widehat{ba}(\xi\tau)\, e^{i\tau[\xi \cdot x - \psi(x, y)]}\, d\xi\, dx.$$

Имеем $d_M \psi_{(x_0, y_0)} = (x_0, \xi_0)$. Предположим, что (2.3) имеет место при $|\xi - \xi_0| < 3\varepsilon$. Умножая на другие b и c (под интегралом их можно включить в новое u), можно считать, что для всех $(x, y) \in \operatorname{supp} u$

$$d_M \psi_{(x, y)} = (x, \zeta), \quad \text{где} \quad |\zeta - \xi_0| < \varepsilon.$$

Разобьем теперь двойной интеграл на два интеграла: один по множеству $|\xi - \xi_0| < 2\varepsilon$, а другой по множеству $|\xi - \xi_0| \geqslant 2\varepsilon$. Первый интеграл — асимптотический нуль по (2.3). Что касается второго, то

$$|d_M[\xi\cdot x-\psi(x,\ y)]|>|\xi-\zeta|>\varepsilon.$$

Поскольку $\widehat{ba}(\xi,\ \tau)$ имеет рост не выше полиномиального по τ, повторное интегрирование по частям по x показывает, что интеграл является асимптотическим нулем, и предложение доказано.

Далее, ясно, что условие (2.3) выделяет открытое множество. Поэтому непосредственным следствием предложения 2.2 является следующее

Предложение 2.3. *Для любого многообразия M множество $F([\nu])$ является замкнутым подмножеством в T^*M.*

Пусть f: $M_1\to M_2$ — собственная субмерсия. Если $[\nu]$ — асимптотическая полуплотность на M_1, то $f_*[\nu]$ — асимптотическая полуплотность на M_2. Мы утверждаем, что

$$F(f_*[\nu])\subset df_*F([\nu]). \tag{2.4}$$

Предположим, что $\gamma\notin df_*F([\nu])$, т. е. $df^*\gamma\notin F([\nu])$. Пусть N — другое многообразие и ψ: $M_2\times N\to\mathbf{R}$ — такое отображение, что $d\psi_{M_2}(x,\ y)=\gamma$. Определим φ: $M_1\times N\to\mathbf{R}$, полагая $\varphi(z,\ y)=\psi(f(z),\ y)$. Тогда для любого $z\in f^{-1}(x)$ имеем $d_{M_1}\varphi(z,\ y)=df^*\gamma\notin F([\nu])$. Для всех таких z и y можно найти такие функции b на M_1 и c на N, что $[c\rho_*e^{-i\tau\varphi}\pi_1^*b\nu]=0$. Вблизи z мы можем написать $M_1=M_2\times P$ и (умножив b на подходящую функцию) предполагать, что $b=b_2r$, где b_2 — функция на M_2 с $b_2(x)\neq 0$ и r — функция на P с $r\equiv 1$ вблизи y. Поскольку множество $z\in\pi^{-1}x$, участвующих в рассмотрении, компактно, мы можем считать функцию $\bar{b}$ равной произведению функций b_2 для разных z, а $\bar{c}$ — произведению функций c. Разбиение единицы тогда показывает, что

$$[\bar{c}\rho_*e^{-i\tau\psi}\pi^*\bar{b}f_*\nu]=\sum\left[f_*\bar{c}\rho_*e^{-i\tau\varphi}\pi^*\left(\bar{b}\circ f\right)\nu\right]=0,$$

и (2.4) доказано.

Пусть $\Lambda\subset T^*M$ — лагранжево подмногообразие. Мы знаем, что локально Λ можно представить в виде $d\pi_*d\psi^*\Lambda_1$, где $\Lambda_1=\{(x,\ 1)\in T^*\mathbf{R}^1\}$ — стандартное лагранжево подмногообразие в $T^*\mathbf{R}^1$, π: $N\to M$ — субмерсия и φ: $N\to\mathbf{R}^1$ — отображение

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathbf{R}^1 \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

Если $[a(x,\ \tau)e^{i\tau\varphi(x)}]$ — простая асимптотика на N, то $d\pi_*[ae^{i\tau\varphi}]$ — это асимптотика, у которой частотное множество лежит в Λ, Будем говорить, что $[\nu]$ — *составная асимптотика*, ассоциированная с Λ, если

$$[\nu]=\sum[\nu_j],$$

где $\nu_j=\pi_{j*}[a_j e^{i\tau\varphi_j}]$ и (π_j, φ_j) для всех j дают локальное представление Λ, а сумма локально конечна. В дальнейшем нас будут интересовать главным образом составные асимптотики. Если $[\nu]$ — составная асимптотика, ассоциированная с Λ, то из (2.4) и предложения 2.1 следует, что

$$F([\nu])\subset\Lambda. \tag{2.5}$$

Значит, если ψ — такая функция, что $(\operatorname{graph} d\psi)\cap\Lambda=\varnothing$, то

$$[(\nu,\ \mu)]=0, \tag{2.6}$$

если $\mu=be^{i\tau\psi}$ — произвольная простая асимптотическая полуплотность, ассоциированная с ψ. Мы можем сказать несколько больше. Предположим, что $\operatorname{graph}\psi$ трансверсально пересекает Λ в единственной точке γ. Тогда мы утверждаем, что

$$(\nu,\ \mu)\sim e^{ic\tau}\sum d_n\tau^{-n}, \tag{2.7}$$

где c и d_n зависят только от ψ вблизи $\pi_M\gamma$, $\pi_M\colon T^*M\to M$ — стандартная проекция. Действительно, $(\nu,\ \mu)$ можно переписать как сумму членов вида

$$(\pi_*ae^{i\tau\varphi},\ be^{i\tau\psi})=(ae^{i\tau\varphi},\ \pi^*be^{i\tau\psi}),$$

которые являются интегралами вида

$$\int u(x,\ y)e^{i\tau[\varphi(x,y)-\psi(x)]}\,dx\,dy.$$

Утверждение, что $\operatorname{graph} d\psi$ пересекает Λ трансверсально, означает в точности, что $\varphi(x,\ y)-\psi(x)$ имеет невырожденную критическую точку, и, значит, мы можем применить метод стационарной фазы и получить (2.7).

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что формула для частотного множества при поднятии асимптотики практически является частью определения, если $f\colon M_1\to M_2$ — субмерсия. Действительно, мы утверждаем, что

$$F(f^*[\nu])\subset df^*F([\nu]). \tag{2.8}$$

В самом деле, поскольку рассмотрения полностью локальны, можно предполагать, что $M_1=M_2\times Q$ и f — проекция на первый сомножитель. Тогда $df^*F([\nu])=F([\nu])\times\{0\}$. Если $\gamma_1=(\gamma_2,\ \gamma_3)\notin df^*F([\nu])$, то либо $\gamma_3\neq0$, либо $\gamma_3=0$ и $\gamma_1\notin F([\nu])_x$, где $x=f\pi_{M_1}\gamma_1$. В первом случае мы можем записать интеграл в (2.1) как

$$\int u(x,\ \tau)\,a(y,\ z)e^{i\tau\psi(y,z)}\,dx\,dy,$$

где $d_Q\psi \neq 0$. Здесь x — точка на M_2, y — на Q и z — на N. Повторное интегрирование по частям по y показывает, что этот интеграл асимптотически обращается в нуль. Во втором случае интеграл, входящий в (2.1), принимает вид

$$\int u(x, \tau)\, a(y, z) e^{-i\tau\psi(x, z)}\, dx\, dy,$$

где $d_{M_2}\psi = \gamma \notin F([\nu])$ и, по предположению, уже интеграл по x асимптотически равен нулю.

Нам хотелось бы иметь возможность утверждать, что (2.8) справедливо для всех отображений, а не только для субмерсий. Нам также хотелось бы иметь возможность утверждать, что если $F([\nu]) = \varnothing$, то $[\nu] = 0$. Однако из примеров § 1 мы знаем, что это не так. Поэтому мы должны сузить или модифицировать рассматриваемый класс асимптотик. Мы будем дальше иметь дело с составными асимптотиками, хотя можно было бы ввести и более широкий класс асимптотик. Рассмотрения в следующем параграфе параллельны и довольно близки к соответствующим рассмотрениям § 4 гл. VI.

§ 3. Функториальные свойства составных асимптотик

Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ — морфизм и $[\nu]$ — составная асимптотика на M_2, ассоциированная с лагранжевым многообразием $\Lambda \subset T^*M_2$. Пусть $\pi\colon \Lambda \to M_2$ — ограничение на Λ проекции T^*M_2 на M_2, и предположим, что $f\colon M_1 \to M_2$ и $\pi\colon \Lambda \to M_2$ трансверсальны. Тогда мы утверждаем, что справедливо

Предложение 3.1. *$f^*[\nu]$ — составная асимптотика, ассоциированная с $df^*\Lambda$.*

Действительно, предположим временно, что Λ представляется в виде

$$\begin{tikzcd} N_2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g_2"'] & \mathbf{R}^1 \\ M_2 & \end{tikzcd}$$

т. е. $\Lambda = dg_{2*}\, d\varphi^*\Lambda_1$. Тогда мы можем дополнить диаграмму следующим образом:

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[r, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "g_1"'] & N_2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g_2"] & \mathbf{R} \\ M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2 & \end{tikzcd}$$

где $N_1 = M_1 \underset{M_2}{\times} N_2$. Далее, $\operatorname{graph} d\varphi$ проектируется на все N_2, а значит, поднимается до лагранжева многообразия $\operatorname{graph} d\psi \subset \subset T^*N_1$, где $\psi = \varphi \circ \tilde{f}$. Сделаем два утверждения:

(i) *Пусть* $H_1 = dg_1^* T^*M_1$. *Тогда* $\operatorname{graph} d\psi$ *трансверсально пересекает* H_1 *и*

$$dg_{1*}(\operatorname{graph} d\psi) = df^*\Lambda.$$

(ii) *Предположим, что* f *и* g_2 — *морфизмы. Тогда* $\tilde{f}$ *и* g_1 *можно считать морфизмами, так что*

$$f^* g_{2*} = g_{1*}\tilde{f}^*.$$

Если (i) и (ii) справедливы, то для $\nu = g_{2*}\varphi^*\mu$, где μ — полуплотность на $\mathbf{R}^1$, мы можем написать: $f^*\nu = g_{1*}\psi^*\mu$. Тогда мы получаем общий случай предложения 3.1, поскольку ν — сумма членов вида $g_{2*}\varphi^*\mu$.

Доказательство (*i*). Поскольку вычисление чисто локально, мы можем ввести координаты y, θ на N_2, где y — координаты на M_2 (так что $g_2(y, \theta) = y$), и координаты x, θ на N_1, причем x — координаты на M_1. Пусть (y, θ, η, ζ) — индуцированные координаты на T^*N_2, а (x, θ, ξ, ζ) — индуцированные координаты на T^*N_1. Тот факт, что $\operatorname{graph} d\varphi$ трансверсально пересекает $H = dg_2^* T^*M_2$, означает, что для любого заданного вектора z можно разрешить уравнение

$$z = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial\theta} b + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} c \tag{3.1}$$

относительно b и c. Тот факт, что f трансверсально Λ, означает, что для заданного b можно найти такие a', b' и c', что

$$b = \frac{\partial f}{\partial x} a' + b', \quad 0 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial\theta} b' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} c'. \tag{3.2}$$

Утверждение, что $\operatorname{graph} d\psi = \operatorname{graph} d\varphi \circ \tilde{f}$ трансверсален $dg_1^* T^*M$, означает возможность разрешить уравнение

$$z = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial\theta} \frac{\partial f}{\partial x} a'' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} c''$$

относительно a'' и c''. Чтобы сделать это, найдем b и c из (3.1), а затем a', b' и c' из (3.2) и положим $a'' = a'$, $c'' = -c'$. Это доказывает (i).

Доказательство (*ii*). Оно сводится к следующей лемме:

Лемма 3.1. *Пусть*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{q'} & B \\ {\scriptstyle l'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l} \\ C & \xrightarrow[q]{} & D \end{array}$$

— коммутативная диаграмма линейных отображений, описывающая A как расслоенное произведение, т. е. $A = B \times_D C$. Тогда

$$\mathrm{Hom}(|\Lambda|^{1/2} D, |\Lambda|^{1/2} C) \sim \mathrm{Hom}(|\Lambda|^{1/2} B, |\Lambda|^{1/2} A), \tag{3.3}$$

$$\mathrm{Hom}(|\Lambda|^{1/2} D, |\Lambda|^{1/2} B) \sim \mathrm{Hom}(|\Lambda|^{1/2} C, |\Lambda|^{1/2} A). \tag{3.4}$$

Применение этой леммы к дифференциалам $d\tilde{f}$, df, dg_2, dg_1 показывает, что, если f и g_2 — морфизмы, то же можно сказать о $\tilde{f}$ и g_1, в чем и состоит утверждение (ii).

Доказательство леммы. Из того что A — расслоенное произведение, следует, что в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker q' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "l'"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "l"] & \operatorname{coker} q' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker q \arrow[r] & C \arrow[r, "q"] & D \arrow[r] & \operatorname{coker} q \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

индуцированные вертикальные отображения слева и справа — изоморфизмы. Но из точности строк следует, что

$$\mathrm{Hom}(|\Lambda|^{1/2} D, |\Lambda|^{1/2} C) \sim \mathrm{Hom}(|\Lambda|^{1/2} \operatorname{coker} q, |\Lambda|^{1/2} \ker q),$$

$$\mathrm{Hom}(|\Lambda|^{1/2} B, |\Lambda|^{1/2} A) \sim \mathrm{Hom}(|\Lambda|^{1/2} \operatorname{coker} q', |\Lambda|^{1/2} \ker q'),$$

а значит, (3.3) доказано.

Аналогично, из сюръективности l и l' следует, что

$$\mathrm{Hom}(|\Lambda|^{1/2} D, |\Lambda|^{1/2} B) \sim |\Lambda|^{1/2} \ker l,$$

$$\mathrm{Hom}(|\Lambda|^{1/2} C, |\Lambda|^{1/2} A) \sim |\Lambda|^{1/2} \ker l',$$

а из того, что A — расслоенное произведение, следует, что $\ker l \sim \ker l'$. На этом заканчивается доказательство леммы, а значит, и предложения 3.1.

Предложение 3.2. *Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ — субмерсия, которая является собственным морфизмом, и пусть $\Lambda \subset T^*M_1$ — лагранжево подмногообразие, трансверсально пересекающее $df^*T^*M_2$. Тогда, если $[\nu]$ — составная асимптотика, ассоциированная с Λ, то $f_*[\nu]$ — составная асимптотика, ассоциированная с $df_*\Lambda$.*

Доказательство несложно, и мы предоставляем его читателю.

Пусть Λ — лагранжево подмногообразие в $T^*(M_1 \times M_2)$ и Λ_2 — лагранжево подмногообразие в T^*M_2. Предположим, что Λ трансверсально пересекает $T^*M_1 \times \Lambda_2$, т. е. $\rho_1(\Lambda \cap (T^*M_1 \times \Lambda_2)) = \Lambda_1$ — лагранжево подмногообразие в T^*M_1, где $\rho_1\colon T^*M_1 \times T^*M_2 \to T^*M_1$ — проекция на первый сомножитель.

Предложение 3.3. *Пусть $[\nu]$ — составная асимптотика, ассоциированная с Λ, и $[\nu_2]$ — составная асимптотика с компактным носителем, ассоциированная с Λ_2. Тогда $\left[\int\limits_{M_2} \nu\bar{\nu}_2\right]$ — составная асимптотика, ассоциированная с Λ_1.*

Опять-таки достаточно рассмотреть локальные ситуации:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & \mathbf{R} \\ M_1 \times M_2 & \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} \nu &= f_* \varphi^* \mu \\ \Lambda &= df_* \operatorname{graph} d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] & \mathbf{R} \\ M_2 & \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} \nu_2 &= g_* \psi^* \mu_2 \\ \Lambda_2 &= dg_* \operatorname{graph} d\psi \end{aligned}$$

Тогда мы можем образовать расслоенное произведение $N \underset{M_2}{\times} P$, считать φ, ψ функциями на $N \underset{M_2}{\times} P$ и рассмотреть $N \underset{M_2}{\times} P \xrightarrow{h} M_1$. Мы утверждаем, что $\operatorname{graph} d(\varphi - \psi)$ трансверсально пересекает $dh^* T^* M_1$ и что $dh_* (\operatorname{graph} d(\varphi - \psi)) = \Lambda_1$.

Действительно, пусть (x, y, θ) — локальные координаты на N и (y, γ) — локальные координаты на P. Утверждение, что $\operatorname{graph} d(\varphi - \psi)$ трансверсально пересекает $dh^* T^* M_1$, означает, что можно разрешить уравнения

$$z_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} a - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma\, \partial y} c + \frac{\partial^2 (\varphi - \psi)}{\partial y^2} b + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta\, \partial y} t,$$

$$z_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial \theta} a + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} t + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial \theta} b,$$

$$z_\gamma = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial \gamma} b - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma^2} c$$

относительно a, b, t и c в точках, где

$$\partial (\varphi - \psi)/\partial y = \partial (\varphi - \psi)/\partial \theta = \partial (\varphi - \psi)/\partial \gamma = 0.$$

Далее, поскольку $T^* M_1 \times \Lambda_2$ трансверсально Λ, можно для любых b_3, η_3 найти такие a_1, b_1, t и b_2, c_2, что

$$b_1 + b_2 = b_3,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} a_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} b_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta\, \partial y} t_1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} b_2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial \gamma} c_2 = \eta_3,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial \theta} a_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial \theta} b_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} t_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial \gamma} b_2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma^2} c_2 = 0.$$

Тот факт, что $\varphi(x, y, \theta)$ задает локальное представление для Λ, означает, что можно найти a', b', t', являющиеся решениями уравнения с z_θ, а тот факт, что ψ задает локальное представление для Λ_2, означает, что можно найти b'', c'', являющиеся решениями уравнения с z_γ. Возьмем, далее, $b_3 = -(b' + b'')$, так что $b_1 + b' = -(b_2 + b'')$ и

$$\eta = z_y - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} a' - \frac{\partial^2\psi}{\partial\gamma\,\partial y} c' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} b' - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\,\partial y} t'.$$

Положим теперь $a = a_1 + a'$ и т. д. и решим наши уравнения. Тот факт, что

$$dh_* (\operatorname{graph} d(\varphi - \psi)) = \Lambda_1,$$

следует тогда непосредственно из определений.

Далее, в локальных координатах

$$\nu = \int e^{i\tau\varphi(x, y, \theta)} a(x, y, \theta; \tau)\, d\theta \quad \text{и} \quad \nu_2 = \int e^{i\tau\psi(y, \gamma)} b(y, \gamma; \tau)\, d\gamma,$$

т. е.

$$\int_{M_2} \nu\bar{\nu}_2 = \int e^{i\tau[\varphi(x, y, \theta) - \psi(y, \gamma)]} c(x, y, \theta, \gamma; \tau)\, d\theta\, d\gamma\, dy,$$

где $c = a\bar{b}$. Таким образом, мы видим, что $\left[\int_{M_2} \nu\bar{\nu}_2\right]$ — составная асимптотика, ассоциированная с Λ_1, и предложение доказано.

§ 4. Символическое исчисление

Пусть $\Lambda \subset T^*X$ — лагранжево многообразие с заданной параметризацией

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

и пусть $\mu = \pi_* a e^{i\tau\varphi}$ — составная асимптотика, определенная при помощи этой параметризации. Если $\psi \in C^\infty(X)$ обладает тем свойством, что $\operatorname{graph} d\psi$ трансверсально пересекает Λ в (x_0, ξ_0), то, согласно (2.7), выражение

$$\int_X \mu(x, \tau)\, e^{-i\tau\psi}\, dx \tag{4.1}$$

допускает асимптотическое разложение вида

$$e^{ic\tau} \sum a_i \tau^i, \quad \text{где} \quad c = \varphi(x_0, \xi_0) - \psi(x_0). \tag{4.2}$$

Далее, составная асимптотика ν общего вида, ассоциированная с Λ, будет конечной суммой таких μ, возможно с различными φ. Тогда (4.1) будет конечной суммой выражений вида (4.2) с различными c. Далее, «символ» ν должен был бы определять главный член в асимптотическом разложении для (4.1). Значит, для произвольного ν символ должен был бы состоять из большого числа символов, по одному для каждого c. Поэтому естественно ожидать, что символическое исчисление для составных асимптотик окажется довольно сложным.

Однако можно задать следующий вопрос. Когда существует единый асимптотический ряд вида (4.2) при каждом выборе ψ в (4.1)? В предположении, что не все a_i равны нулю, *необходимое и достаточное условие состоит в том, что ограничение фундаментальной 1-формы α многообразия T^*X на Λ является точной формой*. Действительно, c в (4.2) определяет функцию φ на Λ так: $\varphi(x_0, \xi_0) = c_\psi + \psi(x_0)$; легко проверить, что $d\varphi = \alpha$ на Λ. Обратно, задавая функцию φ на Λ, мы можем потребовать, чтобы *допустимая параметризация* Λ обладала тем свойством, что ограничение ее фазовой функции на критическое множество равно поднятию φ на критическое множество. Если мы будем пользоваться только такими параметризациями, то асимптотическое разложение (4.1) будет всегда состоять только из одного ряда вида (4.2) и мы сможем построить символическое исчисление. Перейдем к развитию этих идей.

Лагранжева пара (Λ, φ) состоит из лагранжева многообразия Λ, на котором α — точная форма, вместе с такой функцией φ, определенной на Λ, что

$$d\varphi = \alpha.$$

Укажем коротко, как функториальные свойства лагранжевых многообразий, описанные в § 4 гл. IV, работают для лагранжевых пар. Если (Λ, φ) — лагранжева пара в T^*Y и $f\colon X \to Y$ — отображение, трансверсальное Λ, то $f^*\Lambda$ снабжается отображением в Λ, так что φ поднимается до функции на $f^*\Lambda$, которую будем обозначать через $f^*\varphi$. Легко проверить, что $(f^*\Lambda, f^*\varphi)$ — лагранжева пара; мы будем называть ее поднятием пары (Λ, φ) и обозначать через $f^*(\Lambda, \varphi)$. Аналогично, если $f\colon X \to Y$ — субмерсия, то опущенное лагранжево многообразие $f_*\Lambda$ снабжается инъекцией в Λ, а значит, φ опускается на $f_*\Lambda$; опущенную функцию обозначим через $f_*\varphi$. Опять-таки можно проверить, что $(f_*\Lambda, f_*\varphi)$ — лагранжева пара; мы будем обозначать ее через $f_*(\Lambda, \varphi)$ и называть опусканием (Λ, φ) при помощи f.

Как и в гл. VI, будем развивать символическое исчисление для составных асимптотик в рамках металинейного подхода. Все многообразия будут металинейными, отображения — металинейными морфизмами, а мы будем интересоваться асимптотическими полуформами. Будем называть полуформу μ ассоциированной с лагранжевой парой (Λ, φ), если ее можно представить как сумму выражений вида

$$\mu = \pi_* a\varphi_1^* e^{i\tau t} \sqrt{dt}, \tag{4.3}$$

где $\pi_*\varphi_1^*(\Lambda_1, t)$ — локальная параметризация (Λ, φ), t — стандартная координата на $\mathbf{R}$ и $\Lambda_1 = \operatorname{graph} dt \subset T^*\mathbf{R}$. Для таких μ следующим образом определим символ $\sigma(\mu)$. Пусть a_0 — главный член в асимптотическом разложении асимптотической функции a. Тогда $a_0\varphi_1^* \sqrt{dt}$ — полуформа на Z, которая поднимается до полуформы на $\varphi_1^*(\Lambda_1) \subset T^*Z$, поскольку $\varphi_1^*(\Lambda_1)$ диффеоморфно проектируется на Z при проекции T^*Z на Z. Теперь мы имеем полуформу на $\varphi_1^*(\Lambda_1)$. По методу § 5 гл. VI опускание π_* превращает ее в полуформу на Λ. Умножим полученную полуформу на $(2\pi i\tau)^{-k/2}$, где k — размерность слоя в Z; полученное в результате выражение называется *символом полуформы* μ.

