УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

*электронный учебно-методический комплекс
для студентов математического факультета
специальностей
1-31 03 03-01 Прикладная математика
1-31 80 03 Математика (магистратура)*

Брест, 2012

*Кафедры
ИиПМ
АиГ*

Авторы:

Савчук Вячеслав Федорович — кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой информатики и прикладной математики БрГУ им. А.С. Пушкина

Матысик Олег Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой алгебры и геометрии БрГУ им. А.С. Пушкина

Редактор:

Сохор Ирина Леонидовна — преподаватель кафедры информатики и прикладной математики БрГУ им. А.С. Пушкина

Рецензенты:

Ревинский Антон Федорович — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой общей физики БрГУ им. А.С. Пушкина

Кафедра высшей математики Брестского государственного технического университета

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Среди математических задач выделяется большой класс задач, решение которых неустойчивы к малым изменениям исходных данных. Задачи подобного типа, по существу, являются плохо поставленными. Они принадлежат к классу некорректно поставленных задач. Долгое время считалось, что некорректные задачи не могут иметь практического значения, поэтому их исследование и численное решение бессмысленны. Однако потребности практики привели к настойчивой необходимости решения таких задач, и, значит, к необходимости разработки методов решения некорректных задач и их изучения. Основная цель УМК «Методы решения некорректных задач» — подготовить студентов к разработке и применению с помощью ЭВМ вычислительных алгоритмов для решения некорректных задач, возникающих в процессе математического моделирования.

Электронный учебно-методический комплекс, созданный для поддержки дисциплины специализации «Методы решения некорректных задач», содержит примерный тематический план, курс лекций, индивидуальные варианты заданий для выполнения практических и лабораторных работ. Наличие большого количества примеров поможет студентам качественно самостоятельно подготовиться к выполнению лабораторных работ и к зачету.

УМК адресуется студентам математического факультета 4 курса специальности «Прикладная математика» и магистрантам специальности «Математика».

В соответствии с образовательным стандартом учебная программа предусматривает для изучения дисциплины 102 аудиторных часа: 56 часов лекций, 26 часов практических занятий и 20 часов лабораторных занятий.

Авторы

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

для специальности 1–31 03 03–01 Прикладная математика
(научно-производственная деятельность)

№ п/п	Название темы	Количество часов			
		Всего	Лекций	Практ.	Лаб.
1	Дополнительные сведения по функциональному анализу	8	6	2	
2	Понятие некорректно поставленных задач.	4	2	2	
3	Метод обобщённого суммирования рядов.	4	2	2	
4	Методы итераций решения некорректных задач.	34	22	12	
5	Правило останова по соседним приближениям в методе итераций решения некорректных задач.	14	6	2	6
6	Правило останова по невязке в методе итераций решения некорректных задач.	14	6	2	6
7	Метод регуляризации. Метод невязки.	12	6	2	4
8	Метод подбора. Квазирешения.	12	6	2	4
	Всего часов	**102**	**56**	**26**	**20**

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Дополнительные сведения по функциональному анализу

Определение метрического пространства. Примеры метрических пространств. Сходимость в метрическом пространстве. Метрики пространства R^n. Определение линейного пространства, нормированного пространства, банахова пространства. Примеры. Гильбертово пространство. Линейный оператор в банаховых и гильбертовых пространствах. Норма оператора. Понятие сопряжённого и самосопряжённого операторов. Интегральное представление самосопряжённого оператора.

Тема 2. Понятие некорректно поставленных задач. Примеры некорректно поставленных задач

Определение корректности задачи по Адамару и по Тихонову. Примеры некорректно поставленных задач: задача спектроскопии, обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача аналитического продолжения функции, известной на части области, на всю область, задача Коши для уравнения Лапласа, задача дифференцирования функции, известной приближённо; ; численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2.

Тема 3. Метод обобщённого суммирования рядов

Доказательство сходимости метода обобщённого суммирования рядов, получение оценок погрешности при точной и приближённой правых частях уравнения. Оптимизация полученной оценки погрешности. Пример конкретного применения метода к решению некорректной задачи.

Тема 4. Методы итераций решения некорректных задач

Сходимость методов в случае точной и приближённой части уравнения. Оценка погрешности и её оптимизация, погрешность в счёте. Случай неединственного решения. Случай оператора, заданного приближённо. Сходимость методов и априорные оценки погрешности в энергетической норме гильбертова пространства. Решение уравнения Фредгольма методами итераций. Решение обратной задачи теории потенциала методами итераций.

Тема 5. Правило останова по соседним приближениям в методе итераций решения некорректных задач

Обоснование возможности применения правила останова по соседним приближениям для методов итераций решения некорректных задач. Доказательство сходимости метода итераций с правилом останова по соседним приближениям. Получение оценки для момента останова и оценки погрешности. Доказательство теорем о сходимости метода.

Тема 6. Правило останова по невязке в методе итераций решения некорректных задач

Обоснование возможности применения правила останова по невязке для метода итераций решения линейных уравнений. Доказательство сходимости метода с правилом останова по невязке. Получение оценки для момента останова и оценки погрешности. Решение методом итераций обратной задачи теории потенциала с применением правила останова по невязке.

Тема 7. Метод регуляризации. Метод невязки

Понятие регуляризующего оператора и способы построения регуляризующих операторов. Построение регуляризующих операторов с помощью минимизации сглаживающего функционала. Применение метода регуляризации к решению интегральных уравнений первого рода. Примеры применения метода регуляризации. Метод невязки.

Тема 8. Метод подбора. Квазирешения

Метод подбора решения некорректно поставленных задач. Квазирешения. Теорема о единственности и непрерывности квазирешения на компакте. Приближённое нахождение квазирешений. Решение модельных задач.

1 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

1.1 Метрические пространства

Определение 1.1. *Множество X элементов произвольной природы называется* <u>*метрическим пространством*</u>*, если каждой паре элементов x, y из X соответствует число $\rho(x, y)$, которое называется расстоянием между x и y и удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$ *и* $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Условия 1)–3) называют аксиомами метрики. Аксиома 1) называется аксиомой различения, 2) — аксиома симметрии, 3) — аксиома треугольника.

Говорят, что последовательность элементов $x_n \in X$, $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится к элементу $x^* \in X$, если $\rho(x_n, x^*) \to 0$, $(n \to \infty)$. Это записывается $x_n \to x^*$, либо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Утверждение 1.1. *Если $x_n \to x^*, y_n \to y^*$ при $n \to \infty$, то*

$$\rho(x_n, y_n) \to \rho(x^*, y^*).$$

Доказательство.

Двукратное применение аксиомы треугольника позволяет записать

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x^*) + \rho(x^*, y_n) \leqslant \rho(x_n, x^*) + \rho(x^*, y^*) + \rho(y^*, y_n).$$

Отсюда получим

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(x^*, y^*) \leqslant \rho(x_n, x^*) + \rho(y^*, y_n).$$

Если поменять местами пары элементов (x_n, y_n) и (x^*, y^*), то получится неравенство с другим знаком левой части и, стало быть, $|\rho(x^*, y^*) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_n, x^*) + \rho(y^*, y_n)$. Поэтому из того, что $\rho(x_n, x^*) \to 0$ и $\rho(y_n, y^*) \to 0$ следует, что $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x^*, y^*)$. Таким образом, расстояние $\rho(x, y)$ есть непрерывная функция от своих аргументов x и y. Утверждение 1.1 доказано. ■

Утверждение 1.2. *Если $x_n \to x^*, y_n \to y^*$ при $n \to \infty$, то $x^* = y^*$, то есть в метрическом пространстве сходящаяся последовательность не может иметь два различных предела.*

Доказательство.

$0 = \rho(x_n, y_n) \to \rho(x^*, y^*)$, следовательно, $\rho(x^*, y^*) = 0$ и по аксиоме различия $x^* = y^*$. Утверждение 1.2 доказано. ■

Утверждение 1.3. *В метрическом пространстве всякая сходящаяся последовательность удовлетворяет условию Больцано–Коши.*

Доказательство.

Если $x_n \to x^*$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что при $n > n_0$ справедливо неравенство $\rho(x_n, x^*) < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмём $n > n_0$ и $m > n_0$. Тогда $\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x^*) + (x^*, x_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Утверждение 1.3 доказано. ■

Обратное утверждение, вообще говоря, не всегда верно, так как можно указать такое метрическое пространство, для которого из выполнения признака Больцано–Коши для последовательности x_n не следует существование элемента x, к которому сходится последовательность x_n.

Определение 1.2. *Метрическое пространство X называется <u>полным</u>, если для любой последовательности $\{x_n\}$, для которой выполняется условие Больцано–Коши, в X будет существовать предельный элемент.*

Рассмотрим числовое пространство R_n, элементами которого являются упорядоченные совокупности n действительных (комплексных) чисел $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Расстояние в R_n можно описать различными способами. Приведем три наиболее употребительные метрики.

1. Кубическая или m–метрика:

$$\rho_1(x, y) = \rho_m(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|.$$

2. Октаэдрическая или s–метрика:

$$\rho_2(x,y) = \rho_s(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

3. Сферическая или L–метрика:

$$\rho_3(x,y) = \rho_L(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\dfrac{1}{2}}.$$

Легко проверить, что для каждого из этих расстояний выполняются аксиомы метрики. Во всех указанных метриках сходимость последовательности элементов $x^{(m)} \to x^*, m \to \infty$, равносильна сходимости, по координатам и в каждой из метрик из R_n является полным метрическим пространством.

1.2 Линейные нормированные пространства

Определение 1.3. *Множество X называется линейным пространством над полем R, если:*

1) на X задана композиция сложения, т.е. для любых $x, y \in X$, $x + y \in X$;

2) X *— абелева группа по сложению;*

3) определено произведение числа $\lambda \in R$ *на элемент из* X*, то есть для любых* $\lambda \in R$ *и* $x \in X$ *имеем* $\lambda x \in X$*;*

4) $(\forall \lambda, \mu \in R)(\forall x \in X) \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$*;*

5) $(\forall \lambda, \mu \in R)(\forall x \in X) \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$*;*

6) $(\forall x, y \in X)(\forall \lambda \in R) \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$*;*

7) $(\forall x \in X) \quad 1 \cdot x = x$.

Определение 1.4. *Линейное пространство* X *называется нормированным, если любому* $x \in X$ *ставится в соответствие число* $\|x\|$*, называемое нормой* x*, для которого выполняются условия:*

1) $\|x\| \geqslant 0$ *и* $(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$*;*

2) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$*;*

3) $(\forall \lambda \in R) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Линейное нормированное пространство всегда может быть метризовано, для этого достаточно за расстояние между элементами x и y взять норму разности $x - y$, т. е.

$$p(x, y) = \|x - y\|.$$

Определение 1.5. *Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством.*

Пример 1.1. *Пространство $C_{[a,b]}$. Рассмотрим множество функций $x(t)$, непрерывных на конечном отрезке $[a, b]$. Под сложением элементов этого множества понимают обычное сложение функций и под умножением элемента на число — обычное умножение функции на число. Под нормой функции понимают максимум ее абсолютного значения:*

$$\|x(t)\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

Пространство $C_{[a,b]}$ является полным.

Определение 1.6. *Банахово пространство с нормой $\| \quad \|$ называется (вещественным) гильбертовым пространством, если для любых его элементов g и f, принадлежащих H, определено вещественное скалярное произведение (f, g), обладающее свойствами симметричности $(f, g) = (g, f)$, аддитивности $(\alpha f_1 + \beta f_2, g) = \alpha(f_1, g) + \beta(f_2, g)$, где $\alpha, \beta \in R$, и такое, что $\|g\|^2 = (g, g)$.*

Пример 1.2. *Пространство $L_2(0, 1)$ квадратично суммируемых функций на отрезке $(0, 1)$ — гильбертово.*

Наряду с обычной (по норме) сходимостью элементов гильбертова пространства, называемой *сильной сходимостью*, рассматривают также слабую сходимость.

Определение 1.7. *Последовательность $\{x_n\} \subset H$ называется слабо сходящейся к элементу $x_0 \in H$, если для любого $y \in H$ имеет место сходимость $(x_n, y) \to (x_0, y)$ при $n \to \infty$.*

При этом, сильная сходимость всегда влечет слабую. Но, вообще говоря, обратное неверно.

Гильбертово пространство обладает следующим свойством: из слабой сходимости $x_n - \to x_0, \quad n \to \infty$ и сходимости норм $\|x_n\| \to \|x_0\|$ следует сильная сходимость $\|x_n - x_0\| \to 0$, $n \to \infty$.

В гильбертовом пространстве норма элемента вводится следующим образом: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

1.3 Линейные операторы

Пусть X и Y – два линейных нормированных пространства и A — оператор, определенный на X со значениями в пространстве $Y : y = Ax$.

Определение 1.8. *Оператор A называется непрерывным на элементе x, если из сходимости $x_n \to x$ в X следует сходимость $Ax_n \to Ax$ в Y.*

Говорят, что оператор A непрерывен в X, если A непрерывен на каждом элементе $x \in X$.

Определение 1.9. *Оператор A называется аддитивным оператором, если для любых $x_1, x_2 \in X$ выполняется $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$.*

Свойства аддитивного оператора.

1) $A(0) = 0$;

2) $A(-x) = -Ax$;

3) Аддитивный и непрерывный оператор является однородным, т.е. для $(\forall\lambda \in R)$ и $(\forall x \in X)$ верно равенство $A(\lambda x) = \lambda Ax$

Определение 1.10. *Оператор A называется ограниченным, если существует число M такое, что для любого $x \in X$ верно неравенство $\|Ax\| \leqslant M \cdot \|x\|$.*

Определение 1.11. *Аддитивный оператор называется линейным, если он непрерывен.*

Определение 1.12. *Нормой оператора A называется наименьшее число M, для которого $\|Ax\| \leqslant M \cdot \|x\|$ при любых $x \in X$. Обозначение $\|A\|$.*

Определение 1.13. *Оператор V, определенный в пространстве Y и имеющий значения в X называется обратным для оператора A и обозначается A^{-1}, если он удовлетворяет условиям:*

1) $(\forall x \in X) \quad VAx = x$;

2) $(\forall y \in Y) \quad AVy = y$.

Отметим, что если оператор A имеет обратный $V = A^{-1}$, то A осуществляет взаимно однозначное отображение X на Y.

1.4 Линейные операторы в гильбертовом пространстве

Пусть H — гильбертово пространство.

Определение 1.14. *Оператор A^* называется сопряженным к аддитивному непрерывному оператору A гильбертова пространства H, если для всех $f, g \in H$ справедливо равенство $(Af, g) = (f, A^*g)$.*

Оператор A^* также как и A аддитивен и непрерывен. Например, для интегрального оператора

$$\int_0^1 A(t,s)x(s)ds = y(t) \tag{1.1}$$

сопряженным будет тот же интегральный оператор с ядром $A(s,t)$, отличающийся от исходного порядком следования аргументов.

Свойства сопряженных операторов.

1) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

2) $(A^*)^* = A$;

3) $(\lambda A)^* = \lambda A^*$;

4) $(AB)^* = B^*A^*$.

Определение 1.15. *Если $A^* = A$, то оператор называется самосопряженным.*

Примером самосопряженного оператора может служить оператор (1.1) с симметричным ядром $A(s,t) = A(t,s)$.

Определение 1.16. *Если для всех $f \in H$ справедливо неравенство $(Af, f) \geqslant 0$, то самосопряженный оператор называется положительным.*

Для любого непрерывного аддитивного оператора A оператор A^*A является самосопряженным и положительным.

Определение 1.17. *Если соотношение $Ax = \lambda x$ имеет место для некоторых $x \neq 0$, то говорят, что λ — собственное значение оператора A, а x — соответствующие ему собственные элементы.*

Определение 1.18. *Будем говорить, что число λ является точкой спектра самосопряженного оператора A, если существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что*

$$\|x_n\| = 1, \quad (n = 1, 2, \ldots) \text{ и } Ax_n - \lambda x_n \to 0, n \to \infty.$$

Иначе говоря, λ есть *точка спектра*, если

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ax - \lambda x\| = 0.$$

Совокупность всех точек спектра называется *спектром оператора* A и обозначается S_A. Ясно, что собственное значение входит в спектр, который, однако, может содержать точки, не являющиеся собственными значениями.

Определение 1.19. *Число λ называется регулярным значением оператора A, если оно не принадлежит спектру этого оператора.*

Пусть H_0 — подпространство гильбертова пространства H. Если каждому элементу $x \in H$ однозначно соответствует элемент $x_0 \in H_0$, то тем самым в H определен оператор $P = P_{H_0}$, который называется *оператором проектирования* или *проектором* (на подпространство H_0).

Свойства проекторов.

1) Для любых $x \in H$, элементы Px и $x - Px$ ортогональны;

2) $x \in H_0$ эквивалентно $Px = x$;

3) $x \perp H_0$ эквивалентно $Px = 0$;

4) $\|P\| = 1$.

С каждым самосопряженным оператором A можно связать семейство проекторов, которое позволяет построить интегральное представление оператора.

Пусть A — самосопряженный оператор. Рассмотрим функцию

$$\varphi_\lambda^+(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leqslant \lambda, \\ t - \lambda, & \text{если } t > \lambda. \end{cases}$$

Обозначим $A_\lambda^+ = \varphi_\lambda^+(A)$. Пусть H_λ^+ — множество всех элементов $x \in H$, для которых $A_\lambda^+ x = 0$, то есть H_λ^+ — собственное подпространство оператора A_λ^+, отвечающее нулевому собственному значению $(\lambda = 0)$.

Обозначим, наконец, через E_λ — проектор, проектирующий на подпространство H_λ^+. Оказывается, свойства проекторов E_λ тесно связаны со спектром оператора A, вследствие чего семейство проекторов E_λ называется *спектральной функцией оператора A.*

Свойства спектральной функции.

Пусть спектр оператора A совпадает с $[m, M]$. Тогда

1) если $\lambda < m$, то $E_\lambda = 0$; если$\lambda > M$, то $E_\lambda = E$;

2) если $\lambda \leqslant \mu$, то $E_\lambda \leqslant E_\mu$;

3) спектральная функция, как функция от λ, непрерывна справа в том смысле, что $E_\lambda = E_{\lambda+0} = \lim\limits_{\mu\to\lambda+0} E_\mu$ на H;

4) проектор $E_\lambda(-\infty < \lambda < +\infty)$ перестановочен с каждым оператором, перестановочным с A.

Используя понятие спектральной функции, самосопряженный оператор A со спектром $S_A = [m, M]$ можно представить в виде

$$A = \int_m^M \lambda dE_\lambda, \tag{1.2}$$

которое является интегральным представлением оператора.

Если $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, т.е. оператор A неограниченный, то $A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$.

Если же $S_A = [m, M]$, то справедливо:

$$Ax = \int_m^M \lambda dE_\lambda x, \quad (Ax, y) = \int_m^M \lambda d(E_\lambda x, y).$$

Для построения интеграла (1.2) нет необходимости предполагать, что семейство проекторов E_λ является спектральной функцией самосопряженного оператора: достаточно, если семейство проекторов удовлетворяет условиям 1) и 2).

Определение 1.20. *Пусть семейство проекторов E_λ зависит от вещественного параметра λ, и удовлетворяет условиям:*

1) $E_\lambda \leqslant E_\mu$, *если* $\lambda \leqslant \mu$;

2) *существуют числа* m *и* M *такие, что* $E_\lambda = 0$ *для* $\lambda < m$ *и* $E_\lambda = E$ *для* $\lambda > M$.