Мы должны показать, что наше определение $\sigma(\mu)$ не зависит от параметризации. Пусть (x_0, ξ_0) — точка Λ. Пусть z_0 — критическая точка φ_1 на Z, соответствующая (x_0, ξ_0), и (x, θ) — локальные координаты вблизи z_0, причем θ — координаты по слою. Предположим также, что координаты выбраны так, что $\varphi_1^* \sqrt{dt} = \sqrt{dx\, d\theta}$ и $\pi_* \sqrt{dx\, d\theta} = \sqrt{dx}$. Тогда

$$\mu = \left(\int a(x, \theta, \tau)\, e^{i\tau\varphi_1(x, \theta)}\, d\theta\right) \sqrt{dx}. \tag{4.4}$$

Предположим вначале, что (x_0, ξ_0) — регулярная точка проекции $\Lambda \to X$, т. е. гессиан по слою $d_\theta^2\varphi_1$ невырожден в z_0. Мы можем применить метод стационарной фазы к (4.4) и получить

$$\mu \sim e^{i\tau\varphi_1(x_0, \xi_0)} (2\pi\tau)^{-k/2} e^{(\pi i/4)\operatorname{sign} d_\theta^2\varphi_1} |\det d_\theta^2\varphi_1|^{-1/2} (a_0(x_0, \xi_0, \tau) + \ldots) \tag{4.5}$$

в x_0. Далее, $\operatorname{sign} d_\theta^2\varphi_1$ — это число положительных собственных значений минус число отрицательных собственных значений, а k — число положительных собственных значений плюс число отрицательных собственных значений. Если положить, по определению,

$$(\det d_\theta^2\varphi_1)^{1/2} = e^{(\pi i/2)\,(\operatorname{ind} d_\theta^2\varphi_1)} |\det d_\theta^2\varphi_1|^{1/2},$$

где $\operatorname{ind} d_\theta^2\varphi_1$ — число отрицательных собственных значений, то (4.5) можно переписать в виде

$$\mu \sim e^{i\tau\varphi_1(x_0, \xi_0)} (2\pi i\tau)^{-k/2} (\det d_\theta^2\varphi_1)^{-1/2} a_0(x_0, \xi_0, \tau) + \ldots . \tag{4.6}$$

Вычислим теперь $\sigma(\mu)$ в (x_0, ξ_0). Поскольку $\varphi_1^*\Lambda_1$ диффеоморфно проектируется на Z, мы можем пользоваться (x, θ) как координатами на $\varphi_1^*\Lambda_1$. По определению, символ полуформы μ — это опускание при помощи π_* полуформы $a_0(dx\, d\theta)^{1/2}$, рассматриваемой как полуформа на $\varphi_1^*\Lambda_1$, умноженное на $(2\pi i\tau)^{-k/2}$. Для того чтобы закончить выкладку, вспомним, как вычисляется опускание. Пусть $H \subset T^*Z$ — расслоение горизонтальных ковекторов для субмерсии π: $Z \to X$. Тогда $\Lambda = (\varphi_1^*\Lambda_1) \cap H$. Пусть p_0 — точка $\varphi_1^*\Lambda_1$, соответствующая критической точке $z_0 \in Z$, которая тогда также соответствует точке $(x_0, \xi_0) \in \Lambda$. Введем обозначения:

A — касательное пространство к Λ в (x_0, ξ_0),
B — касательное пространство к $\varphi_1^*\Lambda_1$ в p_0,
H_0 — касательное пространство к H в p_0,
T — касательное пространство к T^*Z в p_0,
F — касательное пространство к слою в z_0.

Условие трансверсальности для опускания требует, чтобы $T = H_0 + B$, и тогда $A = H_0 \cap B$. Значит,

$$B/A \cong T/H_0 \cong F^*. \tag{4.7}$$

Тот факт, что π — морфизм, означает, что F снабжено полуформой $(d\theta^{1/2})$, а значит, F^* снабжено отрицательной полуформой. Согласно (4.7), отсюда следует, что B/A снабжено отрицательной полуформой, а значит, полуформа на B определяет полуформу на A, т. е. полуформа на $\varphi_1^*\Lambda_1$ определяет полуформу на Λ. Переведем это на язык локальных координат. Рассмотрим T как множество векторов

$$(x^1, \ldots, x^n, \theta_1, \ldots, \theta_k, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_k).$$

Тогда B — это подпространство, определяемое уравнениями

$$\xi_j = \sum x^i \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^i\, \partial x^j} + \sum \theta_l \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\theta_l \partial x^j}, \tag{4.8}$$

$$\eta_j = \sum x^i \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^i\, \partial\theta_j} + \sum \theta_l \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\theta_j\, \partial\theta_l}. \tag{4.9}$$

Пространство A выделяется дополнительными уравнениями $\eta_1 = 0, \ldots, \eta_k = 0$.

Таким образом, мы можем пользоваться переменными $\eta_1, \ldots, \eta_k$ как координатами на B/A и $\theta_1, \ldots, \theta_k$ как координатами на F^*; тогда изоморфизм в (4.7) принимает вид $\theta \mapsto \eta$, где

$$\eta_i = \sum \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\theta_i\, \partial\theta_j}\, \theta_j. \tag{4.10}$$

Значит, поднятие $(d\eta)^{-1/2}$ равно $(d\theta)^{-1/2}(\det d_\theta^2\varphi_1)^{-1/2}$. Умножив это выражение на $a_0(x_0, \theta_0, \tau)(dx\, d\theta)^{1/2}$, а затем на $(2\pi i\tau)^{-k/2}$, получим главный член в (4.6). Поскольку (4.6) не зависит от параметризации, мы видим, что символ корректно определен, по крайней мере в тех точках, где проекция регулярна.

Для того чтобы освободиться от этого предположения, мы должны уточнить формулу (4.2). Напомним из гл. V, что если

V — симплектическое векторное пространство и W_1, W_2 — трансверсальные лагранжевы подпространства, то имеется каноническое спаривание

$$\bigwedge^{1/2} W_1 \times \bigwedge^{1/2} W_2 \to \mathbf{C}.$$

Предположим, что $\mu_1 = a_1 e^{i\tau\psi_1}$ и $\mu_2 = a_2 e^{i\tau\psi_2}$ — простые асимптотические полуформы на X с компактным носителем. Как мы уже показали, символ μ_i — это поднятие a_i на $\Lambda_i = \operatorname{graph} d\psi_i$. Докажем, что имеет место следующая

Лемма. *Если Λ_1 и Λ_2 трансверсально пересекаются в (x_0, ξ_0), то*

$$\int_X \mu_1 \overline{\mu_2} = (2\pi i\tau)^{-n/2} e^{i\tau c} \sum b_j \tau^j, \tag{4.11}$$

где

$$c = \psi_1(x_0) - \psi_2(x_0),$$

а b_0 — число, полученное спариванием $\sigma(\mu_1)$ и $\sigma(\mu_2)$ в (x_0, ξ_0). Здесь V — касательное пространство к T^*X в (x_0, ξ_0), а W_i — касательные пространства к Λ_i.

Доказательство. Имеем $d(\psi_1 - \psi_2) = 0$ в x_0, а из условия трансверсальности следует, что гессиан $\psi_1 - \psi_2$ невырожден в этой точке, т. е. что к левой части (4.11) применим метод стационарной фазы. Для вычисления выражений, входящих в формулу стационарной фазы, проделаем следующее. Рассмотрим отображение T^*X в себя, задаваемое формулой

$$f(x, \xi) = (x, \xi - d\psi_2(x)).$$

Это каноническое преобразование, переводящее Λ_2 в нулевое сечение, а Λ_1 — в $\operatorname{graph} d(\psi_1 - \psi_2)$. Оно коммутирует с проекцией $T^*X \to X$ и, значит, отображает прообраз a_i на Λ_i на соответствующий прообраз на $f(\Lambda_i)$, причем сохраняет спаривание. Формула стационарной фазы не изменится, если при вычислении левой части (4.11) заменить ψ_1 на $\psi_1 - \psi_2$ и ψ_2 на 0. Значит, при вычислении члена старшего порядка в (4.11) можно предполагать, что $\mu_1 = a_1 e^{i\tau\psi}$ и что $\mu_2 = a_2$ не зависит от τ. Но теперь мы свели все к ситуации, с которой имели дело выше. А именно, мы можем рассматривать

$$\int_X a_1 \bar{a}_2 e^{i\tau\psi}$$

как составную асимптотику над одноточечным многообразием, соответствующим диаграмме

$$\begin{array}{c} X \to \mathbf{R} \\ \pi \big\downarrow \quad \\ \mathrm{pt} \quad \end{array}$$

где π задается структурой морфизма, так что $\pi^*(1) = a_2$. На этом заканчивается доказательство леммы. Мы можем рассматривать лемму и формулу (4.10) как инвариантное описание членов старшего порядка, входящих в метод стационарной фазы, когда мы пользуемся полуформами.

Обобщим теперь лемму на составные асимптотики, т. е. дополним доказательство так, чтобы символ был корректно определен даже в нерегулярных точках. Пусть φ_1, π и Z такие, как в (4.3), а x, θ — как выше, и предположим, что критическая точка z_0, соответствующая точке $(x_0, \xi_0) \in \Lambda$, имеет координаты $x = 0$, $\theta = 0$. Пусть $q(\theta)$ — квадратичная форма, невырожденная на нулевом пространстве $d_\theta^2\varphi_1$ в z_0 и равная нулю на дополнительном пространстве; определим функцию φ_r: $Z \to \mathbf{R}$, полагая

$$\varphi_r(x, \theta) = \varphi_1(x, \theta) + rq(\theta).$$

Превратим φ_r в морфизм полуформ, полагая

$$\varphi_r^*(dt)^{1/2} = (dx\, d\theta)^{1/2}.$$

Положим

$$\Lambda_r = \pi_*\varphi_r^*(\Lambda_1) \quad \text{и} \quad \mu_r = \pi_* a\varphi_r^* e^{i\tau t}(dt)^{1/2}.$$

По построению (x_0, ξ_0) — регулярная точка Λ_r при малых $r \neq 0$, т. е. μ_r — простая асимптотика в x_0 для малых $r \neq 0$. Пусть $\nu = be^{i\tau\psi}$ — такая полуформа на X с компактным носителем, что graph $d\psi$ трансверсально пересекает Λ_r для малых значений r. Тогда

$$\int_X \mu\bar{\nu} = \int a\bar{b}e^{i\tau(\varphi_r(x, \theta) - \psi(x))}\, dx\, d\theta$$

допускает асимптотическое разложение типа (4.2) при всех малых значениях r, а главный член в разложении при $r \neq 0$ может быть вычислен по правилу, данному в лемме. По непрерывности формула (4.11) имеет место также и при $r = 0$. Это показывает, что главный член в асимптотическом разложении $\int_X \mu\bar{\nu}$ определяет символ μ в (x_0, ξ_0), а значит, символ не зависит от параметризации.

Порядок составной асимптотики вида $\pi_* ae^{i\tau\varphi_1}$ определяется как $r - (k/2)$, где r — порядок главного члена асимптотического разложения a, а k — размерность слоя расслоения $Z \to X$. Итак, нами доказана

Теорема 4.1. *Пусть μ — составная асимптотика порядка m, ассоциированная с лагранжевой парой (Λ, φ). Тогда символ μ корректно определен как полуформа на Λ типа $\tau^m\gamma$, где γ не зависит от τ. Если две асимптотики имеют один и тот же символ, то они различаются на асимптотику на единицу меньшего порядка. Если $\nu = ae^{i\tau\psi}$ — такая простая асимптотика с компактным носи-*

телем, что graph $d\psi$ *трансверсально пересекает* Λ *в* (x_0, ξ_0), *то*

$$\int_X \mu\bar{\nu} = (2\pi i\tau)^{-n/2} e^{ic\tau} \sum b_j \tau^j, \tag{4.11}$$

где $c = \varphi(x_0, \xi_0) - \psi(x_0)$, *а главный коэффициент* b_m *в* (4.11) *получается спариванием полуформ* $\sigma(\mu)$ *и* $\sigma(\nu)$ *в* (x_0, ξ_0).

Следующие утверждения доказываются точно так же, как в гл. VI были доказаны соответствующие утверждения для полуформ. Подробности читатель найдет в § 5 гл. VI.

Теорема 4.2. *Пусть* (Λ, φ) — *лагранжева пара в* T^*Y *и* $f\colon X \to Y$ — *морфизм, удовлетворяющий условию трансверсальности для поднятия. Если* μ — *асимптотика порядка* m, *ассоциированная с* (Λ, φ), *то* $f^*\mu$ — *асимптотика порядка* m, *ассоциированная с* $(f^*\Lambda, f^*\varphi)$, *и*

$$\sigma(f^*\mu) = f^*\sigma(\mu). \tag{4.12}$$

Теорема 4.3. *Пусть* (Λ, φ) — *лагранжева пара в* T^*X *и* $f\colon X \to Y$ — *морфизм, удовлетворяющий условию трансверсальности для опускания, где* f — *расслаивающее отображение с размерностью слоя* k. *Если* μ — *составная асимптотика порядка* m, *ассоциированная с* (Λ, φ), *то* $f_*\mu$ — *составная асимптотика порядка* $m-(k/2)$, *ассоциированная с* $(f_*\Lambda, f_*\varphi)$, *и*

$$\sigma(f_*\mu) = (2\pi i\tau)^{-k/2} f_*\sigma(\mu). \tag{4.13}$$

Перейдем теперь к транспортному уравнению для составных асимптотик. Пусть $P = P(x, D, \tau)$ — асимптотический дифференциальный оператор порядка k, действующий на асимптотические полуформы на X. (См. определения в § 2 гл. II.) Пусть $p(x, \xi)$ — его главный символ и η_p — соответствующее гамильтоново векторное поле. Пусть $p_{\mathrm{sub}}(x, \xi)$ — субглавный символ P. Наконец, пусть (Λ, φ) — такая лагранжева пара, что $p = 0$ на Λ.

Теорема 4.4. *Если* μ — *составная асимптотика порядка* m, *ассоциированная с* (Λ, φ), *то* $P\mu$ — *составная асимптотика порядка* $m-1$ *и*

$$\sigma(P\mu) = \tau^{-1}(-iD_{\eta_p}\sigma(\mu) + p_{\mathrm{sub}}\sigma(\mu)). \tag{4.14}$$

Доказательство. Мы следуем доказательству соответствующего результата из § 7 гл. VI. Прежде всего, если теорема верна для P и для Q, то она верна для QP и для любого оператора с тем же главным символом, что и P. Как мы видели в § 7 гл. VI, это следствие правила композиции для субглавных символов. Далее, мы замечаем, что теорему достаточно доказать для точек $(x, \xi) \in \Lambda$, в окрестности которых проекция $\Lambda \to X$ имеет постоянный ранг, поскольку эти точки образуют открытое плотное множество. Для завершения доказательства нужно охарактеризовать те лагранжевы многообразия в T^*X, для которых $\Lambda \to X$ имеет постоянный ранг. Для любого лагранжева многообразия Λ и любой гладкой функции ψ полагаем

$$\Lambda_\psi = \{(x, \ \xi + d\psi) \mid \ (x, \ \xi) \in \Lambda\}.$$

Как мы уже видели, Λ_ψ — снова лагранжево подмногообразие, поскольку оно получается из Λ каноническим преобразованием. Предположим, что $\Lambda \to X$ имеет постоянный ранг, т. е. локально Λ расслаивается над некоторым подмногообразием $Y \subset X$. На Λ мы можем локально записать $\alpha = d\varphi$, и, поскольку форма α равна нулю на вертикальных векторах, функция φ постоянна вдоль слоев $\Lambda \to X$, а значит, мы можем рассматривать ее как поднятие некоторой функции, определенной на Y. Продолжим эту функцию, определенную на Y, так, чтобы она была (локально) определена на X в некоторой окрестности Y, и обозначим продолженную функцию через ψ. Итак, ψ — функция, определенная на X, и форма $\alpha - \pi^* d\psi$ равна нулю на Λ, где через π обозначена проекция $T^*X \to X$. Другими словами, форма α равна нулю на Λ_ψ, т. е. Λ_ψ — нормальное расслоение для Y. Следовательно, мы доказали

Предложение 4.5. *Предположим, что Λ — такое лагранжево подмногообразие в T^*X, что $\Lambda \to X$ имеет постоянный ранг. Тогда локально существует такая гладкая функция ψ, что Λ_ψ — нормальное расслоение $Y = \pi(\Lambda)$.*

Докажем теперь теорему 4.4. Введем координаты $(t, \ y) = (t^1, \ \ldots, \ t^k, \ y^1, \ \ldots, \ y^{n-k})$ около Y, отвечающие предложению; при этом Y задается условием $t = 0$. Можно считать, что функция ψ из предложения зависит только от y. Отсюда следует, что можно выбрать фазовую функцию φ для Λ вида

$$\varphi(x, \ \theta) = \psi(y) + t^1\theta_1 + \ldots + t^k\theta_k,$$

и, значит, асимптотику, ассоциированную с Λ, можно переписать в виде

$$\mu = \left(\int a(x, \ \theta, \ \tau)\, e^{i\tau(\psi(y) + t^1\theta_1 + \ldots + t^k\theta_k)}\, d\theta\right)(dx)^{1/2},$$

а тогда символ μ в точке $d\psi + \theta_1\, dt^1 + \ldots + \theta_k\, dt^k$ равен

$$\sigma(\mu) = (2\pi i\tau)^{-k/2} a_0(x, \ \theta, \ \tau)\,(dy\, d\theta)^{1/2}. \tag{4.15}$$

Идеал функций, равных нулю на Λ, (локально) порождается функциями

$$t^1, \ \ldots, \ t^k \quad \text{и} \quad \eta_1 - (\partial\psi/\partial y^1), \ \ldots, \ \eta_{n-k} - (\partial\psi/\partial y^{n-k}),$$

где η — дуальные переменные к y. Достаточно доказать формулу (4.14) для случая, когда P — умножение на t_j или дифференциальный оператор $(i\tau)^{-1}(\partial/\partial y^j)-(\partial\psi/\partial y^j)$. Для умножения на t^j формула (4.14) сразу вытекает из явного вида μ и $\sigma(\mu)$. Остальные операторы содержат только координаты y. Значит, мы можем воспользоваться доказательством транспортного уравнения, данным в § 6 гл. II, считая t и θ параметрами.

Во многих интересных ситуациях форма α не является точной, но класс когомологий $(1/2\pi)[\alpha]$ целочисленный, другими словами, интеграл $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\alpha$ равен целому числу для любой замкнутой кривой γ на Λ. В этом случае можно развить символическое исчисление, аналогичное построенному выше, для асимптотик, в которых τ пробегает только целочисленные, а не все вещественные значения. Прежде чем развивать эту идею, заметим, что если класс $(1/2\pi)[\alpha]$ целочислен на Λ, то можно записать $\alpha=d\varphi$ на Λ, где φ определяется с точностью до слагаемых, кратных 2π. Другими словами, φ корректно определено как отображение в $\mathbf{R}/\{2\pi\mathbf{Z}\}$, а это множество можно отождествить с едииичной окружностью S^1. Таким образом, мы доказали

Предложение 4.6. *Если* $(1/2\pi)\alpha$ *имеет целые периоды, то существует такое отображение* $\varphi\colon \Lambda\to S^1$, *определенное однозначно с точностью до полного оборота* S^1, *что* $\alpha=\varphi^*\,d\theta$ *на* Λ, *где* θ — *угловое переменное на* S^1.

Рассмотрим теперь лагранжевы пары $(\Lambda,\ \varphi)$, где φ — отображение $\Lambda\to S^1$ и $\varphi^*\,d\theta=\alpha$ на Λ. Легко видеть, что эти новые лагранжевы пары обладают теми же функториальными свойствами, что и рассмотренные выше. Если $f\colon X\to Y$ удовлетворяет условию трансверсальности для поднятия, то $f^*(\Lambda,\ \varphi)=(f^*\Lambda,\ f^*\varphi)$ определяется как выше, где $(\Lambda,\ \varphi)$ — лагранжева пара в T^*Y, и аналогично для опускання. Как и прежде, определяются допустимые параметризации лагранжевых пар.

Рассмотрим теперь асимптотики, в которых параметру τ разрешается пробегать только целочисленные значения. Две последовательности полуформ $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ называются асимптотически равными, если $n^k(u_n-v_n)$ стремится к нулю в C^∞-топологии. Класс эквивалентности таких последовательностей называется *$\mathbf{Z}$-асимптотической полуформой*, или *целочисленной асимптотической полуформой*, или просто асимптотической полуформой, если из контекста ясно, что мы имеем дело с целочисленными асимптотиками. Для этих объектов без труда можно доказать функториальные свойства, аналогичные рассмотренным выше.

Понятие асимптотического разложения сохраняется в прежнем виде, за исключением того, что τ принимает лишь целочисленные значения, а коэффициенты a_i в асимптотическом разложении $\sum a_i n^i$ определены однозначно.

Если задана лагранжева пара (Λ, φ), то будем говорить, что асимптотическая полуформа $\{\mu_n\}$ ассоциирована с (Λ, φ), когда μ_n — локально конечная сумма (фиксированного числа) членов вида $\pi_* \nu_n e^{in\varphi_1}$, где

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathbf{R} \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \\ X & & \end{array}$$

— допустимая параметризация (Λ, φ) и где $\{\nu_n\}$ допускает асимптотическое разложение по степеням n. Порядок этой асимптотики по определению полагается равным $m-k/2$, где m — степень главного члена в разложении $\{\nu_n\}$, а k — размерность слоя.

Если ψ — гладкая функция на X и graph $d\psi$ трансверсально пересекает Λ в (x_0, ξ_0), а a — полуформа с компактным носителем, то интеграл $\int\limits_X \mu_n \bar{a} e^{-in\psi}$ допускает асимптотическое разложение вида $e^{icn} \sum b_i n^i$ с главным членом порядка $d = (\operatorname{ord} \mu) - (\dim X)/2$ и с $c = \varphi(x_0, \xi_0) - \psi(x_0)$. Конечно, здесь c определено только с точностью до кратных 2π, но выражение e^{icn} определено корректно, поскольку n — целое. Легко проверить, что доказательство теоремы 4.1 фактически не меняется при переходе к целочисленным асимптотикам. Объединяя теоремы 4.1, 4.2 и 4.3, получаем следующее утверждение:

Теорема 4.7. *Пусть (Λ, φ) — целочисленная лагранжева пара в T^*X и μ — асимптотическая полуформа, ассоциированная с (Λ, φ). Тогда μ имеет корректно определенный символ вида $n^d\nu$, где d — порядок μ, а ν — полуформа на Λ, не зависящая от n. Символ определяет μ с точностью до асимптотик более низкого порядка и коммутирует с операциями поднятия и опускания.*

Под асимптотическим дифференциальным оператором в целочисленной теории, как в гл. II, будем понимать выражение вида $\sum n^{-j} P_j(x, D)$, где $P_j(x, D)$ — дифференциальный оператор в обычном смысле (т. е. не зависящий от n) и порядок P_j меньше или равен j. Главный и субглавный символы этого выражения определяются как в гл. II. Для целочисленных асимптотик имеет место аналог теоремы 4.4, причем доказательство требует лишь небольших изменений:

Теорема 4.8. *Пусть $p = \sigma(P)$. Если $p = 0$ на Λ и μ — составная асимптотика, ассоциированная с (Λ, φ), то $P\mu$ — составная асимптотика на единицу меньшего порядка и*

$$\sigma(P\mu) = (1/n)\left(i^{-1}\eta_p\mu + \sigma_{\text{sub}}(P)\,\mu\right).$$

В качестве применения этой теоремы мы воспроизведем результаты Симмса о квантовых энергетических уровнях одномерного гармонического осциллятора (§ 8 гл. V) в контексте целочисленных асимптотик. Мы ищем решения асимптотического дифференциального уравнения

$$(1/2n^2)(d^2\psi/dx^2)+(E_0+(1/n)E_1-x^2/2)\psi=0,$$

где E_0 и E_1 — константы, которые нужно найти. Главный символ рассматриваемого оператора имеет вид $E_0-\frac{1}{2}(x^2+\xi^2)$, а субглавный символ равен E_1. Мы должны искать лагранжевы подмногообразия Λ_{E_0}, на которых символ равен нулю, а $(1/2\pi)\alpha$ имеет целочисленный период. Ясно, что Λ_{E_0} — это окружность радиуса $\sqrt{2E_0}$, а что касается условия целочисленности, то по теореме Стокса

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda_{E_0}}\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{x^2+\xi^2\leqslant 2E_0}dx\,d\xi=E_0.$$

Поэтому E_0 должно быть целым числом, и если мы хотим, чтобы период $\alpha/2\pi$ был в точности равен 1, то E_0 должно равняться 1, а Λ_{E_0} должно быть единичной окружностью S^1. Мы будем определять E_1, решая транспортное уравнение на S^1. Для этого зададим на S^1 металинейную структуру. Поскольку $H^1(S^1, \mathbf{Z}_2)=\mathbf{Z}_2$ и $H^2(S^1, \mathbf{Z}_2)=0$, на S^1 имеется в точности две металинейные структуры (см. § 8 гл. V). Для одной из них класс Штифеля — Уитни расслоения полуформ представляет собой нулевой элемент группы $H^1(S^1, \mathbf{Z}_2)$; мы назовем ее *тривиальной* металинейной структурой. Для другой класс Штифеля — Уитни является ненулевым элементом; ее мы будем называть нетривиальной металинейной структурой. Как мы видели в гл. V, металинейная структура на $\mathbf{R}$ индуцирует метаплектическую структуру на $T^*\mathbf{R}=\mathbf{R}^2$ и эта метаплектическая структура индуцирует нетривиальную металинейную структуру на каждой окружности. Напомним определение этих двух металинейных структур. Если мы возьмем расслоение базисов для S^1 и профакторизуем по действию $\mathbf{R}^+$, то получим два экземпляра S^1. Металинейная накрывающая этого «редуцированного» расслоения базисов для S^1 должна состоять или из четырех экземпляров S^1, или из двух экземпляров S^1. В последнем случае накрывающее отображение имеет вид $z\longmapsto z^2$. Первый случай — это тривиальная металинейная структура: действие $\mathbf{Z}_4$ просто переставляет четыре экземпляра S^1. Во втором случае образующая $\mathbf{Z}_4$ действует так: z в первом экземпляре переводит в $-z$ во втором экземпляре, затем в $-z$ в первом экземпляре и, наконец, в z во втором экземпляре.

Фиксируем такую полуформу ρ_0 в $\theta=0$ на S^1, что $\rho_0^2=d\theta_0$. Существует единственное непрерывное сечение ρ расслоения полуформ над полуинтервалом $[0, 2\pi)$, для которого $\rho(0)=\rho_0$ и $\rho^2=d\theta$. Мы утверждаем, что

Для тривиальной металинейной структуры $\rho(2\pi)=\rho(0)$, *в то время как для нетривиальной металинейной структуры* $\rho(2\pi)=-\rho(0)$.

Действительно, поскольку $\rho(2\pi)^2=d\theta$, должно быть $\rho(2\pi)=\pm\rho(0)$. Если $\rho(2\pi)=\rho(0)$, то расслоение полуформ допускает нигде не обращающееся в нуль сечение, а значит, это расслоение тривиально. Итак, для нетривиальной металинейной структуры должно быть $\rho(2\pi)=-\rho(0)$. Транспортное уравнение на S^1 принимает вид

$$-(1/i)(\partial\mu/\partial\theta)+E_1\mu=0,$$

где μ — полуформа на S^1. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\mu=(\mathrm{const})\,e^{iE_1\theta}\rho,$$

где ρ — введенная выше полуформа. Итак, должно быть $e^{iE_12\pi}=1$ для тривиальной металинейной структуры и $e^{iE_12\pi}=-1$ для нетривиальной металинейной структуры. Но, как мы знаем, металинейная структура на $\mathbb{R}$ индуцирует нетривиальную металинейную структуру на $\mathbb{R}^2$, а значит, нетривиальную металинейную структуру на каждой окружности; отсюда следует, что правильное квантование для энергетических уровней — это $n+{}^1/_2$.

§ 5. Поведение составных асимптотик в точке и теорема Бернштейна

Мы начнем изучение составных асимптотик с изучения их поведения в точке. Для заданной составной асимптотики вида

$$\int e^{i\tau\varphi(x,\,\theta)}\mu(x,\,\theta)\,d\theta$$

мы изучим ее поведение как функции частоты τ, когда x фиксировано. Позднее мы увидим, что асимптотическое поведение по частоте может сильно меняться от точки к точке в x-пространстве и что геометрическое исследование этого изменения очень важно для физических приложений и может быть довольно сложным. Тем не менее оказывается, что при фиксированном x поведение довольно простое. Заметим, что, поскольку x фиксировано, нет необходимости писать его в выражении для интеграла. Итак, в этом параграфе мы будем в основном заниматься асимптотической оценкой интегралов вида

$$I(\mu,\,\tau)=\int e^{i\tau\varphi(\theta)}\mu(\theta)\,d\theta, \tag{5.1}$$

где φ — гладкая функция, определенная на некотором компактном подмножестве A в $\mathbf{R}^n$, а μ — гладкая функция с носителем на A. С самого начала мы наложим на φ ограничение, на вид очень сильное: мы будем предполагать, что φ — *полином*. Это предположение не столь ограничительно, как кажется. Пусть, например, φ — гладкая функция на $\mathbf{R}^n$ с особенностью в 0. Предположим, что первые производные $\partial\varphi/\partial\theta_1, \ldots, \partial\varphi/\partial\theta_n$ порождают идеал конечной коразмерности в $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, где $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ — кольцо ростков гладких функций в начале $\mathbf{R}^n$. Тогда можно сделать C^∞-замену координат в окрестности 0 так, что в новых координатах φ будет полиномом (см. приложение I после гл. I). Оказывается, что указанное выше условие выполняется в некотором смысле для большинства функций φ; именно, множество тех φ, для которых оно не выполняется, имеет «бесконечную коразмерность» в пространстве всех функций (см. Тужрон [5]).

Если φ — полином, то он имеет лишь конечное число критических значений. Сузим A так, чтобы φ принимал на A только одно из своих критических значений, скажем a_0. Асимптотическое поведение интеграла (5.1) полностью описывается следующей теоремой И. Н. Бернштейна [6]:

Теорема 5.1. *Существует такая последовательность показателей $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ и неотрицательных целых чисел $l_1, l_2, \ldots, l_k$, что*

$$\int e^{i\tau\varphi}\mu\, d\theta \sim e^{i\tau a_0} \sum_{i=1}^{k} \sum_{l=0}^{l_i} \tau^{\varepsilon_i} (\log\tau)^l \sum_{j=0}^{\infty} a_{ijl}(\mu)\, \tau^{-j}, \tag{5.2}$$

где a_{ijl} — распределения, а $a_{ijl}(\mu)$ — значения этих распределений на гладких функциях μ.

Первый шаг в доказательстве, который мы здесь опишем лишь в общих чертах, состоит в сведении (5.2) к эквивалентному, но более алгебраическому утверждению.

Заменяя φ на $\varphi - a_0$, что не меняет (5.2), мы можем предполагать, что рассматриваемое критическое значение φ — это 0. Поэтому при $s \neq 0$ множество точек $\{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = s\}$ пересекает окрестность A по гладкому многообразию; поэтому для каждой $\mu \in C_0^\infty(A)$ при $s \neq 0$ корректно определен интеграл

$$J(\mu, s) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \mu\, d\rho_s,$$

где $d\rho_s$ — это $(n-1)$-форма на поверхности $\varphi = s$, определяемая из соотношения $d\varphi \wedge d\rho_s = d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n$.

Переписывая (5.1) в виде

$$(2\pi)^n \int e^{i\tau s} J(\mu, s)\, ds,$$

мы видим, что $J(\mu, s)$ — преобразование Фурье $I(\mu, \tau)$; поэтому асимптотическое поведение $I(\mu, \tau)$ при $\tau=\infty$ полностью определяется сингулярным поведением $J(\mu, s)$ при $s=0$, и обратно. Пусть φ_+ — функция, равная φ при $\varphi \geqslant 0$ и нулю при $\varphi < 0$. Тогда

$$\int \varphi_+^z \mu \, d\theta = \int_0^\infty s^z J(\mu, s) \, ds, \tag{5.3}$$

когда $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, $z \in \mathbf{C}$. Мы наложили условие $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, поскольку в противном случае подынтегральное выражение в (5.3) не будет интегрируемой функцией. Тем не менее, (5.3) — голоморфная функция от z, и имеет смысл выяснить, можно ли ее аналитически продолжить на большее множество точек $z \in \mathbf{C}$. Предположим, например, что $J(s) = s^{-\varepsilon}\rho(s)$ при $s > 0$, где функция $\rho(s)$ имеет компактный носитель и является гладкой на всей вещественной оси. Тогда

$$\int_0^\infty s^z J(s) \, ds = \int_0^\infty s^{z-\varepsilon} \rho(s) \, ds$$

— мероморфная функция от z для всех $z \in \mathbf{C}$ с полюсами в точках $\varepsilon - 1$, $\varepsilon - 2$, $\varepsilon - 3$ и т. д. (см. Гельфанд и Шилов [7]). И. Н. Бернштейн [6] доказал, что этот пример является весьма типичным, а именно, он доказал[1]), *что для всех полиномов* φ *функция* (5.3) *мероморфна по* z *на всей комплексной плоскости и ее полюсы лежат в конечном числе арифметических прогрессий*

$$\varepsilon_i - 1, \ \varepsilon_i - 2, \ \ldots, \tag{5.4}$$

$i = 1, \ldots, k$, причем порядок полюса равен фиксированному целому числу l_i в каждой точке последовательности $(5.4)_i$. Двигаясь в обратном направлении, можно показать, что $J(s)$ допускает около $s=0$ асимптотическое разложение вида

$$J(s) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{l=0}^{l_i} s^{-\varepsilon_i} (\log s)^l \sum a_{ijl} s^j. \tag{5.5}$$

Взяв обратное преобразование Фурье от (5.5), получаем (5.2).

Для доказательства этих утверждений относительно (5.3) И. Н. Бернштейн показал, что существует дифференциальный оператор $P(x, \lambda, \partial/\partial x)$ порядка m, коэффициенты которого — по-

---

[1]) Это утверждение было высказано в качестве гипотезы И. М. Гельфандом. Его первоначальное доказательство получили независимо И. Н. Бернштейн и С. И. Гельфанд [20] и Атья [19] при помощи теоремы Хиронака о разрешении особенностей. В [6] получено непосредственное доказательство этого факта. — *Прим. перев.*

линомы от $x \in \mathbf{C}^n$ и $\lambda \in \mathbf{C}$ и для которого при $\operatorname{Re} \lambda > m$

$$P\left(x, \lambda, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi_+^\lambda = q(\lambda) \varphi_+^{\lambda-1}, \tag{5.6}$$

где $q(\lambda)$ — полином от λ. (Заметим, что при $\operatorname{Re} \lambda > m$ функция φ_+^λ m-кратно дифференцируема по x, т. е. (5.6) имеет смысл.) Пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — корни $q(\lambda)$. Пользуясь (5.6), можно определить φ_+^λ как распределение по x для всех λ, отличных от (5.4), при помощи следующей простой индуктивной процедуры. Если φ_+^z уже определена в полосе $|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0| < \varepsilon$, не содержащей точек из (5.4), то, пользуясь левой частью (5.6), определим ее при $|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0 - 1| < \varepsilon$. Поскольку φ_+^z уже определена при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, тем самым она определена для всех z, исключая (5.4).

Итак, утверждение (5.2) теперь преобразовано в чисто алгебраическое утверждение. Именно, для данного полинома $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ с комплексными коэффициентами рассмотрим множество всех конечных сумм выражений вида $p(\lambda, x) \varphi^{\lambda-k}$, где $p(\lambda, x)$ — полином от x, коэффициенты которого — элементы функционального поля $\mathbf{C}(\lambda)$. Пусть M_φ — факторпространство, полученное отождествлением двух таких выражений, скажем $p_1\varphi^{\lambda-k_1}$ и $p_2\varphi^{\lambda-k_2}$, если $\varphi^{k_1}p_2 = \varphi^{k_2}p_1$. Пусть Ω_n — кольцо всех формальных дифференциальных операторов вида

$$\sum a_\alpha(x, \lambda) \frac{\partial}{\partial x^\alpha},$$

где $a_\alpha(x, \lambda)$ — полиномы от x с коэффициентами из поля $k = \mathbf{C}(\lambda)$. Тогда M_φ можно превратить в Ω_n-модуль, потребовав, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p\varphi^{\lambda-k}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} p\right) \varphi^{\lambda-k} + (\lambda - k) p\varphi^{\lambda-k-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \tag{5.7}$$

и $\quad x_i(p\varphi^{\lambda-k}) = (x_i p) \varphi^{\lambda-k}$.

Ясно, что (5.6) эквивалентно следующему чисто алгебраическому утверждению об элементе φ^λ в M_φ:

$$P\left(x, \lambda, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi^\lambda = q(\lambda) \varphi^{\lambda-1}. \tag{5.8}$$

Еще одно последнее наблюдение. Для доказательства существования $P \in \Omega_n$, удовлетворяющего (5.8), необходимо и достаточно доказать следующее утверждение:

Теорема 5.2. *M_φ конечно-порожден как Ω_n-модуль.*

Действительно, пусть $p\varphi^{\lambda-k_i}$, $i = 1, \ldots, r$, — множество образующих и $k = \max k_i$. Из того факта, что $\varphi^{\lambda-k-1}$ можно представить как линейную комбинацию $p_i\varphi^{\lambda-k_i}$ с коэффициентами из Ω_n, получается уравнение вида

$$p\left(x, \lambda, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi^{\lambda-k} = \varphi^{\lambda-k-1}.$$

Заменяя в этом уравнении $\lambda - k$ на λ, получаем (5.8). Обратно, (5.8) показывает, что M_φ порождается элементами φ^λ.

Для полноты изложения мы включим доказательство теоремы 5.2, посвятив ему следующее далее приложение.

Приложение к § 5

Для доказательства теоремы 5.2 нам потребуются некоторые классические результаты из коммутативной алгебры. Пусть k — поле характеристики нуль и $S = S_m$ — полиномиальное кольцо $k[x_1, \ldots, x_m]$; S_m — градуированное кольцо: $S_m = \sum S_m^i$, где S_m^i — пространство однородных полиномов степени i. Пусть $M = \sum M^i$ — конечно-порожденный градуированный S_m-модуль.

Теорема А.5.1. *Существует такой полином $p(t)$ с рациональными коэффициентами, что для достаточно больших i имеем* $\dim M^i = p(i)$.

Замечание. $p(t)$ — это так называемый *полином Гильберта* модуля M.

Доказательство (индукция по m). Пусть $x = x_m$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Ann}(x)^i \to M^i \to M^{i+1} \to (M/xM)^{i+1} \to 0,$$

где $\mathrm{Ann}(x)$ — множество таких $a \in M$, что $xa = 0$, а отображение в середине — умножение на x. Тогда

$$\dim M^{i+1} - \dim M^i = \dim (M/xM)^{i+1} - \dim \mathrm{Ann}(x)^i. \qquad (\text{A}.5.1)$$

Далее, M/xM и $\mathrm{Ann}(x)$ — конечно-порожденные модули над $S_{m-1} = k[x_1, \ldots, x_{m-1}]$; поэтому для достаточно больших i правая часть (А.5.1) — полином от i. Суммируя левые части от 0 до i, получаем, что то же самое верно и для $\dim M^i$. Доказательство окончено.

Пусть $p(t) = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i t^i$, $a_d \neq 0$. Тогда $d = d(M)$ называется *размерностью* модуля M. Ясно, что коэффициенты $p(t)$ — рациональные числа, т. е. $a_i = (p_i/q_i)$, где p_i и q_i целые. Для достаточно большого κ числа $p(\kappa q_1 q_2 \ldots q_d + i)$ целые для всех i, т. е. $p(i)$ — целые для всех i. Хорошо известно, что все полиномы с этим свойством являются линейными комбинациями с целочисленными коэффициентами полиномов $\binom{t}{r} = t(t-1)\ldots(t-r+1)/r!$ (см. Зарисский и Самюэль [8, гл. VII]). В частности, $e(M) = a_d d!$ — целое число.

Перейдем теперь к определению инвариантов, аналогичных $d(M)$ и $e(M)$, для конечно-порожденных модулей M над кольцом $\Omega =$

$=\Omega_n$. Напомним, что Ω_n — кольцо формальных дифференциальных операторов вида

$$a=\sum a_\alpha(x)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{A.5.2}$$

с $a_\alpha(x)\in k[x_1, \ldots, x_n]$ и $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}=\dfrac{\partial}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\dfrac{\partial}{\partial x_n^{\alpha_n}}$. Положим, по определению,

$$\Omega^\kappa=\{a\in\Omega \mid \text{ степень } a_\alpha+|\alpha|\leqslant\kappa \text{ в (A.5.2)}\}.$$

Система Ω^κ является фильтрацией Ω в смысле теории колец: $\Omega^\kappa\subset\Omega^{\kappa+1}$, $\bigcup\Omega^\kappa=\Omega$ и $\Omega^i\cdot\Omega^j\subset\Omega^{i+j}$. Градуированное кольцо $\mathrm{gr}\,\Omega=\Omega^1/\Omega^0+\ldots$ изоморфно S_m, $m=2n$. Пусть M является Ω_n-модулем. Напомним, что фильтрация M — это такая последовательность конечномерных подпространств (над k) $M^0\subset M^1\subset\subset M^2\subset\ldots$, что $\bigcup M^i=M$ и $\Omega^iM^j\subset M^{i+j}$. Назовем фильтрацию допустимой, если $\Omega^iM^\kappa=M^{\kappa+i}$ для достаточно большого κ и произвольного i. Поскольку M^i предполагаются конечномерными над k, ясно, что модуль M имеет допустимую фильтрацию тогда и только тогда, когда он конечно-порожден. Докажем два предложения о таких фильтрациях.

Предложение A.5.2. *Пусть* $\{M^i, i=0, 1, 2, \ldots\}$ — *допустимая фильтрация модуля* M. *Тогда существует такой полином* $p(t)$, *что для достаточно больших* i *имеем* $\dim M^i=p(i)$. *Кроме того, если* $p(t)=\sum\limits_{r=0}^{d}a_rt^r$ *с* $a_d\neq0$, *то* $e(M)=a_dd!$ — *целое число; ни* $e(M)$, *ни* $d(M)=d$ *не зависят от фильтрации, т. е. являются инвариантами* M.

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы A.5.1: нужно лишь применить ее к $\mathrm{gr}\,\Omega$ и $\mathrm{gr}\,M$. Предположим, что $\{M^i\}$ и $\{M_1^i\}$ — две допустимые фильтрации. Мы можем взять r, s, t очень большими, так чтобы

$$M^r\subset M_1^s\subset M^t.$$

Поскольку фильтрации допустимы, отсюда следует, что для всех i

$$M^{r+i}\subset M_1^{s+i}\subset M^{t+i},$$

т. е. что $p(r+i)\leqslant p_1(s+i)\leqslant p(t+i)$ для всех i. Это показывает, что степень p и его старший коэффициент равны степени p_1 и его старшему коэффициенту. Доказательство окончено.

Предложение A.5.3. *Пусть* $0\to M_1\to M\to M_2\to0$ — *точная последовательность конечно-порожденных* Ω-*модулей. Тогда* $d(M)=\max(d(M_1), d(M_2))$. *Если* $d(M_1)>d(M_2)$ (*или* $d(M_2)>d(M_1)$), *то* $e(M)=e(M_1)$ (*или* $e(M)=e(M_2)$). *Если* $d(M_1)=d(M_2)$, *то* $e(M)=e(M_1)+e(M_2)$.

Доказательство. Пусть $\{M^i\}$ — допустимая фильтрация M. Пусть M_2^i — образ M^i в M_2 и M_1^i — прообраз M^i в M_1. Ясно, что $\{M_2^i\}$ — допустимая фильтрация M_2. Мы покажем, что $\{M_1^i\}$ — допустимая фильтрация M_1. Заметим вначале, что $\sum M_1^i/M_1^{i-1}$ является S_m-подмодулем в $\sum M^i/M^{i-1}$. Поскольку второй модуль является нетеровым, это верно и для первого. В частности, первый модуль конечно-порожден; поэтому для достаточно больших κ имеем $\Omega^i M_1^\kappa = M_1^{\kappa+i}$ для всех i. Для завершения доказательства предложения А.5.3 заметим, что $\dim M^i = \dim M_1^i + \dim M_2^i$. Доказательство закончено.

Основной результат И. Н. Бернштейна состоит в следующем.

Теорема А.5.4. *Если* M — *конечно-порожденный* Ω_n-*модуль, то либо* $M=\{0\}$, *либо* $d(M)\geqslant n$.

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, посмотрим, как из нее следует теорема 5.2. Поскольку в теореме 5.2 приходится иметь дело с модулями, которые могут не быть конечно-порожденными, вначале нужно ввести понятие допустимой фильтрации для таких модулей.

Определение А.5.5. Пусть M — некоторый Ω_n-модуль и $\{M^i,\ i=0, 1, 2, \ldots\}$ — его фильтрация. Будем говорить, что $\{M^i\}$ является (d, e)-фильтрацией, если $\dim M^i \leqslant (e/d!)\, i^d + o(i^d)$ для всех i.

Например, если M — конечно-порожденный Ω_n-модуль, то любая допустимая фильтрация M является $(d(M), e(M))$-фильтрацией. Ясно, что если M имеет (d, e)-фильтрацию и L — произвольный конечно-порожденный подмодуль в M, то $d(L)\leqslant d$, и если $d(L)=d$, то $e(L)\leqslant e$.

Лемма А.5.6. *Пусть* M — *некоторый* Ω_n-*модуль, имеющий* (d, e)-*фильтрацию. Тогда, если* $d<n$, *то* $M=\{0\}$, *а если* $d=n$, *то* M *имеет конечную длину, не превосходящую* e. (*В частности,* M *конечно-порожден.*)

Доказательство. Если M ненулевой, то он содержит ненулевой конечно-порожденный подмодуль, т. е. первое утверждение — прямое следствие теоремы 5.4. Для доказательства второго утверждения пусть $\{0\}=M_0\subset M_1\subset\ldots\subset M_\kappa\subset M$ — цепочка подмодулей с $M_i\neq M_{i+1}$. Пусть f_i — элемент $M_i - M_{i-1}$, и пусть $L_i=\Omega(f_1, \ldots, f_i)$. Как мы заметили выше, $d(L_i)\leqslant n$, поэтому, согласно теореме А.5.4, $d(L_i)=n$; следовательно, опять-таки по теореме А.5.4, $d(L_i/L_{i-1})=n$. Поскольку $e(L_i/L_{i-1})\geqslant 1$, из предложения А.5.3

следует, что $e(L_\kappa) \geqslant \kappa$. Но $e(L_\kappa) \leqslant e$, стало быть, длина M не превосходит e. Доказательство закончено.

Теперь рассмотрим модуль M_φ из теоремы 5.2. Если φ имеет степень r, этот модуль имеет $(n,\ (r+1)^n)$-фильтрацию, которую мы зададим, полагая

$$M_\varphi^i = \{p\varphi^{\lambda-i} \mid \deg p \leqslant (r+1)\, i\}.$$

Тот факт, что это фильтрация, непосредственно следует из (5.7), а то, что это $(n,\ (r+1)^n)$-фильтрация, следует из того, что размерность M^i меньше или равна

$$\binom{n+(r+1)\, i}{n} = \frac{(r+1)^n}{n!} i^n + O(i^{n-1}).$$

По лемме A.5.6, M_φ конечно-порожден, и теорема A.5.2 доказана.

Прежде чем доказывать теорему A.5.4 со всей строгостью, удобно дать ее эвристическое доказательство, навеянное теорией представлений групп. Чтобы показать, что $d(M) \geqslant n$, по предложению A.5.3 достаточно доказать, что существует подмодуль L, для которого $d(L) \geqslant n$. Пусть e — фиксированный ненулевой элемент M и L — подмодуль Ωe. Он изоморфен Ω/I, где I — левый идеал $\{a \in \Omega \mid ae = 0\}$. Легко видеть, что Ω — левое нетерово кольцо (это простое следствие того, что $\operatorname{gr} \Omega$ нетерово), т. е. I содержится в его максимальном левом идеале J. Поэтому по предложению A.5.3 достаточно доказать, что $d(\Omega/J) \geqslant n$ для максимальных левых идеалов J.