Тогда семейство E_λ *будем называть* *<u>разложением единицы.</u>*

2 ПОНЯТИЕ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

При приближенном решении математических или прикладных задач весьма существенным является вопрос о том, корректна ли решаемая задача. Большинство некорректных задач может быть приведено к уравнению I рода, имеющему вид:

$$Ax = y, x \in X, y \in Y, \tag{2.1}$$

в котором по заданному, не обязательно линейному, оператору A, действующему из пространства X в пространство Y и по заданному элементу $y \in Y$ требуется определить решение в пространстве X.

Пространства X и Y будем считать метрическими, а в особо оговариваемых случаях, банаховыми или даже гильбертовыми.

Определение 2.1. *Задача определения решения $x = R(y)$ из пространства X по исходным данным $y \in Y$ называется устойчивой на пространствах X и Y, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\rho_Y(y_1, y_2) \leqslant \delta(\varepsilon)$ следует, что $\rho_X(x_1, x_2) \leqslant \varepsilon$, где $x_1 = Ry_1, x_2 = Ry_2, x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$.*

По-другому, если бесконечно малым вариациям правой части y соответствуют бесконечно малые вариации x. Помимо этого, говорят вместо устойчивости x в пространстве X, о непрерывной зависимости x от $y \in Y$.

Определение 2.2. *Следуя Ж.Адамару, задачу отыскания $x \in X$ из уравнения* (2.1) *называют корректной (корректно поставленной), если при любой фиксированной правой части $y = y_0$ из Y ее решение:*

а) существует в пространстве X;

б) единственно в X;

в) устойчиво в X.

Если хотя бы одно из условий не выполняется, то задачу называют *некорректной (некорректно поставленной).*

Таким образом, корректность задачи связана с наличием обратного оператора A^{-1}, определенного и непрерывного на всем пространстве Y.

Условие корректности задачи и особенно ее решения представляются настолько естественными с точки зрения приложений математики, что долгое время некорректные задачи считались не имеющими физического смысла и поэтому не изучались. Между тем практика и научные исследования стали одну за другой выдвигать некорректные задачи. Так задача Коши для уравнения Лапласа оказалась важной для географических методов разведки полезных ископаемых, а задача Коши для эллиптических уравнений и систем для сверхзвуковой аэродинамики. Уравнение Фредгольма I рода приходится решать в спектроскопии и в обратных задачах теории потенциала. Некорректна и задача теплопроводности с обращенным временем, в которой требуется определить распределение температур в прошлом по данным, относящимся к настоящему. Вообще некорректно большинство так называемых обратных задач, в которых по результатам действий какого-либо физического поля или процесса определяются первоначальные характеристики самого этого поля или процесса.

Если не изменить постановку неустойчивых задач, то обычные методы, применяемые для решения корректных задач, оказываются, естественно, непригодными для решения некорректных задач, так как сколь бы малой не была бы погрешность исходных данных, нельзя быть уверенным в малости погрешности решения. Поэтому потребности практики в решении некорректных задач привели к необходимости пересмотреть классическое понятие корректности и выработать более широкий и приспособленный к реальным нуждам подход.

Пример 2.1 (некорректной задачи). *Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I рода*

$$\int_0^1 A(t,s)\,x(s)\,ds = y(t)\,. \tag{2.2}$$

Пусть $X = Y = L_2(0,1)$, вещественное ядро $A(t,s)$ не только квадратично суммируемо, но и непрерывно. Такое ядро, очевидно, преобразует любую функцию $x(t) \in L_2(0,1)$ в непрерывную функцию и, следовательно, не для всякой правой части $y(t) \in L_2(0,1)$ решение уравнения (2.2) существует в пространстве $L_2(0,1)$.

Если $\lambda = 0$ — собственное значение оператора, то есть ядро $A(t,s)$ неполное, то решение, в случае его существования, не единственно в $L_2(0,1)$.

Наконец, неустойчивость решения покажем для полного симметрического ядра. Пусть вещественные λ_i и $z_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$ — собственные числа и соответствующие им ортонормированные функции ядра. Тогда, как известно из теории интегральных уравнений, $\lambda_i \neq 0$ и $\lambda_i \to 0$, $i \to \infty$, а решение выражается через правую часть уравнения, представленную в виде:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i z_i(t), y_i = (y, z_i) = \int\limits_0^1 y(t) z_i(t) dt,$$

с помощью ряда

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{\lambda_i} z_i(t).$$

Если правые части $y^n(t)$, $n = 1, 2, \dots$ сходятся к функции $y(t)$ в пространстве $L_2(0,1)$, то есть

$$\|y^n - y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (y_i^n - y_i)^2 \to 0, n \to \infty,$$

то норма разности соответствующих решений уравнения (2.2), выраженная равенством

$$\|x^n - x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(y_i^n - y_i)^2}{\lambda_i^2},$$

не только не обязана стремиться к нулю, но и может быть бесконечно большой. В этом легко убедиться, положив

$$y^n(t) = y(t) + \sqrt{|\lambda_n|} z_n(t).$$

Хотя $\|y^n - y\|^2 = |\lambda_n| \to 0, n \to \infty$, но тем не менее,

$$\|x^n - x\|^2 = \frac{1}{|\lambda_n|} \to \infty, n \to \infty$$

и, следовательно, устойчивость решений отсутствует.

Принадлежность точки $\lambda = 0$ предельному множеству точек спектра оператора характерна для некорректных задач.

Будем обозначать образ множества $M \subset X$ в пространстве Y при отображении A через $N = AM$.

Определение 2.3. *Назовем задачу (2.1) корректной по Тихонову на множестве $M \subset X$, а само множество M — ее множеством корректности, если*

а) точное решение задачи существует в классе M;

б) принадлежащее множеству M решение задачи единственно для любой правой части y из множества $N = AM \subset Y$;

в) принадлежащее множеству M решение задачи устойчиво (непрерывно) относительно правых частей y из множества N.

В случае нарушения любого из этих условий задачу называют *некорректной.*

Отсюда видно, что при $M = X$ и $N = Y$ корректность по Тихонову совпадает с корректностью по Адамару и, следовательно, корректность по Тихонову достигается за счет сужения рассматриваемого множества решений для класса корректности.

Пример 2.2 (некорректной задачи)**.** *Задача дифференцирования функции $u(t)$, известной приближенно.*

Пусть $z_1(t)$ есть производная функции $u_1(t)$. Функция

$$u_2(t) = u_1(t) + N \sin \omega t$$

в метрике C отличается от $u_1(t)$ на величину

$$p_c(u_1 u_2) = \sup_t |u_1(t) - u_2(t)| = |N|$$

при любых значениях ω. Однако производная $z_2(t) = u_2'(t)$ отличается от $z_1(t)$ в метрике C на величину $|N\omega|$, которая может быть произвольно большой при достаточно больших значениях $|\omega|$.

Заметим, что задача нахождения производной n-го порядка от функции $u(t)$ сводится к решению интегрального уравнения первого рода:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{(n-1)!}(t-\tau)^{n-1} z(\tau)d\tau = u(t).$$

Таким образом, эта задача не обладает свойством устойчивости, что приводит к большим затруднениям при приближенном вычислении производных.

Пример 2.3 (некорректной задачи). *Численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике* l_2.

Численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2.

Пусть $f_1(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n \cos nt$. Если вместо a_n брать коэффициенты $c_n = a_n + \varepsilon/n$ для $n \geqslant 1$ и $c_0 = a_0$, получим ряд

$$f_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos nt.$$

Коэффициенты этих рядов отличаются (в метрике l_2) на величину

$$\varepsilon_1 = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right\}^{1/2} = \varepsilon \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{1/2} = \varepsilon \sqrt{\frac{\pi^2}{6}},$$

которую выбором числа ε можно сделать сколь угодно малой. Вместе с этим разность $f_2(t) - f_1(t) = \varepsilon \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nt$ может быть сколь угодно большой (при $t=0$ последний ряд расходится).

Таким образом, если уклонение суммы ряда брать в метрике C, суммирование ряда Фурье не является устойчивым:

$$\rho_C(f_1, f_2) = \sup_t |f_2(t) - f_1(t)| = \sup_t \left| \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nt \right| = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Пример 2.4 (некорректной задачи). *Задача Коши для уравнения Лапласа в двумерном случае.*

Она состоит в нахождении решения уравнения $\Delta u(x, y) = 0$ по начальным данным, т.е. в нахождении решения, удовлетворяющего условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{y=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – заданные функции.

Если положить $f_1(x) \equiv 0, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{a} \sin ax$, то решением задачи Коши будет функция $u_1(x, y) = \frac{1}{a^2} \sin ax \times \operatorname{sh} ay, \ a > 0$, где $\operatorname{sh} ay = \frac{(ay)^z - (ay)^{-z}}{2}$ — гиперболический синус.

Если же взять $f_2(x) = \varphi_2(x) \equiv 0$, то решением такой задачи Коши будет функция $u_2(x,y) \equiv 0$.

Если уклонения начальных данных и решений оценивать в метрике C, то имеем

$$\rho_C(f_1, f_2) = \sup_x |f_1(x) - f_2(x)| = 0,$$

$$\rho_C(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \frac{1}{a}.$$

Последняя величина при достаточно больших значениях a может быть сделана сколь угодно малой. Однако уклонение решений

$$\rho_C(u_1, u_2) = \sup_x |u_1(x,y) - u_2(x,y)| = \sup_x \left| \frac{1}{a^2} \sin ax \cdot \operatorname{sh} ay \right| = \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ay$$

при любом фиксированном $y > 0$ может быть произвольно большим при достаточно больших значениях a (так как при $a \to \infty$ $\operatorname{sh} ay \to \infty$ быстрее, чем $\frac{1}{a^2} \to 0$).

Таким образом, задача неустойчива и, следовательно, некорректна.

Пример 2.5 (некорректной задачи). *Задача аналитического продолжения функции, известной на части области, на всю область.*

Пусть D – конечная область, E – дуга кривой, принадлежащая области D. Тогда задача аналитического продолжения функции, заданной на дуге кривой E, на всю область D является неустойчивой.

В самом деле, пусть z_0 — точка на границе области D, расстояние от которой до E равно $d > 0$ и $f_1(z)$ — аналитическая в D функция. Функция $f_2(z) = f_1(z) + \frac{\varepsilon}{z-z_0}$, где ε – заданное положительное число, также аналитическая в D. На множестве E эти функции отличаются одна от другой на величину $\varepsilon/(z - z_0)$, модуль которой не превосходит ε/d, т.е. $|f_2(z) - f_1(z)| \leqslant \varepsilon/d$ на множестве E. Величина ε/d может быть сделана произвольно малой путем выбора соответствующего значения числа ε, так как на $E \quad z \neq z_0$.

Однако на D разность функций $f_2(z) - f_1(z) = \dfrac{\varepsilon}{(z - z_0)}$ не ограничена по модулю, так как можно добиться, что $z = z_0$.

Пример 2.6 (некорректной задачи)**.** *Обратная задача гравиметрии.*

Пусть имеется тело, плотность которого отлична от плотности окружающей среды. Определить форму тела по аномалии напряжения силы тяжести, создаваемой им на поверхности земли.

Предположим, что среда, находящаяся под поверхностью земли $(z=0)$, состоит из масс с известными плотностями ρ_1 и ρ_2, разделенных границей $z(x)$ (рис. 2.1). Пусть $\tilde{z}(x) = -H$ всюду, кроме отрезка $a \leqslant x \leqslant b$, на котором $\tilde{z}(x) = -H + z(x)$. Такая конфигурация масс создает на поверхности земли аномалию напряжения силы тяжести $\Delta g = -\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0}$, где V — потенциал масс с плотностью $\rho = \rho_2 - \rho_1$, заполняющих область S (см. рис. 2.1).

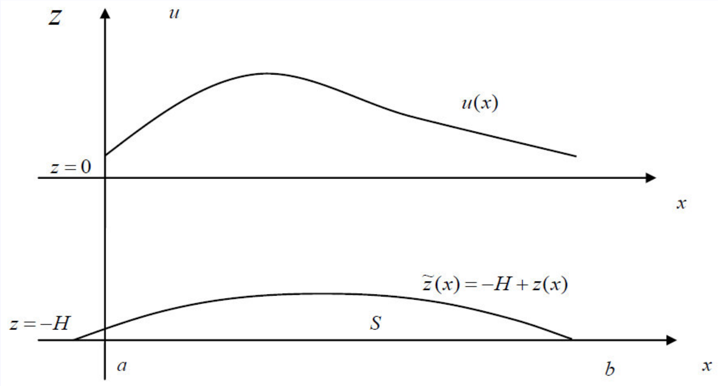

Рис. 2.1

Так как

$$V = \int\limits_S \frac{\rho}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right)\, d\xi\, d\eta,$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (z-\eta)^2}$, то

$$\Delta g = -\frac{\rho}{2\pi} \int\limits_a^b \int\limits_{-H}^{-H+z(\xi)} -\frac{\partial}{\partial \eta} \ln\frac{1}{r}\, d\xi\ \ d\eta|_{z=0} =$$

$$= \frac{\rho}{2\pi} \int\limits_a^b \ln\frac{(x-\xi)^2 + H^2}{(x-\xi)^2 + (H - z(\xi))^2}\, d\xi.$$

Аномалия напряжения силы тяжести на поверхности земли может быть измерена.

Таким образом, задача определения функции $z(x)$ сводится к решению нелинейного интегрального уравнения первого рода

$$Az = \int\limits_a^b \ln \frac{(x-\xi)^2 + H^2}{(x-\xi)^2 + (H - z(\xi))^2}\, d\xi = u(x),$$

где $u(x) = \frac{2\pi}{\rho}\Delta g$. Здесь A – нелинейный интегральный оператор. Нетрудно показать неустойчивость решения этого уравнения к малым изменениям правой части $u(x)$.

Пример 2.7 (некорректной задачи). *Рассмотрим задачу об изучении спектрального состава светового излучения (задача спектроскопии).*

Пусть наблюдаемое излучение неоднородно и распределение плотности энергии по спектру характеризуется функцией $z(s)$, где s – частота (или энергия). Пропуская это излучение через измерительную аппаратуру, мы получаем экспериментальный спектр $u(x)$. Здесь x может быть частотой, а может выражаться также в терминах напряжений и силы тока измерительной аппаратуры. Если измерительная аппаратура линейна, то функциональная связь между $z(s)$ и $u(x)$ дается формулой

$$Az \equiv \int_a^b K(x,s)\, z(s)\, ds = u(x),$$

где $K(x,s)$ – аппаратная функция, предполагаемая известной. Она представляет экспериментальный спектр (как функция x), если на прибор падает монохроматическое излучение частоты единичной интенсивности (это и есть δ – функция $\delta(s-x)$). Здесь a и b – границы спектра.

3 МЕТОД ИТЕРАЦИЙ ЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

3.1 Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

Решается операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \tag{3.1}$$

с действующим в гильбертовом пространстве H ограниченным положительно определенным самосопряженным оператором $A : H \to H$, в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако, вообще говоря, не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (3.1) является некорректной. Если решение уравнения (3.1) все же существует и единственно, то для его отыскания естественно пытаться применить различные итерационные методы. В данном подразделе предлагается новый явный итеративный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^k x_n + A^{-1}[E - (E - \alpha A)^k]y, x_0 = 0. \tag{3.2}$$

Здесь k — некоторое натуральное число, а оператор A^{-1}, фигурирующий в (3.2), не означает, что для рассматриваемой схемы (3.2) необходимо его знать – нужно заметить, что после раскрытия скобок во втором слагаемом он сокращается и весь оператор в квадратных скобках является полиномом от оператора A

$$C_k^1\alpha E - C_k^2\alpha^2 A + C_k^3\alpha^3 A^2 - \ldots - (-1)^k\alpha^k A^{k-1}.$$

Предложенный метод обобщает метод простой итерации, рассмотренный в работах [2–3, 5–6], т.е.

$$x_{n+1} = x_n + \alpha(y - Ax_n), x_0 = 0,$$

последний получается из (3.2) при $k = 1$.

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ, т.е. известен y_δ, для которого $\|y - y_\delta\| \leqslant \delta$. Поэтому вместо (3.2) приходится рассматривать приближения

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^k x_{n,\delta} + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^k\right] y_\delta, x_{0,\delta} = 0, k \in N. \quad (3.3)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (3.3) понимается утверждение о том, что приближения (3.3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (3.1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (3.3) является сходящимся, если

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\|\right) = 0.$$

Докажем сходимость метода (3.3). Получим оценки погрешности метода при точной правой части, при приближенной правой части уравнения (3.1) и погрешность в счете. Справедлива

Теорема 3.1. *Итеративный процесс (3.2) при условии*

$$0 < \alpha < 2/\left\|A\right\| \tag{3.4}$$

сходится.

Доказательство.

По индукции нетрудно показать, что

$$x_n = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{kn}\right] y.$$

Так как уравнение (3.1) имеет по предположению единственное точное решение, то $x = A^{-1}y$ и, значит,

$$x - x_n = A^{-1}y - A^{-1}[E - (E - \alpha A)^{kn}]y = A^{-1}(E - \alpha A)^{kn}y.$$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора [1, с. 309] $A = \int\limits_0^M \lambda dE_\lambda$ (E_λ — соответствующая спектральная функция, $M = \|A\|$), получим

$$x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda y.$$

Разобьем полученный интеграл на два интеграла

$$x - x_n = \int\limits_0^{\varepsilon_0} \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda y + \int\limits_{\varepsilon_0}^M \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda y.$$

При условии (3.4) величина $|1-\alpha\lambda|<1$, тогда

$$\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{M}\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^{kn}dE_\lambda y\right\| \leqslant q^{kn}(\varepsilon_0)\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{M}\lambda^{-1}dE_\lambda y\right\| =$$

$$= q^{kn}(\varepsilon_0)\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{M}dE_\lambda x\right\| \to 0, n\to\infty.$$

(Здесь $|1-\alpha\lambda|\leqslant q(\varepsilon_0)<1,\ \lambda\in[\varepsilon_0,M]$).

$$\left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^{kn}dE_\lambda y\right\| \leqslant \left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}\lambda^{-1}dE_\lambda y\right\| =$$

$$= \left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}dE_\lambda x\right\| = \|E_{\varepsilon_0}x\| \to 0, \varepsilon_0\to 0,$$

так как E_{ε_0} сильно стремится к нулю при $\varepsilon_0\to 0$ в силу свойств спектральной функции [1, с. 302]. Следовательно,

$$\|x-x_n\|\to 0, n\to\infty$$

т.е. итеративный процесс (3.2) сходится. Теорема 3.1 доказана. ■

Покажем, что при тех же условиях процесс (3.3) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Имеет место

Теорема 3.2. *При условии (3.4) итеративный процесс (3.3) сходится, если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$.*

Доказательство.