Далее, Ω_n можно рассматривать как универсальную обертывающую алгебру $(2n+1)$-мерной алгебры Гейзенберга H_n, профакторизованную по $H_n(z-1)$, где z — элемент центра в алгебре Гейзенберга. Предположим, что k — поле вещественных чисел. По теореме Стоуна — фон Неймана имеется единственное унитарное неприводимое представление группы Гейзенберга, при котором z представляется единичным оператором. Пространство, в котором реализуется это представление, — это пространство L^2 функций на $\mathbf{R}^n$, а само представление таково, что x_i и $\partial/\partial x_i$ представляются обычным образом как оператор умножения и дифференциальный оператор. Если бы была справедлива аналогичная формальная теорема Стоуна — фон Неймана для представления Ω_n на Ω_n/J, то соотношение $d(\Omega_n/J) = n$ было бы ее легким следствием. Такая теорема и в самом деле была доказана Филипом Траубером; однако ее точная формулировка несколько сложнее, и мы вместо этого приведем оригинальное доказательство И. Н. Бернштейна теоремы A.5.4 (которое само по себе короткое и элегантное).

Доказательство будем вести индукцией по n. Предположим, что теорема A.5.4 справедлива для Ω_{n-1}, и докажем ее для Ω_n. Будем также предполагать, что поле k алгебраически замкнуто и несчетно (если это не так, то вложим его в расширение k с этим свойством и заменим Ω и M на $\Omega \otimes \bar{k}$ и $M \otimes \bar{k}$). Пусть $t = x_n \in \Omega_n$.

Лемма А.5.7. *Для некоторого $\alpha \in k$ отображение M в M, задаваемое умножением на $t-\alpha$, не является обратимым (как линейное отображение над k).*

Доказательство. Если бы для всех $\alpha \in k$ умножение на $t-\alpha$ было обратимым, то мы бы получили гомоморфизм поля $k(t)$ рациональных функций в кольцо линейных отображений векторного пространства M. Выберем $f \in M$, $f \neq 0$, и поставим в соответствие каждому $Q \in k(t)$ элемент $Qf \in M$. Рассмотрим это соответствие как отображение векторного пространства $k(t)$ в векторное пространство M (оба являются векторными пространствами над k). При этом $k(t)$ имеет несчетную размерность над k (элементы $(t-\alpha)^{-1}$, $\alpha \in k$, линейно независимы), в то время как M имеет счетную размерность над k. Отсюда следует, что $Qf = 0$ для некоторого Q. Но Q, будучи произведением обратимых линейных отображений, должно быть обратимым. Мы пришли к противоречию, и лемма доказана.

Следствие. *Существует такой элемент $\alpha \in k$, что выполняется одно из следующих условий:*

(a) *отображение $(t-\alpha)$: $M \to M$ инъективно и $M/(t-\alpha)M \neq 0$;*

(b) $\ker(t-\alpha) \neq 0$.

Мы покажем, что (a) не имеет места, если $d(M) < n$. Рассмотрим $\tilde{M} = M/(t-\alpha)M$ как Ω_{n-1}-модуль. По предположению M имеет допустимую фильтрацию $\{M^i\}$, для которой $\dim M^i - \dim M^{i-1}$ — полином степени $< n-1$; значит, для факторфильтрации $\tilde{M}$ имеем

$$\dim \tilde{M}^i = \dim M^i - \dim (M^i) \cap (t-\alpha) M \leqslant$$
$$\leqslant \dim M^i - \dim (t-\alpha) M^{i-1} = \dim M^i - \dim M^{i-1}.$$

Итак, фильтрация на $\tilde{M}$ является (d, e)-фильтрацией с $d < n-1$. По индукции $\tilde{M} = 0$.

Рассмотрим теперь (b). Делая замену переменных $(t-\alpha) \longmapsto t$, мы можем предполагать, что $\ker t \neq 0$. Заменяя M подмодулем $L = \{f \in M \mid t^r f = 0$ для некоторого $r\}$ для некоторого большого r, мы можем предполагать, что $t^r f = 0$ для всех $f \in M$ и больших r. Мы докажем, что оператор $\partial/\partial t - \alpha$ имеет тривиальное ядро на M для всех $\alpha \in k$. Пусть

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha\right) f = 0 \quad \text{и} \quad t^n f = 0.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha\right) t^n f - t^n \left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha\right) f = n t^{n-1} f = 0, \quad \text{т. е.} \quad t^{n-1} f = 0.$$

Продолжая это рассуждение, получим $t^{n-2}f = \ldots = tf = f = 0$.

Пусть ρ — автоморфизм Ω_n вида

$$\rho(x_i) = x_i, \quad \rho\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n-1;$$

$$\rho(t) = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -t.$$

Рассмотрим Ω_n-модуль M_ρ, полученный из M сплетением при помощи ρ. Ясно, что $d(M_\rho) = d(M)$; значит, если $d(M) < n$, то $d(M_\rho) < n$. Как только что было показано, для M_ρ имеем $\ker(t - \alpha) = 0$ при всех $\alpha \in k$; стало быть, мы вернулись в ситуацию (а), которая, как мы показали, невозможна.

§ 6. Поведение около каустик

Пусть $\nu = \int e^{i\tau\varphi(x,\,\theta)} a(x, \theta; \tau)\, d\theta$ — составная асимптотика, ассоциированная с лагранжевым подмногообразием Λ в $T^*(M)$. Если Λ диффеоморфно проектируется на M, то мы можем применить метод стационарной фазы и, исключив переменные θ, получить асимптотическое разложение ν. В этом параграфе мы хотим исследовать, что происходит около каустик, т. е. около тех значений x, где проекция сингулярна. Поскольку наши рассмотрения полностью локальны, мы можем предполагать, что M — некоторая окрестность начала в $\mathbf{R}^n$, и не заботиться о различении функций, форм, полуформ и т. д. Обозначим через π проекцию Λ на M (т. е. ограничение на Λ проекции $T^*(M) \to M$). Положим, по определению,

$$S_i(\Lambda) = \{\lambda \in \Lambda \mid d\pi_\lambda \text{ имеет ранг } n - i\}. \tag{6.1}$$

Напомним, что, как мы видели в § 5 гл. IV, около $\lambda \in S_i(\Lambda)$ всегда можно параметризовать Λ при помощи i фазовых переменных. Кроме того, для *любой* параметризации Λ, как известно, i — размерность ядра вертикального гессиана $d_\theta^2\varphi$. Это замечание полезно в двух отношениях. Во-первых, применяя метод стационарной фазы, мы можем в окрестности $\lambda \in S_i(\Lambda)$ предполагать, что в выражение для ν в виде асимптотического интеграла входит точно i переменных θ. Ключевой вопрос нескольких следующих параграфов — выяснить, какие дальнейшие упрощения можно сделать в выражении для ν, вводя подходящие локальные координаты. Возможные выборы координат будут основаны на анализе характера особенности. Во-вторых, на основе этого замечания можно вычислить размерность $S_i(\Lambda)$ для лагранжева подмногообразия общего положения. Действительно, мы можем рассматривать $(x, \theta) \longmapsto d_\theta^2\varphi(x, \theta)$ как отображение $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ в пространство симметрических $k \times k$-матриц, где k — число переменных θ. Тогда

$S_i(\Lambda)$ — прообраз S_i при этом отображении, где через S_i обозначено подмногообразие матриц коранга i. Из предложения 3.6 гл. IV известно, что S_i — подмногообразие коразмерности $i(i+1)/2$. По теореме трансверсальности Тома малым возмущением φ можно добиться, чтобы отображение $(x, \theta) \longmapsto d_\theta^2\varphi(x, \theta)$ было трансверсально всем S_i. Малое изменение φ означает малое изменение Λ. Значит, малым изменением Λ можно добиться, чтобы все $S_i(\Lambda)$ стали подмногообразиями коразмерности $i(i+1)/2$; другими словами,

в общем положении $S_i(\Lambda)$ — подмногообразие коразмерности $i(i+1)/2$. (6.2)

При помощи процедуры Тома — Бордмана (см. Голубицкий и Гийемин [9]) можно уточнить классификацию особенностей. Например, следующий шаг заключается в исследовании $S_i(\Lambda)$; пусть $S_{i,j}(\Lambda)$ состоит из точек, для которых ограничение $d\pi$ на $TS_i(\Lambda)_\lambda$ имеет ядро размерности j. Для Λ общего положения это опять будет подмногообразие, и оказывается, что его коразмерность — универсальный кубический полином от i и j (см. Бордман [10] или Голубицкий и Гийемин [9]).

Аналогично строятся $S_{i,j,k}(\Lambda)$. Исследуем особенности типа $S_{1,\ldots,1}$ для лагранжевых подмногообразий. Как мы знаем, в окрестности точек $S_1(\Lambda)$ можно параметризовать Λ фазовой функцией с единственным фазовым переменным θ. Пусть φ: $M \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — фазовая функция и C — ее критическое множество, т. е. множество точек, где $d_\theta\varphi = 0$. Отображение $(x, \theta) \longmapsto d_x\varphi(x, \theta)$ — это сохраняющий слои диффеоморфизм C на Λ, значит, $C \to M$ и $\Lambda \to M$ имеют одни и те же особенности. Исследуем особенности C. Утверждение, что точка $c \in C$ является особой для проекции на M, означает, что в c вертикальный вектор $\partial/\partial\theta$ касается C, т. е. $\partial^2\varphi/\partial\theta^2 = 0$. Таким образом, $S_1(C)$ состоит из тех точек, где $d_\theta\varphi = d_\theta^2\varphi = 0$. Предположим, что эти уравнения независимы, т. е. $S_1(C)$ действительно является подмногообразием в C (коразмерности 1). Касательное пространство к $S_1(C)$ состоит из тех касательных векторов к $M \times \mathbf{R}$, которые аннулируют и $\partial\varphi/\partial\theta$, и $\partial^2\varphi/\partial\theta^2$. Для касательного вектора к $S_1(C)$ обращение в нуль при проектировании на M означает, что он вертикален, т. е. утверждение, что $\partial/\partial\theta$ касается $S_1(C)$, означает, что $\partial^3\varphi/\partial\theta^3 = 0$. Это одно дополнительное уравнение. Если оно не зависит от двух предыдущих, то получаем, что $S_{1,1}$ имеет коразмерность 1 в $S_1(C)$ и, значит, коразмерность 2 в C. Теперь ясно, как надо действовать. Пусть $w(\varphi)$: $M \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n+1}$ определяется формулой

$$w(\varphi)(x, \theta) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(x, \theta), \ldots, \frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial\theta^{n+1}}(x, \theta)\right).$$

Пусть $W_k \subset \mathbf{R}^{n+1}$ состоит из точек, у которых первые k компонент равны нулю. Возмущая φ, можно добиться, чтобы $w(\varphi)$ было трансверсально всем W_k. Для таких φ предыдущие соображения показывают, что

$$\underbrace{S_{1,\,\ldots,\,1}}_{k\ \text{раз}}(C) = w(\varphi)^{-1}(W_k)$$

и это подмногообразие коразмерности k в C. Значит,

$\underbrace{S_{1,\,\ldots,\,1}}_{k\ \text{раз}}(\Lambda)$ для Λ общего положения является подмногообразием коразмерности k.

Так, например, если мы интересуемся особенностями общего вида для $\dim M \leqslant 4$, то можем составить такую таблицу:

тип	коразмерность
$S_{1,0}$	1
$S_{1,1,0}$	2
$S_{1,1,1,0}$, $S_{2,0}$	3
$S_{1,1,1,1}$	4

Мы утверждаем, что других возможностей нет. Нам известно, что S_3 имеет коразмерность 6. Исследуем $S_{2,1}$. Можно считать, что $\varphi = \varphi(x, \theta_1, \theta_2)$. Тогда C определяется уравнениями

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_2} = 0.$$

В $c \in S_2(C)$ и $\partial/\partial\theta_1$, и $\partial/\partial\theta_2$ должны касаться S_2, т. е. точки $S_2(C)$ описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_1^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_1\,\partial\theta_2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_2^2} = 0,$$

которые опять-таки показывают, что $S_2(C)$ имеет коразмерность 3. Далее, в точке $S_{2,1}(C)$ должен быть некоторый ненулевой вектор вида $a\dfrac{\partial}{\partial\theta_1} + b\dfrac{\partial}{\partial\theta_2}$, касательный к $S_2(C)$. Значит, матрица

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\theta_1^3} & \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\theta_1^2\,\partial\theta_2} & \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\theta_1\,\partial\theta_2^2} \\ \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\theta_1^2\,\partial\theta_2} & \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\theta_1\,\partial\theta_2^2} & \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\theta_2^3} \end{pmatrix}$$

должна иметь ранг 1. Это матрица вида

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & D \end{pmatrix},$$

и ясно, что она имеет ранг <2, если пара уравнений $AC - B^2 = 0$ и $BD - C^2 = 0$ удовлетворяется при $C \neq 0$ Аналогичные два независимых уравнения получаются на каждом из открытых множеств $A \neq 0$, $B \neq 0$ или $D \neq 0$. Итак, $S_{2,1}$ имеет коразмерность 2 в S_2, а значит, коразмерность 5 в Λ.

Из дальнейшего обсуждения выяснится, что все особенности типа S_1 эквивалентны в любой данной размерности. Особенности типа $S_{2,0}$ можно описать точнее. В трехмерном случае имеется два сорта таких особенностей — эллиптическая омбилика и гиперболическая омбилика. В четырехмерном случае имеется три сорта особенностей типа $S_{2,0}$ — эллиптическая, параболическая и гиперболическая омбилики; см. ниже. Итак, в размерности 4 имеется семь различных типов особенностей лагранжевых многообразий. Они отвечают семи «катастрофам Тома»; см. [11].

Начнем с исследования особенностей общего положения типа $S_{1,0}$ и связанных с ними асимптотик.

Предложение 6.1. *Для $\lambda_0 \in S_{1,0}(\Lambda)$ можно выбрать фазовую функцию $\varphi(x, \theta)$, параметризующую Λ в окрестности λ_0, в виде*

$$\varphi(x, \theta) = \mu(x) + \rho(x)\theta - \frac{\theta^3}{2}, \quad d\rho \neq 0. \tag{6.3}$$

Замечание. Для таких φ критическое множество C, где $\partial\varphi/\partial\theta = 0$, — это множество $\{(x, \theta) \mid \theta^2 = \rho(x)\}$, а каустика — это множество $\rho(x) = 0$. Если мы выберем на X такие координаты $x_1, \ldots, x_n$, что ρ — это x_1, и используем $(\theta, x_2, \ldots, x_n)$ как систему координат на Λ, то отображение $\Lambda \to X$ локально задается так:

$$(\theta, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto (\theta^2, x_2, \ldots, x_n).$$

Другими словами, это отображение, которое «складывает» полупространство $\theta < 0$ с полупространством $\theta > 0$, образуя «складку» вдоль плоскости $\theta = 0$. По этой причине элементы $S_{1,0}(\Lambda)$ называются *точками складки* для Λ.

Считая предложение 6.1 доказанным, можно убедиться, что в окрестности точки складки асимптотика, ассоциированная с Λ, имеет вид

$$\int a(x, \theta)\, e^{i\tau(\mu + \rho\theta - (\theta^3/3))}\, d\theta. \tag{6.4}$$

Упростим правую часть (6.4). Согласно подготовительной теореме Мальгранжа (см., например, Голубицкий и Гийемин [9]), можно найти такие функции $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $h(x, \theta)$, что

$$a(x, \theta) = a_0(x) + a_1(x)\theta + h(x, \theta)(\rho(x) - \theta^2),$$

где $\rho(x) - \theta^2 = \partial\varphi/\partial\theta$. Тогда (6.4) можно переписать так:

$$a_0(x) \int e^{i\tau\varphi(x, \theta)}\, d\theta + a_1(x) \int \theta e^{i\tau\varphi}\, d\theta + \int h(x, \theta) \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} e^{i\tau\varphi}\, d\theta.$$

Последний член в этой сумме равен

$$\int h(x, \theta) \frac{1}{i\tau} \frac{\partial}{\partial\theta} e^{i\tau\varphi}\, d\theta,$$

т. е. имеет порядок $1/\tau$. Интегрируя по частям и повторяя те же соображения, мы докажем (с a_0 и a_1, отличными от введенных выше)

Предложение 6.2. *Существуют асимптотические ряды* $a_0(x, \tau)$ *и* $a_1(x, \tau)$, *зависящие от* $a(x, \theta)$, *такие, что*

$$\int a(x, \theta) e^{i\tau\varphi} d\theta = a_0(x, \tau) \int e^{i\tau\varphi(x, \theta)} d\theta + a_1(x, \tau) \int \theta e^{i\tau\varphi} d\theta. \quad (6.5)$$

Замечание. На самом деле выявить зависимость a_0 и a_1 от a довольно сложно. Это входит как частный случай в следующую проблему.

Пусть задана функция $f(x, \theta)$ на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ с

$$\frac{\partial^i f}{\partial \theta^i}(0) = 0 \quad \text{при} \quad i < n \quad \text{и} \quad \frac{\partial^n f}{\partial \theta^n}(0) \neq 0.$$

Как утверждает подготовительная теорема Мальгранжа, для каждой функции $a = a(x, \theta)$ существуют такие функции $a_0(x), \ldots$ $\ldots, a_{n-1}(x)$ и $h(x, \theta)$, что $a(x, \theta) = \sum a_i(x)\theta^i + hf$. Каким образом a_i и h зависят от a? Если f и a вещественно аналитичны, то h и a_i однозначно определены (согласно той части подготовительной теоремы Вейерштрасса, которая касается единственности), и можно показать (см., например, Арнольд [3]), что отображение

$$a \longmapsto (a_0, \ldots, a_{n-1}, h)$$

ведет себя в некоторых отношениях как дифференциальный оператор порядка $n-1$. Если f и a гладкие, то h и a_i, возможно, даже не определяются однозначно (см., например, Мальгранж [17]).

Для дальнейшего упрощения (6.5) напомним определение функции Эйри:

$$A(t) = \int e^{i(t\theta - (\theta^3/3))} d\theta, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \theta \in \mathbf{R}.$$

Это функция Бесселя порядка $1/3$. Ее свойства исчерпывающе рассмотрены в Таблицах Бюро стандартов [12]. Наряду с рядом других возможностей ее можно характеризовать как решение обыкновенного дифференциального уравнения $A'' + tA = 0$. Это стандартное уравнение для одномерного случая, описывающее переходы от осциллирующего поведения к экспоненциальному. Если предположить, что t — почти константа, то в области $t > 0$ решения уравнения $A'' + tA = 0$ будут приблизительно синусами и косинусами, а в области $t < 0$ они будут приблизительно экспоненциально расти или экспоненциально убывать.

Дифференцируя под знаком интеграла, получаем

$$A'(t) = \int i\theta e^{i(\theta t - (\theta^3/3))} d\theta.$$

Поэтому из (6.3) получается следующая

Теорема 6.1. *Пусть* (x, ξ) — *точка складки для* Λ *и* (x, θ) — *соответствующая критическая точка* φ. *Тогда существуют такие асимптотические ряды* a_0 *и* a_1 *на* M, *что*

$$\int a(x, \theta) e^{i\tau\varphi(x, \theta)} d\theta = e^{i\tau\mu} \left\{ \frac{a_0}{\tau^{1/3}} A(\tau^{2/3}\rho) + \frac{a_1}{\tau^{2/3}} A'(\tau^{2/3}\rho) \right\}.$$

Замечание. Функции Эйри играют важную роль в асимптотической теории уравнения Шредингера (см., например, Мессиа [13]) и стационарного волнового уравнения (см. Людвиг [14]). Приведенная теорема показывает, что этот факт никак не связан со специальными свойствами этих уравнений, а только с наличием особенностей типа складок. В дальнейшем мы воспользуемся стандартными свойствами функций Эйри для описания освещенных и затемненных областей в окрестности простой каустики.

Перейдем, наконец, к доказательству предложения 6.1. Идея доказательства принадлежит Честеру, Фридману и Урселлу [15] (хотя они рассматривали аналитические, а не гладкие данные).

Исходной точкой нашего рассуждения является следующая лемма Уитни:

Пусть f — *гладкая четная функция на вещественной прямой. Тогда существует такая гладкая функция* g *на вещественной прямой, что* $f(x) = g(x^2)$. *Если* f *гладко зависит от некоторых параметров, то* g *можно выбрать так, чтобы она гладко зависела от тех же параметров.*

(См. § 5 гл. VI, где мы пользовались этой леммой в другой ситуации и привели ее доказательство.)

Пусть, далее, Λ — лагранжево многообразие со складкой в (x_0, ξ_0). Предположим для простоты, что $M \subset \mathbf{R}^n$ и что x_0 — начало. Пусть $\varphi = \varphi(x, \theta)$ на $M \times \mathbf{R}$ — фазовая функция, параметризующая Λ в окрестности x_0, и пусть C — ее критическое множество. Предположим, что на C точке (x_0, ξ_0) соответствует начало. Мы докажем следующее утверждение.

Лемма 6.1. *Существуют такие гладкие функции* u_0 *и* ρ *на* M *и* ζ *на* $M \times \mathbf{R}$, *что при ограничении на* C *имеем*

$$\frac{\zeta^3}{3} - \rho\zeta + u_0 = \varphi, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial\theta} > 0, \quad \zeta^2 - \rho = 0. \tag{6.6}$$

Доказательство. Сначала докажем это утверждение в частном случае, когда базисное многообразие M одномерно. Предположение, что начало является точкой складки на C, означает, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\,\partial x} \neq 0 \quad \text{в} \quad 0$$

(см. (6.3)). Поскольку $\partial^2\varphi/\partial\theta\,\partial x \neq 0$, мы можем найти x как функцию θ на C; получим $x = x(\theta)$. Поскольку

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}(x(\theta),\ \theta) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial\theta}(x(\theta),\ \theta)\,x'(\theta) = 0$$

на C, получаем, что $x'(0) = 0$. Поскольку $\partial^3\varphi/\partial\theta^3 \neq 0$, получаем, что $x''(0) \neq 0$; таким образом, делая замену координат на $\mathbf{R}$, мы можем предполагать, что $x = \theta^2$ на C. Пусть C^+ — часть C, где $\theta > 0$, и C^- — часть, где $\theta < 0$. Согласно последнему из трех уравнений (6.6), должно быть $\zeta = +\sqrt{\rho}$ на C^-. Значит,

$$-\frac{2}{3}\rho^{3/2} + u_0 = \varphi(\theta) \qquad \text{на} \quad C^+,$$

$$\frac{2}{3}\rho^{3/2} + u_0 = \varphi(-\theta) \qquad \text{на} \quad C^-.$$

Поскольку ρ и u_0 — функции только от x, должно быть

$$u_0(x) = \frac{1}{2}(\varphi(\theta) + \varphi(-\theta)), \quad \rho(x)^3 = \frac{9}{16}(\varphi(\theta) - \varphi(-\theta))^2, \tag{6.7}$$

где $x = \theta^2$. Оба выражения в правых частях — четные функции θ, поэтому u_0 и ρ^3 существуют по лемме о четных функциях. Чтобы показать, что существует кубический корень из ρ^3, заметим, что, поскольку $\varphi'(\theta) = \varphi''(\theta) = 0$ и $\varphi'''(\theta) \neq 0$, ряд Тейлора для $(\varphi(\theta) - \varphi(-\theta))^2$ начинается с ненулевого члена порядка 6. Значит, ρ существует и имеет порядок 2 по θ и порядок 1 по x. В частности, $\zeta = +\sqrt{\rho}$ существует на C и $\partial\zeta/\partial\theta \neq 0$.

Теперь предположим, что $\dim M > 1$. Выберем на M такие координаты $(x_1, \ldots, x_n)$, что $\partial^2\varphi/\partial\theta\,\partial x_1 \neq 0$. При $a = (a_2, \ldots, a_n)$ пусть C_a — пересечение C с прямой $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$. Применив предыдущие рассуждения к C_a, найдем функции u_0^a, ρ^a и ζ^a на C_a, удовлетворяющие (6.6) и гладко зависящие от a. Пусть u_0, ρ и ζ — соответствующие функции на C.

Наконец, произвольно продолжим ζ с C на $M \times \mathbf{R}$. На этом доказательство леммы окончено.

Для доказательства предложения 6.1 положим $\psi(x,\ \theta) = u_0(x) + \rho(x)\,\zeta(\theta) - \zeta(\theta)^3/3$. Из (6.6) легко усмотреть, что критическое множество для ψ совпадает с критическим множеством для φ. Делая замену координат $x \mapsto x$, $\theta \mapsto \zeta(\theta,\ x)$, получаем фазовую функцию нужного вида.

Замечание. В § 7 мы получим другое доказательство предложения 6.1 как частный случай значительно более общего результата (см. предложение 7.1).