Будем считать $x_{0,\delta}{=}0$ и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}).$$

Как показано ранее, $x - x_n \to 0$, $n \to \infty$. Используя интегральное представление самосопряженного оператора A, получим

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{kn}\right](y - y_\delta) =$$

$$= \int\limits_0^M \lambda^{-1}[1 - (1 - \alpha\lambda)^{kn}]dE_\lambda(y - y_\delta).$$

По индукции нетрудно показать, что

$$g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{kn}\right] \leqslant kn\alpha.$$

Тогда $\|x_n - x_{n,\delta}\| \leqslant kn\alpha\delta$. Поскольку справедливо

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leqslant \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leqslant \|x - x_n\| + kn\alpha\delta$$

и, как показано ранее, $\|x - x_n\| \to 0, n \to \infty$,то для сходимости метода (3.3) достаточно, чтобы $n\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$. Теорема 3.2 доказана. ■

Оценить скорость сходимости метода (3.3) без дополнительных предположений невозможно, так как неизвестна и может быть сколь угодно малой скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$. Предположим, что точное решение уравнения (3.1) **истокообразно представимо**, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда $y = A^{s+1} z$ и, следовательно, $x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^s (1 - \alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda z$. Для оценки $\|x - x_n\|$ найдем максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s (1-\alpha\lambda)^{kn}$. Приравняв нулю производную от $f(\lambda)$, получим

$$\lambda^{s-1}(1 - \alpha\lambda)^{kn-1}\left[s(1 - \alpha\lambda) - kn\alpha\lambda\right] = 0.$$

Первые два сомножителя не равны нулю, ибо в противном случае $f(\lambda) = 0$. Поэтому $s(1 - \alpha\lambda) - kn\alpha\lambda = 0$. Отсюда $\lambda_* = \frac{s}{\alpha(s+kn)}$ — стационарная точка функции $f(\lambda)$. Поскольку $f''(\lambda_*) < 0$, то λ_* — точка локального максимума для $f(\lambda)$. Отсюда

$$f(\lambda_*) = \left[\frac{s}{\alpha(s + kn)}\right]^s \left[1 - \frac{\alpha s}{\alpha(s + kn)}\right]^{kn} =$$
$$= (kn)^{kn} s^s \alpha^{-s} (kn + s)^{-kn-s} < s^s (kn\alpha e)^{-s},$$

так как $\left[1 + \frac{s}{kn}\right]^{s+kn} > e^s$ при всех $n > 0$ [2]. Следовательно,

$$f(\lambda_*) < s^s (kn\alpha e)^{-s}.$$

Покажем, что последняя величина не меньше максимального значения $|f(\lambda)|$ для всех α удовлетворяющих условию $0 < \alpha \leqslant \frac{5}{4M}$ более сильному, чем (3.4). (Можно было бы считать, что $\alpha M \in (0, 2-\varepsilon)$ но тогда последнее утверждение было бы верным лишь при достаточно больших n, а не для всех n). Чтобы проверить это, достаточно исследовать поведение функции $f(\lambda)$ на концах отрезка $[0, M]$. Очевидно, $f(0) = 0$ и максимум в точке $\lambda = 0$ быть не может. Значит, может оказаться, что $|f(M)| > f(\lambda_*)$.

Покажем, что если взять $0 < \alpha \leqslant \frac{5}{4M}$, то $|f(M)| < s^s(kn\alpha e)^{-s}$. При $\lambda < \frac{1}{\alpha}$ функция $f(\lambda)$ имеет максимум, оцененный ранее. При $\lambda > \frac{1}{\alpha}$ $f'(\lambda) > 0$ при четных kn и $f'(\lambda) < 0$ при нечетных kn поэтому наибольшее значение $|f(\lambda)|$ получается в точке $\lambda = M$. А значение $|f(M)| = = \left|M^s(1-\alpha M)^{kn}\right|$ тем больше, чем больше α, так как $\alpha M > 1$ (напомним, что исследуется случай $\lambda > \frac{1}{\alpha}$). Поэтому достаточно вычислить $|f(M)|$ при максимальном $\alpha = \frac{5}{4M}$. Докажем, что $|f(M)| < s^s(kn\alpha e)^{-s}$ или $\left|M^s(-\frac{1}{4})^{kn}\right| < (4s)^s(5kne)^{-s}M^s$, т.е. $(4s)^{-s}(5kne)^s < 4^{kn}$. Обозначим $\varphi(s) = (4s)^{-s}(5kne)^s$ и найдем максимум функции $\varphi(s)$. Итак,

$$\varphi'(s) = (4s)^{-s}(-ln(4s)-1)(5kne)^s + (4s)^{-s}(5kne)^s ln(5kne) =$$

$$= (4s)^{-s}(5kne)^s(-ln(4s)-1+ln(5kne)) = (4s)^{-s}(5kne)^s \ln\left(\frac{5kn}{4s}\right).$$

Приравняв нулю производную $\varphi'(s)$ получим $(4s)^{-s}(5kne)^s \ln\left(\frac{5kn}{4s}\right) = 0$. Поскольку $(4s)^{-s} \neq 0, (5kne)^s \neq 0$, то $\ln(\frac{5kn}{4s}) = 0$ и, следовательно,

$s_* = \frac{5kn}{4}$ — стационарная точка функции $\varphi(s)$. Так как

$$\varphi''(s_*) = (4s_*)^{-s_*}(5kne)^{s^*}\left(-\frac{1}{s_*}\right) < 0$$

то s_* — точка максимума $\varphi(s)$. Найдем его.

$$\varphi(s_*) = (4s)^{-s}(5kne)^s\big|_{s=s^*} = (5nk)^{\frac{-5nk}{4}}(5nke)^{\frac{5nk}{4}} = e^{\frac{5nk}{4}}.$$

Итак, докажем, что $e^{\frac{5nk}{4}} < 4^{kn}$, что очевидно при $n \geqslant 1$, поскольку $e^{\frac{5}{2}} < 4^2$. Таким образом, при α удовлетворяющих условию $0 < \alpha \leqslant \frac{5}{4M}$, для любых $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $\max\limits_{\lambda\in[0,M]} |f(\lambda)| < s^s(kn\alpha e)^{-s}$, тогда

$$\|x - x_n\| < s^s(kn\alpha e)^{-s}\,\|z\|\,.$$

Общая оценка погрешности метода (3.3) при приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \leqslant \delta$ запишется в виде

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leqslant \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leqslant s^s(kn\alpha e)^{-s}\,\|z\| + kn\alpha\delta.$$

Итак, доказана

Теорема 3.3. *Если точное решение x уравнения (3.1) истокопредставимо, то при условии $0 < \alpha \leqslant \frac{5}{4M}$ для метода (3.3) справедлива оценка погрешности*

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leqslant s^s(kn\alpha e)^{-s}\,\|z\| + kn\alpha\delta.$$

Оптимизируем по n полученную оценку погрешности. Для этого найдем значение числа итераций n, при котором оценка становится минимальной. Обозначим

$$\xi(n) = s^s (kn\alpha e)^{-s} \|z\| + kn\alpha\delta$$

и приравняем $\xi'(n)$ нулю. Имеем

$$-sn^{-s-1} s^s (k\alpha e)^{-s} \|z\| + k\alpha\delta = 0.$$

Отсюда, возведя обе части равенства в степень $-\frac{1}{(s+1)}$, получим

$$n_{\text{опт}} = s(k\alpha)^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{1}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{(s+1)}}.$$

Подставив полученное выражение для $n_{\text{опт}}$ в оценку погрешности, найдем ее оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leqslant (s+1) e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}.$$

Итак, доказана

Теорема 3.4. *Если точное решение x уравнения (3.1) истокопредставимо, то при условии $0 < \alpha \leqslant \frac{5}{4M}$ оптимальная оценка погрешности для метода (3.3) имеет вид*

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{onm} \leqslant (s+1) e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}$$

и достигается при

$$n_{onm} = s(k\alpha)^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{1}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}.$$

Оптимальная оценка погрешности для метода (3.3) не зависит от параметра α, но от него зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, значит, объема вычислительной работы, следует брать по возможности большим, удовлетворяющим условию $0 < \alpha \leqslant \frac{5}{4M}$ и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым.

Рассмотрим погрешность метода (3.3) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ — точное значение, полученное по формуле (3.3), а z_n — значение, полученное по той же формуле с учетом вычислительных погрешностей γ_n, т.е.

$$z_{n+1} = (E - \alpha A)^k z_n + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^k\right] y_\delta + \alpha\gamma_n, z_0 = 0. \qquad (3.5)$$

Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (3.5) равенство (3.3), получим $\varepsilon_{n+1} = (E - \alpha A)^k \varepsilon_n + \alpha\gamma_n$. Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции получим

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} (E - \alpha A)^{k(n-1-i)} \alpha\gamma_i.$$

В силу (3.4) и принадлежности нуля спектру оператора A $\|E - \alpha A\| \leqslant 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \leqslant n\alpha\gamma$, где $\gamma = \sup\limits_i |\gamma_i|$. Таким образом, оценка погрешности метода (3.3) при счете с округлениями имеет вид

$$\|x - z_n\| \leqslant \|x - x_n, \delta\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \leqslant s^s (kn\alpha e)^{-s} \|z\| + kn\alpha\delta + n\alpha\gamma.$$

3.2 Сходимость метода в случае неединственного решения

Покажем, что метод (3.2) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ — собственное значение оператора (случай неединственности решения уравнения (3.1)). Обозначим через $N(A) = \{x \in H | Ax = 0\}$, $M(A)$ — ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ — проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ — проекция $x \in H$ на M(A).Справедлива

Теорема 3.5. *Пусть* $A \geqslant 0, y \in H, 0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$. *Тогда для итерационного процесса* (3.2) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n \to \Pi(A)y, \|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf_{x\in H} \|Ax - y\|$;

б) последовательность x_n *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо.*

В последнем случае $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* *— минимальное решение уравнения.*

Доказательство.

Применим оператор к (3.2) и получим

$$Ax_n = A(E - \alpha A)^k x_{n-1} + \left[E - (E - \alpha A)^k\right] (P(A)y + \Pi(A)y),$$

где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то

$$Ax_n = A(E - \alpha A)^k x_{n-1} + \left[E - (E - \alpha A)^k\right] \Pi(A)y =$$
$$= A(E - \alpha A)^k x_{n-1} + \Pi(A)y - \Pi(A)(E - \alpha A)^k y.$$

Отсюда

$$Ax_n - \Pi(A)y = A(E-\alpha A)^k x_{n-1} - \Pi(A)(E-\alpha A)^k y = \\ = (E-\alpha A)^k (Ax_{n-1} - \Pi(A)y).$$

Последнее равенство запишем в виде $v_n = (E-\alpha A)^k v_{n-1}$, где $Ax_n - \Pi(A)y = v_n$ и $v_n \in M(A)$. Отсюда $v_n = (E-\alpha A)^{kn} v_0$. Имеем $A \geqslant 0$ и A — положительно определен в $M(A)$, т.е. $(Ax,x) > 0$ для любого $x \in M(A)$. Так как $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$, то $\|E-\alpha A\| < 1$, поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|(E-\alpha A)^{kn} v_0\right\| = \left\| \int_0^{\|A\|} (1-\alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda v_0 \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1-\alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda v_0 \right\| + \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} (1-\alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda v_0 \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda v_0 \right\| + q^{kn}(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda v_0 \right\| = \|E_{\varepsilon_0} v_0\| + q^{kn}(\varepsilon_0)\, \|v_0 - E_{\varepsilon_0} v_0\| < \varepsilon$$

при $\varepsilon_0 \to 0, n \to \infty$. (Здесь $|1-\alpha\lambda| \leqslant q(\varepsilon_0) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$).

Следовательно, $v_n \to 0$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Тогда

$\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$ (по теореме 2.1 из [3]). Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (3.2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* — минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (3.2) примет вид

$$\begin{aligned}
x_n &= (E - \alpha A)^k x_{n-1} + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^k\right]\Pi(A)y = \\
&= (E - \alpha A)^k x_{n-1} + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^k\right]Ax^* = \\
&= (E - \alpha A)^k x_{n-1} + \left[E - (E - \alpha A)^k\right]x^* = \\
&= x_{n-1} + \left[E - (E - \alpha A)^k\right](x^* - x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Разобьем последнее равенство на два, так как

$$x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
P(A)x_n &= P(A)x_{n-1} + P(A)\left[E - (E - \alpha A)^k\right](x^* - x_{n-1}) = \\
&= P(A)x_{n-1} + \left[E - (E - \alpha A)^k\right]P(A)(x^* - x_{n-1}) = \\
&= P(A)x_{n-1} = \ldots = P(A)x_0,
\end{aligned}$$

так как $AP(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = 0$;

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \Pi(A)\left[E - (E - \alpha A)^k\right]\left(x^* - x_{n-1}\right) =$$
$$= \Pi(A)x_{n-1} - \left[E - (E - \alpha A)^k\right]\left(\Pi(A)x_{n-1} - \Pi(A)x^*\right) =$$
$$= \Pi(A)x_{n-1} - \left[E - (E - \alpha A)^k\right]\left(\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right),$$

так как $x^* \in M(A)$ и, значит, $\Pi(A)x^* = x^*$.

Обозначим $w_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда $w_n = (E - \alpha A)^k w_{n-1}$ и, аналогично v_n, можно показать, что $w_n \to 0$, $n \to \infty$.

Итак, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$.

Теорема 3.5 доказана ■

Замечание 3.1. *Так как у нас $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, т.е. процесс (3.2) сходится к нормальному решению, т.е. к решению с минимальной нормой.*

3.3 Сходимость метода в энергетической норме

Сходимость процессов (3.2) и (3.3) в норме пространства H рассмотрена в подразделах 3.1 и 3.2. Изучим сходимость метода (3.3) в **энергетической норме** $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности. Полагаем $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \tag{3.6}$$

Запишем первое слагаемое в виде

$$x - x_n = A^{-1}(E - \alpha A)^{kn} y = (E - \alpha A)^{kn} x.$$

Как было доказано в подразделе 3.1 $x - x_n$ бесконечно мало в норме пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки делалось предположение об истокопредставимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не потребуется. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = \left(A(E - \alpha A)^{kn} x, (E - \alpha A)^{kn} x\right) = \\ = \int_0^M \lambda (1 - \alpha\lambda)^{2kn} d(E_\lambda x, x),$$

где $M = \|A\|$, E_λ — соответствующая спектральная функция, E — единичный оператор.

Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции при $\lambda \in [0, M]$. Функция $f(\lambda) = \lambda(1 - \alpha\lambda)^{2kn}$ – частный случай при $s = 1$ функции, оцененной в подразделе 3.1. Поэтому при условии

$$0 < \alpha \leqslant \frac{5}{4M} \qquad (3.7)$$

$\max\limits_{\lambda\in[0,M]} |f(\lambda)| \leqslant (2kn\alpha e)^{-1}$. Следовательно, при выполнении (3.7) справедлива оценка

$$\|x - x_n\|_A \leqslant (2kn\alpha e)^{-\frac{1}{2}} \|x\| .$$

Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $s = \frac{1}{2}$ точного решения.

Оценим второе слагаемое в (3.6). Как показано в подразделе 3.1 , справедливо равенство

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^{kn}\right] (y - y_\delta).$$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int\limits_0^M \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha\lambda)^p\right]^2 d(E_\lambda(y - y_\delta), y - y_\delta).$$

Обозначим через $g(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим ее сверху при условии (3.7). Покажем, что при любом $p \in H$ выполняется неравенство

$$g(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha\lambda)^p\right]^2 \leqslant \left(\frac{5}{4}\right) p\alpha, \quad p \geqslant 1. \tag{3.8}$$

При $p = 1$, $g(\lambda) = \alpha^2\lambda \leqslant \left(\frac{5}{4}\right)\alpha$. При $p = 2$, $g(\lambda) \leqslant \left(\frac{35}{27}\right)\alpha$. По индукции докажем, что

$$g(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^p\right]^2 \leqslant \left(\frac{35}{54}\right)p\alpha, \quad p \geqslant 2. \tag{3.9}$$

При $p = 2$ утверждение верно. Предположим, что оно справедливо при $p = l$, т.е.

$$\lambda^{-1}\left[(1 - (1 - \alpha\lambda)^l\right]^2 \leqslant \left(\frac{35}{54}\right)l\alpha,$$

и покажем, что (3.9) выполняется при $p = l + 1$. Рассмотрим интересующее нас выражение

$$\lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{l+1}\right]^2 = \lambda^{-1}\left[1 - 2(1 - \alpha\lambda)^{l+1} + (1 - \alpha\lambda)^{2(l+1)}\right] = \lambda^{-1}\times$$
$$\times\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^l\right]^2 + \lambda^{-1}\left\{2(1 - \alpha\lambda)^l\alpha\lambda - (1 - \alpha\lambda)^{2l}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^2\right]\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{35}{54}\right)l\alpha + \alpha\left[2(1 - \alpha\lambda)^l - (1 - \alpha\lambda)^{2l}(2 - \alpha\lambda)\right].$$

Чтобы доказать требуемое, достаточно убедиться что

$$B \equiv 2(1 - \alpha\lambda)^l - (1 - \alpha\lambda)^{2l}(2 - \alpha\lambda) \leqslant \frac{35}{54}. \tag{3.10}$$

Рассмотрим три случая.

1) $1 \leqslant \alpha\lambda \leqslant \frac{5}{4}\, l$, — нечетное $(l \geqslant 3)$. Тогда

$$-1 < (1 - \alpha\lambda)^l \leqslant 0.$$

Преобразуем левую часть неравенства (3.10) тогда

$$B = (1-\alpha\lambda)^l \left[2 - (1-\alpha\lambda)^l - (1-\alpha\lambda)^{l+1}\right].$$

Так как

$$2 - (1-\alpha\lambda)^l - (1-\alpha\lambda)^{l+1} \geqslant 0,$$

то $B \leqslant 0$ и тем более $B \leqslant \frac{35}{54}$.

2) $1 \leqslant \alpha\lambda \leqslant \frac{5}{4}$, l — четное ($l \geqslant 2$). Тогда $0 \leqslant (1-\alpha\lambda)^l < 1$. Требуется доказать неравенство (3.10), что равносильно

$$1 - 2(1-\alpha\lambda)^l + (1-\alpha\lambda)^{2l} + (1-\alpha\lambda)^{2l+1} - \frac{19}{54} \geqslant 0,$$

что в свою очередь равносильно

$$1 + (1-\alpha\lambda)^{2l}(2-\alpha\lambda) - \left[2(1-\alpha\lambda)^l + 19/54\right] \geqslant 0. \tag{3.11}$$

Имеем $-\frac{1}{4} \leqslant 1-\alpha\lambda \leqslant 0$. Следовательно, $2(1-\alpha\lambda)^l + \frac{19}{54} < 1$, а поэтому неравенство (3.11) справедливо и, значит, верно доказываемое неравенство (3.10).

3) $0 < \alpha\lambda < 1$, l — любое ($l \geqslant 2$). Тогда $0 < (1-\alpha\lambda)^l < 1$. Неравенство (3.10) равносильно неравенству

$$\frac{35}{54} - 2(1-\alpha\lambda)^l + (1-\alpha\lambda)^{2l} + (1-\alpha\lambda)^{2l+1} \geqslant 0,$$

которое в свою очередь равносильно такому

$$\frac{4}{27}+2\left[\frac{1}{2}-(1-\alpha\lambda)^{l}\right]^{2}+(1-\alpha\lambda)^{2l+1}-(1-\alpha\lambda)^{2l}\geqslant 0. \tag{3.12}$$

Так как $2\left[\frac{1}{2}-(1-\alpha\lambda)^{l}\right]^{2}\geqslant 0$, то для доказательства справедливости неравенства (3.12) достаточно показать, что

$$\varphi_l(\lambda)\equiv\frac{4}{27}+(1-\alpha\lambda)^{2l+1}-(1-\alpha\lambda)^{2l}\geqslant 0.$$

Нетрудно убедиться, что $\min\limits_{0<\alpha\lambda<1}\varphi_l(\lambda)\geqslant 0$ для $l\geqslant 2$. Отсюда вытекает справедливость неравенства (3.12) и, следовательно, неравенства (3.10). Эти три рассмотренных случая исчерпывают индукцию, значит, неравенство (3.9) справедливо. Таким образом, $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A^2\leqslant\left(\frac{35}{54}\right)kn\alpha\delta^2$, $kn\geqslant 2$. Отсюда

$$\|x_n-x_{n,\delta}\|_A\leqslant\left[\left(\frac{5}{4}\right)kn\alpha\right]^{\frac{1}{2}}\delta,\quad kn\geqslant 1,$$

$$\|x_n-x_{n,\delta}\|_A\leqslant\left[\left(\frac{35}{54}\right)kn\alpha\right]^{\frac{1}{2}}\delta,\quad kn\geqslant 2. \tag{3.13}$$

Покажем, что порядок оценки для $\|x_{n,\delta}-x_n\|_A$ нельзя улучшить, т.е. показатель степени, с которым n входит в оценку, найден правильно.

Найдем $g'_n(\lambda)$.

$$g'_n(\lambda) = -\lambda^{-2}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{kn}\right]^2 +$$
$$+2\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{kn}\right] kn\alpha(1-\alpha\lambda)^{kn-1} =$$
$$= \lambda^{-2}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{kn}\right]\left[-1+(1-\alpha\lambda)^{kn}+2kn\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{kn-1}\right].$$

Если $1-(1-\alpha\lambda)^{kn}=0$, то $g_n(\lambda)=0$, и функция $g_n(\lambda)$ не будет достигать максимального значения. Значит, точка максимума определяется из уравнения

$$-1+(1-\alpha\lambda)^{kn}+2kn\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{kn-1}=0.$$

Отсюда $1=(1-\alpha\lambda)^{kn-1}(1-\alpha\lambda+2kn\alpha\lambda)$.

Пусть $\alpha\lambda=a_n$, тогда последнее равенство перепишется в виде

$$(1-a_n)^{kn-1}(1-a_n+2kna_n)=1. \qquad (3.14)$$

Так как $|1-a_n|<1$, то $|1-a_n|^{kn-1}<1$. Значит, если бы a_n не стремились к нулю при $n\to\infty$, а были бы лишь ограничены снизу, то равенство (3.14) не выполнялось бы. Таким образом, получаем, что $a_n\to 0$ при $n\to\infty$. Из (3.14) следует, что

$$(1-a_n)^{kn}=\frac{1}{1+(2kn-1)a_n},\ (1-a_n)^{kn}=\frac{1-a_n}{1+(2kn-1)a_n},$$

отсюда

$$1-(1-a_n)^{kn}=\frac{2kna_n}{1+(2kn-1)a_n}. \qquad (3.15)$$

В левой части (3.15) стоит величина ограниченная, следовательно, и в правой части должна быть ограниченная величина. В знаменателе правой части стоит величина, ограниченная снизу, поэтому, для ограниченности величины $\frac{2kna_n}{1+(2kn-1)a_n}$, необходимо, чтобы a_n стремилось к нулю не медленнее, чем $\frac{1}{n}$, т.е. $a_n = \frac{b_n}{n}$, где $\{b_n\}$ — ограниченная числовая последовательность: $0 < b_n \leqslant B < \infty$. Подставим $a_n = \frac{b_n}{n}$ в выражение для $g_n(\lambda)$ получим

$$g_n(\lambda) = \frac{\left[1-(1-a_n)^{kn}\right]^2}{a_n}\alpha = \frac{(2kna_n)^2\alpha}{a_n\left[1+(2kn-1)a_n\right]^2} =$$

$$= \frac{4k^2nb_n\alpha}{\left[1+(2kn-1)\frac{b_n}{n}\right]^2}.$$

Покажем, что нуль не является предельной точкой для последовательности $\{b_n\}$.Предположим противное, что какая-то подпоследовательность $\{b_m\}$, где $m \in N_0 \subset N$, последовательности $\{b_n\}$ стремится к нулю при $m \to \infty$, тогда

$$\frac{2kma_m}{1+(2km-1)\,a_m} = \frac{2kb_m}{1+(2km-1)\,b_m/m} \sim 2kb_m.$$

С другой стороны,

$$(1-b_m/m)^{km} = 1 - kb_m + \frac{k\,(km-1)}{2m}b_m^2 - \frac{k\,(km-1)\,(km-2)}{6m^2}b_m^3 + \ldots.$$

Следовательно, $1-(1-b_m/m)^{km} \sim kb_m$. Так как из (3.15) следует, что

$$1-(1-b_m/m)^{km} = \frac{2kb_m}{1+(2km-1)\,b_m/m}, \tag{3.16}$$

то $2kb_m$ должно быть эквивалентно kb_m, что неверно. Пришли к противоречию. Значит, b_m не стремится к нулю при $m \to \infty$, и нуль не является предельной точкой числовой последовательности $\{b_n\}$. Значит,

$$0 < b \leqslant b_n \leqslant B < \infty.$$

Из $g_n(\lambda) = \frac{4k^2 n b_n \alpha}{[1+(2kn-1)b_n/n]^2}$ видно, что в оценку для $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A$ n входит с показателем степени $1/2$. Значит, найденная оценка для $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A$ верна по порядку.

Попытаемся уточнить константу $(35/54)^{1/2}$, фигурирующую в оценке $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A$. Для этого найдем предельную точку числовой последовательности $\{b_n\}$. Покажем, что $\{b_n\}$ сходится. Так как $\{b_n\}$ — ограниченная числовая последовательность и пространство H гильбертово, то по лемме Больцано-Вейерштрасса [4, с. 105] из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{b_m\}$ такую, что $b_m \to b^*$.

Перейдем к пределу в обеих частях равенства (3.16), получим

$$\lim_{m\to\infty}\left[1-(1-b_m/m)^{km}\right] = 1 - \lim_{m\to\infty}\left[(1-b_m/m)^m\right]^k =$$

$$= 1 - \lim_{m\to\infty}\left\{\left[(1-b_m/m)^{-m/b_m}\right]^{-b_m}\right\}^k = 1 - e^{-kb^*},$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{2kb_m}{1+(2km-1)\,b_m/m} = \frac{2kb^*}{1+2kb^*}.$$

Таким образом, если обозначить через $z = kb^*$, то получим следующее уравнение:

$$1-e^{-z} = \frac{2z}{1+2z}, \quad e^{-z} = 1-\frac{2z}{1+2z}, \quad e^{-z} = \frac{1}{1+2z}, \quad e^{z} = 1+2z.$$

Это уравнение имеет два решения: $z_1 = 0$ и $z_2 \approx 1,256$. Т. е. $b_1^* = 0$ и $b_2^* \approx 1,256/k$ и так как нуль не является предельной точкой для последовательности $\{b_n\}$, то $b_m \to b_2^* \approx 1,256/k$.Так как $\{b_m\}$ — произвольная подпоследовательность последовательности $\{b_n\}$, то и сама $\{b_n\}$ сходится к b_2^*.

А теперь вернемся к уточнению константы $(35/54)^{1/2}$ в оценке для $\|x_n - x_n,\delta\|_A$. Рассмотрим функцию

$$g_n(\lambda) = \frac{4k^2 n b_n \alpha}{\left[1+(2kn-1)\,b_n/n\right]^2}.$$

Отсюда $\max\limits_{0<a_n\leqslant 5/4} \frac{g(\lambda)}{kn\alpha} \to \frac{4kb^*}{(1+2kb^*)^2} \approx 0,41$. Поэтому нельзя получить оценки лучшей, чем

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leqslant (0,41kn\alpha)^{1/2}\,\delta.$$

Таким образом, полученная нами константа $(35/54)^{1/2}$ завышена не более чем в 1,26 раза.

Поскольку имеем

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leqslant \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leqslant \|x - x_n\|_A + \\ + \left[(35/54)\, kn\alpha\right]^{1/2} \delta, kn \geqslant 2$$

и

$$\|x - x_n\|_A \to 0, n \to \infty,$$

то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \to 0, n \to 0$, достаточно, чтобы $\sqrt{n}\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

Таким образом, если в процессе (3.3) выбрать число итераций $n = n(\delta)$ зависящим от δ так, что $\sqrt{n}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$, то получим регуляризованный метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3.3) при выполнении условия (3.7)

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leqslant (2kn\alpha e)^{-1/2} \|x\| + \left[(5/4)\, kn\alpha\right]^{1/2} \delta, kn \geqslant 1,$$

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leqslant (2kn\alpha e)^{-1/2} \|x\| + \left[(35/54)\, kn\alpha\right]^{1/2} \delta, kn \geqslant 2. \qquad (3.17)$$

Итак, доказана

Теорема 3.6. *Итерационный процесс* (3.3) *при условии* (3.7) *сходится в энергетической норме пространства H, если выбирать число итераций n из условия $\sqrt{n}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$. Для процесса* (3.3) *справедлива оценка погрешности* (3.17).

Оптимизируем полученную оценку (3.17) по n, т.е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по n от правой части неравенства (3.17), получим

$$n_{\text{опт}} = (35/27)^{-1/2}\,(k\alpha)^{-1}\,e^{-1/2}\delta^{-1}\,\|x\|\,. \tag{3.18}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (3.17), получим ее оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leqslant (35/27)^{1/4}\,(2\delta\,\|x\|)^{1/2}\,e^{-1/4}. \tag{3.19}$$

Из (3.19) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α. Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α, поэтому для уменьшения n и, значит, объема вычислительной работы следует брать α возможно большим, удовлетворяющим условию (3.7), и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым. Таким образом, доказана

Теорема 3.7. *В условиях предыдущей теоремы оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса* (3.3), *имеет вид* (3.19) *и получается при $n_{опт}$ из* (3.18).

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H. Эти условия дает

Теорема 3.8. *Если выполнены условия 1)* $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, *2)* $E_\varepsilon x = 0$, *где* $E_\varepsilon = \int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda$, ε *— фиксированное положительное число* $(0 < \varepsilon < \|A\|)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

Доказательство.

Так как по условию теоремы $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$ и $E_\varepsilon x = 0$, то $E_\varepsilon (x_{n,\delta} - x) = 0$ и $(E_\varepsilon (x_{n,\delta} - x), x_{n,\delta} - x) = 0$, т.е. $\int\limits_0^\varepsilon d(E_\lambda (x_{n,\delta} - x), x_{n,\delta} - x) = 0$. Следовательно,

$$\int\limits_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) = 0.$$

Тогда получим, что

$$\|x_{n,\delta} - x\|^2 = \int\limits_0^M \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) =$$

$$= \int\limits_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) + \int\limits_\varepsilon^M \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) =$$

$$= \int\limits_\varepsilon^M \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \|x_{n,\delta} - x\|_A^2.$$

Теорема 3.8 доказана. ■

Замечание 3.2. *Так как* $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - aA)^{kn}\right] y_\delta$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_\varepsilon y_\delta = 0$. *Таким образом, если* $E_\varepsilon x = 0$ *и* $E_\varepsilon y_\delta = 0$, *то из сходимости метода итераций в энергетической норме следует его сходимость в обычной норме пространства H. И, следовательно, для оценки погрешности не потребуется предположения истокопредставимости точного решения.*

3.4 Правило останова по невязке

Решается задача из подраздела 3.1 . Для ее решения используется метод (3.3). Все результаты подраздела 3.1 получены в предположении, что точное решение x уравнения (3.1) истокопредставимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$. Однако, поскольку сведения об элементе z и степени истокопредставимости s имеются не всегда, то на основании результатов подраздела 3.1 трудно определить число итераций n, обеспечивающих сходимость метода (3.3). Тем не менее этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [5 – 6].

Определим момент m останова итерационного метода (3.3) условием

$$\left.\begin{array}{l} \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m)\,, \\ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leqslant \varepsilon. \end{array}\right\} \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \tag{3.20}$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (3.20) к методу (3.3). Метод (3.3) с остановом (3.20) является **сходящимся**, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_m \|x - x_{m,\delta}\|\right) = 0$. Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - a\lambda)^{kn}\right]$ из подраздела 3.1 . Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant M} |g_n(\lambda)| \leqslant kn\alpha, \quad n > 0, \quad M = \|A\|\,, \quad 0 < a < 2/M, \tag{3.21}$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leqslant 1, \quad 0 < a < 2/M, \tag{3.22}$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0, n \to \infty, \forall\lambda \in (0, M]\,, \quad 0 < \alpha < 2/M, \tag{3.23}$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leqslant \left(\frac{s}{k\alpha e}\right)^s n^{-s},$$

$$n > 0, 0 \leqslant s < \infty, 0 < \alpha \leqslant \frac{5}{4M}. \tag{3.24}$$

Справедлива

Лемма 3.1. *Пусть* $A = A^* \geqslant 0, \|A\| \leqslant M$. *Тогда для любого* $w \in H$ $(E - Ag_n(A))\,w \to 0, n \to \infty$.

Доказательство.

Воспользуемся интегральным представлением самосопряженного оператора $A = \int\limits_0^M \lambda dE_\lambda$, где E_λ – спектральная функция. Рассмотрим

$$(E - Ag_n(A))\,w = \int\limits_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda))\,dE_\lambda w = \int\limits_0^M (1 - \alpha\lambda)^{kn}\,dE_\lambda w.$$

Так как при $0 < \alpha < 2/\|A\|$, $\lambda \in [\varepsilon_0, M]$ имеем $|1 - \alpha\lambda| \leqslant q < 1$, то

$$\left\| \int\limits_{\varepsilon_0}^M (1 - \alpha\lambda)^{kn}\,dE_\lambda w \right\| \leqslant q^{kn} \left\| \int\limits_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda w \right\| \leqslant q^{kn}\,\|w\| \to 0, n \to \infty.$$

В силу свойств спектральной функции

$$\left\| \int\limits_0^{\varepsilon_0} (1 - \alpha\lambda)^{kn}\,dE_\lambda w \right\| \leqslant \left\| \int\limits_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda w \right\| \leqslant \|E_{\varepsilon_0} w\| \to 0, \varepsilon_0 \to 0.$$

Итак, $(E - Ag_n(A))\,w \to 0, n \to \infty$. Лемма 3.1 доказана. ■

Имеет место

Лемма 3.2. *Пусть $A = A^* \geqslant 0, \|A\| \leqslant M$. Тогда для любого $\nu \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение*

$$n^s\,\|A^s\,(E - Ag_n(A))\,\nu\| \to 0, \quad n \to \infty, \quad 0 \leqslant s < \infty. \tag{3.25}$$

Доказательство.

Так как (3.24) верно, то

$$n^s \left\| A^s \left(E - Ag_n\left(A \right) \right) \right\| \leqslant n^s \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant M} \lambda^s \left| 1 - \lambda g_n\left(\lambda \right) \right| \leqslant \gamma_s, \quad n > 0,$$

где $\gamma_s = \left(\frac{s}{k\alpha e} \right)^s$. Воспользуемся теоремой Банаха–Штейнгауза [7, с. 151], по которой сходимость $B_n u \to Bu$ при $n \to \infty$ для $\forall u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\left\| B_n \right\|, n = 1, 2, \ldots$ ограничены независящей от n постоянной. Здесь $\left\| B_n \right\| = n^s \left\| A^s \left(E - Ag_n\left(A \right) \right) \right\| \leqslant \gamma_s$, т.е. $\left\| B_n \right\|$ совокупно ограничены. В качестве плотного в $\overline{R\left(A \right)}$ подмножества возьмем множество $R\left(A \right)$. Положим $s_1 = s + 1$. Тогда для каждого $\nu = Aw \in R\left(A \right)$ имеем

$$n^s \left\| A^s \left(E - Ag_n\left(A \right) \right) \nu \right\| = n^s \left\| A^{s+1} \left(E - Ag_n\left(A \right) \right) w \right\| \leqslant$$
$$\leqslant n^s \left(\frac{s+1}{k\alpha e} \right)^{s+1} n^{-(s+1)} \left\| w \right\| = \gamma_{s_1} n^{-1} \left\| w \right\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

так как $s_1 < \infty$. Лемма 3.2 доказана. ■

Справедлива

Лемма 3.3. *Пусть $A = A^* \geqslant 0, \left\| A \right\| \leqslant M$. Если для некоторых $n_p < \overline{n} = const$ и $\nu_0 \in \overline{R\left(A \right)}$ при $p \to \infty$ имеем $w_p = A \left(E - Ag_{n_p}\left(A \right) \right) \nu_0 \to 0$, то $\nu_p = \left(E - Ag_{n_p}\left(A \right) \right) \nu_0 \to 0$.*

Доказательство.

В силу (3.22) последовательность ν_p ограничена $\|\nu_p\| \leqslant \|\nu_0\|$, $p \in N$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\nu_p - \to \nu\,(p \in N' \subseteq N)$, тогда $A\nu_p - \to A\nu\,(p \in N')$. Но по условию $w_p = A\nu_p \to 0$, $p \to \infty$, следовательно, $A\nu = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A, то $\nu = 0$. Тогда

$$\|\nu_p\|^2 = \left(\nu_p, \left(E - Ag_{n_p}(A)\,\nu_0\right)\right) = (\nu_p, \nu_0) - \left(\nu_p, Ag_{n_p}(A)\,\nu_0\right) =$$
$$= (\nu_p, \nu_0) - \left(A\nu_p, g_{n_p}(A)\,\nu_0\right) =$$
$$= (\nu_p, \nu_0) - \left(w_p, g_{n_p}(A)\,\nu_0\right) \to (\nu, \nu_0) = 0,$$

так как $w_p \to 0, \nu = 0$ и по условию (3.21)

$$\left\|g_{n_p}(A)\right\| \leqslant \alpha k n_p < \alpha k \overline{n}.$$

Следовательно, $\|\nu_p\| \to 0$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности ν_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $\nu_p \to 0, p \to \infty$. Лемма 3.3 доказана. ■

Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3.9. *Пусть $A = A^* \geqslant 0, \|A\| \leqslant M$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (3.3) выбирается по правилу (3.20). Тогда метод (3.3) сходится.*

Доказательство.

Из подраздела 3.1 следует, что

$$x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{kn}\right] y_\delta.$$

Тогда,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))\,x. \tag{3.26}$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A(E - Ag_n(A))\,x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y)\,. \tag{3.27}$$

В силу лемм 3.1 и 3.2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))\,x\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.28}$$

$$\sigma_n = n\,\|A(E - Ag_n(A))\,x\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.29}$$

Кроме того, из (3.21) и (3.22) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leqslant k\alpha n\delta, \tag{3.30}$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leqslant 1. \tag{3.31}$$

Применим правило останова (3.20). Тогда

$$\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leqslant b\delta, \quad b > 1$$

и из (3.27) и (3.31) получим

$$\|A\,(E - Ag_m\,(A))\,x\| \leqslant \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \\ + \|(E - Ag_m\,(A))\,(y_\delta - y)\| \leqslant (b+1)\,\delta. \quad (3.32)$$

Для любых $n < m$ справедливы неравенства $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Поэтому

$$\|A\,(E - Ag_n\,(A))\,x\| \geqslant \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \\ - \|(E - Ag_n\,(A))\,(y - y_\delta)\| \geqslant (b-1)\,\delta.$$

Итак, для любых $n < m$

$$\|A\,(E - Ag_n\,(A))\,x\| \geqslant (b-1)\,\delta. \quad (3.33)$$

Из (3.29) и (3.33) при $n = m - 1$ получаем

$$\frac{\sigma_{m-1}}{m-1} = \|A\,(E - Ag_n\,(A))\,x\| \geqslant (b-1)\,\delta$$

или, что то же,

$$(m-1)\,\delta \leqslant \frac{\sigma_{m-1}}{b-1} \to 0, \delta \to 0,$$

(так как из (3.29) $\sigma_m \to 0, m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$, то используя (3.26), получим

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leqslant \|(E - Ag_n\,(A))\,x\| + \|g_m\,(A)\,(y_\delta - y)\| \leqslant \\ \leqslant \|(E - Ag_n\,(A))\,x\| + k\alpha m\delta \to 0, m \to \infty, \delta \to 0,$$

так как из (3.28) $\|(E - Ag_n(A))x\| \to 0, m \to \infty$.