В качестве применения теоремы 6.1 приведем некоторые результаты Людвига [14] о стационарном волновом уравнении

$$\Delta u + \tau^2 u = 0 \tag{6.8}$$

с граничными данными на ориентированной гиперповерхности $\mathscr{S}$ в $\mathbf{R}^n$, подобной изображенной на рис. 1.

Предположим, что семейство нормалей к $\mathscr{S}$ имеет огибающую $\mathscr{C}$ (т. е. все они лежат по одну сторону от $\mathscr{C}$ и касаются $\mathscr{C}$).

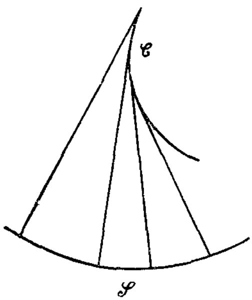


Рис. 1.

Для $\tau \gg 0$ геометрическая оптика дает очень хорошее аппроксимативное решение уравнения (6.8) вне $\mathscr{C}$; см. гл. II. Однако в геометрической оптике делаются малоправдоподобные утверждения о том, что происходит вблизи $\mathscr{C}$, например что интенсивность света на $\mathscr{C}$ бесконечна, а область по другую сторону от $\mathscr{C}$ совсем не освещена. В упомянутой выше статье Людвиг разрабатывает предсказания физической оптики о том, что происходит около $\mathscr{C}$. Получается, грубо говоря, следующая картина:

(a) в точках на освещенной стороне $\mathscr{C}$, расстояние которых от $\mathscr{C}$ велико по сравнению с $\tau^{-2/3}$, аппроксимация геометрической оптики корректна до порядка $-1/2$;

(b) интенсивность света на самой каустике велика, но конечна (порядка $\tau^{1/6}$);

(c) на темной стороне $\mathscr{C}$ имеется освещенная полоска шириной приблизительно $\tau^{-2/3}$.

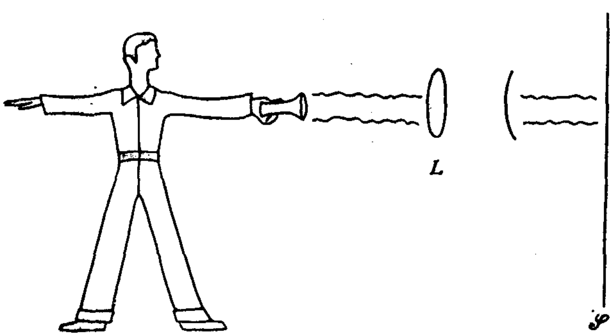


Рис. 2. Человек меняет частоту света, устанавливая желтый, синий, красный и т. д. фильтры перед источником света.

Результаты Людвига равномерны в том смысле, что они имеют место для всех $\tau \gg 0$. Другими словами, если имеется монохроматический световой пучок, который проходит через линзу L и, преломляясь в ней, создает изображение на экране, то исходя из результатов Людвига можно предсказывать, как изменится это изображение при изменении частоты света (рис. 2, 3).

Для того чтобы асимптотически решить уравнение (6.8) с граничными данными на $\mathscr{S}$, мы поступим как в гл. II. Рас-

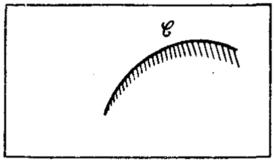


Рис. 3. Освещенная область на темной стороне $\mathscr{C}$ становится у́же при переходе от инфракрасной к ультрафиолетовой части спектра. Например, освещенная область для красного фильтра примерно в 1,4 раза шире, чем освещенная область для фиолетового фильтра.

смотрим в кокасательном расслоении к $\mathbf{R}^n$ лагранжево многообразие, состоящее из всех точек $(x+tn_x,\ n_x)$, где $x \in \mathscr{S}$ и n_x — единичный нормальный вектор в x, проведенный в направлении ориентации. Каустика на $\mathscr{C}$ (рис. 1) — это в точности множество критических точек отображения $\pi\colon \Lambda \to \mathbf{R}^n$. Нетрудно показать, что для Λ в общем положении эти точки должны быть точками складки; те точки, для которых это не так, образуют множество коразмерности 1. (См. рис. 4. Ср. также с предложением 6.2).

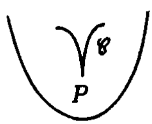


Рис. 4. Отражение в кривом зеркале приводит к заостренной каустике. Все точки $\mathscr{C}$, исключая P, являются точками складки. (Поведение решений уравнения (6.8) в окрестности точки сборки P мы обсудим в § 7.)

В точке складки теорема 6.1 дает решение уравнения (6.8), имеющее общий вид

$$e^{i\tau\sigma}\left\{\frac{g_0}{\tau^{1/3}} A\left(\tau^{2/3}\rho\right)+\frac{g_1}{i\tau^{2/3}} A'\left(\tau^{2/3}\rho\right)\right\}+O\left(\frac{1}{\tau}\right). \tag{6.9}$$

Здесь ρ, σ, g_0 и g_1 — функции только от x, не зависящие от τ; A — функция Эйри и A' — ее производная. Мы обсудим вопрос об определении σ, ρ, g_0 и g_1 несколько позднее. Однако нам уже известно, что $d\rho \neq 0$ около $\mathscr{C}$ и $\rho=0$ на $\mathscr{C}$, поэтому ρ можно рассматривать как нормальную координату для $\mathscr{C}$.

Для того чтобы иметь возможность обсудить качественное поведение решения (6.9), напомним некоторые основные факты о функциях Эйри. При $t \gg 0$

$$A(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} t^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \tag{6.10}$$

$$A'(t) \sim \frac{t^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \left(-\sin\left(\frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)\right). \tag{6.11}$$

При $t \ll 0$

$$A(t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-t)^{1/4}} e^{-{}^2/_3(-t)^{3/2}}, \tag{6.12}$$

$$A'(t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (-t)^{1/4} e^{-{}^2/_3(-t)^{3/2}}. \tag{6.13}$$

Для t, близких к 0, имеем

$$A(t) \sim c_1 + c_2 t, \tag{6.14}$$

где $c_1 \approx 0{,}355$ и $c_2 \approx -0{,}259$.

Доказательство. Соотношения (6.10) и (6.11) могут быть получены применением метода стационарной фазы к интегральной форме функции Эйри, а (6.12) и (6.13) — из (6.10) и (6.11) аналитическим продолжением. По поводу (6.14) см. Таблицы Бюро стандартов [12] или Олвер [16].

Комбинируя эти результаты с (6.9), получаем, что при $\tau^{2/3}\rho \gg 0$ решение u уравнения (6.8) удовлетворяет условию

$$u \sim \frac{\tau^{-1/3} e^{i\tau\sigma}}{\sqrt{\pi}\,[\tau^{2/3}\rho]^{1/4}} \left(g_0 \cos\left(\frac{2\tau\rho^{2/3}}{3} - \frac{\pi}{4}\right) - g_1 \rho^{1/2} \sin\left(\frac{2\tau\rho^{2/3}}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right), \tag{6.15}$$

где правая часть совпадает с решением, даваемым геометрической оптикой. Для $\tau^{2/3}\rho$, близких к нулю, первый член в (6.9) доминирует, и мы получаем

$$u \sim e^{i\tau\sigma} \frac{g_0}{\tau^{1/3}} A(\tau^{2/3}\rho), \tag{6.16}$$

где A дается формулой (6.14). Сравнивая (6.15) с (6.16), мы видим, что значение u на каустике приблизительно равно $\tau^{1/6}$, умноженному на значение u при $\rho \sim 1$.

Наконец, при $\tau^{2/3}\rho \ll 0$ получаем

$$u \sim \frac{\tau^{-1/3} e^{i\tau\sigma}}{\sqrt{\pi}\,[\tau^{2/3}(-\rho)]^{1/4}} \left(g_0 e^{-{}^2/_3\tau(-\rho)^{3/2}} + g_1 (-\rho)^{1/2} e^{-{}^2/_3\tau(-\rho)^{3/2}}\right). \tag{6.17}$$

Когда ρ сравнимо с $\tau^{2/3}$, решение (6.9) не удается сильно упростить. Это область перехода, где аппроксимация геометрической оптики перестает действовать, а крайне простое решение (6.16) еще не имеет места. Заметим, что при $-\tau^{2/3}\rho \cong 1$ на темной стороне каустики все еще имеется большая область освещенности.

Мы предоставляем читателю в качестве упражнения вывести из приведенных выше формул данное ранее качественное описание поведения u.

Обсудим теперь, как определить функции σ, ρ, g_0 и g_1. Символом уравнения (6.8) является функция ξ^2-1. Наше общее правило построения асимптотических решений (6.8) состоит в том, что нужно найти лагранжево многообразие Λ, на котором $\xi^2-1=0$, и на Λ найти полуплотности, инвариантные относительно гамильтонова потока, ассоциированного с ξ^2-1, а именно $2\sum \xi_j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Посмотрим, в чем состоит первое условие.

Наша фазовая функция имеет вид

$$\varphi=\varphi(x,\ \theta)=\sigma(x)+\rho(x)\,\theta-\frac{1}{3}\theta^3,$$

где ρ и σ — те же, что и в предыдущем абзаце. Критическое множество C функции φ — это множество всех $(x,\ \theta)$, где $\rho(x)=\theta^2$, и отображение $(x,\ \theta)\longmapsto(x,\ (d\varphi)_x)$ должно диффеоморфно отображать это множество на наше лагранжево многообразие. Поэтому мы должны иметь

$$\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)^2=1 \quad \text{на} \quad C. \tag{6.18}$$

Далее, $\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}=\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}+\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\theta$ и

$$\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}\right)^2+\sum\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\right)^2+2\sum\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\theta.$$

Поскольку $\theta^2=\rho$ на C, а σ и θ независимы на C относительно функций от x, уравнение (6.18) распадается на два уравнения

$$(d\sigma)^2+\rho\,(d\rho)^2=1, \tag{6.19}$$

$$d\sigma\cdot d\rho=0. \tag{6.20}$$

Это уравнения эйконала для ρ и σ, которые Людвиг получает в § 1 своей статьи. В размерности 2 довольно легко проанализировать их геометрически. Если $\rho=0$, то $d\rho$ перпендикулярно каустике, т. е. $d\sigma$ касается каустики по (6.20), а в силу (6.19) σ — это длина дуги вдоль каустики. Для того чтобы интерпретировать (6.19) и (6.20) как уравнения для ρ, предположим, что $\mathscr{C}$ — окружность радиуса a с центром в начале $\mathbf{R}^2$. Пусть $(r,\ \theta)$ — полярные координаты в $\mathbf{R}^2$. Тогда на $\mathscr{C}$ имеем $\sigma=a\theta$. Ясно, что для того, чтобы (6.19) и (6.20) удовлетворялись при начальных данных $\rho=0$ и $\sigma=a\theta$ на $\mathscr{C}$, функция ρ должна зависеть только от r, т. е. мы можем написать $\rho=\rho(r)$. Из (6.20) следует, что σ постоянна в радиальном направлении, т. е. $\sigma=a\theta$

в окрестности $\mathscr{C}$. Итак, (6.17) сводится к уравнению

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2+\rho(r)(\rho'(r))^2=1, \quad \text{или} \quad \rho(r)(\rho'(r))^2=\frac{(r-a)(r+a)}{r^2}.$$

Полагая $\rho(r)=c(r-a)+O((r-a)^2)$ в окрестности $\mathscr{C}$, получаем

$$c^3(r-a)=\frac{(r-a)(r+a)}{r^2}$$

в a, или $c^3=2/a$. Значит, в окрестности $\mathscr{C}$

$$\rho(r)\approx\left(\frac{2}{a}\right)^{1/3}(r-a). \tag{6.21}$$

Рассмотрим теперь случай произвольной каустики $\mathscr{C}$. Пусть $x_0\in\mathscr{C}$ и r — расстояние по нормали к $\mathscr{C}$ в точке x_0. Применяя проведенные выше рассуждения к окружности, соприкасающейся с $\mathscr{C}$ в точке x_0 (имеющей касание третьего порядка с $\mathscr{C}$ в x_0), мы получаем, что (6.21) имеет место вдоль нормали к $\mathscr{C}$ в x_0, где a — радиус кривизны в x_0.

Наконец, посмотрим, каков в нашей ситуации аналог транспортного уравнения. Наше асимптотическое решение уравнения (6.8) имеет вид

$$u(x)=g(x, \theta)\, e^{i\tau(\sigma+\rho\theta-\theta^3/3)}d\theta,$$

где σ и ρ в принципе определяются уравнениями (6.19) и (6.20). Что можно сказать о g? Мы докажем следующее:

Пусть φ — указанная выше фазовая функция (т. е. $\varphi(x, \theta)=\sigma+\rho\theta-\theta^3/3$ на $M\times\mathbf{R}$), и пусть

$$q=\frac{1-(\nabla\varphi)^2}{\partial\varphi/\partial\theta}.$$

(Поскольку $1-(\nabla\varphi)^2$ равно нулю на множестве точек, где $\partial\varphi/\partial\theta=0$ и φ — фазовая функция общего положения, q — гладкая функция.) *Тогда*

$$2(\nabla\varphi)\cdot\nabla g+(\nabla\varphi)\,g-\frac{\partial}{\partial\theta}(qg)=0 \mod\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right). \tag{6.22}$$

(См. Людвиг [14], § 2.)

Доказательство. Равенство (6.22) означает, что полуплотность на C, ассоциированная с g, инвариантна относительно гамильтонова потока. Чтобы убедиться в этом, докажем вначале, что имеет место

Лемма 6.2. *Векторное поле на C, ассоциированное с гамильтоновым векторным полем $2\sum\xi_i\frac{\partial}{\partial x^i}$ на Λ, — это векторное поле*

$$\eta=2\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}-q\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Доказательство. Указанное векторное поле касается C, поскольку оно обращает в нуль φ и $\partial\varphi/\partial\theta$; и оно, и гамильтоново векторное поле проектируются в каждой точке в один и тот же вектор базы, а именно $2\sum \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}$. Поэтому эти два векторных поля совпадают на множестве, где отображение $d\pi$ биективно. По непрерывности они совпадают всюду. Доказательство окончено.

Пусть, далее, Ω — такая n-форма на $\mathbf{R}^{n+1}$, что на C

$$\Omega \wedge d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = dx \wedge d\theta.$$

Пусть Ω_0 — ограничение Ω на C. Поскольку форма Ω определена с точностью до кратных $d(\partial\varphi/\partial\theta)$, форма Ω_0 определена на C внутренним образом и является там обычной формой объема.

Лемма 6.3. $D_\eta \sqrt{\Omega_0} = \left(\Delta\varphi - \frac{\partial q}{\partial\theta}\right)\sqrt{\Omega_0}$.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$(D_\eta\Omega) \wedge d\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 2\left(\Delta\varphi - \frac{\partial q}{\partial\theta}\right)\Omega \wedge d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right), \tag{6.23}$$

ибо тогда мы можем получить нужное уравнение, взяв ограничение на C и перейдя к квадратным корням. Для доказательства (6.23) прежде всего заметим, что, как показывает прямое вычисление,

$$D_\eta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\partial q}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}. \tag{6.24}$$

Далее, левую часть (6.23) в силу (6.24) можно переписать на C в виде

$$D_\eta\left(\Omega \wedge d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) - \Omega \wedge d\left(D_\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\right) = D_\eta(dx \wedge d\theta) - \frac{\partial q}{\partial\theta}\Omega \wedge d\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}.$$

Поскольку

$$D_\eta(dx \wedge d\theta) = (\operatorname{div}\eta)\, dx \wedge d\theta = (\operatorname{div}\eta)\,\Omega \wedge d\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},$$

имеем

$$(D_\eta\Omega) \wedge d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = \left(\operatorname{div}\eta - \frac{\partial q}{\partial\theta}\right)\Omega \wedge d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right),$$

что фактически совпадает с (6.23). Доказательство окончено.

Комбинируя доказанные леммы, мы видим, что полуплотность $g\sqrt{\Omega_0}$ инвариантна относительно транспортного уравнения только тогда, когда g удовлетворяет (6.22).

Все это иллюстрирует, как, пользуясь каноническими формами вблизи особенностей, можно получать подробную качественную информацию о поведении высокочастотных аппроксимативных решений дифференциальных уравнений в частных производных около каустик.

Мы проанализировали лишь самые простые из особенностей, а именно $S_{1,0}$. Для дальнейшего нам потребуются некоторые более глубокие результаты теории особенностей. Им будут посвящены два следующих параграфа.

§ 7. *Итерированные особенности типа S_1 и $S_{2,0}$, вычисления*

Для анализа более сложных особенностей нам потребуются результаты, аналогичные предложению 6.1. Цель этого параграфа — получить, по крайней мере формально, такие результаты для итерированных особенностей типа S_1 и для простейших видов особенностей типа S_2. Имеет место следующее

Предложение 7.1. *Пусть X — окрестность начала в $\mathbf{R}^n$ и $\varphi=\varphi(x, \theta)$ — фазовая функция на $X\times\mathbf{R}$. Предположим, что в начале*

$$\frac{\partial^i\varphi}{\partial\theta^i}=0 \quad \textit{при} \quad i=1, \ldots, k-1 \quad \textit{и} \quad \frac{\partial^k\varphi}{\partial\theta^k}\neq 0.$$

Тогда существуют такая функция $\theta_1=\theta_1(x, \theta)$ и такие функции от x: $f_0(x), \ldots, f_{k-2}(x)$, что $\theta(0, 0)=0$ и $f_1(0)=\ldots=f_{k-2}(0)=0$, $\partial\theta_1/\partial\theta\neq 0$ в 0 и

$$\varphi(x, \theta)=f_0+f_1\theta_1+\ldots+f_{k-2}\theta_1^{k-2}+\frac{\theta_1^k}{k}+\varepsilon(x, \theta), \tag{7.1}$$

где $\varepsilon(x, \theta)$ имеет нуль бесконечного порядка при $x=0$.

Доказательство. Поскольку $\partial^k\varphi/\partial\theta^k\neq 0$ в 0, можно записать $\varphi(0, \theta)=c+(\theta^k/k)h(\theta)$, где $h(\theta)\neq 0$ в 0. Делая замену координат $\theta_1=\theta(h(\theta))^{1/k}$, получаем

$$\varphi(x, \theta)=c+\frac{\theta_1^k}{k}+\varepsilon(x, \theta),$$

где $\varepsilon(x, \theta)$ имеет нуль порядка 1 по x при $x=0$.

Предположим теперь по индукции, что мы можем написать

$$\varphi(x, \theta)=f_0(x)+f_1(x)\theta+\ldots+f_{k-2}(x)\theta^{k-2}+\frac{\theta^k}{k}+\varepsilon(x, \theta),$$

где f_i — полиномы степени $<N$ по x и $\varepsilon(x, \theta)=O(|x|^N)$. Пусть $\varepsilon(x, \theta)=\sum\limits_{|I|=N}\varepsilon_I(\theta)x^I+O(|x|^{N+1})$. Мы будем пытаться найти однородные полиномы $f_i'=\sum\limits_{|I|=N}f_{i,I}'x^I$ и $\theta_1=\theta+\sum\limits_{|I|=N}\tau_I(\theta)x^I$, для которых

$$\sum_{i=0}^{k-2}(f_i+f_i')\theta_1^i+\frac{\theta_1^k}{k}=\varphi(x, \theta)+\varepsilon_1(x, \theta), \tag{7.2}$$

где $\varepsilon_1(x, \theta)=O(|x|^{N+1})$ при $x=0$. Приравнивая коэффициенты при x^l (и пользуясь тем фактом, что $f_i(0)=0$), находим, что (7.2) сводится к системе уравнений

$$f'_{0,l}+f'_{1,l}\theta+\ldots+f'_{k-2,l}\theta^{k-2}+\tau_l(\theta)\,\theta^{k-1}=\varepsilon_l(\theta), \qquad (7.2)_l$$

которая решается при помощи формулы Тейлора с остаточным членом. Доказательство окончено.

Для изучения особенностей типа S_2 потребуется короткое отступление в теорию кубических бинарных форм над полем вещественных чисел. Пусть $\varphi=\varphi(\alpha, \beta)$ — однородный полином степени 3 от переменных α и β. Будем говорить, что φ *вырожден*, если квадратичные формы $\partial\varphi/\partial\alpha$ и $\partial\varphi/\partial\beta$ пропорциональны одна другой. Предположим, что это так, т. е. $\partial\varphi/\partial\beta=c\,\partial\varphi/\partial\alpha$. Делая замену переменных $\alpha_1=\alpha$, $\beta_1=\beta+c\alpha$, получаем $\partial\varphi/\partial\beta_1=0$, т. е. $\varphi=a\alpha_1^3$. Меняя обозначение $\alpha=\alpha_1\sqrt[3]{a}$, мы видим, что либо $\varphi\equiv 0$, либо $\varphi=\alpha^3$.

Теперь предположим, что φ невырожден. Пусть L_φ — одномерное векторное пространство, состоящее из квадратичных форм от α и β по модулю линейных комбинаций $\partial\varphi/\partial\alpha$ и $\partial\varphi/\partial\beta$. Пусть K — двумерное векторное пространство, порожденное α и β. Умножение задает билинейное отображение K в L_φ; если выбрать базис в L_φ, то это отображение можно рассматривать как квадратичную форму на K. Ясно, что эта квадратичная форма не является нулевой; в противном случае α^2, β^2 и $\alpha\beta$ все должны быть линейными комбинациями $\partial\varphi/\partial\alpha$ и $\partial\varphi/\partial\beta$.

Определение 7.1. Будем называть полином φ *гиперболическим*, если описанная выше квадратичная форма имеет ранг 2 и индекс 1, *эллиптическим*, если она имеет ранг 2 и индекс 2, и *параболическим*, если ранг равен 1.

Предложение 7.2 (классификационная теорема для кубических бинарных форм над $\mathbf{R}$). *Если полином φ гиперболичен, то линейной заменой переменных его можно привести к виду*

$$\varphi(\alpha, \beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}. \qquad (7.3)$$

Если он параболичен, то его можно привести к виду

$$\varphi(\alpha, \beta)=\alpha^2\beta, \qquad (7.4)$$

а если эллиптичен, то к виду

$$\varphi(\alpha, \beta)=\alpha^3-\alpha\beta^2. \qquad (7.5)$$

Доказательство. Мы рассмотрим лишь гиперболический случай. Два других случая рассматриваются аналогично. Если полином $\varphi(\alpha, \beta)$ гиперболичен, то можно сделать такую линейную замену переменных, что только что описанная квадратичная форма будет переводить пару (α, α) в 0 и пару (β, β) в 0. Это означает, что α^2 и β^2 являются линейными комбинациями $\partial\varphi/\partial\alpha$ и $\partial\varphi/\partial\beta$. Поскольку α^2 и β^2 линейно независимы, $\partial\varphi/\partial\alpha$ и $\partial\varphi/\partial\beta$ также должны быть линейными комбинациями α^2 и β^2, т. е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=a_1\alpha^2+a_2\beta^2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}=b_1\alpha^2+b_2\beta^2$$

для каких-то вещественных чисел a_1, a_2 и b_1, b_2. Ясно, что первое из этих уравнений имеет место только тогда, когда коэффициент при $\alpha^2\beta$ в φ равен нулю, а второе только тогда, когда нулю равен коэффициент при $\alpha\beta^2$. Это показывает, что

$$\varphi=\frac{1}{3}(c_1\alpha^3+c_2\beta^3).$$

Заменяя α на $\sqrt[3]{c_1}\,\alpha$, а β на $\sqrt[3]{c_2}\,\beta$, мы приведем φ к нужному виду. Доказательство закончено.