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x, \delta_n \to 0$. Действительно, из (3.32) выполняется

$$\left\|A\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\| \leqslant (b+1)\,\delta_n \to 0, \delta_n \to 0.$$

Следовательно, имеем $A\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0, \delta_n \to 0$ и по лемме 3.3 получаем, что при $\delta_n \to 0$ $\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0$. Отсюда

$$\left\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\right\| \leqslant \left\|\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\| + k\alpha m(\delta_n)\,\delta_n \to 0, \quad \delta_n \to 0.$$

Теорема 3.9 доказана. ■

Имеет место

Теорема 3.10. *Пусть выполнены условия теоремы 3.9 и пусть* $x = A^s z, s > 0$, *тогда справедливы оценки*

$$m(\delta) \leqslant 1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)},$$

$$\left\|x_{m(\delta),\delta} - x\right\| \leqslant [(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\,\|z\|^{1/(s+1)} +$$
$$+k\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \qquad (3.34)$$

Доказательство.

Имеем

$$\|A\left(E-Ag_{m-1}\left(A\right)\right)x\| = \left\|A^{s+1}\left(E-Ag_{m-1}\left(A\right)\right)z\right\| =$$
$$= \left\|\int_0^M \lambda^{s+1}(1-\alpha\lambda)^{k(m-1)}dE_\lambda z\right\| \leqslant (s+1)^{s+1}\left[k(m-1)\alpha e\right]^{-(s+1)}\|z\|.$$

Воспользовавшись (3.33),получим

$$(b-1)\delta \leqslant (s+1)^{s+1}\left[k(m-1)\alpha e\right]^{-(s+1)}\|z\|,$$

откуда

$$m \leqslant 1+\frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}.$$

При помощи неравенства моментов оценим

$$\|(E-Ag_m\left(A\right))x\| = \|A^s\left(E-Ag_m\left(A\right)\right)z\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|A^{s+1}\left(E-Ag_m\left(A\right)\right)z\right\|^{s/(s+1)}\|(E-Ag_m\left(A\right))z\|^{1/(s+1)} \leqslant$$
$$\leqslant \|A\left(E-Ag_m\left(A\right)\right)x\|^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} \leqslant \left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$$

(см. (3.32)). Тогда, поскольку соотношение (3.26) справедливо для любых n, то

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leqslant \|(E - Ag_m(A))\,x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leqslant$$
$$\leqslant [(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\,\|z\|^{1/(s+1)} + km\alpha\delta \leqslant$$
$$\leqslant [(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\,\|z\|^{1/(s+1)} + k\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta.$$

Теорема 3.10 доказана. ■

Замечание 3.3. *Порядок оценки* (3.34) *есть* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ *и, как следует из* [6], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z$, $s > 0$.

Замечание 3.4. *Хотя формулировка теоремы 3.10 дается с указаниями степени истокопредставимости* s *и истокопредставляющего элемента* z, *на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова* (3.20). *И тем не менее в теореме 3.10 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций* m, *обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (3.20), *как показывает теорема 3.9, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.*

3.5 Правило останова по соседним приближениям для уравнений с несамосопряжённым оператором

Как известно [8], уравнение $Ax = y$ с действующим в гильбертовом пространстве H оператором, не обладающим свойством самосопряженности или положительной определенности, может быть сведено к решению уравнения $A^*Ax = A^*y$ уже с положительно определенным и самосопряженным оператором A^*A. Применение вышеописанных результатов для уравнения (3.1) приводит к аналогичным результатам для уравнений $Ax = y$ уже с произвольным действующим в гильбертовом пространстве оператором A.

Решаем уравнение (3.1) с несамосопряженным оператором A. Используем явную схему метода итераций

$$x_{n+1} = (E - \alpha A^*A)^k x_n + (A^*A)^{-1}\left[E - (E - \alpha A^*A)^k\right] A^*y, \\ k \in N, \quad x_0 \in H, \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{5}{4\|A^*A\|}. \tag{3.35}$$

Здесь оператор $(A^*A)^{-1}$, фигурирующий в (3.35), не означает, что для рассматриваемой схемы (3.35) необходимо его знать – нужно заметить, что после раскрытия скобок во втором слагаемом он сокращается и весь оператор в квадратных скобках является полиномом от оператора A^*A

$$C_k^1\alpha E - C_k^2\alpha^2 A^*A + C_k^3\alpha^3 (A^*A)^2 - \ldots - (-1)^k\alpha^k (A^*A)^{k-1}$$

В случае, когда правая часть y уравнения (3.1) известна приближенно, $\|y - y_\delta\| \leqslant \delta$, метод (3.35) примет вид

$$z_{n+1} = (E - \alpha A^*A)^k z_n + (A^*A)^{-1}\left[E - (E - \alpha A^*A)^k\right] A^* y_\delta +$$
$$+ (E - \alpha A^*A)^k u_n,$$
$$k \in N, z_0 \in H, 0 < \alpha \leqslant \frac{5}{4\|A^*A\|}. \qquad (3.36)$$

Здесь u_n — ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \leqslant \beta$. Использовано равенство $A^*Ax = A^*y$. Обозначим

$$C = (E - \alpha A^*A)^k, B = (A^*A)^{-1}\left[E - (E - \alpha A^*A)^k\right] A^*,$$

тогда метод (3.36) запишется в виде $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$. Для простоты будем считать, что $\|A\| = 1$.

Определим момент m останова итерационного процесса условием

$$\left.\begin{array}{ll} \|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, & (n < m), \\ \|z_m - z_{m+1}\| \leqslant \varepsilon, & \end{array}\right\} \qquad (3.37)$$

где ε — заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова). Аналогично [9] докажем, что метод (3.36) с правилом останова (3.37) сходится, и получим оценку для момента останова. Справедливы леммы.

Лемма 3.4. *Пусть приближение w_n определяется равенствами*

$$w_0 = z_0, \; w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n, \;\; n \geqslant 0, \tag{3.38}$$

тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \leqslant \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 . \tag{3.39}$$

Доказательство.

Из (3.38) имеем $Cu_k = w_{k+1} - Cw_k - By$. Отсюда, используя равенство $A^*Ax = A^*y$, получим

$$\begin{gathered} u_k = C^{-1}w_{k+1} - w_k - C^{-1}By = C^{-1}w_{k+1} - w_k - \\ - (E - \alpha A^*A)^{-k} (A^*A)^{-1} \left[E - (E - \alpha A^*A)^k\right] A^*y = C^{-1}w_{k+1} - \\ - w_k - (E - \alpha A^*A)^{-k} (A^*A)^{-1} \left[E - (E - \alpha A^*A)^k\right] A^*Ax = \\ = C^{-1}w_{k+1} - w_k - C^{-1}(E - C)x = C^{-1}w_{k+1} - w_k - C^{-1}x + x = \\ = C^{-1}(w_{k+1} - x) - (w_k - x). \end{gathered}$$

Обозначим $\Delta_k = w_k - x$, тогда $u_k = C^{-1}\Delta_{k+1} - \Delta_k$, откуда

$$Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k.$$

Кафедры ИиПМ АиГ
Начало
Содержание
Литература
◄ ►
◄◄ ►►
Назад
77
На весь экран
Закрыть

Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_{k+1} - C\Delta_k, \Delta_{k+1} - C\Delta_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_{k+1}, C\Delta_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\sum_{k=0}^{n-1} \left(C^{\frac{1}{2}}\Delta_{k+1}, C^{\frac{1}{2}}\Delta_k\right). \qquad (3.40)$$

Оценивая абсолютную величину последнего слагаемого правой части (3.40) по неравенству Коши-Буняковского, приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) -$$

$$-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=1}^{n} (C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad n \geqslant 1. \qquad (3.41)$$

Покажем, что $(E - C)\Delta_k = w_k - w_{k+1} + Cu_k, \quad k \geqslant 0$. Имеем

$$Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k, \Delta_k + Cu_k = \Delta_k + \Delta_{k+1} - C\Delta_k,$$

тогда

$$\Delta_k + Cu_k = (E - C)\Delta_k + \Delta_{k+1}, w_k - x + Cu_k = (E - C)\Delta_k + w_{k+1} - x,$$

отсюда справедливо, что

$$(E - C)\Delta_k = w_k - w_{k+1} + Cu_k, \quad k \geqslant 0. \tag{3.42}$$

Запишем неравенство (3.41) в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) -$$

$$-2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^{n} (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n} (C\Delta_k, C\Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) -$$

$$-2 \sum_{k=0}^{n} (C\Delta_k, \Delta_k) + 2 \sum_{k=0}^{n} (C\Delta_k, \Delta_k) -$$

$$-2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} = -(\Delta_0, \Delta_0) +$$

$$+2 \sum_{k=0}^{n} (C\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n} ((E - C)\Delta_k, (E - C)\Delta_k) -$$

$$-(C\Delta_n, C\Delta_n) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k) + \gamma_n,$$

где

$$\gamma_n = 2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) -$$

$$-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Докажем, что $\gamma_n \geqslant 0$ при любых Δ_1, $\Delta_2, \ldots,$ Δ_n. Для этого сначала докажем неравенство: $(C\Delta_n, C\Delta_n) \leqslant (C\Delta_n, \Delta_n)$. Ему равносильно неравенство: $\|C\Delta_n\|^2 \leqslant \left\|C^{1/2}\Delta_n\right\|^2$. Так как

$$\|C\| = \left\|(E - \alpha A^* A)^k\right\| = \sup_{\lambda}|1 - \alpha\lambda|^k = 1,$$

то имеем

$$\|C\Delta_n\| \leqslant \left\|C^{1/2}\right\| \left\|C^{1/2}\Delta_n\right\| = \left\|C^{1/2}\Delta_n\right\|.$$

Поэтому $(C\Delta_n, C\Delta_n) \leqslant (C\Delta_n, \Delta_n)$. Следовательно,

$$\gamma_n \geqslant 2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k) - (C\Delta_n, \Delta_n) -$$

$$-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Покажем, что

$$2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k) - (C\Delta_n, \Delta_n) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} \geqslant 0. \tag{3.43}$$

В самом деле, неравенство (3.43) равносильно неравенству

$$2\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k) + 2(C\Delta_n, \Delta_n) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k) + (C\Delta_n, \Delta_n) - (C\Delta_0, \Delta_0)\right\}^{\frac{1}{2}} - (C\Delta_n, \Delta_n) \geqslant 0,$$

которое, в свою очередь, равносильно такому

$$2\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+(C\Delta_n,\Delta_n)\geqslant 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+(C\Delta_n,\Delta_n)-(C\Delta_0,\Delta_0)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Возведя обе части последнего неравенства в квадрат, получим

$$4\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^2+4\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)(C\Delta_n,\Delta_n)+$$

$$+(C\Delta_n,\Delta_n)^2\geqslant 4\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+(C\Delta_n,\Delta_n)-(C\Delta_0,\Delta_0)\right\}.$$

Пришли к очевидному неравенству

$$4\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)(C\Delta_0,\Delta_0)+(C\Delta_n,\Delta_n)^2\geqslant 0,$$

поэтому неравенство (3.43) справедливо в виду равносильности неравенств. (Здесь возведенное в квадрат неравенство на самом деле содержало лишь положительные члены). Следовательно, $\gamma_n \geqslant 0$. Отсюда,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geqslant -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k).$$

Используя равенство (3.42), получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geqslant -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^{n} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 ,$$

откуда выполняется

$$\sum_{k=0}^{n} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \leqslant \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 .$$

Лемма 3.4 доказана. ■

Имеет место

Лемма 3.5. *При любом $w_0 \in H$ и произвольной последовательности ошибок $\{u_n\}$, удовлетворяющих условию $\|u_n\| \leqslant \beta$, выполнено неравенство*

$$\varliminf_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \leqslant 2\,\|C\|\,\beta. \tag{3.44}$$

Доказательство.

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1} + Cu_n\| + \|C\|\,\beta \leqslant \|C\|\,\beta +$$

$$+ \varlimsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n} \|w_0 - x\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \|C\|\,\beta \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n} \|w_0 - x\|^2 + \frac{1}{n} n \|C\|^2 \beta^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \|C\|\,\beta = 2\|C\|\,\beta,$$

так как $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|w_0 - x\|^2 = 0$. Отсюда следует (3.44).

Лемма (3.5) доказана. ■

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3.11. *Пусть уровень останова $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ выбирается как функция от уровней δ и β норм погрешностей $y - y_\delta$ и u_n. Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\,\beta$, то момент останова m определён при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ и u_n, удовлетворяющих условиям $\|y - y_\delta\| \leqslant \delta$, $\quad \|u_n\| \leqslant \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\,\delta + 2\,\|C\|\,\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \leqslant \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\,\delta - 2\,\|C\|\,\beta)\,(\varepsilon - \|B\|\,\delta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0,\ \ \delta,\beta \to 0$ *и*

$$\varepsilon(\delta,\beta) \geqslant d\,(\,\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta^p)\,,$$

где $d > 1,\quad p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0} \|z_m - x\| = 0.$

Доказательство.

а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{n-k-1}\right). \tag{3.45}$$

При $n = 1$ из $z_n = Cz_{n-1} + By_\delta + Cu_{n-1}$ имеем

$$z_1 = Cz_0 + By_\delta + Cu_0,$$

из (3.45) получим тоже самое, т.е. при $n = 1$ формула (3.45) верна. Предположим, что (3.45) верна при $n = p$, т.е.

$$z_p = C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k-1}\right),$$

и докажем ее справедливость при $n = p + 1$. Имеем

$$z_{p+1} = Cz_p + By_\delta + Cu_p =$$

$$= C\left[C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k \left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k-1}\right)\right] + By_\delta + Cu_p =$$

$$= C^{p+1}z_0 + C^2\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-1} + CC^{-1}By_\delta +\right.$$

$$\left.+Cu_{p-2} + \ldots + C^{p-1}C^{-1}By_\delta + C^{p-1}u_0\right) + By_\delta + Cu_p = C^{p+1}z_0 +$$

$$+C\left(By_\delta + Cu_{p-1} + CBy_\delta + C^2u_{p-2} + \ldots + C^{p-1}By_\delta +\right.$$

$$\left.+C^p u_0 + C^{-1}By_\delta + u_p\right) = C^{p+1}z_0 + C\sum_{k=0}^{p} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k}\right).$$

Таким образом, справедливость (3.45) доказана. Отсюда

$$w_n = C^n w_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left(C^{-1}By + u_{n-k-1}\right) =$$

$$= C^n w_0 + \sum_{k=0}^{n-1} C^k By + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} =$$

$$= C^n w_0 + \left(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1}\right)By + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} =$$

$$= C^n w_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} + (E - C^n)\,(E - C)^{-1}\,(A^*A)^{-1}\,(E-$$

$$-C)A^*y = C^n w_0 + A^{-1}\,(E - C^n)\,y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0 = w_0$, получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n z_0 + A^{-1}\,(E - C^n)\,y_\delta + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} z_0-$$

$$-A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y_\delta - C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} = \; C^n w_0 + A^{-1}\,(E - C^n)\,y-$$

$$-A^{-1}\,(E - C^n)\,y + A^{-1}\,(E - C^n)\,y_\delta + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} w_0-$$

$$-A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y + A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y - A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y_\delta-$$

$$-C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} = w_n - w_{n+1} - A^{-1}\,(E - C^n)\,(y - y_\delta)+$$

$$+A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)(y - y_\delta) = w_n - w_{n+1}+$$

$$+A^{-1}\left[(y - y_\delta) - C^{n+1}(y - y_\delta) - (y - y_\delta) + C^n(y - y_\delta)\right] =$$

$$= w_n - w_{n+1} + A^{-1}\left(C^n - C^{n+1}\right)(y - y_\delta) = w_n - w_{n+1}+$$

$$+A^{-1}(E - C)C^n(y - y_\delta) = w_n - w_{n+1} + BC^n(y - y_\delta). \qquad (3.46)$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \leqslant \|w_n - w_{n+1}\| + \|BC^n(y - y_\delta)\| . \tag{3.47}$$

Обозначим $\sigma = B(y - y_\delta)$, тогда при условии

$$0 < \alpha_\lambda \leqslant 5/4, \lambda \in [0,\ 1]$$

получим

$$\|BC^n(y - y_\delta)\| = \|C^n\sigma\| \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Поэтому (см. лемму 3.5)

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \varlimsup_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \leqslant 2\,\|C\|\,\beta.$$

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\,\|C\|\,\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ, $\|y - y_\delta\| \leqslant \delta$ и u_n, $\|u_n\| \leqslant \beta$.

б) Рассмотрим последовательность (3.38) и определим момент останова m' условием

$$\left.\begin{array}{l} \|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\,\delta, \quad (n < m'), \\ \|w_{m'} - w_{m'+1}\| \leqslant \varepsilon - \|B\|\,\delta. \end{array}\right\} \tag{3.48}$$

Из (3.47) следует, что $m \leqslant m'$. Из леммы 3.4 при $n = m'$ получим

$$\sum_{k=0}^{m'} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \leqslant \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2 ,$$

поэтому справедливо

$$\sum_{k=0}^{m'-1} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \leqslant \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2 .$$

Отсюда получим неравенство

$$\sum_{k=0}^{m'-1} (\|w_k - w_{k+1}\| - \|C\|\,\beta)^2 \leqslant \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2 .$$

Так как по (3.48) при $n < m'$ имеем $\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\,\delta$, то

$$m' (\varepsilon - \|B\|\,\delta - \|C\|\,\beta)^2 \leqslant \|w_0 - x\|^2 + m' \|C\|^2 \beta^2.$$

Учитывая, что $w_0 = z_0$ и $m \leqslant m'$, из последнего неравенства получим

$$m \leqslant m' \leqslant \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\,\delta - \|C\|\,\beta)^2 - \|C\|^2 \beta^2} =$$

$$= \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\,\delta - 2\,\|C\|\,\beta)\,(\varepsilon - \|B\|\,\delta)}$$

в) Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y. \tag{3.49}$$

Предположим, что (3.49) верна, тогда имеем

$$x - C^n x = \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y, \quad (E - C^n)\, x = \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y,$$

$$(E - C^n)\, x = B\left(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1}\right) y, (E - C^n)\, x =$$

$$= A^{-1} (E - C) (E - C^n) (E - C)^{-1} y,$$

$$(E - C^n)\, x = (E - C^n)\, A^{-1} y, (E - C^n)\, x = (E - C^n)\, x. \tag{3.50}$$

Следовательно, предположение верно и формула (3.49) доказана. Из (3.45) вычтем (3.49), получим

$$z_n - x = C^n (z_0 - x) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1} B (y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]. \tag{3.51}$$

Отсюда $\Delta_n = C^n \Delta_0 + C \sum\limits_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1} B (y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]$, где $\Delta_n = z_n - x$ и $\Delta_0 = z_0 - x$. Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \leqslant \|C^n \Delta_0\| + (\|B\|\, \delta + \|C\|\, \beta)\, n. \tag{3.52}$$

В частности, (3.52) справедлива и при $n = m$. Если $m \to \infty$ при $\varepsilon,\ \delta,\ \beta \to 0$, тогда, как показано ранее, $\|C^m \Delta_0\| \to 0, m \to \infty$. Поэтому для доказательства

$$\|z_m - x\| \to 0,\ \ \delta \to 0,\ \ \beta \to 0$$

достаточно показать, что

$$m\left(\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta\right) \to 0, m \to \infty, \quad \delta \to 0, \quad \beta \to 0.$$

Из (3.51)

$$z_n - z_{n+1} = (z_n - x) - (z_{n+1} - x) = C^n(z_0 - x) +$$
$$+C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right] - C^{n+1}(z_0 - x) -$$
$$-C\sum_{k=0}^{n} C^k\left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k}\right] = C^n(E - C)(z_0 - x) +$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1} C^k B(y_\delta - y) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n} C^k B(y_\delta - y) -$$
$$-C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} = C^n(E - C)(z_0 - x) - C^n B(y_\delta - y) +$$
$$+C\left(u_{n-1} + Cu_{n-2} + C^2u_{n-3} + \ldots + C^{n-1}u_0\right) -$$
$$-C\left(u_n + Cu_{n-1} + C^2u_{n-2} + \ldots + C^n u_0\right) =$$
$$= C^n(E - C)(z_0 - x) - Cu_n - C^n B(y_\delta - y) +$$
$$+C\left[(u_{n-1} - Cu_{n-1}) + \left(Cu_{n-2} - C^2u_{n-2}\right) + \ldots + \left(C^{n-1}u_0 - C^n u_0\right)\right].$$

Отсюда получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n(E-C)(z_0 - x) - C^nB(y_\delta - y) - Cu_n +$$
$$+C\sum_{k=0}^{n-1} C^k(E-C)u_{n-k-1}. \tag{3.53}$$

Нетрудно показать, что при $0 < \alpha \leqslant 5/4$

$$\|C^n(E-C)\| \leqslant \frac{1}{n+1}. \tag{3.54}$$

Из (3.53) при $n = m-1$ получим

$$\|z_{m-1} - z_m\| \leqslant \left\|C^{(m-1)/2}C^{(m-1)/2}(E-C)(z_0 - x)\right\| +$$
$$+\left\|C^{m-1}B(y_\delta - y)\right\| + \|Cu_{m-1}\| + \left\|C\sum_{k=0}^{m-2} C^k(E-C)u_{m-k-2}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|C^{(m-1)/2}(E-C)\right\| \left\|C^{(m-1)/2}(z_0 - x)\right\| + \|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta +$$
$$+\|C\|\,\beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{2}{m} \left\|C^{(m-1)/2}(z_0 - x)\right\| + \|B\|\,\delta +$$
$$+\|C\|\,\beta(2 + \ln m),$$

так как $\sum\limits_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln m$ [10, с. 16].