Следствие. *Пусть $h=h(\alpha, \beta)$ — гладкая функция на* $\mathbf{R}$. *Предположим, что ее первые и вторые производные в 0 равны нулю, а кубические члены в формуле Тейлора образуют невырожденную бинарную кубическую форму. Если эта форма гиперболическая, то можно выбрать такие координаты $\alpha_1=\alpha_1(\alpha, \beta)$ и $\beta_1=\beta_1(\alpha, \beta)$, что*

$$h(\alpha, \beta)=c+\frac{\alpha_1^3+\beta_1^3}{3} \quad \text{около} \quad 0. \tag{7.6}$$

Если форма эллиптическая, то можно найти координаты, в которых

$$h(\alpha, \beta)=c+\alpha_1^3-\alpha_1\beta_1^2 \quad \text{около} \quad 0. \tag{7.7}$$

Доказательство. Мы ограничимся гиперболическим случаем. Эллиптический случай рассматривается аналогично. Ясно, что можно написать

$$h(\alpha, \beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}+\sum_{i+j=4} f_{i,j}(\alpha, \beta)\,\alpha^i\beta^j.$$

Сделав замену переменных $\alpha_1=\alpha+f_{2,2}\beta^2$, $\beta_1=\beta$, можно считать, что в выражении справа $f_{2,2}=0$. Это означает, что можно написать

$$h(\alpha, \beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}+g_1\alpha^3+g_2\beta^3,$$

где $g_1(0)=g_2(0)=0$. Полагая $\alpha_1=\alpha\sqrt[3]{1+3g_1}$ и $\beta_1=\beta\sqrt[3]{1+3g_2}$, получаем

$$h(\alpha, \beta)=\frac{\alpha_1^3+\beta_1^3}{3},$$

что и требовалось доказать.

Случай параболических особенностей несколько более сложен. Например, $\alpha^2\beta$ и $\alpha^2\beta+\beta^4$ не эквивалентны. Докажем

Предложение 7.3. *Предположим, что $h=h(\alpha, \beta)$ обращается в нуль вместе с первыми и вторыми производными в 0. Предположим, что кубический член в формуле Тейлора в 0 равен $\alpha^2\beta$. Тогда если $\partial^4 h/\partial\beta^4 \neq 0$, то можно сделать такую замену переменных $\alpha_1=\alpha_1(\alpha, \beta)$ и $\beta_1=\beta_1(\alpha, \beta)$ в окрестности 0, что*

$$\pm h=\alpha_1^2\beta_1+\beta_1^4. \tag{7.8}$$

Доказательство. Мы можем написать

$$\pm h(\alpha, \beta)=\alpha^2\beta+\sum_{i+j=4} f_{i,j}\alpha^i\beta^j, \quad \text{где} \quad f_{0,4}>0$$

в начале. Полагая $\alpha_1=\alpha/\sqrt[8]{f_{0,4}}$ и $\beta_1=\sqrt[4]{f_{0,4}}\,\beta+f_{1,3}\alpha/4\,[f_{0,4}]^{3/4}$, получаем

$$\pm h(\alpha, \beta)=\alpha_1^2\beta_1+\beta_1^4+\rho\alpha_1^2\beta_1+\tau\alpha_1^4,$$

где ρ и τ — подходящие функции от α и β, причем $\rho(0)=0$. Наконец, заменяя α_1 на $\alpha_1\sqrt{1+\rho}$, мы можем считать, что $\rho=0$. Итак, мы свели задачу к случаю, когда $h(\alpha, \beta)$ имеет вид

$$\pm h(\alpha, \beta)=\alpha^2\beta+\beta^4+\tau\alpha^4. \tag{7.9}$$

Будем теперь искать такую замену переменных $\alpha_1=\alpha$, $\beta_1=\beta+ u\alpha^2$ и такую функцию ρ от α и β, равную нулю в 0, что

$$\pm h(\alpha, \beta)=\alpha_1^2\beta_1+\beta_1^4+\rho\alpha_1^2\beta_1.$$

Подставляя сюда выражения для α_1 и β_1, получаем, что функция $\pm h(\alpha, \beta)$ равна

$$\alpha^2\beta+\beta^4+(u+u\rho+6u^2\beta^2+4u^3\alpha^2\beta+u^4\alpha^4)\,\alpha^4+(\rho+4u\beta^2)\,\alpha^2\beta.$$

Если сделать подстановку $\rho=-4u\beta^2$, получим следующее выражение для τ:

$$\tau=u+2u^2\beta^2+4u^3\alpha^2\beta+u^4\alpha^4.$$

Поскольку $\tau=u$ при $\alpha=0$, $\beta=0$, это уравнение можно разрешить относительно u, выразив u через τ, α и β. Полагая теперь ρ равным $-4u\beta^2$, получаем

$$\pm h(\alpha, \beta)=\alpha_1^2\beta_1+\beta_1^4+\rho\alpha_1^2\beta_1,$$

что и требовалось. Наконец, заменяя α_1 на $(\sqrt{1+\rho})\alpha_1$, мы можем уничтожить член с ρ.

Утверждение о канонической форме особенностей типа $S_{2,0}$ дает следующее

Предложение 7.4. *Пусть $\varphi=\varphi(x, \alpha, \beta)$ — фазовая функция на $X\times\mathbf{R}^2$. Предположим, что в начале функция φ и все ее первые и* *вторые производные по* α *и* β *равны нулю. Предположим, что кубический член в разложении Тейлора для* $\varphi(0, \alpha, \beta)$ *в начале невырожден. Тогда если он является гиперболической формой, то можно найти такие функции* $\alpha_1 = \alpha_1(x, \alpha, \beta)$, $\beta_1 = \beta_1(\alpha, \beta, x)$ *и* $f_i = f_i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$, *что* $\alpha_1(0) = \beta_1(0) = f_0(0) = \ldots = f_3(0) = 0$, $\partial(\alpha_1, \beta_1)/\partial(\alpha, \beta) \neq 0$ *и*

$$\varphi = f_0 + f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\alpha_1\beta_1 + \frac{\alpha_1^3 + \beta_1^3}{3} + \varepsilon(x, \alpha, \beta), \tag{7.10}$$

где $\varepsilon(x, \alpha, \beta)$ *имеет нуль бесконечного порядка при* $x = 0$.

Если кубический член является эллиптической формой, то, как и выше, можно найти α_1, β_1, f_0, f_1, f_2, f_3, *для которых*

$$\varphi = f_0 + f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3(\alpha_1^2 + \beta_1^2) + \alpha_1^3 - \alpha_1\beta_1^2 + \varepsilon(x, \alpha, \beta), \tag{7.11}$$

где $\varepsilon(x, \alpha, \beta)$ *имеет нуль бесконечного порядка при* $x = 0$.

Если кубический член параболичен и $\varphi(0, \alpha, \beta)$ *удовлетворяет условиям предложения 7.3, то, как и выше, можно найти такие* α_1, β_1, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, *что*

$$\pm\varphi = f_0 + f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\alpha_1^2 + f_4\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1 + \beta_1^4 + \varepsilon(x, \alpha, \beta), \tag{7.12}$$

где $\varepsilon(x, \alpha, \beta)$ *имеет нуль бесконечного порядка при* $x=0$.

Доказательство. Мы рассмотрим лишь гиперболический случай, оставляя параболический и эллиптический в качестве упражнения читателю. Будем доказывать (7.10) при помощи такого же индуктивного рассуждения, как при доказательстве предложения 7.1. Случай $N = 1$ — это как раз следствие предложения 7.2, поэтому будем предполагать утверждение справедливым для $N - 1$ и докажем его для N. Наше индуктивное предположение состоит в том, что

$$\varphi = f_0 + f_1\alpha + f_2\beta + f_3\alpha\beta + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{3} + \varepsilon(x, \alpha, \beta),$$

где f_i — полиномы степени $< N$ по x и $\varepsilon(x, \alpha, \beta) = O(|x|^N)$. Положим

$$\varepsilon(x, \alpha, \beta) = \sum_{|I| = N} \varepsilon_I(\alpha, \beta)\, x^I + O(|x|^{N+1}).$$

Мы попытаемся найти такие однородные полиномы $f_i' = \sum_{|I|=N} f_{i,I}' x^I$ степени N от x и функции

$$\alpha_1 = \alpha + \sum_{|I|=N} \tau_I(\alpha, \beta)\, x^I, \quad \beta_1 = \beta + \sum_{|I|=N} \mu_I(\alpha, \beta)\, x^I,$$

что

$$\varphi = (f_0 + f_0') + (f_1 + f_1')\alpha_1 + (f_2 + f_2')\beta_1 + \\ + (f_3 + f_3')\alpha_1\beta_1 + \frac{\alpha_1^3 + \beta_1^3}{3} + \varepsilon_1(x, \alpha, \beta), \tag{7.13}$$

где $\varepsilon_1(x, \alpha, \beta) = O(|x|^{N+1})$. Приравнивая коэффициенты при x^l, получаем

$$f'_{0,l} + f'_{1,l}\alpha + f'_{2,l}\beta + f'_{3,l}\alpha\beta + \tau_l\alpha^2 + \mu_l\beta^2 = \varepsilon_l(\alpha, \beta), \tag{7.14}$$

откуда легко найти константы $f'_{0,l}$ и т. д. и функции $\tau_l(\alpha, \beta)$, $\mu_l(\alpha, \beta)$, пользуясь формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Доказательство окончено.

Рассмотрим теперь особенности типа S_2 несколько подробнее. Пусть Λ — лагранжево многообразие в T^*_X, и пусть (x_0, ξ_0) — особенность типа S_2 на Λ. Пусть $\varphi = \varphi(x, \alpha, \beta)$ — фазовая функция на $X \times \mathbf{R}^2$, параметризующая Λ в окрестности (x_0, ξ_0). Предположим, что $(x_0, 0, 0)$ — точка на критическом множестве функции φ, соответствующая (x_0, ξ_0). Поскольку (x_0, ξ_0) является S_2-особенностью, первые и вторые производные $\varphi(x, \alpha, \beta)$ по α и β равны нулю в $(x_0, 0, 0)$. Пусть $\varphi_3(\alpha, \beta)$ — кубический член в разложении Тейлора для $\varphi(x_0, \alpha, \beta)$ в $(0, 0)$. Как легко видеть, (x_0, ξ_0) является особенностью типа $S_{2,1}$ тогда и только тогда, когда форма φ_3 невырожденна, и является особенностью типа $S_{2,2}$ тогда и только тогда, когда $\varphi_3 \equiv 0$.

Определение 7.2. Будем говорить, что (x_0, ξ_0) — *гиперболическая (эллиптическая, параболическая) S_2-особенность*, если форма φ_3 — гиперболическая (эллиптическая, параболическая).

Мы должны проверить, что это определение не зависит от выбора φ, а касается внутреннего свойства Λ.

Пусть R_C — локальное кольцо формальных степенных рядов от координат на C в $(x_0, 0, 0)$ и R_Λ — соответствующее локальное кольцо в (x_0, ξ_0). Пусть $R_C^\#$ и $R_\Lambda^\#$ — факторкольца $R_C/(x - x_0)$ и $R_\Lambda/(x - x_0)$. Поскольку Λ и C диффеоморфны, R_Λ и R_C изоморфны, а стало быть, изоморфны $R_\Lambda^\#$ и $R_C^\#$.

Далее, из определения 7.2 ясно,что гиперболичность и т. д. — это алгебраические свойства локального кольца формальных степенных рядов от α и β по модулю идеала, порожденного

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(x_0, \alpha, \beta) \quad \text{и} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}(x_0, \alpha, \beta).$$

Но это как раз и есть кольцо $R_C^\#$, поскольку C определяется уравнениями $\partial\varphi/\partial\alpha = \partial\varphi/\partial\beta = 0$. Поэтому гиперболичность и т. д. — это алгебраические свойства $R_\Lambda^\#$, что и требовалось доказать.

Теперь докажем следующее

Предложение 7.5. *Для Λ общего положения $S_2(\Lambda)$ — подмногообразие коразмерности 3; множества эллиптических и гиперболических точек являются открытыми подмножествами в $S_2(\Lambda)$; параболические точки образуют подмногообразие в $S_2(\Lambda)$ кораз-*

мерности 1, *точки типа* $S_{2,1}$ — *подмногообразие в* $S_2(\Lambda)$ *коразмерности* 2 *и точки типа* $S_{2,2}$ — *подмногообразие в* $S_2(\Lambda)$ *коразмерности* 4.

Следовательно, эллиптические и гиперболические точки могут появиться впервые в размерности 3, *параболические точки — в размерности* 4; $S_{2,1}$-*особенности могут впервые появиться в размерности* 5, *а* $S_{2,2}$-*особенности — в размерности* 7.

Доказательство. Пусть W — пространство всех полиномов от α и β степени $\leqslant 3$. Пусть W_1 — подпространство полиномов с нулевыми членами первой степени, а W_2 — подпространство полиномов с нулевыми членами первой и второй степени. Пусть P — множество параболических кубических полиномов, а Q — множество вырожденных кубических полиномов.

Нам потребуется такая

Лемма. *Множество* P *является подмногообразием коразмерности* 1 *в* W_2, *а* Q — *подмногообразием коразмерности* 2.

Доказательство. Рассмотрим в W_2 открытое множество, состоящее из полиномов, у которых член с α^3 отличен от нуля. Ограничивая такие полиномы на аффинное подмножество в проективном одномерном пространстве, определяемое условием $\alpha \neq 0$, мы получим изоморфизм между множеством этих полиномов и множеством кубических полиномов на вещественной прямой. Параболические полиномы соответствуют полиномам на $\mathbf{R}$ с двукратными корнями, а вырожденные полиномы — полиномам с трехкратными корнями. Полиномы с двукратными корнями можно рассматривать как расслоение над $\mathbf{R}$ со слоем $\mathbf{R}^2$ (каждому полиному ставится в соответствие двукратный корень), а полиномы с трехкратными корнями — как расслоение над $\mathbf{R}$ со слоем $\mathbf{R}$. Поэтому P имеет размерность 3, а Q имеет размерность 2. Доказательство окончено.

Пусть теперь φ — фазовая функция на $X \times \mathbf{R}^2$ и $\tilde{\varphi}$: $X \times \mathbf{R}^2 \to W$ — отображение, которое каждой точке (x_0, α_0, β_0) ставит в соответствие разложение Тейлора для $\varphi(x_0, \alpha, \beta)$ в точке (α_0, β_0) до порядка 3. Будем говорить, что φ является W-общей, если отображение $\tilde{\varphi}$ трансверсально W_1, W_2, P и Q. Ясно, что если φ является W-общей, то для соответствующего лагранжева многообразия справедливы утверждения предложения 7.5. Однако по теореме трансверсальности Тома каждую φ можно возмутить так, чтобы она стала W-общей; это соображение завершает доказательство предложения 7.5.

Каждой точке Λ отвечает локальное кольцо $R_\Lambda^\#$. Как мы видели, из одной только структуры этого локального кольца уже можно выяснить, является ли $S_{2,0}$-особенность эллиптической, гиперболической или параболической. Теперь докажем следующее

Предложение 7.6. *Если особенность (x_0, ξ_0) эллиптическая или гиперболическая, то размерность $R_\Lambda^\#$ над полем вещественных чисел равна 4, а если (x_0, ξ_0) параболическая, то эта размерность $\geqslant 5$.*

Доказательство. Если (x_0, ξ_0) — эллиптическая особенность, то Λ можно параметризовать в окрестности (x_0, ξ_0) фазовой функцией вида

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}+\varepsilon(x, \alpha, \beta),$$

где $\varepsilon(x, \alpha, \beta)$ равна нулю при $x=x_0$. Поэтому $R_\Lambda^\#$ изоморфно кольцу формальных степенных рядов от α и β, профакторизованному по идеалу (α^2, β^2). Как векторное пространство над $\mathbf{R}$ оно имеет своим базисом $1, \alpha, \beta$ и $\alpha\beta$.

Если (x_0, ξ_0) — параболическая особенность, то Λ можно параметризовать в окрестности (x_0, ξ_0) фазовой функцией вида $\alpha^2\beta+$ $+\varepsilon(x, \alpha, \beta)$, где $\varepsilon(x_0, \alpha, \beta)$ имеет порядок 4 по α и β. Поэтому $1, \alpha, \beta, \beta^2$ и β^3 все независимы по модулю $\partial\varphi/\partial\alpha$ и $\partial\varphi/\partial\beta$, и доказательство окончено.

Определение 7.3. Будем называть параболическую точку $(x_0, \xi_0)\in S_2(\Lambda)$ *регулярной*, если $\dim R_\Lambda^\#=5$, и *особой*, если $\dim R_\Lambda^\#>5$.

Предложение 7.7. *Для Λ общего положения множество особых параболических точек является подмножеством коразмерности* 1 *в множестве всех параболических точек.*

Поэтому в размерности 4 все параболические точки регулярны. Предложение 7.7 является простым следствием предложения 7.8, доказательство которого мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Предложение 7.8. *Пусть (x_0, ξ_0) — параболическая точка на Λ. Пусть $\varphi=\varphi(x, \alpha, \beta)$ — фазовая функция, параметризующая Λ в окрестности (x_0, ξ_0) и имеющая вид*

$$\varphi(x, \alpha, \beta)=\alpha^2\beta+\varepsilon(x, \alpha, \beta),$$

где $\varepsilon(x_0, \alpha, \beta)$ имеет порядок 4 по α и β. Тогда (x_0, ξ_0) — регулярная параболическая точка в том и только том случае, когда

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial\beta^4}(x_0, 0, 0)\neq 0.$$

§ 8. Вывод канонических форм

Мы должны еще доказать, что теоремы о канонической форме, полученные в § 7, справедливы в смысле C^∞, а не только формально. Для доказательства нам потребуется подготовительная теорема Мальгранжа в форме Гротендика — Гузеля. Напомним формулировку этой теоремы в том виде, в каком она содержится, например, в книге Мальгранжа [17] или Голубицкого и Гийемина [9]. Пусть $\mathscr{E}_n$ — кольцо ростков C^∞-функций в начале евклидова пространства размерности n. Пусть $\mathscr{M}_n$ — его максимальный идеал, состоящий из ростков функций, равных нулю в начале. Если задано отображение ρ пространства $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^p$, переводящее начало в начало, то имеем индуцированное отображение $\rho^*\colon \mathscr{E}_p \to \mathscr{E}_n$. Пусть, далее, $f_1, \ldots, f_k$ — ростки функций на $\mathbf{R}^n$ и $(f_1, \ldots, f_k)$ — идеал, который они порождают в $\mathscr{E}_n$. Пусть $\mathscr{R}$ — факторкольцо $\mathscr{E}_n/(f_1, \ldots, f_k)$. Пользуясь отображением $\rho^*\colon \mathscr{E}_p \to \mathscr{E}_n$, мы можем рассматривать $\mathscr{R}$ как $\mathscr{E}_p$-модуль.

Теорема 8.1. *Кольцо $\mathscr{R}$ является конечно-порожденным $\mathscr{E}_p$-модулем тогда и только тогда, когда $\mathscr{R}/\mathscr{M}_p\mathscr{R}$ — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$. Кроме того, набор элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathscr{R}$ является множеством образующих для $\mathscr{R}$ как модуля над $\mathscr{E}_p$ тогда и только тогда, когда их образы в $\mathscr{R}/\mathscr{M}_p\mathscr{R}$ порождают $\mathscr{R}/\mathscr{M}_p\mathscr{R}$ (как векторное пространство над $\mathbf{R}$).*

В качестве применения этой теоремы докажем теорему Уитни о четных функциях, цитированную в § 6. Пусть $n = p = 1$, $\mathscr{R} = \mathscr{E}_1$ и ρ — отображение $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto x^2$. Тогда, поскольку $\mathscr{R}/(x^2)\mathscr{R}$ порождается элементами 1 и x, каждая гладкая функция может быть представлена в виде $f(x^2) + xg(x^2)$ для гладких f и g. Для того чтобы функция была четной, g должна быть нулем.

Обычная подготовительная теорема для функции $F = F(x, t)$ на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ получается из теоремы 8.1, если взять в качестве ρ: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ отображение $(x, t) \longmapsto x$, а в качестве $\mathscr{R}$ кольцо $\mathscr{E}_{n+1}/(F)$. Обратно, нетрудно получить теорему 8.1 в предположении, что справедлива обычная подготовительная теорема. Подробнее см. Голубицкий и Гийемин [9].

Рассмотрим теперь задачу, возникшую в предыдущем параграфе. Фазовая функция $\varphi = \varphi(x, \theta)$ задана на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N$, и рассматривается возмущенная фазовая функция $\varphi' = \varphi(x, \theta) + \varepsilon(x, \theta)$, причем $\varepsilon(x, \theta)$ имеет нуль бесконечного порядка при $x = 0$. Мы хотим найти пару диффеоморфизмов $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ и $g\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N$, каждый из которых определен в окрестности начала, имеет начало неподвижной точкой и для которых коммутативна диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \arrow[d] \\
\mathbf{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbf{R}^n
\end{tikzcd}
\tag{8.1}
$$

причем g сопрягает φ' с φ в том смысле, что

$$g^*(\varphi'+\mu)=\varphi, \tag{8.2}$$

где $\mu=\mu(x)$ — функция только от x. Ясно, что это позволит уничтожить остаточные члены, имеющиеся в (7.1), (7.10), (7.11) и (7.12). Наличие μ не вызывает осложнений, поскольку во всех случаях мы можем включить его в первое слагаемое правой части.

Отношение эквивалентности между φ и φ', определяемое формулами (8.1), (8.2), первоначально было введено Томом при изучении особенностей. У Тома $\varphi(x, \theta)$ рассматривается как функция от θ, зависящая от параметра x. Если $d_\theta\varphi(0, \theta)=0$, т. е. φ имеет особенность при $x=0$, то $\varphi(x, \theta)$ называется «разверткой особенности». Две развертки φ и φ' считаются эквивалентными, если существуют такие g и f, что (8.1), (8.2) имеют место. Развертка φ называется (локально) устойчивой, если всякая φ', достаточно близкая к φ в C^∞-топологии, эквивалентна φ в некоторой окрестности начала. Мы покажем, что правые части (7.1) и т. д. без остаточных членов устойчивы. Далее, действуя, как в приложении I (после гл. I) и в § 1 гл. IV, мы покажем, что «инфинитезимальная устойчивость» (определяемая ниже) влечет за собой устойчивость. Для проверки того, что инфинитезимальная устойчивость имеет место, нам потребуется сформулированная выше подготовительная теорема Мальгранжа.

Пусть $\varphi_t(x, \theta)=\varphi(x, \theta)+t\varepsilon(x, \theta)$. Мы попытаемся построить f_t, g_t, μ_t с теми же свойствами, что у f, g, μ, и так, чтобы

$$g_t^*(\varphi_t+\mu_t)=\varphi \quad \text{для всех} \quad t, \tag{8.3}$$

чтобы f_t, g_t, μ_t гладко зависели от t и чтобы g_t было единичным отображением при $t=0$. Около $t=0$ мы можем разложить координаты f_t и g_t по степеням t:

$$f_i(x, t)=x^i+a_i(x)\,t+O(t^2), \qquad i=1, \ldots, n,$$

$$g_j(x, \theta, t)=\theta_j+b_j(x, \theta)\,t+O(t^2), \quad j=1, \ldots, N.$$

Подставляя эти выражения в (8.3), дифференцируя и полагая $t=0$, получаем

$$-\varepsilon(x, \theta)=a_0(x)+\sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}a_i+\sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}b_j, \tag{8.4}$$

где $a_0=-\left.\frac{d\mu_t}{dt}\right|_{t=0}$.

Определение 8.1. Будем говорить, что φ *инфинитезимально устойчива*, если для любой функции $\varepsilon(x, \theta)$ в левой части (8.4) существуют такие $a_i=a_i(x)$ и $b_j=b_j(x, \theta)$, что (8.4) имеет место в окрестности начала.

Если применить подготовительную теорему Мальгранжа к отображению $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^n$, $(x, \theta) \longmapsto x$, и

$$\mathcal{R} = \mathcal{E}_{n+N} \Big/ \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_N}\right\},$$

то получится следующий критерий инфинитезимальной устойчивости:

Предложение 8.1. *Фазовая функция* φ *инфинитезимально устойчива тогда и только тогда, когда для любой функции* $\lambda = \lambda(\theta)$ *существуют такие вещественные числа* $c_0, \ldots, c_n$ *и функции* $\tau_1, \ldots, \tau_N$ *от* θ, *что*

$$\lambda(\theta) = c_0 + \sum_i c_i \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}(0, \theta) + \sum_\alpha \tau_\alpha(\theta) \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_\alpha}(0, \theta). \tag{8.5}$$

Упражнение. Покажите, что критерий удовлетворяется для фазовой функции, определяющей простую каустику:

$$\varphi(x, \theta) = x\theta - \frac{\theta^3}{3}.$$

В рассматриваемой ситуации мы деформировали фазовую функцию $\varphi_t(x, \theta)$ к виду $\varphi(x, \theta) + t\varepsilon(x, \theta)$, где ε имеет нуль бесконечного порядка при $x = 0$; поэтому критерий (8.5) одинаков для φ и φ_t. Это доказывает

Предложение 8.2. *Если* φ *инфинитезимально устойчива, то* φ_t *инфинитезимально устойчива для всех* t.

Цель этого параграфа — доказать следующую теорему.

Теорема 8.2. *Предположим, что* $\varphi = \varphi(x, \theta)$ *инфинитезимально устойчива. Пусть* $\varphi'(x, \theta) = \varphi(x, \theta) + \varepsilon(x, \theta)$, *где* ε *имеет нуль бесконечного порядка при* $x = 0$. *Тогда существуют* f, g *и* μ, *удовлетворяющие* (8.1) *и* (8.2).

В действительности мы докажем, что существуют f_t, g_t и μ_t, удовлетворяющие аналогу условия (8.1), а также условию (8.3) на всем интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$.

В качестве первого шага в этом доказательстве нам потребуется следующая

Лемма 8.1. *Если* $\varepsilon(x, \theta)$ *в* (8.4) *обращается в нуль при* $x = 0$, *то можно выбрать такие* a_i *и* b_j *в* (8.4), *что они также будут равны нулю при* $x = 0$.

Доказательство. Если $\varepsilon(x, \theta) = 0$ при $x = 0$, то мы можем написать $\varepsilon(x, \theta) = \sum x^i \varepsilon_i(x, \theta)$ с гладкими ε_i. Для каждого i мы можем решить уравнение

$$-\varepsilon_i(x,\ \theta)=a_{0,i}+\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}a_{1,i}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1}b_{1,i}(x,\ \theta)+\ldots.$$

Полагая $a_j=\sum a_{j,i}x^i$ и $b_j=\sum b_{j,i}x^i$, мы получаем решение уравнения (8.4), равное нулю при $x=0$. Доказательство окончено.

Мы хотим определить f_t, g_t и μ_t, удовлетворяющие (8.3). Дифференцируя (8.3) по t, получаем

$$-\varepsilon(g_t)=\dot{\mu}_t(g_t)+\sum_i\frac{\partial}{\partial x^i}(\mu_t+\varphi_t)(g_t)\dot{f}_i(x,\ t)+$$
$$+\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}(\mu_t+\varphi_t)(g_t)\dot{g}_\alpha(x,\ \theta,\ t).$$

Здесь f_i и g_α — координаты f_t и g_t, а точки обозначают дифференцирование по t. Если положить

$$\begin{aligned}
&a_i(x,\ t)=\dot{f}_i(f_t^{-1}(x),\ t),\quad i=1,\ \ldots,\ n,\\
&b_\alpha(x,\ \theta,\ t)=\dot{g}_\alpha(g_t^{-1}(x,\ \theta),\ t),\quad \alpha=1,\ \ldots,\ N,\\
&a_0(x,\ t)=\frac{\partial\mu}{\partial t}+\sum\frac{\partial\mu}{\partial x^i}a_i,
\end{aligned}\tag{8.6}$$

то рассматриваемое уравнение сведется к уравнению

$$-\varepsilon(x,\ \theta)=a_0(x,\ t)+\sum_i\frac{\partial\varphi_t}{\partial x^i}a_i+\sum_\alpha\frac{\partial\varphi_t}{\partial\theta_\alpha}b_\alpha,\tag{8.7}$$

которое совпадает с (8.4) с точностью до того, что все слагаемые являются функциями от t. Попытаемся решить (8.7) относительно функций a_i и b_α, которые должны быть гладкими на всем интервале $0\leqslant t\leqslant 1$. Заметим вначале, что это достаточно сделать в малом интервале около каждой точки на $[0,\ 1]$. Далее, пользуясь разбиением единицы по t, эти решения можно склеить в глобальное решение по t. По предложению 8.2 φ_t инфинитезимально устойчива, так что (8.7) можно решить для фиксированного t, причем решения будут гладко зависеть от x и θ. Единственный вопрос — можно ли эти решения выбрать гладкими по t. Чтобы убедиться, что это возможно, применим подготовительную теорему к отображению $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$, $(x,\ \theta,\ t)\longmapsto(x,\ t)$, и

$$\mathscr{R}=\mathscr{E}_{n+N+1}\Big/\left(\frac{\partial\varphi_t}{\partial\theta_1},\ \ldots,\ \frac{\partial\varphi_t}{\partial\theta_N}\right).$$

Подготовительная теорема утверждает, что (8.7) можно разрешить для произвольной функции ε тогда и только тогда, когда (8.5) имеет место для φ_t. Однако мы уже видели (предложение 8.2), что это условие одно и то же при всех t, а при $t=0$ оно имеет место ввиду инфинитезимальной устойчивости φ.

Наконец, заметим, что если $\varepsilon(x, \theta)$ обращается в нуль при $x=0$, как в нашем случае, то можно выбрать a_i и b_α равными нулю при $x=0$ (лемма 8.1).

Для завершения доказательства теоремы 8.2 мы должны решить уравнения (8.6) с начальными данными:

$$
\begin{aligned}
&f_i(x, 0)=x^i, \quad i=1, \ldots, n,\\
&g_\alpha(x, \theta, 0)=\theta_\alpha, \quad \alpha=1, \ldots, N,\\
&\mu(x, 0)=0.
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

Первая пара этих уравнений — это обыкновенные дифференциальные уравнения относительно f и g. Поскольку выражения слева равны нулю при $x=0$, эти уравнения глобально разрешимы по t в достаточно малой окрестности начала в (x, θ)-пространстве. Последнее уравнение (8.6) можно решить при помощи линейной теории Гамильтона — Якоби, т. е. интегрируя векторное поле $(a_1(x, t), \ldots, a_n(x, t))$. Это можно сделать глобально по t на том же основании, что и выше. Доказательство окончено.

Воспользуемся теперь полученными результатами для доказательства теорем о канонической форме из § 7. На самом деле мы докажем теорему, которая включает все эти результаты, а также применима к ряду других особенностей. Это вариант теоремы Тома «об универсальной развертке».

Пусть $\psi=\psi(\theta)$ — гладкая функция, определенная в окрестности начала в $\mathbf{R}^N$. Напомним (см. приложение I после гл. I), что ψ удовлетворяет *условию Милнора*, если идеал, порожденный ее первыми производными, $I_\psi=\{\partial\psi/\partial\theta_1, \ldots, \partial\psi/\partial\theta_N\}$, имеет конечную коразмерность в кольце $\mathscr{E}_N$ ростков гладких функций в начале $\mathbf{R}^N$. Вот примеры, которые уже рассматривались: при $N=1$

(a) $\psi=\theta^{k+1}/(k+1)$,

при $N=2$

(b) $\psi=(\theta_1^3+\theta_2^3)/3$,

(c) $\psi=\theta_1^3-\theta_1\theta_2^2$, (8.9)

(d) $\psi=\theta_1^3\theta_2+\theta_2^4$. (8.10)

Предположим, что коразмерность I_ψ в $\mathscr{E}_N$ равна $k+1$. Тогда мы можем выбрать функции $\psi_0, \ldots, \psi_k$ в $\mathscr{E}_N$ так, чтобы их образы составляли базис в факторкольце. Наш основной результат состоит в следующем:

Теорема 8.3. *Пусть $\varphi=\varphi(x, \theta)$ — такая гладкая функция, определенная в начале $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^N$, что $\varphi(0, \theta)=\psi(\theta)$. Тогда существуют гладкие функции $f_i=f_i(x)$, $i=0, \ldots, k$, и $\bar\theta_j(x, \theta)$, для которых $f_i(0)=0$, $\bar\theta_j(0, \theta)=\theta_j$, $j=1, \ldots, N$, и*

$$\varphi(x, \theta)=f_0(x)+f_1(x)\psi_1(\bar\theta)+\ldots+f_k(x)\psi_k(\bar\theta)+\psi(\bar\theta). \tag{8.11}$$

Применяя эту теорему к примеру (a) и полагая $\psi_i=\theta^i$, $i=1, \ldots, k-1$, получаем каноническую форму (7.1). Мы оставляем читателю в качестве упражнения получение канонических форм (7.10), (7.11) и (7.12) при помощи применения теоремы 8.3 к примерам (b), (c) и (d).

Доказательство теоремы 8.3. Прежде всего докажем утверждение формально. Это делается практически так же, как в случае предложений 7.3 и 7.4. Докажем по индукции, что, делая замену координат θ, можно записать φ в виде

$$\varphi(x,\ \theta)=f_0(x)+\ldots+f_k(x)\psi_k(\theta)+\psi(\theta)+\varepsilon(x,\ \theta), \tag{8.12}$$

где f_i — полиномы от x степени $\leqslant r-1$, а $\varepsilon(x, \theta)=O(|x|^r)$ равномерно по θ. Попытаемся найти замену переменных

$$\bar{\theta}_i=\theta_i+\sum_{|I|=r}\tau_{i,I}(\theta)x^I, \quad i=1, \ldots, N, \tag{8.13}$$

и полиномы

$$f_i'(x)=\sum_{|I|=r}f_{i,I}'x^I \tag{8.14}$$

так, чтобы

$$\varphi(x,\ \theta)=\sum(f_i+f_i')(x)\psi_i(\bar{\theta})+\psi(\bar{\theta})+\bar{\varepsilon}(x,\ \theta), \tag{8.15}$$

где $\bar{\varepsilon}(x,\ \theta)=O(|x|^{r+1})$ равномерно по θ. Пусть

$$\varepsilon(x,\ \theta)=\sum_{|I|=r}\varepsilon_I(\theta)x^I+O(|x|^{r+1}). \tag{8.16}$$

Приравнивая коэффициенты при x^I в правой и левой части (8.12), получаем

$$\sum f_{i,I}\psi_i(\theta)+\sum\frac{\partial\psi}{\partial\theta_i}\tau_{i,I}(\theta)=-\varepsilon_I(\theta).$$

По предположению эти уравнения разрешимы, и мы можем продолжить индукцию.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 8.3. Учитывая только что доказанное, можно предполагать, что

$$\varphi(x,\ \theta)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{k}f_i(x)\psi_i(\theta)+\psi(\theta)+\varepsilon(x,\ \theta),$$

где $\varepsilon(x,\ \theta)$ имеет нуль бесконечного порядка при $x=0$.

Предположим пока, что $n\geqslant k$ и $df_1, \ldots, df_k$ линейно независимы в начале. Тогда $\psi_i(\theta)$ являются линейными комбинациями (с постоянными коэффициентами) $(\partial\varphi/\partial x_i)(0,\ \theta)$ и 1, т. е. выполнены условия предложения 8.1 и $\varphi(x,\ \theta)$ инфинитезимально устойчива. Поэтому теорема 8.3 следует из теоремы 8.2.

Предположим, с другой стороны, что df_i не являются линейно независимыми. Рассмотрим на пространстве $\mathbf{R}^{n+k}\times\mathbf{R}^N$ фазовую функцию

$$\Phi(x,\ y,\ \theta)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{k}(f_i(x)+y_i)\psi_i(\theta)+\psi(\theta)+\varepsilon.$$

Применяя предыдущие соображения, мы можем найти такую замену переменных $\tilde{\theta}=\tilde{\theta}(x,\ y,\ \theta)$ и $\tilde{f}_i=\tilde{f}_i(x,\ y)$, $i=0,\ \ldots,\ k$, чтобы

$$\Phi(x,\ y,\ \theta)=f_0(x,\ y)+\sum_{i=1}^{k}f_i(x,\ y)\psi_i(\tilde{\theta})+\psi(\tilde{\theta}).$$

Полагая $\bar{\theta}=\tilde{\theta}(x,\ 0,\ \theta)$, мы заканчиваем доказательство.

§ 9. *Поведение около каустик (продолжение)*

Как мы уже видели, в размерностях $\leqslant 4$ в общем положении могут встретиться семь типов особенностей: четыре типа итерированных S_1-особенностей и три типа омбилик. Каждому из этих типов особенностей соответствует каноническая форма фазовой функции. Воспользуемся теперь этими каноническими формами для описания поведения составных асимптотик в окрестности каустики, имеющей особенность одного из этих типов. Начнем с итерированных S_1-особенностей. При этом понадобится обобщенная «функция Эйри» вида

$$Y_0(x_1,\ \ldots,\ x_{m-2})=\int\exp\left(i\left(x_1\theta+\ldots+x_{m-2}\theta^{m-2}+\frac{\theta^m}{m}\right)\right)d\theta \qquad (9.1)$$

и ее первые частные производные

$$Y_s=\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial Y}{\partial x_s}=\int\theta^s\exp\left(i\left(x_1\theta+\ldots+\frac{\theta^m}{m}\right)\right)d\theta. \qquad (9.2)$$

Нам нужно выяснить, имеют ли смысл выражения в правых частях, т. е. сходятся ли интегралы (даже для классических функций Эйри это не очевидно). Докажем следующее утверждение.

Лемма 9.1. *Рассматриваемые интегралы сходятся в обычном лебеговском смысле (т. е. нет необходимости определять их при помощи регуляризации).*

Доказательство. Пусть $(x_1,\ \ldots,\ x_{m-2})$ пробегает компактное множество. Тогда можно найти такую функцию $h(\theta)$, что $h(\theta)\equiv 1$ для больших θ и $h(\theta)\equiv 0$ вблизи нулей полинома

$$x_1+2x_2\theta+\ldots+\theta^{n-1}.$$

Ясно, что достаточно доказать сходимость интегралов (9.1) и (9.2) после умножения подынтегральных выражений на $h(\theta)$. Полученный интеграл можно записать в виде

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{-i\theta^s h(\theta)}{x_1+2x_2\theta+\ldots+\theta^{m-1}}\frac{\partial}{\partial\theta}\exp\left(i\left(x_1\theta+\ldots+\frac{\theta^m}{m}\right)\right)d\theta. \quad (9.3)$$

Проинтегрируем по частям и заметим, что внеинтегральный член будет стремиться к нулю; получаем

$$-\int\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{-i\theta^s h(\theta)}{x_1+2x_2\theta+\ldots+\theta^{m-1}}\exp\left(i\left(x_1\theta+\ldots+\frac{\theta^m}{m}\right)\right)d\theta.$$

Теперь подынтегральное выражение имеет порядок $O(1/\theta^{m-s})$ для больших θ. Поскольку $s\leqslant m-2$, оно интегрируемо. Доказательство окончено.

Пусть теперь Λ — лагранжево подмногообразие общего положения в T^*_X. Предположим, что оно имеет особенность типа $S_{\underbrace{1,\ldots,1}_{m}}$ в точке p. Тогда мы можем выбрать координаты $x_1,\ldots$ $\ldots, x_n$ около $\pi(p)$ и фазовую функцию $\varphi=\varphi(x,\theta)$, параметризующую Λ, вида

$$\varphi(x,\theta)=f_0(x)+x_1\theta+x_2\theta^2+\ldots+x_{m-2}\theta^{m-2}+\frac{\theta^m}{m}. \quad (9.4)$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 9.1. *Составная асимптотика* $\int a(x,\theta)\exp(i\tau\varphi(x,\theta))\,d\theta$, *ассоциированная с* (9.4), *имеет следующее асимптотическое разложение по введенной выше обобщенной функции Эйри и ее первым производным:*

$$e^{i\tau f_0}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{a_i(x,\tau)}{\tau^{(i+1)/m}}Y_i\left(\tau^{1-1/m}x_1,\ \tau^{1-2/m}x_2,\ \ldots,\ \tau^{1-(m-2)/m}x_{m-2}\right), \quad (9.5)$$

где $a_j(x,\tau)$ — *асимптотические ряды по* τ^{-1} *вида*

$$a_i(x)+\tau^{-1}a_{i,1}(x)+\tau^{-2}a_{i,2}(x)+\ldots,$$

a_i — *полуплотности на* X.

Доказательство. Пользуясь подготовительной теоремой Мальгранжа, мы можем написать

$$a(x,\theta)=a_0(x)+a_1(x)\theta+\ldots+a_{m-2}(x)\theta^{m-2}+$$
$$+k(x,\theta)(x_1+2x_2\theta+\ldots+\theta^{n-1}).$$

Так же как и в § 6, можно избавиться от вклада последнего члена интегрированием по частям (это дает ошибку порядка $O(1/\tau)$). Остается выражение вида

$$\sum_{i=0}^{m-2}\exp(i\tau f_0(x))\,a_i(x)\int\theta^i\exp(i\tau(x_1\theta+\ldots+\theta^m/m))\,d\theta.$$

Делая замену $\theta \longmapsto \tau^{1/m}\theta$, мы можем переписать его так:

$$e^{i\tau f_0(x)} \sum_{i=0}^{m-2} \frac{a_i(x)/\tau^{i+1}}{\tau^{i+1/m}} Y_i(\tau^{1-1/m}x_1, \ldots, \tau^{1-(m-2)/m}x_{m-2}).$$

Теперь повторим соображения относительно остаточного члена. Повторяя их бесконечно много раз, получим асимптотическое разложение (9.5). Доказательство окончено.

Рассмотрим теперь составную асимптотику около S_2-особенности. Для простоты ограничимся гиперболическим случаем. Ситуация в эллиптическом и регулярном параболическом случае аналогична.

Для гиперболической омбилики требуется «обобщенная функция Эйри»

$$Y(x_1, x_2, x_3) = \int \exp\left(i\left(x_1\alpha + x_2\beta + x_3\alpha\beta + \frac{\alpha^3+\beta^3}{3}\right)\right) d\alpha\, d\beta \tag{9.6}$$

и ее первые частные производные

$$\frac{1}{i}\frac{\partial Y}{\partial x_1} = \int \alpha \exp\left(i\left(x_1\alpha + x_2\beta + x_3\alpha\beta + \frac{\alpha^3+\beta^3}{3}\right)\right) d\alpha\, d\beta, \qquad (9.7)_1$$

$$\frac{1}{i}\frac{\partial Y}{\partial x_2} = \int \beta \exp\left(i\left(x_1\alpha + x_2\beta + x_3\alpha\beta + \frac{\alpha^3+\beta^3}{3}\right)\right) d\alpha\, d\beta, \qquad (9.7)_2$$

$$\frac{1}{i}\frac{\partial Y}{\partial x_3} = \int \alpha\beta \exp\left(i\left(x_1\alpha + x_2\beta + x_3\alpha\beta + \frac{\alpha^3+\beta^3}{3}\right)\right) d\alpha\, d\beta. \qquad (9.7)_3$$

Вопрос о сходимости этих интегралов немного сложнее, чем для интегралов (9.1), (9.2). Имеет место

Лемма 9.2. *Определим интеграл* (9.6) *как*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\alpha^2+\beta^2\leqslant R^2} \exp\left(i\left(x_1\alpha + x_2\beta + x_3\alpha\beta \frac{\alpha^3+\beta^3}{3}\right)\right) d\alpha\, d\beta.$$

Этот предел существует и является гладкой функцией от x_1, x_2, x_3.

Доказательство. Идея та же, что и при доказательстве леммы 9.1. Обозначим фазовую функцию в рассматриваемом интеграле через $\varphi(x, \alpha, \beta)$. Легко видеть, что если x_1, x_2, x_3 принадлежат компактному множеству, то нули $(\partial\varphi/\partial\alpha)^2 + (\partial\varphi/\partial\beta)^2$ лежат в компактном множестве (α, β)-пространства. Пусть $h(\alpha, \beta)$ — функция, равная нулю на этом множестве и 1 для больших α и β. Умножая подынтегральную функцию на $h(\alpha, \beta)$, получаем

$$\int\limits_{D_R} h(\alpha, \beta)\, e^{i\varphi(x,\alpha,\beta)}\, d\alpha\, d\beta =$$

$$= \int\limits_{D_R} \frac{-ih(\alpha, \beta)}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\right) e^{i\varphi(x,\alpha,\beta)}\, d\alpha\, d\beta,$$

где D_R — круг радиуса R. Интегрирование по частям приводит к подынтегральному выражению, которое можно оценить при помощи $h(\alpha, \beta)/(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}$ плюс граничный член, который стремится к нулю как $1/R$ при $R\to\infty$. Повторное применение тех же соображений показывает, что интеграл дифференцируем до любого порядка. Доказательство окончено.

К сожалению, интегралы $(9.7)_i$ не сходятся в обычном смысле; однако их можно «регуляризовать» многими способами, например, пользуясь техникой Хёрмандера [18, § 1.2].

Пусть теперь Λ — лагранжево подмногообразие общего положения в T^*_X. Предположим, что оно имеет гиперболическую омбилику в точке p. Тогда мы можем выбрать координаты $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ около $\pi(p)$ и фазовую функцию $\varphi=\varphi(x, \alpha, \beta)$, параметризующую Λ и имеющую вид

$$\varphi(x, \alpha, \beta)=f_0(x)+x_1\alpha+x_2\beta+x_3\alpha\beta+\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}. \tag{9.8}$$

Будет доказана

Теорема 9.2. *Составная асимптотика* $\int a(x, \alpha, \beta)e^{i\tau\varphi(x,\alpha,\beta)}\,d\alpha d\beta$, *ассоциированная с* (9.8), *имеет следующее асимптотическое разложение по обобщенной функции Эйри* (9.6) *и ее первым частным производным*:

$$e^{i\tau f_0(x)}\left\{\frac{a_0(x, \tau)}{\tau^{2/3}}Y(\tau^{2/3}x_1, \tau^{2/3}x_2, \tau^{1/3}x_3)+\right.$$
$$+\frac{a_1(x, \tau)}{i\tau}\frac{\partial Y}{\partial x_1}(\tau^{2/3}x_1, \tau^{2/3}x_2, \tau^{1/3}x_3)+\frac{a_2(x, \tau)}{i\tau}\frac{\partial Y}{\partial x_2}(\ )+$$
$$\left.+\frac{a_3(x, \tau)}{i\tau^{4/3}}\frac{\partial Y}{\partial x_3}(\ )\right\}, \tag{9.9}$$

где a_i — *асимптотические ряды по* τ^{-1}, *коэффициенты которых являются полуплотностями.*

Доказательство. Пользуясь подготовительной теоремой Мальгранжа, мы можем написать

$$a(x, \alpha, \beta)=a_0(x)+a_1(x)\alpha+a_2(x)\beta+a_3(x)\alpha\beta+$$
$$+g(x, \alpha, \beta)\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+h(x, \alpha, \beta)\frac{\partial\varphi}{\partial\beta},$$

где φ — функция (9.8). Мы можем исключить вклад от двух последних членов, интегрируя по частям интеграл $\int a(x,\alpha,\beta)e^{i\tau\varphi(\tau,\alpha,\beta)}d\alpha d\beta$, что приводит к ошибке порядка $O(1/\tau)$. Оставшееся выражение имеет вид

$$a_0(x)\int e^{i\tau\varphi(x,\alpha,\beta)}\,d\alpha\,d\beta+a_1(x)\int\alpha e^{i\tau\varphi}\,d\alpha\,d\beta+a_2(x)\int\beta e^{i\tau\varphi}\,d\alpha\,d\beta+$$
$$+a_3(x)\int\alpha\beta e^{i\tau\varphi}\,d\alpha\,d\beta.$$

Делая замену $\alpha \longmapsto \tau^{1/3}\alpha$, $\beta \longmapsto \tau^{1/3}\beta$, получаем

$$e^{i\tau f_0(x)}\left\{\frac{a_0(x)}{\tau^{2/3}} Y(\tau^{2/3}x_1, \tau^{2/3}x_2, \tau^{1/3}x_3) + \right.$$
$$\left. + \frac{a_1(x)}{i\tau}\frac{\partial Y}{\partial x_1}(\ ) + \frac{a_2(x)}{i\tau}\frac{\partial Y}{\partial x_2}(\ ) + \frac{a_3(x)}{i\tau^{4/3}}\frac{\partial Y}{\partial x_3}(\ )\right\}.$$

Теперь повторяем предыдущие рассуждения по поводу остаточного члена; их бесконечное повторение дает асимптотическое разложение (9.9). Доказательство окончено.

Для эллиптической омбилики мы получаем асимптотическое разложение, содержащее «эллиптическую функцию Эйри»

$$Y(x_1, x_2, x_3) = \int \exp i(x_1\alpha + x_2\beta + x_3(\alpha^2+\beta^2) + \alpha^3 - \alpha\beta^2)\, d\alpha\, d\beta \quad (9.10)$$

и ее первые производные. Для регулярной параболической омбилики получаем разложение, содержащее «параболическую функцию Эйри»:

$$Y(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= \int \exp i(x_1\alpha + x_2\beta + x_3\alpha^2 + x_4\beta^2 + \alpha^2\beta + \beta^4)\, d\alpha\, d\beta \quad (9.11)$$

и ее первые производные. Общий вид этих разложений тот же, что и у разложения (9.9).