Поскольку по условию теоремы

$$\varepsilon(\delta,\beta) \geqslant d\left(\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta^p\right)\; d>1, \quad p\in(0,1),$$

то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\,\delta + 2\,\|C\|\,\beta$, поэтому из б) получим

$$m \leqslant \|z_0 - x\|^2 \left[(\varepsilon - \|B\|\,\delta - 2\,\|C\|\,\beta)\,(\varepsilon - \|B\|\,\delta)\right]^{-1}.$$

Так как $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon$, то имеем

$$\varepsilon \leqslant \frac{2}{m}\left\|C^{(m-1)/2}(z_0 - x)\right\| + \|B\|\,\delta + \|C\|\,(2+\ln m)\beta.$$

Отсюда получим, что

$$m \leqslant \frac{2\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|}{\varepsilon - \|B\|\,\delta - \|C\|\,\beta\left\{2+\ln\left(\|z_0-x\|^2\left[(\varepsilon - \|B\|\,\delta - 2\,\|C\|\,\beta)\,(\varepsilon - \|B\|\,\delta)\right]^{-1}\right)\right\}}.$$

Умножив обе части последнего неравенства на

$$\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta,$$

получим

$$m\left(\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|\left(\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta\right)}{\varepsilon - \|B\|\,\delta - \|C\|\,\beta\left\{2+\ln\left(\|z_0-x\|^2\left[(\varepsilon - \|B\|\,\delta - 2\,\|C\|\,\beta)\,(\varepsilon - \|B\|\,\delta)\right]^{-1}\right)\right\}}.$$

При $m \to \infty$ множитель $\left\|C^{(m-1)/2}(z_0 - x)\right\| \to 0$, и при $\delta,\ \beta \to 0$ дробь

$$\frac{2\left(\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta\right)}{\varepsilon - \|B\|\,\delta - \|C\|\,\beta\left[2 + \ln\frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}\right]}$$

ограничена. Поэтому при $m \to \infty$, $\delta,\ \beta \to 0$ $m\left(\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta\right) \to 0$. Отсюда и из неравенства (3.52) при $m \to \infty$ выполняется

$$\lim_{\substack{\delta \to 0\\ \beta \to 0}} \|\Delta_m\| = \lim_{\substack{\delta \to 0\\ \beta \to 0}} \|z_m - x\| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\substack{\delta \to 0\\ \beta \to 0}} \left(\|C^m \Delta_0\| + m\left(\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta\right)\right) = 0.$$

Теорема 3.11 доказана. ■

Сравнение метода (3.3) с методом простой итерации [2–3,5–6] показывает, что по мажорантным оценкам погрешности эти методы одинаковы. Однако метод (3.3) имеет преимущество по сравнению с методом простой итерации в следующем: выполнение одного шага итераций по методу (3.3) равносильно выполнению k шагов по методу простой итерации.

4 МЕТОД ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

4.1 Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение I рода

$$Ax = y \tag{4.1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (4.1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается неявный итерационный метод

$$\left(E + \alpha A^k\right) x_{n+1} = \left(E - \alpha A^k\right) x_n + 2\alpha A^{k-1} y, x_0 = 0, k \epsilon N. \tag{4.2}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (4.1) при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \leqslant \delta$. В этом случае метод (4.2) примет вид

$$\left(E + \alpha A^k\right) x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^k\right) x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1} y_\delta, x_{0,\delta} = 0, k \epsilon N. \tag{4.3}$$

Ниже, под сходимостью метода (4.3) понимается утверждение о том, что приближения (4.3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (4.1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ, т.е. если

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\inf_{n}\left(\|x - x_{n,\delta}\|\right)\right) = 0.$$

Теорема 4.1. *Итерационный метод (4.2) при условии $\alpha > 0$ сходится в исходной норме гильбертова пространства.*

Доказательство.

По индукции нетрудно показать, что

$$x_n = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^k\right)^n \left(E - \alpha A^k\right)^{-n}\right] y.$$

Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A = \int\limits_0^M \lambda\, dE_\lambda$ ($M = \|A\|$, E_λ — спектральная функция), имеем

$$x - x_n = A^{-1}\left(E - \alpha A^k\right)^n \left(E + \alpha A^k\right)^{-n} y =$$

$$= \int\limits_0^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda y = \int\limits_0^\varepsilon \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda y +$$

$$+ \int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda y.$$

Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0, M]$ выполнялось

$$\alpha \ > 0 \tag{4.4}$$

Тогда $\left|\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right| \leqslant \ q < 1$ и, следовательно,

$$\left\|\int\limits_{\varepsilon}^{M} \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda y\right\| \leqslant q^n \left\|\int\limits_{\varepsilon}^{M} \lambda^{-1}\, dE_\lambda y\right\| =$$

$$= q^n \left\|\int\limits_{\varepsilon}^{M} dE_\lambda y\right\| \leqslant q^n\|x\| \to 0, n \to \infty.$$

$$\left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon} \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda y\right\| \leqslant \left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon} dE_\lambda y\right\| = \|E_\varepsilon x\| \to 0,$$

так как при $\varepsilon \to 0$ $\quad E_\varepsilon$ сильно стремится к нулю в силу свойств спектральной функции. Таким образом, доказано, что при условии (4.4) метод (4.2) сходится. Теорема 4.1 доказана. ■

Скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$ неизвестна и может быть сколь угодно малой. Для ее оценки предположим, что точное решение уравнения (4.1) истокообразно представимо, т. е. что $x = A^s z, s > 0$. Тогда

$$x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^s \left(\frac{1 - \alpha\lambda^k}{1 + \alpha\lambda^k} \right)^n dE_\lambda z.$$

Используя результаты из [12], получим оценку для подынтегральной функции:

$$|f(\lambda)| = \left| \lambda^s \left(\frac{1 - \alpha\lambda^k}{1 + \alpha\lambda^k} \right)^n \right| \leqslant \left| \lambda^s (1 - \alpha\lambda^k)^n \right| \leqslant s^{s/k} (kn\alpha e)^{-s/k}.$$

Отсюда $\|x - x_n\| \leqslant s^{s/k} (kn\alpha e)^{-s/k} \|z\|$.

Но может оказаться, что локальный максимум внутри $[0, M]$ не будет являться глобальным, поэтому будем учитывать значение функции $f(\lambda)$ на правом конце отрезка, т.е. в точке $\lambda = M$ (на левом конце отрезка $f(0) = 0$). Тогда справедливо

$$\|x - x_n\| \leqslant max \left\{ s^{s/k} (kn\alpha e)^{-s/k}, M^s \left(\frac{1 - \alpha M^k}{1 + \alpha M^k} \right)^n \right\} \|z\|.$$

Покажем, что при условии (4.4) метод (4.3) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций в зависимости от уровня погрешности δ приближенной правой части уравнения (4.1). Рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}).$$

По доказанному $x - x_n \to 0$, $n \to \infty$. Убедимся, что $x_n - x_{n,\delta}$ можно сделать сходящимся к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, имеем

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^k\right)^n \left(E + \alpha A^k\right)^{-n}\right](y - y_\delta) =$$

$$= \int_0^M \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1 - \alpha\lambda^k}{1 + \alpha\lambda^k}\right)^n\right] dE_\lambda(y - y_\delta).$$

Оценим сверху подынтегральную функцию

$$g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1 - \alpha\lambda^k}{1 + \alpha\lambda^k}\right)^n\right] \geqslant 0$$

при условии (4.4).

При $n = 1$

$$g_1(\lambda) = \frac{2\alpha\lambda^{k-1}}{1 + \alpha\lambda^k}.$$

Ее производная равна

$$g_1'(\lambda) = \frac{2\alpha\lambda^{k-2}(k - 1 - \alpha\lambda^k)}{(1 + \alpha\lambda^k)^2},$$

следовательно, $\lambda^* = \left(\frac{k-1}{\alpha}\right)^{1/k}$ — стационарная точка для функции $g_1(\lambda)$. Поскольку $g_1''(\lambda^*) < 0$, то λ^* — точка максимума функции $g_1(\lambda)$ и $\max\limits_{[0,M]} g_1(\lambda) = g_1(\lambda^*) \leqslant 2\alpha^{1/k}$.

Покажем по индукции, что при $n \in N$

$$g_n(\lambda) = |g_n(\lambda)| \leqslant 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}. \tag{4.5}$$

При $n = 1$ неравенство (4.5) проверено выше. В дальнейшем будем считать $n \geqslant 2$. Предположим, что (4.5) верно при $n = m$, т.е. $g_m(\lambda) \leqslant$ $\leqslant 2km^{1/k}\alpha^{1/k}$ и рассмотрим

$$g_{m+1}(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^{m+1}\right] = \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^{m}\right] +$$

$$+\lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^{m+1}\right] - \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^{m}\right] \leqslant$$

$$\leqslant 2km^{1/k}\alpha^{1/k} + \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^{m}\frac{2\alpha\lambda^{k-1}}{1+\alpha\lambda^k}.$$

Поэтому

$$g_{m+1}(\lambda) \leqslant 2km^{1/k}\alpha^{1/k} + \left|\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^m 2\alpha\lambda^{k-1}}{\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{m+1}}\right| \leqslant 2km^{1/k}\alpha^{1/k} +$$

$$+\left|\left(1-\alpha\lambda^k\right)^m 2\alpha\lambda^{k-1}\right|.$$

Покажем, что

$$km^{1/k}\alpha^{1/k} + \left|\left(1-\alpha\lambda^k\right)^m \alpha\lambda^{k-1}\right| \leqslant k(m+1)^{1/k}\alpha^{1/k}, \tag{4.6}$$

что равносильно неравенству

$$\left|\left(1-\alpha\lambda^k\right)^m \alpha^{(k-1)/k}\lambda^{k-1}\right| \leqslant (\sqrt[k]{m+1}-\sqrt[k]{m})k.$$

Имеем

$$\sqrt[k]{m+1} = \sqrt[k]{m\left(1+\frac{1}{m}\right)} = \sqrt[k]{m}\left\{1+\frac{1}{km}+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{2!m^2}+\right.$$

$$+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{1}{k}-2\right)}{3!m^3}+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{1}{k}-2\right)\left(\frac{1}{k}-3\right)}{4!m^4}+\ldots+$$

$$+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\cdots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot m^{2p-1}}+$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\cdots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]\cdot\left[\frac{1}{k}-(2p-1)\right]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot 2p\cdot m^{2p}}+\ldots\right\}.$$

Покажем, что каждый положительный член ряда больше модуля следующего за ним отрицательного члена, т.е.

$$\frac{\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{k}-1\right)\cdots\left[\dfrac{1}{k}-(2p-2)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot m^{2p-1}} >$$

$$> \left|\frac{\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{k}-1\right)\cdots\left[\dfrac{1}{k}-(2p-2)\right]\cdot\left[\dfrac{1}{k}-(2p-1)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot 2p\cdot m^{2p}}\right|,$$

что равносильно $1 > \dfrac{\left|\dfrac{1}{k}-(2p-1)\right|}{2pm}$ или $\dfrac{2p-1-\dfrac{1}{k}}{2pm} < 1$, а это уже очевидно при $m \leqslant 1$. Следовательно,

$$\sqrt[k]{m+1} > \sqrt[k]{m}\left(1+\frac{1}{km}-\frac{k-1}{2k^2m^2}\right).$$

Вернемся к доказательству неравенства (4.6). Поскольку

$$\left|\left(1-\alpha\lambda^k\right)^m\lambda^{k-1}\right| \leqslant (k-1)^{(k-1)/k}(km\alpha e)^{-(k-1)/k},$$

то вместо (4.6) докажем более сильное неравенство

$$(k-1)^{(k-1)/k}(km\alpha e)^{-(k-1)/k}\alpha^{(k-1)/k} \leqslant km^{1/k}\left(\frac{1}{km}-\frac{k-1}{2k^2m^2}\right). \qquad (4.7)$$

Преобразуем его:

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^{(k-1)/k} m^{-(k-1)/k} e^{-(k-1)/k} \leqslant k m^{1/k} \frac{1}{km}\left(1-\frac{k-1}{2km}\right).$$

Поскольку

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^{(k-1)/k} m^{-(k-1)/k} e^{-(k-1)/k} \leqslant m^{-(k-1)/k} e^{-(k-1)/k},$$

то докажем более сильное неравенство

$$m^{-(k-1)/k} e^{-(k-1)/k} \leqslant m^{-(k-1)/k}\left(1-\frac{k-1}{2km}\right),$$

что тоже самое

$$1 \leqslant e^{(k-1)/k}\left(1-\frac{k-1}{2km}\right), m \geqslant 2.$$

При $k=1$ имеем $1 \leqslant 1$, следовательно, последнее неравенство справедливо при $k=1$. При $k \geqslant 2$ $1-\dfrac{k-1}{2km} \geqslant \dfrac{3}{4}$, отсюда

$$e^{(k-1)/k}\left(1-\frac{k-1}{2km}\right) \geqslant \frac{3}{4} e^{1/2} > 1.$$

Значит, неравенство (4.7) выполняется и, тем более, справедливо неравенство (4.6). Таким образом, для $n \geqslant 1$ справедлива оценка (4.5), т.е. $g_n(\lambda) \leqslant 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}, n \geqslant 1$. Отсюда $\|x-x_{n,\delta}\| \leqslant 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta, n \geqslant 1$.

Поскольку

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leqslant \|x - x_n\| + \|x - x_{n,\delta}\| \leqslant \|x - x_n\| + 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta$$

и $\|x - x_n\| \to 0, n \to \infty$, то для сходимости метода (4.3) достаточно выбрать $n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы

$$n^{1/k}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0.$$

Итак, доказана

Теорема 4.2. *При условии (4.4) итерационный метод (4.3) сходится, если число итераций n выбирать из условия $n^{1/k}\delta \to 0, n \to \infty$, $\delta \to 0$.*

Запишем теперь общую оценку погрешности метода (4.3)

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leqslant \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{ s^{s/k}(kn\alpha e)^{-s/k}, M^s\left(\frac{1 - \alpha M^k}{1 + \alpha M^k}\right)^n \right\} \|z\| + 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta, n \geqslant 1.$$

Так как для достаточно больших n

$$M^s\left(\frac{1 - \alpha M^k}{1 + \alpha M^k}\right)^n \leqslant s^{s/k}(kn\alpha e)^{-s/k},$$

то для этих n справедлива оценка

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leqslant s^{s/k}(kn\alpha e)^{-s/k}\|z\| + 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta, n \geqslant 1. \qquad (4.8)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 4.3. *Если решение x уравнения (4.1) истокообразно представимо, то при условии (4.4) для метода (4.3) справедлива оценка погрешности (4.8).*

Для минимизации оценки погрешности вычислим правую часть оценки (4.8) в точке, в которой производная от нее равна нулю: в результате получим априорный момент останова

$$n_{\text{опт}} = 2^{-k/(s+1)} \left(\frac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)} \alpha^{-1} e^{-s/(s+1)} \|z\|^{k/(s+1)} \delta^{-k/(s+1)}. \tag{4.9}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (4.8), имеем

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leqslant (1+s)2^{s/s+1} \left(\frac{s}{k}\right)^{s(1-k)/(k(s+1))} e^{-s/(k(s+1))} \|z\|^{1/(s+1)} \delta^{s/(s+1)}. \tag{4.10}$$

Замечание 4.1. *Оценка погрешности (4.10) имеет порядок $O(\delta^{s/(s+1)})$, и как следует из [6], он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями $x = A^s z, s > 0$.*

Замечание 4.2. *Оптимальная оценка (4.10) не зависит от α, но от параметра α зависит $n_{опт}$, поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать α, удовлетворяющим условию (4.4) и так, чтобы $n_{опт} = 1$. Для этого достаточно выбрать*

$$\alpha_{опт} = 2^{-k/(s+1)} \left(\frac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)} e^{-s/(s+1)} \|z\|^{k/(s+1)} \delta^{-k/(s+1)}.$$

Сравнение метода (4.3) с широко известным явным методом итераций $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right)$, $x_{0,\delta} = 0$ показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right)$, $x_{0,\delta} = 0$ предпочтительнее неявного метода (4.3). Однако неявный метод (4.3) обладает следующим важным достоинством. В явном методе $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right)$, $x_{0,\delta} = 0$ на шаг α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \leqslant \frac{5}{4\|A\|}$, что может привести на практике к необходимости большого числа вычислений. В неявном методе (4.3) ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет считать $\alpha > 0$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с чем оптимальную оценку для метода (4.3) можно получить уже на первом шаге итераций.

Рассмотрим погрешность метода при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ — точное значение, получаемое по формуле (4.3), а z_n — значение с учетом вычислительной погрешности, т.е.

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha A^k\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha A^k\right) z_n + 2\alpha A^{k-1} y_\delta\right] + \alpha\gamma_n, \quad z_0 = 0. \quad (4.11)$$

Здесь γ_n – погрешность вычислений. Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (4.11) равенство (4.3). Имеем

$$\varepsilon_{n+1} = \left(E + \alpha A^k\right)^{-1}\left(E - \alpha A^k\right)\varepsilon_n + \alpha\gamma_n, \quad \varepsilon_0 = 0.$$

Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции нетрудно получить, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(E + \alpha A^k\right)^{-(n-1-i)} \left(E - \alpha A^k\right)^{n-1-i} \alpha\gamma_i.$$

В силу (4.4) и тому, что $0 \in Sp\, A$ справедливо

$$\left\| \left(E + \alpha A^k\right)^{-1} \left(E - \alpha A^k\right) \right\| \leqslant 1,$$

поэтому

$$\|\varepsilon_n\| \leqslant n\alpha\gamma, \quad \gamma = \sup_i |\gamma_i|\,.$$

Таким образом, с учетом вычислительной погрешности оценка погрешности метода (4.3) запишется в виде

$$\|x - z_n\| \leqslant \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \leqslant s^{s/k} \left(kn\alpha e\right)^{-s/k} \|z\| +$$
$$+ 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta + n\alpha\gamma, \;\; n \geqslant 1.$$

4.2 Сходимость метода в случае неединственного решения.

Обозначим через $N(A) = \{x \in H | Ax = 0\}$, $M(A)$ — ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ — проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 4.4. *Пусть* $A \geqslant 0, y \in H, \alpha > 0$, *тогда для итерационного метода* (4.2) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n \to \Pi(A)y, \|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) итерационный метод (4.2) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо.*

В последнем случае $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* — *минимальное решение.*

Доказательство.

Применим оператор A к (4.2), получим

$$A(E + \alpha A^k)x_n = A(E - \alpha A^k)x_{n-1} + 2\alpha A^k y,$$

где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то получим

$$(E + \alpha A^k)(Ax_n - \Pi(A)y) = (E - \alpha A^k)(Ax_{n-1} - \Pi(A)y).$$

Обозначим $Ax_n - \Pi(A)y = v_n, v_n \in M(A)$, тогда

$$(E + \alpha A^k)v_n = (E - \alpha A^k)v_{n-1}.$$

Отсюда $v_n = (E + \alpha A^k)^{-1}(E - \alpha A^k)v_{n-1}$, следовательно,

$$v_n = (E + \alpha A^k)^{-n}(E - \alpha A^k)^n v_0.$$

Имеем $A \geqslant 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т. е. $(Ax, x) > 0$ $\forall x \in M(A)$. Так как $\alpha > 0$, то $\left\|(E+\alpha A^k)^{-1}(E-\alpha A^k)\right\| \leqslant 1$. Поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|(E+\alpha A^k)^{-n}(E-\alpha A^k)^n v_0\right\| = \left\|\int\limits_0^{\|A\|} \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda v_0\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int\limits_0^{\varepsilon} \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda v_0\right\| + \left\|\int\limits_{\varepsilon}^{\|A\|} \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda v_0\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int\limits_0^{\varepsilon} dE_\lambda v_0\right\| + q^n(\varepsilon)\left\|\int\limits_{\varepsilon}^{\|A\|} dE_\lambda v_0\right\| \leqslant \|E_\varepsilon v_0\| + q^n(\varepsilon)\,\|v_0\| \to 0$$

при $\varepsilon \to 0, n \to \infty$. Здесь $\left|\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right| \leqslant q(\varepsilon) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon, \|A\|]$. Следовательно, $\nu_n \to 0, n \to \infty$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Отсюда

$$\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y).$$

Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (4.2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = (A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* — минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (4.2) примет вид

$$(E+\alpha A^k)x_n = (E-\alpha A^k)x_{n-1} + 2\alpha A^{k-1}\Pi(A)y = (E-\alpha A^k)x_{n-1}+ \\ +2\alpha A^k x^* = (E+\alpha A^k)x_{n-1} - 2\alpha A^k x_{n-1} + 2\alpha A^k x^* = \\ = (E+\alpha A^k)x_{n-1} + 2\alpha A^k(x^* - x_{n-1}).$$

Отсюда $x_n = x_{n-1} + 2\alpha A^k(E+\alpha A^k)^{-1}(x^* - x_{n-1})$. Последнее равенство разобьем на два

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + 2\alpha(E+\alpha A^k)^{-1}A^k P(A)(x^* - x_{n-1}) = \\ = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0;$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha(E+\alpha A^k)^{-1}A^k\Pi(A)(x^* - x_{n-1}) = \\ = \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha(E+\alpha A^k)^{-1}A^k(\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}) = \\ = \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha(E+\alpha A^k)^{-1}A^k(x^* - \Pi(A)x_{n-1}),$$

так как $x^* \in M(A)$. Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства

$$\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + 2\alpha(E+\alpha A^k)^{-1}A^k(x^* - \Pi(A)x_{n-1})$$

получим

$$\omega_n = \omega_{n-1} - 2\alpha(E+\alpha A^k)^{-1}A^k\omega_{n-1} = (E+\alpha A^k)^{-1}(E-\alpha A^k)\omega_{n-1}$$

и, аналогично ν_n, можно показать, что $\omega_n \to 0, n \to \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема 4.2 доказана. ■

Замечание 4.3. *Так как у нас $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, т. е. итерационный метод (4.2) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.*

4.3 Сходимость метода в энергетической норме

В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. И тем не менее, метод (4.3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться **энергетической нормой** гильбертова пространства

$$\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}, \text{ где } x \in H.$$

Покажем сходимость метода (4.3) в энергетической норме и получим для него априорные оценки погрешности в энергетической норме. Рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \tag{4.12}$$

Запишем первое слагаемое в виде

$$x - x_n = A^{-1}(E + \alpha A^k)^{-n}(E - \alpha A^k)^n y = (E + \alpha A^k)^{-n}(E + \alpha A^k)^n x.$$

Как было показано в подразделе 4.1, $x - x_n$ бесконечно мало в исходной норме гильбертова пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для её оценки делалось предположение об истокообразной представимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не понадобится. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора $A = \int\limits_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и E_λ — соответствующая спектральная функция, имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = \left(A(E + \alpha A^k)^{-n}(E - \alpha A^k)^n x, (E + \alpha A^k)^{-n}(E - \alpha A^k)^n x\right) =$$

$$= \int\limits_0^M \lambda \left(\frac{1 - \alpha\lambda^k}{1 + \alpha\lambda^k}\right)^{2n} d(E_\lambda x, x).$$

Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции

$$f(\lambda) = \lambda \left(\frac{1 - \alpha\lambda^k}{1 + \alpha\lambda^k}\right)^{2n} \text{ при } \lambda \in [0, M].$$

Функция $f(\lambda)$ — частный случай при $s = 1$ функций, оцененных в [13]. Там показано, что при условии $\alpha > 0$

$$\max_{\lambda\in[0,M]} |f(\lambda)| \leqslant (2kn\alpha e)^{-\frac{1}{k}}.$$

Следовательно,справедлива оценка

$$\|x - x_n\|_A^2 \leqslant (2kn\alpha e)^{-\frac{1}{k}} \|x\|^2 .$$

Отсюда $\|x - x_n\|_A \leqslant (2kn\alpha e)^{-\frac{1}{2k}} \|x\|$. Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокообразной представимости порядка $s = \frac{1}{2}$ для точного решения.

Оценим второе слагаемое в (4.12). Как показано в [13], справедливо равенство

$$x - x_{n,\delta} = A^{-1}[E - (E + \alpha A^k)^{-n}(E - \alpha A^k)^n](y - y_\delta).$$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int\limits_0^M \lambda^{-1} \left[1 - \left(\frac{1 - \alpha\lambda^k}{1 + \alpha\lambda^k}\right)^n\right]^2 d(E_\lambda(y - y_\delta), y - y_\delta).$$

Обозначим через

$$g(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \left(\frac{1 - \alpha\lambda^k}{1 + \alpha\lambda^k}\right)^n\right]^2$$

подынтегральную функцию, а через

$$g_1(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \left(\frac{1 - \alpha\lambda^k}{1 + \alpha\lambda^k}\right)^n\right],$$

тогда

$$g(\lambda) = g_1(\lambda) \left[1 - \left(\frac{1 - \alpha\lambda^k}{1 + \alpha\lambda^k}\right)^n\right].$$

Функция $g_1(\lambda)$ была оценена в [13]. Там показано, что при условии $\alpha > 0$ $g_1(\lambda) \leqslant 2kn^{\frac{1}{k}}\alpha^{\frac{1}{k}}$.

При этом же условии имеем

$$\left|\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right| \leqslant 1, \forall\lambda \in [0, M],$$

поэтому $1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n \leqslant 2$, откуда $g(\lambda) \leqslant 4kn^k\alpha^k$. Таким образом,

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 \leqslant 4kn^{\frac{1}{k}}\alpha^{\frac{1}{k}}\delta^2,$$

отсюда

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leqslant 2k^{\frac{1}{2}}(n\alpha)^{\frac{1}{2k}}\delta, n \geqslant 1.$$

Поскольку

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leqslant \|x - x_n\|_A + \|x_n - x - n, \delta\|_A \leqslant$$
$$\leqslant \|x - x_n\|_A + 2k^{\frac{1}{2}}(n\alpha)^{\frac{1}{2k}}\delta$$

и $\|x - x_n\|_A \to 0$, $n \to \infty$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \to 0$, $n \to \infty$, достаточно, чтобы $n^{\frac{1}{2k}}\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Итак, доказана

Теорема 4.5. *При условии $\alpha > 0$ итерационный метод (4.3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия $n^{\frac{1}{2k}}\delta \to 0$ при $n \to \infty$ $\delta \to 0$.*

Запишем теперь общую оценку погрешности для (4.3) в энергетической норме

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leqslant (2kn\alpha e)^{-\frac{1}{2k}} \|x\| + 2k^{\frac{1}{2}}(n\alpha)^{\frac{1}{2k}}\delta, n \geqslant 1. \tag{4.13}$$

Оптимизируем оценку (4.13) по n. Для этого при заданном найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по n от правой части (4.13), получим

$$n_{\text{опт}} = 2^{-\frac{2k+1}{2}} k^{-\frac{k+1}{2}} \alpha^{-1} e^{-\frac{1}{2}} \delta^{-k} \|x\|^k . \tag{4.14}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (4.13), её оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leqslant 2^{\frac{6k-1}{4k}} k^{\frac{k-1}{4k}} e^{-\frac{1}{4k}} \delta^{\frac{1}{2}} \|x\|^{\frac{1}{2}} . \tag{4.15}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4.6. *Оптимальная оценка погрешности для метода (4.3) при условии $\alpha > 0$ в энергетической норме имеет вид (4.15) и получается при $n_{опт}$ из (4.14).*

Замечание 4.4. *Из неравенства (4.15) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α. Но $n_{опт}$ зависит от α и, поскольку на α нет ограничений сверху ($\alpha > 0$), то за счет выбора α можно получить $n_{опт} = 1$, то есть оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно взять $\alpha_{опт} = 2^{-\frac{2k+1}{2}} k^{-\frac{k+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \delta^{-k} \|x\|^k$.*

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H. Очевидно, для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном ε $(0 < \varepsilon < \|A\|)$, было $P_\varepsilon x = 0$, $P_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, где $P_\varepsilon = \int\limits_0^\varepsilon \lambda dE_\lambda$. Так как

$$x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E + \alpha A^k)^{-n}(E - \alpha A^k)^n\right] y_\delta,$$

то для выполнения последнего из указанных условий должно выполняться условие $P_\varepsilon y_\delta = 0$.

Таким образом, если решение x и приближенная правая часть y_δ таковы,что $P_\varepsilon x = 0$ и $P_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства H и, следовательно, для сходимости в исходной норме пространства H не требуется истокопредставимости точного решения.

Для решения уравнений с несамосопряженным или неположительным, но ограниченным оператором A следует перейти к уравнению $A^*Ax = A^*y$. Тогда при приближенном элементе y_δ метод (4.3) примет вид

$$(E + \alpha(A^*A)^k)x_{n+1,\delta} = (E - \alpha(A^*A)^k)x_{n,\delta} + 2\alpha(A^*A)^{k-1}A^*y_\delta,$$

$$x_{0,\delta} = 0.$$

4.4 Правило останова по невязке

В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, метод также можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [5–6]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова условиями

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m), \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leqslant \varepsilon, \varepsilon = b\delta, b > 1. \tag{4.16}$$

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Ниже метод итерации (4.3) с правилом останова (4.16) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_m \|x - x_{m,\delta}\|\right) = 0$. Покажем, что правило останова по невязке (4.16) применимо к методу (4.3).

Рассмотрим семейство функций

$$g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{(1-\alpha\lambda^k)^n}{(1+\alpha\lambda^k)^n}\right] \geqslant 0.$$

В подразделе 4.1 показано, что для $g_n(\lambda)$ при $\alpha > 0$ выполняются следующие условия

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant M} |g_n(\lambda)| \leqslant 2k(n\alpha)^{\frac{1}{k}}, n > 0, \tag{4.17}$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant M} |1-\lambda g_n(\lambda)| \leqslant 1, n>0, \tag{4.18}$$

$$1-\lambda g_n(\lambda) \to 0, n\to\infty, \forall\lambda\in(0,M], \tag{4.19}$$

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant M} \lambda^s |1-\lambda g_n(\lambda)| \leqslant \left(\frac{s}{kn\alpha e}\right)^{\frac{s}{k}}, n>0, 0\leqslant s<\infty. \tag{4.20}$$

Лемма 4.1. *Пусть* $A=A^*\geqslant 0, \|A\|\leqslant M$. *Тогда для любого* $\omega\in H$

$$(E-Ag_n(A))\omega\to 0, n\to\infty.$$

Доказательство.

Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A=\int\limits_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M=\|A\|$ и E_λ — спектральная функция оператора A, получим

$$(E-Ag_n(A)\omega = \int_0^M (1-\lambda g_n(\lambda))dE_\lambda\omega =$$

$$=\int_0^{\varepsilon_0}(1-\lambda g_n(\lambda))dE_\lambda\omega + \int_{\varepsilon_0}^M (1-\lambda g_n(\lambda)dE_\lambda\omega.$$

Так как $1-\lambda g_n(\lambda)=\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n$ и $\left|\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right|\leqslant q(\varepsilon_0)<1$ для всех $\lambda\in(0,M]$ и $\alpha>0$, то

$$\left\|\int_{\varepsilon_0}^M (1-\lambda g_n(\lambda)dE_\lambda\omega\right\| \leqslant q^n(\varepsilon_0)\left\|\int_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda\omega\right\| \leqslant q^n(\varepsilon_0)\|\omega\| \to 0, n\to\infty.$$

Из (4.18) имеем

$$\left\|\int_0^{\varepsilon_0}(1-\lambda g_n(\lambda)dE_\lambda\omega\right\| \leqslant \left\|\int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda\omega\right\| = \|E_{\varepsilon_0}\omega\| \to 0, \varepsilon_0 \to 0$$

в силу свойств спектральной функции. Следовательно,

$$(E - Ag_n(A))\omega \to 0,\ n \to \infty.$$

Лемма 4.1 доказана. ■

Имеет место

Лемма 4.2. *Пусть* $A = A^* \geqslant 0, \|A\| \leqslant M$. *Тогда для* $\forall \nu \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{\frac{s}{k}} \|A^s(E - Ag_n(A))\nu\| \to 0$, *при* $n \to \infty$, $0 \leqslant s < \infty$.

Доказательство.

Так как верно неравенство (4.20), то получим

$$n^{\frac{s}{k}} \|A^s(E - Ag_n(A))\| \leqslant n^{\frac{s}{k}} \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leqslant n^{\frac{s}{k}}\gamma_s n^{\frac{-s}{k}} = \gamma_s,$$

где $\gamma_s = \left(\frac{s}{k\alpha e}\right)^{\frac{s}{k}}$.

Воспользуемся теоремой Банаха-Штейнгауза [7, с. 151], по которой сходимость $B_n u \to Bu$ при $n \to \infty$ для всех $u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|, n = 1, 2, \ldots,$ ограничены независящей от n постоянной.

Возьмём в качестве плотного в $\overline{R(A)} = H$ множество $R(A)$. Положим $s_1 = s + 1$. Тогда для каждого $v = A\omega \in R(A)$ имеем

$$n^{\frac{s}{k}} \|A^s(E - Ag_n(A))v\| = n^{\frac{s}{k}} \left\|A^{s+1}(E - Ag_n(A))\omega\right\| \leqslant$$
$$\leqslant n^{\frac{s}{k}} \left(\frac{s+1}{k\alpha e}\right)^{\frac{s+1}{k}} n^{\frac{-(s+1)}{k}} \|\omega\| = \gamma_{s_1} n^{\frac{-1}{k}} \|\omega\| \to 0,$$

при $n \to \infty$, так как $s_1 < \infty$. Лемма 4.2 доказана. ■

Справедлива

Лемма 4.3. *Пусть $A = A^* \geqslant 0$, $\|A\| \leqslant M$. Если для некоторой последовательности $n_p < \bar{n} = const$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $p \to \infty$ имеем $\omega_p = A\left(E - Ag_{n_p}(A)\right) v_0 \to 0$, то $v_p = \left(E - Ag_{n_p}(A)\right) v_0 \to 0$.*

Доказательство.

В силу (4.18) последовательность v_p ограничена $\|v_p\| \leqslant \gamma_0 \|v_0\|$, $\gamma_0 = 1$, $p \in N$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность.

Пусть $v_p - \to v, (p \in N' \subseteq N)$, тогда $Av_p - \to Av, (p \in N')$. Но по условию $\omega_p = Av_p \to 0$, $p \to \infty$, следовательно, $Av = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A, то $v = 0$. Тогда

$$\|v_p\|^2 = \left(v_p, (E - Ag_{n_p}(A))v_0\right) = (v_p, v_0) - \left(v_p, Ag_{n_p}(A)v_0\right) =$$
$$= (v_p, v_0) - (Av_p, g_{n_p}(A)v_0) = (v_p, v_0) - (\omega_p, g_n(A)v_0) \to (v, v_0),$$

так как $\omega_p \to 0$, $p \to \infty$, $v = 0$ и по условию (4.17)

$$\left\|g_{n_p}(A)\right\| \leqslant 2k(n_p\alpha)^{\frac{1}{k}} < 2k\left(\overline{n}\alpha\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Следовательно, $\|v_p\| \to 0$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности v_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $v_p \to 0$, $p \to \infty$. Лемма 4.3 доказана. ■

Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 4.7. *Пусть $A = A^* \geqslant 0$, $\|A\| \leqslant M$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (4.3) выбирается по правилу (4.16). Тогда $x_{m,\delta} \to x$ при $\delta \to 0$.*

Доказательство.