Насколько нам известно, ни одна из введенных выше «функций Эйри» не табулирована; их аналитические свойства подробно не исследованы. Было бы крайне интересно иметь ниформацию об этих функциях, учитывая ту роль, которая им, по-видимому, предназначена в теории многомерных асимптотик.

При помощи указанных выше разложений можно получить результаты, аналогичные результатам § 6, для стационарного волнового уравнения в окрестности каустик, если только особенности на каустиках относятся к изученным здесь типам. Предположим, в частности, что мы имеем асимптотическое решение уравнения $\Delta\mu - \tau^2\mu = 0$, нормированное требованием, чтобы оно было порядка $O(1)$ в области, где действует аппроксимация геометрической оптики. Тогда имеет место

Теорема 9.3. (1) *В окрестности регулярной точки каустики* $\mu \cong O(\tau^{1/6})$.

(2) *В окрестности сборки на каустике (т. е. особенности типа* $S_{1,1}$) $\mu \cong O(\tau^{1/4})$.

(3) *В окрестности каустики типа* $S_{1,1,1}$ («ласточкин хвост») $\mu \cong O(\tau^{3/10})$.

(4) *В окрестности каустики типа* $S_{1,1,1,1}$ (*«бабочка»*) $\mu \cong O(\tau^{1/3})$.

(5) *В окрестности гиперболической омбилики* $\mu \cong O(\tau^{1/3})$.

(6) *В окрестности эллиптической омбилики* $\mu \cong O(\tau^{1/3})$.

(7) *В окрестности регулярной параболической омбилики* $\mu \cong$ $\cong O(\tau^{3/8})$.

Доказательство. Если фазовая функция зависит от одного фазового переменного, то связанная с ней асимптотика должна для нормировки быть умножена на $\sqrt{\tau}$, с тем чтобы она стала порядка 1 вне каустики; если имеется два фазовых переменных, то для нормировки надо умножить на τ (поскольку при применении метода стационарной фазы к интегралу вида $\int a(x, \theta)\exp(i\tau\varphi(x, \theta))\,d\theta$ перед асимптотической аппроксимацией вводится множитель $\tau^{-n/2}$, где n — число переменных θ). Принимая во внимание этот факт, мы получаем аппроксимации (1)—(7) как непосредственное следствие асимптотических формул. Теорема доказана.

Как и в § 6, можно оценить ширину граничных слоев для затемненных «областей», окружающих интенсивно освещенные каустики. (Поскольку в геометрии каустики проще разобраться, поднявшись с X на Λ, легче сделать эти оценки на Λ, а не через координаты x.) Можно также без особого труда выписать транспортные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты, фигурирующие в асимптотических рядах (9.5) и (9.9), точно так же как это делалось для асимптотического ряда (6.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Leray J. Solutions asymptotiques.—Seminar notes, Paris, 1972.
2. Duistermaat J. J.—*Comm. Pure Appl. Math.*, 27 (1974), 207—281.
3. Арнольд В. И.—*Функц. анализ и прилож.*, 6:4 (1972), 3—25.
4. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. Пер. с англ.—М.: Мир, 1970.
5. Tougeron J. C. Idéaux de fonctions différentiables.—Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 71, Springer-Verlag. Berlin and New York, 1972.
6. Бернштейн И. Н.—*Функц. анализ и прилож.*, 6: 4 (1972), 26—40.
7. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними.—М.: Физматгиз, 1958.
8. Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. Т. I. Пер. с англ.—М.: ИЛ, 1963.
9. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. Пер. с англ.—М.: Мир, 1977.
10. Boardman J. M.—Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. № 33 (1967), 21—27.
11. Thom R. Stabilité structurelle et morphogénese.—Benjamin, Reading. Mass., 1972.
12. Abramowitz M,, Stegun I. A. (ed.) Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables.—Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., vol. 55, National Bureau of Standards, Washington, D. C., 1964.
13. Messiah A. Quantum mechanics.—Interscience, New York, 1961.
14. Ludwig D.—*Comm. Pure Appl. Math.*, 19 (1966), 215—250.
15. Chester C., Friedman B., Ursell F.—*Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 53 (1957), 599—611.
16. Olver F. W. J. Introduction to asymptotics and special functions.—Academic Press, New York and London, 1974.

17. Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций, Пер. с англ. — *М.*: Мир, 1968.
18. Hörmander L. — *Acta Math.*, **127** (1971), 79—183. [Имеется перевод: сб. *Математика*, **16**:1 (1972), 17—61; **16**:2 (1972), 67—136.]
19*. Atiyah M. F. — *Comm. Pure Appl. Math.*, **23** (1970), 145—150.
20*. Бернштейн И. Н., Гельфанд С. И. — *Функц. анализ и прилож.*, **3**:1(1969), 84—85.
21*. Арнольд В. И. — *Успехи матем. н.*, **28** (1973), 5—17.
22*. Федорюк М. В. — *Матем. сб.*, **49**:4 (1959). 431—446.
23*. Варченко А. Н. — *Функц. анализ и прилож.*, **10**:3 (1976), 13.
24*. Varchenko A. N. — *Invent. Math.*, **37** (1976), 253.
25*. Malgrange B. — *Ann. Scient. Ec. Norm Sup.*, **7** (1974) 3, 405.
26*. Malgrange B. — *Invent. Math.*, **20** (1973), 171.
27*. Jeanquartier R. — *C. R. Acad. scient. Paris*, **271** (1970), 1159.
28*. Паламодов В. П. Асимптотики осциллирующих интегралов с изолированной стационарной точкой фазы. — *ДАН СССР*, **250** (1980), 1321—1324.
29*. Федорюк М. В. — *Успехи матем. н.*, **32**:6 (1977), 67—113.

РАЗЛИЧНЫЕ ФУНКТОРИАЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

В этом приложении мы собрали несколько функториальных утверждений, которые используются на протяжении книги. Вначале мы обсуждаем понятие морфизма векторных расслоений, которое было введено Атья и Боттом в их знаменитой статье о формуле для неподвижных точек. Затем мы обсуждаем понятие расслоенного произведения и показываем, как оно связано с конструкциями, которые описаны в различных главах.

§ 1. *Категория гладких векторных расслоений*

В этом параграфе мы кратко опишем обозначения, используемые при работе с категорией гладких векторных расслоений. Объектом в этой категории является вещественное (соответственно комплексное) векторное C^∞-расслоение E над C^∞-многообразием X:

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ X \end{array}$$

Для того чтобы описать морфизмы в этой категории, напомним следующее. Пусть Y — дифференцируемое многообразие и f: $Y \to X$ — гладкое отображение. Тогда $f^{\#}E$ — векторное расслоение над Y, слои которого определяются так: $(f^{\#}E)_y = E_{f(y)}$. Если F — векторное расслоение над Y, то $\operatorname{Hom}(f^{\#}E, F)$ — также векторное расслоение над Y, слоем которого в точке y является $\operatorname{Hom}((f^{\#}E)_y, F_y) = \operatorname{Hom}(F_{f(y)}, F_y)$. Это позволяет говорить о гладком сечении этого векторного расслоения. Следуя Атья — Ботту, определим морфизм

$$\begin{array}{ccc} F & & E \\ \downarrow & \xrightarrow{\mathbf{f}=(f,r)} & \downarrow \\ Y & & X \end{array}$$

как пару $\mathbf{f} = (f, r)$, где f: $Y \to X$ — гладкое отображение, а r — гладкое сечение $\operatorname{Hom}(f^{\#}E, F)$. Если $\mathbf{g} = (g, t)$,

$$\begin{array}{ccc} G & & F \\ \downarrow & \xrightarrow{\mathbf{g}=(g,t)} & \downarrow \\ Z & & Y \end{array}$$

— морфизм из G в F, то $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ определяется как $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}=(f\circ g,\ w)$, где w — сечение расслоения

$$\operatorname{Hom}(G,\ (f\circ g)^{\#}E)=\operatorname{Hom}(G,\ g^{\#}(f^{\#}E))$$

вида

$$w(z)=r(g(z))\circ t(z),$$

$$t(z)\in\operatorname{Hom}(G_z,\ F_{g(z)}),\quad r(g(z))\in\operatorname{Hom}(F_{g(z)},\ E_{f\circ g(z)}),$$

так что

$$w(z)\in\operatorname{Hom}(G_z,\ E_{(f\circ g)(z)})=\operatorname{Hom}(G,\ (f\circ g)^{\#}E)_z.$$

Легко убедиться, что аксиомы категории при этом выполняются. Для всякого векторного расслоения $E\to X$ пусть $\Gamma(E)$ — пространство C^∞-сечений E, а $\Gamma_0(E)$ — пространство C^∞-сечений с компактным носителем. Если $\mathbf{f}$: $F\to E$ — морфизм, то он индуцирует линейное отображение $\mathbf{f}^*$: $\Gamma(E)\to\Gamma(F)$, где

$$(\mathbf{f}^*s)(y)=r(y)\,s(f(y))\in F_y$$

для всякого сечения s расслоения E. Ясно, что

$$\mathbf{f}^*(\varphi s)=(f^*\varphi)\,\mathbf{f}^*s$$

для всякой C^∞-функции φ на X, где $f^*\varphi(y)=\varphi(f(y))$. Ясно также, что отображение, переводящее f в f^*, является контравариантным функтором в категорию с объектами $\Gamma(E)$.

Аналогично мы можем рассмотреть подкатегорию собственных морфизмов, состоящую из таких $\mathbf{f}$, для которых f: $Y\to X$ — собственное отображение. Тогда мы получаем контравариантный функтор $E\to\Gamma_0(E)$, $\mathbf{f}\mapsto\mathbf{f}^*$.

Обозначим через $F\boxtimes E$ векторное расслоение над $Y\times X$, слой которого в точке $(y,\ x)$ — это $F_y\otimes E_x$. Если F и E — расслоения над одним и тем же многообразием X, то через $F\otimes E$ обозначается векторное расслоение над X со слоем $F_x\otimes E_x$ в точке x. Отображение $\boldsymbol{\Delta}=(\Delta,\ \mathrm{id})$,

$$\begin{tikzcd}
F\otimes E \arrow[r] \arrow[d] & F\boxtimes E \arrow[d] \\
X & X\times X
\end{tikzcd}$$

где $\Delta(x)=(x,\ x)$, разумеется, является морфизмом; оно называется диагональным отображением. Более общо, если G — произвольное векторное расслоение над X, то морфизм вида

$$\begin{array}{ccc} G & & F \boxtimes E \\ \downarrow & \xrightarrow[(\Delta, r)]{} & \downarrow \\ X & & X \times X \end{array}$$

(так что $r(x)$: $F_x \otimes E_x \to G_x$) называется *диагональным морфизмом*.

Если s_1 и s_2 — сечения F и E, то $s_1 \boxtimes s_2$ — сечение $F \boxtimes E$ вида $s_1 \boxtimes s_2(y, x) = s_1(y) \otimes s_2(x)$, а через $s_1 \otimes s_2 = \Delta^*(s_1 \boxtimes s_2)$ обозначается сечение $s_1 \otimes s_2(x) = s_1(x) \otimes s_2(x)$.

Если $\mathfrak{f}_1$: $F_1 \to E_1$ и $\mathfrak{f}_2$: $F_2 \to E_2$ — морфизмы, то корректно определен морфизм $\mathfrak{f}_1 \boxtimes \mathfrak{f}_2$: $F_1 \boxtimes F_2 \to E_1 \boxtimes E_2$; если F_1, F_2 — векторные расслоения над одним и тем же многообразием Y, а E_1, E_2 — векторные расслоения над многообразием X, то определено отображение $\mathfrak{f}_1 \otimes \mathfrak{f}_2$: $F_1 \otimes F_2 \to E_1 \otimes E_2$, причем

$$\Delta \circ (\mathfrak{f}_1 \otimes \mathfrak{f}_2) = (\mathfrak{f}_1 \boxtimes \mathfrak{f}_2) \circ \Delta.$$

В частности,

$$\mathfrak{f}_1^* s_1 \otimes \mathfrak{f}_2^* s_2 = (\mathfrak{f}_1 \otimes \mathfrak{f}_2)^* (s_1 \otimes s_2).$$

Мы не будем больше останавливаться на этих чисто функториальных рассмотрениях, предоставляя читателю восполнение деталей.

Всякий морфизм $\mathfrak{f} = (f, r)$ допускает каноническую факторизацию

$$\mathfrak{f} = \boldsymbol{\pi} \circ \boldsymbol{\iota}.$$

Здесь

$$\boldsymbol{\iota} = (\iota, \mathrm{id}): \quad \begin{array}{ccc} F & & p^{\#} F \\ \downarrow & \longrightarrow & \downarrow \\ Y & & Y \times X \end{array}$$

p: $Y \times X \to Y$ — проекция на первый сомножитель, так что $(p^{\#}F)_{(y, x)} = F_y$, и $\iota(y) = (y, f(y))$, так что $(\iota^{\#} p^{\#} F)_y = F_y$ и отображение id имеет смысл. Аналогично, $\boldsymbol{\pi} = (\pi, w)$, где π — проекция на второй сомножитель и $w(y, x)$: $E_x \to F_y$ дается формулой $w(y, x) = r(y)$.

Если $\mathfrak{f}$: $F \to E$ — морфизм и S — подмножество в F, то определим подмножество $\mathfrak{f}_* S$ в E, считая, что $e \in E_x$ принадлежит $\mathfrak{f}_* S$ тогда и только тогда, когда $r_y(e) \in S$ для некоторого $y \in f^{-1}(x)$, где $\mathfrak{f} = (f, r)$. Таким образом,

$$\mathfrak{f}_* S = \bigcup_{y \in Y} r_y^{-1} (S \cap F_y).$$

Легко проверить, что если $\mathfrak{g}\colon G \to F$ — морфизм и R — подмножество в G, то $\mathfrak{f}_*(\mathfrak{g}_* R) = (\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g})_* R$.

Если $\mathfrak{f}\colon F \to E$ — морфизм и W — подмножество в E, то определим подмножество $\mathfrak{f}^* W$ в F, полагая

$$\mathfrak{f}^* W = \bigcup_{y \in Y} r_y (W \cap E_{f(y)}),$$

где $\mathfrak{f} = (f, r)$. Опять-таки легко проверить, что если $\mathfrak{g}\colon G \to F$ — другой морфизм, то $(\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g})^* W = \mathfrak{g}^* \mathfrak{f}^* W$.

Имеется естественный функтор T^*, который действует из категории дифференцируемых многообразий и дифференцируемых отображений в категорию векторных расслоений. Он ставит в соответствие дифференцируемому многообразию X его кокасательное расслоение $T^*(X)$, дифференцируемому отображению $f\colon Y \to X$ морфизм $\mathbf{T}^*(f) = (f, {}^t df)$, где $df_y\colon T_y(Y) \to T_{f(y)}(X)$ — индуцированное отображение на касательном пространстве (якобиан) и ${}^t df_y\colon T^*_{f(y)}(X) \to T^*_y(Y)$ — транспонированное отображение.

Более общо, рассмотрим функтор, который ставит в соответствие каждому векторному расслоению E над X векторное расслоение $E \otimes T^*(X)$, а каждому морфизму $\mathfrak{f}\colon F \to E$ — морфизм $\mathfrak{f} \otimes \mathbf{T}^*(f)\colon F \otimes T^*(Y) \to E \otimes T^*(X)$. Если s — гладкое сечение расслоения E, обращающееся в нуль в точке x, то $ds(x) \in E_x \otimes \otimes T^*_x(X)$ корректно определен. (В самом деле, вычислим этот дифференциал, пользуясь какой-нибудь тривиализацией. Из того, что $s(x) = 0$, следует, что результат не зависит от тривиализации.) Если $\mathfrak{f}\colon F \to E$ и $y \in f^{-1}(x)$, то $\mathfrak{f}^* s(x) = 0$ и $d(\mathfrak{f}^* s)(y) = (r_y \otimes {}^t df_y)\, ds(x)$.

§ 2. *Расслоенное произведение*

Пусть $f\colon A \to B$ и $g\colon C \to B$ — отображения множеств. Тогда *расслоенное произведение* $D = A \underset{B}{\times} C$ состоит из таких пар (a, c), что $f(a) = g(c)$. Обычно мы обозначаем эту ситуацию диаграммой типа

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & C \arrow[d] \\ A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Если через $\Delta \subset B \times B$ обозначена диагональ $\Delta = \{(b, b)\}$ и мы рассматриваем $(f, g)\colon A \times C \to B \times B$, $(f, g)(a, c) = (f(a), g(c))$, то

$D \subset A \times C$ задается равенством

$$D = (f, g)^{-1} \Delta.$$

Это выражение позволяет перейти к формулировке для дифференцируемых многообразий. Если A, C и B — многообразия, f и g — гладкие отображения, то f и g трансверсальны (мы пишем $f \pitchfork g$) тогда и только тогда, когда отображение (f, g) трансверсально Δ. В этом случае $(f, g)^{-1} \Delta$ будет подмногообразием, т. е. расслоенное произведение D является многообразием. Приведем несколько примеров этой конструкции.

(i) *Поднятие расслоенных пространств.* Если $f: A \to B$ — субмерсия, то $f \pitchfork g$ для любого отображения g. В частности, если A — расслоенное пространство над B, то D — расслоенное пространство над C; оно называется поднятием исходного расслоения и обозначается через $f^{\#} A$.

(ii) *Опускание и поднятие относительно морфизма.* Пусть $E \to X$ и $F \to Y$ — векторные расслоения, и предположим, что задан морфизм из E в F в соответствии с § 1. Это означает, что задан «график» $\subset E \times F$, состоящий из всех точек вида $(x, f(x), r(x)u, u)$, где $u \in F_{f(x)}$. Обозначим его через A; итак, A — подмногообразие в $B = E \times F$. Пусть S — подмножество в E. Тогда мы можем, положив $C = S \times F$, рассмотреть расслоенное произведение D, состоящее из всех точек вида $(x, f(x), r(x)u, u)$, где $(x, r(x)u) \in S$. Спроектируем D на F и обозначим образ в F через $f_* S$. Если S — подмногообразие и C трансверсально A, то $f_* S$ — также подмногообразие.

Аналогично, предположим, что S' — подмножество в F, и пусть $C' = E \times S'$. Тогда расслоенное произведение D' состоит из точек $(x, f(x), r(x)u, u)$ с $(f(x), r(x)u) \in S'$. Спроектировав его на E, мы получим множество, которое будем обозначать через $f^* S'$. Если S' — подмногообразие и C' трансверсально A, то $f^* S'$ будет подмногообразием в E.

Приведем два примера этой конструкции. Вначале предположим, что $E = X$ и $F = Y$ — нулевые расслоения. Тогда $B = \operatorname{graph} f \subset \subset X \times Y$, $f_* S = f(S)$ и $f^* S' = f^{-1} S'$. Здесь $S \times Y$ всегда трансверсально $\operatorname{graph} f$, но условие трансверсальности $X \times S'$ к B действительно является ограничением; на самом деле это условие трансверсальности S' к f.

Далее, возьмем $E = T^* X$ и $F = T^* Y$, где $f: X \to Y$ индуцирует стандартный морфизм на кокасательных расслоениях. В этом случае $B = \{(x, f(x), df^* \xi, \xi)\}$ — *антинормальное* расслоение к $\operatorname{graph} f$ (нормальное расслоение получится, если в указанном выражении заменить ξ на $-\xi$, не меняя $df^* \xi$). Заметим, что B — лагранжево подмногообразие в $T^* X \times T^* Y$ относительно симплектической структуры $\Omega_y - \Omega_x$. Здесь f_* переводит подмножества $T^* X$ в подмножества T^*Y, а f^* действует в обратном направлении. Если соответствующие условия трансверсальности выполнены, то f_* и f^* переводят подмногообразия в подмногообразия. Если Λ_X — лагранжево подмногообразие в T^*X и $\Lambda_X \times T^*Y$ пересекает B трансверсально, то, как доказано в гл. IV, $f_*\Lambda_X$ — лагранжево подмногообразие. Аналогичное утверждение имеет место для f^*. Фактически приведенные там соображения обобщаются на случай, когда расслоенное произведение получается из *чистого пересечения*. Предположим, что

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & C \arrow[d] \\ A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

— диаграмма расслоенного произведения, в которой A, B и C — многообразия, f, g — гладкие отображения и *предполагается*, что расслоенное произведение D является подмногообразием в $A \times C$ и что дифференциалы индуцируют диаграмму расслоенного произведения во всех точках $d \in D$. В этом случае мы говорим, что имеется чистое пересечение или что f и g чисто пересекаются. Таким образом, если f и g пересекаются трансверсально, то они чисто пересекаются; однако чистое пересечение не обязано быть трансверсальным (например, $A = C$ и $f = g$ — чистое пересечение).

Пусть X и Y — симплектические многообразия; пусть Γ — лагранжево подмногообразие в $X \times Y$ и Λ — лагранжево подмногообразие в X, такие, что

$$\begin{tikzcd} Y & & Y \\ D \arrow[u, "\pi_Y"] \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \Gamma \arrow[r] \arrow[d] & X \times Y \arrow[u] \\ \Lambda \arrow[r] & X & \end{tikzcd}$$

— расслоенное произведение с чистым пересечением. *Тогда* π_Y: $D \to Y$ *отображает* D *на лагранжево подмногообразие в* Y.

Докажем это утверждение для векторных пространств. Пусть V и W — симплектические векторные пространства, C — лагранжево подпространство в $V \times W$ и L — лагранжево подпространство в V.

Определим F при помощи диаграммы расслоенного произведения:

$$\begin{tikzcd}
W & & W \\
F \arrow[u, "\pi_W"] \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r] \arrow[d] & V \times W \arrow[u] \\
L \arrow[r] & V &
\end{tikzcd}$$

Тогда $F \to C \xrightarrow{\pi_W} W$ *отображает* F *на лагранжево подпространство в* W.

Доказательство. Пусть $G = \pi_W F$, т. е. мы имеем точную последовательность

$$0 \to \ker \rho \to F \xrightarrow{\rho} G \to 0,$$

где ρ — композиция отображений $F \to C \to G$. Здесь $\ker \rho$ можно отождествить с пространством всех $v \in L$, таких, что $\{v, 0\} \in C$. Пусть $(\ ,\ )_V$ и $(\ ,\ )_W$ — симплектические формы на V и W, и пусть w_1, w_2 — элементы G. Тогда $w_i = \pi_W \{v_i, w_i\}$, где $\{v_i, w_i\} \in C$ и $v_i \in L$. Таким образом,

$$(w_1, w_2)_W = (\{v_1, w_1\}, \{v_2, w_2\})_{V \times W} - (v_1, v_2)_V = 0,$$

т. е. G изотропно. Мы должны доказать, что $\dim G = \frac{1}{2} \dim W$. Если бы диаграмма была трансверсальной, то мы имели бы $\dim F = \dim C + \dim L - \dim V = {}^1/_2 \dim V + {}^1/_2 (\dim V + \dim W) - \dim V = {}^1/_2 \dim W$, $\ker \rho = \{0\}$. В общей ситуации пусть $I \subset V$ — образ $L \oplus C$ в V, так что I состоит из всех векторов $u = v_1 + v_2$, где $v_1 \in L$ и $\{v_2, w_2\} \in C$ для некоторого w_2. Если $\{v, 0\} \in \ker \rho$, то $(v, v_1)_V = 0$, поскольку $v \in L$, и $(v, v_2)_V = 0$, поскольку $\{v, 0\} \in C$. Таким образом, v ортогонально I. Обратно, если $(v, v_2)_V = 0$ для всех v_2 с $\{v_2, w_2\} \in C$, то, поскольку C максимальное изотропное, $\{v, 0\} \in C$, и, аналогично, если $(v, v_1)_V = 0$ для всех $v_1 \in L$, то $v \in L$. Значит, $\ker \rho$ состоит из $\{v, 0\}$, $v \in L$, с $(v, I)_V = 0$ или $\dim \ker \rho = \dim V - \dim I$, так что

$$\begin{aligned}
\dim G &= \dim F - \dim \ker \rho = \\
&= \dim C + \dim L - \dim I - (\dim V - \dim I) = \\
&= {}^1/_2 \dim W,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Соответствующая теорема для многообразий получается применением указанных рассуждений ко всем касательным пространствам.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Оглавление