По индукции легко показать, что

$$x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^k\right)^n \left(E + \alpha A^k\right)^{-n}\right] y_\delta.$$

Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \tag{4.21}$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A\left[E - Ag_n(A)\right]x - \left[E - Ag_n(A)\right](y_\delta - y). \tag{4.22}$$

В силу лемм 4.1 и 4.2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))\, x\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{4.23}$$

$$\sigma_n = n^{\frac{1}{k}} \|A\,(E - Ag_n(A))\, x\| \to 0, n \to \infty. \tag{4.24}$$

Кроме того, из (4.17) и (4.18) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leqslant 2k(n\alpha)^{\frac{1}{k}}\delta, \tag{4.25}$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leqslant 1. \tag{4.26}$$

Применим правило останова (4.16). Тогда

$$\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leqslant b\delta, b > 1$$

и из (4.22) и (4.26) получим

$$\begin{aligned} \|A\,(E - Ag_m(A))\, x\| \leqslant \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \\ + \|(E - Ag_m(A))\,(y_\delta - y)\| \leqslant (b+1)\delta. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Для любого $n < m$ $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$, поэтому

$$\begin{aligned} \|A(E - Ag_n(A))x\| \geqslant \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \\ - \|E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \geqslant (b-1)\delta. \end{aligned}$$

Итак, для $\forall n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geqslant (b-1)\delta. \tag{4.28}$$

Из (4.24) и (4.28) при $n = m - 1$ получим

$$\frac{\sigma_{m-1}}{(m-1)^{1/k}} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geqslant (b-1)\delta$$

или

$$(m-1)^{1/k}\delta \leqslant \frac{\sigma_{m-1}}{b-1} \to 0, \quad \delta \to 0$$

(так как из (4.24) $\sigma_m \to 0, m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$ то, используя (4.21), получим

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leqslant \|E - Ag_m(A)0x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|(E - Ag_m(A))x\| + 2k(m\alpha)^{\frac{1}{k}}\delta \to 0, m \to \infty, \delta \to 0,$$

так как из (4.23) $\|(E - Ag_m(A))x\| \to 0, m \to \infty$. Если же для некоторых $\delta_n \to 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x$, $\delta_n \to 0$. Действительно, из (4.27) имеем

$$\|A(E - Ag_{m,\delta_n}(A))x\| \leqslant (b+1)\delta_n \to 0, \delta_n \to 0.$$

Отсюда по лемме 4.3 получаем, что

$$(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \to 0, \delta_n \to 0.$$

Поэтому

$$\left\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\right\| \leqslant \left\|(E - Ag_{m,(\delta_n)}(A)x\right\| + 2k(m(\delta_n)\alpha)^{\frac{1}{k}}\delta_n \to 0, \delta_n \to 0.$$

Теорема 4.7 доказана. ■

Имеет место

Теорема 4.8. *Пусть выполнены условия теоремы 4.7 и пусть* $x = A^s z, s > 0$. *Тогда справедливы оценки*

$$m \leqslant 1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{k}{s+1}},$$

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leqslant [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 2k\alpha^{\frac{1}{k}}\left\{1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{k}{s+1}}\right\}^{\frac{1}{k}}\delta. \tag{4.29}$$

Доказательство.
Так как $x = A^s z$, $s > 0$, то

$$\|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| = \left\|A^{s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z\right\| =$$
$$= \left\|\int_0^M \lambda^{s+1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^{m-1} dE_\lambda z\right\| \leqslant$$
$$\leqslant (s+1)^{\frac{s+1}{k}} (k(m-1)\alpha e)^{\frac{-(s+1)}{k}} \|z\|.$$

Воспользовавшись (4.28), получим

$$(b-1)\delta \leqslant (s+1)^{\frac{s+1}{k}} [k(m-1)\alpha e]^{\frac{-(s+1)}{k}} \|z\|,$$

отсюда $m \leqslant 1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{k}{s+1}}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\|(E - Ag_m(A))\,x\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|A^{s+1}(E - Ag_m(A))\,z\right\|^{s/(s+1)} \|(E - Ag_m(A))\,z\|^{1/(s+1)} \leqslant$$
$$\leqslant \|A\,(E - Ag_m(A))\,x\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \leqslant [(b+1)\,\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$$

(см. (4.27)).

Так как соотношение (4.21) справедливо для любых n, то

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leqslant \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leqslant$$
$$\leqslant [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 2k\alpha^{1/k}\left\{1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{k}{s+1}}\right\}^{1/k} \delta.$$

Теорема 4.8 доказана. ■

Замечание 4.5. *Порядок оценки (4.29) $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$ и, как следует из [6], он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 4.6. *Используемое в формулировке теоремы предположение порядка $s > 0$ истокопредставимости точного решения не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова (4.16). И тем не менее в теореме 4.8 утверждается, что будет* *автоматически выбрано количество итераций m, обеспечивающих оптимальный порядок погрешности. Но даже, если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4.16), как показывает теорема 4.7, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.*

4.5 Правило останова по соседним приближениям

Решаем уравнение (4.1) с несамосопряженным оператором A. Используем неявную схему метода итераций с $\alpha > 0$

$$x_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)x_n + 2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y\right], \\ x_0 = 0,\ k \in N. \tag{4.30}$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближенно $\|y - y_\delta\| \leqslant \delta$, метод итераций (4.2) примет вид

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left[\left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)z_n + 2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y_\delta\right] + \\ + \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)u_n, z_0 = 0, k \in N, \tag{4.31}$$

где u_n — ошибки в вычислении итераций, причём $\|u_n\| \leqslant \beta$. Обозначим через

$$C = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right),$$

$$B = 2\left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*.$$

Тогда метод (4.31) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$.

В том случае, когда истокопредставимость точного решения неизвестна, метод (4.31) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по соседним приближениям [9]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим неравенствами

$$\left.\begin{array}{l}\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m),\\ \|z_m - z_{m+1}\| \leqslant \varepsilon.\end{array}\right\} \tag{4.32}$$

Покажем, что метод (4.31) с правилом останова (4.32) сходится. Аналогично разделу 3.5 доказываются леммы.

Лемма 4.4. *Пусть приближение ω_n определяется условиями*

$$\omega_0 = z_0, \omega_{n+1} = C\omega_n + By + Cu_n, n \geqslant 0. \tag{4.33}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{n}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leqslant \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$$

Лемма 4.5. *При* $\forall \omega_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \leqslant \beta$, *выполняется неравенство* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leqslant 2\,\|C\|\,\beta$.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 4.9. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *если* $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\,\|C\|\,\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \leqslant \delta$, $\|u_n\| \leqslant \beta$;

б) *если* $\varepsilon(\delta, \beta) > \|\beta\|\,\delta + 2\,\|C\|\,\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \leqslant \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\,\delta)(\varepsilon - \|B\|\,\delta - 2\,\|C\|\,\beta)};$$

в) *если, кроме того,* $\varepsilon(\delta, \beta) \to 0$, $\delta, \beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta, \beta) \geqslant d\,(\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta^p)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,\,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0} \|z_m - x\| = 0$.

Доказательство.

а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k \left(C^{-1} B y_\delta + u_{n-k-1} \right). \tag{4.34}$$

При $n = 1$ из $z_n = C z_{n-1} + B y_\delta + C u_{n-1}$ имеем $z_1 = C z_0 + B y_\delta + C u_0$, из (4.34) получим тоже самое, т. е. при $n = 1$ формула (4.34) верна. Предположим, что (4.34) верна при $n = p$, т. е.

$$z_p = C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k \left(C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1} \right),$$

и докажем её справедливость при $n = p + 1$. Имеем

$$\begin{gathered}
z_{p+1} = C^p z_p + B y_\delta + C u_p = \\
= C \left(C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k \left(C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1} \right) \right) + B y_\delta + C u_p = \\
= C^{p+1} z_0 + C^2 \left(C^{-1} B y_\delta + u_{p-1} + B y_\delta + C u_{p-2} + C B y_\delta + \right. \\
\left. + C^2 u_{p-3} + \dots + C^{p-2} B y_\delta + C^{p-1} u_0 \right) + B y_\delta + C u_p = \\
= C^{p+1} z_0 + C \left(B y_\delta + C u_{p-1} + C B y_\delta + C^2 u_{p-2} + \dots + C^{p-1} B y_\delta + \right. \\
\left. + C u_o + C^{-1} B y_\delta + u_p \right) = C^{p+1} z_0 + C \sum_{k=0}^{p} C^k \left(C^{-1} B y_\delta + u_{p-k} \right).
\end{gathered}$$

Таким образом, справедливость (4.34) доказана.
Отсюда

$$\omega_n = C^n\omega_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k(C^{-1}By + u_{n-k-1}) =$$

$$= C^n\omega_0 + (E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1})By + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} =$$

$$= C^n\omega_0 + (E - C^n)(E - C)^{-1}(A^*A)^{-1}(E - C)A^*y +$$

$$+C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n\omega_0 + A^{-1}(E - C^n)y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0 = \omega_0$, получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n z_0 + A^{-1}(E - C^n)y_\delta + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}z_0 +$$

$$+A^{-1}(E - C^{n+1})y_\delta - C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} =$$

$$= C^n\omega_0 + A^{-1}(E - C^n)y - A^{-1}(E - C^n)y + A^{-1}(E - C^n)y_\delta +$$

$$+C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}\omega_0 - A^{-1}(E - C^{n+1})y +$$

$$+A^{-1}(E-C^{n+1})y-A^{-1}(E-C^{n})y_\delta-C\sum_{k=0}^{n-1}C^k u_{n-k}=$$

$$=\omega_n-\omega_{n+1}+A^{-1}(E-C)(y_\delta-y)=\omega_n-\omega_{n+1}+C^nB(y-y_\delta).$$

Следовательно,

$$\|z_n-z_{n+1}\|\leqslant\|\omega_n-\omega_{n+1}\|+\|C^nB(y-y_\delta)\|\,. \qquad (4.35)$$

Обозначим $\sigma=B(y-y_\delta)$,тогда

$$\|C^nB(y-y_\delta\|=\|C^n\sigma\|=\left\|\int\limits_0^{\|A^*A\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda\sigma\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\int\limits_0^{\varepsilon_0}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda\sigma\right\|+\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{\|A^*A\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda\sigma\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\|E_{\varepsilon_0}\sigma\|+q^n\,\|\sigma\|\to 0, n\to\infty,\varepsilon_0\to 0,$$

так как при $\alpha>0,\lambda\in(0,\|A^*A\|\,]$ имеем $\left|\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right|\leqslant q<1.$

Поэтому (см. лемму 4.5)

$$\varliminf_{n\to\infty}\|z_n-z_{n+1}\|=\varliminf_{n\to\infty}\|\omega_n-\omega_{n+1}\|\leqslant 2\,\|C\|\,\beta.$$

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\,\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ, $\|y - y_\delta\| \leqslant \delta$ и u_n, $\|u_n\| \leqslant \beta$.

б) Рассмотрим последовательность (4.33) и определим момент останова m' условием

$$\left.\begin{array}{l} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\,\delta, \ \ (n < m'), \\ \|\omega_{m'} - \omega_{m'+1}\| \leqslant \varepsilon - \|B\|\,\delta. \end{array}\right\} \tag{4.36}$$

Из (4.35) следует, что $m \leqslant m'$. Из леммы 4.4 при $n = m'$ получим неравенство

$$\sum_{k=0}^{m'} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leqslant \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2,$$

поэтому справедливо записать

$$\sum_{k=0}^{m'-1} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leqslant \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$$

Отсюда получим

$$\sum_{k=0}^{m'-1} (\|\omega_k - \omega_{k+1}\| - \|C\|\ \beta)^2 \leqslant \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$$

Так как по (4.36) при $n < m'$ имеем

$$\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\,\delta,$$

то $m'\,(\varepsilon - \|B\|\,\delta - \|C\|\,\beta)^2 \leqslant \|\omega_0 - x\|^2 + m'\,\|C\|^2\,\beta^2$. Учитывая, что $\omega_0 = z_0$ и $m \leqslant m'$, из последнего неравенства получим оценку для момента останова

$$m \leqslant m' \leqslant \|z_0 - x\|^2\,((\varepsilon - \|\beta\|\,\delta - 2\,\|C\|\,\beta)(\varepsilon - \|B\|\,\delta))^{-1}.$$

в) Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y. \tag{4.37}$$

Предположим, что (4.37) верно, тогда

$$x - C^n x = B\left(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1}\right) y,$$

$$(E - C^n)x = B(E - C^n)(E - C)^{-1} y,$$

$$(E - C^n)x = A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1}Ax,\, (E - C^n)x = (E - C^n)x.$$

Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (4.37) доказана. Из (4.34) вычтем (4.37), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]. \tag{4.38}$$

Отсюда $\Delta_n = C^n\Delta_0 + C\sum\limits_{k=0}^{n-1} C^k\left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]$, где $\Delta_n = z_n - x$ и $\Delta_0 = z_0 - x$. Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \leqslant \|C^n\Delta_0\| + (\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta)\,n. \tag{4.39}$$

В частности, (4.39) справедливо и при $n = m$. Если $m \to \infty$ при ε, δ, $\beta \to 0$, тогда, как показано ранее, $\|C^m\Delta_0\| \to 0$, $m \to \infty$. Поэтому для доказательства $\|z_m - x\| \to 0$, $\delta \to 0$, $\beta \to 0$ достаточно показать, что $m\,(\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta) \to 0$, $m \to \infty$, $\delta \to 0$, $\beta \to 0$. Из (4.38) получим

$$\begin{gathered} z_n - z_{n+1} = C^n(E - C)(z_0 - x) - Cu_n - C^nB(y_\delta - y) + \\ + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k(E - C)u_{n-k-1}. \end{gathered} \tag{4.40}$$

Так как спектр оператора

$$C = \left(E + \alpha\,(A^*A)^k\right)^{-1}\left(E - \alpha\,(A^*A)^k\right)$$

принадлежит $[0{,}1]$, то можно доказать, что

$$\|C^n(E - C)\| \leqslant \frac{1}{n+1}. \tag{4.41}$$

Поэтому из (4.40) получим при $n = m - 1$

$$\|z_{m-1} - z_m\| \leqslant \left\| C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E - C)(z_0 - x) \right\| +$$

$$+ \left\| C^{m-1} B(y_\delta - y) \right\| + \|C u_{m-1}\| + \left\| C \sum_{k=o}^{m-2} C^k (E - C) u_{m-k-2} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (E - C) \right\| \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|C\| \beta + \|B\| \delta + \|C\| \beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|B\| \delta + \|C\| \beta (2 + \ln m),$$

так как $\sum\limits_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln m$ [10].

Так как по условию теоремы

$$\varepsilon(\delta, \beta) \geqslant d \left(\|B\| \delta + \|C\| \beta^p \right), d > 1, p \in (0,\ 1),$$

то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство

$$\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\| \delta + 2 \|C\| \beta$$

поэтому из б) получим

$$m \leqslant \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\| \delta - 2 \|C\| \beta)(\varepsilon - \|B\| \delta)}.$$

Поскольку $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon$, то

$$\varepsilon \leqslant \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\| + \|B\|\,\delta + \|C\|\,(2 + \ln m)\beta.$$

Отсюда получим, что

$$m \leqslant \frac{2\left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\|}{\varepsilon - \|B\|\,\delta - \|C\|\,\beta(2 + \ln m)}.$$

Умножим обе части последнего равенства на $\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta$, получим

$$m\,(\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta) \leqslant \frac{2\left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\| (\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta)}{\varepsilon - \|B\|\,\delta - \|C\|\,\beta\left[2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}\right]}.$$

При $m \to \infty$ множитель $2\left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\| \to 0$, а

$$\frac{2(\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta)}{\varepsilon - \|B\|\,\delta - \|C\|\,\beta\left[2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}\right]}$$

ограничена при $\delta,\ \beta \to 0$. Поэтому $m\,(\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta) \to 0$, при $m \to \infty$, $\delta, \beta \to 0$. Отсюда из неравенства (4.39) при $m \to 0$

$$\lim_{\delta,\beta\to 0} \|\Delta_m\| = \lim_{\delta,\beta\to 0} \|z_m - x\| =$$

$$= \lim_{\delta,\beta\to 0} (\|C^m \Delta_0\| + m(\|B\|\,\delta + \|C\|\,\beta)) = 0$$

Итак, доказано, что $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0$ при $m\to\infty$, т.е. метод (4.31) с правилом останова (4.32) сходится в исходной норме гильбертова пространства. Теорема 4.9 доказана. ∎

5 МЕТОД ОБОБЩЕННОГО СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ

Мы рассмотрим этот метод на примере **уравнения Фредгольма первого рода**

$$\int_0^1 A(t,s)x(s)ds = y(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{5.1}$$

в пространстве $L_2(0,1)$ с полным симметричным квадратично суммируемым ядром, хотя метод пригоден для гораздо более широкого класса задач.

Обозначим через $\lambda_i, i = 1, 2 \ldots,$ — собственные числа уравнения (5.1), расположенные в порядке убывания модуля, а через $z_i(t)$, $i = 1, 2 \ldots$ — соответствующую полную ортонормированную систему собственных функций уравнения. Из математического анализа известно, что если правая часть уравнения имеет разложение

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i z_i(t), \tag{5.2}$$

то решение задаётся формулой

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{\lambda_i} z_i(t). \tag{5.3}$$

Но вместо точной функции $y(t)$ обычно известно приближение $y_\delta(t)$, $\|y - y_\delta\|_{L_2} \leqslant \delta$ или, что то же самое, вместо точных коэффициентов Фурье $\{y_i\}$ известны приближённые $\{y^\delta{}_i\}, \sum\limits_{i=1}^{\infty}(y_i - y_i^\delta)^2 \leqslant \delta^2$ Требуется по этим приближённым коэффициентам Фурье построить аппроксимацию для точного решения. Суммирование бесконечного ряда Фурье $\sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i(t) y_i^\delta / \lambda_i$ для этой цели непригодно, поскольку $\lambda_i \to 0, i \to \infty$.

Возникает мысль: не пытаться доводить суммирование этого ряда до конца, а воспользоваться для построения аппроксимации некоторым конечным отрезком того же ряда

$$x_\delta^n(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^\delta}{\lambda_i} z_i(t).$$

Покажем, что это действительно можно делать, разумно согласовывая число членов ряда n с погрешностью δ. Обозначим

$$x^n(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\lambda_i} z_i(t).$$

и запишем очевидное неравенство

$$\|x - x_\delta^n\| \leqslant \|x - x^n\| + \|x^n - x_\delta^n\| . \tag{5.4}$$

Первый член справа бесконечно мал при $n \to \infty$, так как ряд (5.3) сходится в $L_2(0,1)$. Оценим второе слагаемое, воспользовавшись ортонормированностью функций $z_i(t)$ и упорядоченностью собственных чисел λ_i по модулю:

$$\|x^n - x^n_\delta\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - y_i^\delta}{\lambda_i} z_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - y_i^\delta)^2}{\lambda_i^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\lambda_n^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^\delta)^2 \leqslant \frac{\delta^2}{\lambda_n^2}.$$

Итак, $\|x^n - x^n_\delta\| \leqslant \delta/|\lambda_n|$, и, следовательно, если n, выбирать так, чтобы $\delta = 0(|\lambda_n|)$, то $\|x - x^n_\delta\| \to 0$ при $n = n(\delta) \to \infty$ для $\delta \to 0$.

Нередко собственные значения λ_n или их порядок известны, и тогда можно указать порядок для числа суммируемых членов n. Например, если $\lambda_n = O(1/n^2)$, то для $n = o(1/\sqrt{\delta}), \delta \to 0$ предлагаемый метод суммирования аппроксимирует искомое решение. Таким образом, построенный нами регуляризатор даёт возможность приближённо решить поставленную задачу.

Более точное заключение и, в частности, оценку скорости сходимости или оценку погрешности метода, вообще говоря, получить нельзя, так как скорость сходимости к нулю первого слагаемого справа в неравенстве (5.4) может быть сколь угодно малой. Чтобы ограничить эту скорость снизу, нужны дополнительные условия. Самое простое — предположить истокопредставимость точного решения:

$$x(t)=\int\limits_0^1 A(t,s)z(s)ds, \quad \|z\|\leqslant C_0. \tag{5.5}$$

Из этого предположения с очевидностью следует, что в $L_2(0,1)$ сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{y_i}{\lambda_i^2}z_i(t)=z(t)$$

и что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{y_i^2}{\lambda_i^4}=\|z\|^2\leqslant C_0^2. \tag{5.6}$$

Нетрудно проверить, что условие (5.5) выделяет компактный класс решений, но мы не будем пользоваться этим непосредственно, хотя из одного этого факта уже вытекает равномерный для названного класса характер сходимости к нулю нормы $\|x-x^n\|$.

С помощью условия (5.6) оценим эту норму

$$\|x-x^n\|^2=\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{y_i}{\lambda_i}z_i\right\|^2=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{y_i^2}{\lambda_i^2}\leqslant\lambda_n^2\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{y_i^2}{\lambda_i^4}\leqslant\lambda_n^2C_0^2.$$

Вместе с предыдущим получаем оценку погрешности

$$\|x-x_\delta^n\|\leqslant|\lambda_n|\,C_0+\delta/\,|\lambda_n|\,. \tag{5.7}$$

Оптимальная оценка метода имеет вид $\|x - x_\delta^n\|_{\text{опт}} \leqslant 2\sqrt{C_0\delta}$. Ее порядок равен $O(\sqrt{\delta})$. Она получается, если n выбирать так, чтобы $|\lambda_n| = \sqrt{\delta/C_0}$.

Если вместо однократной истокопредставимости (5.5) имеет место s-кратная истокопредставимость, то справедлива оценка погрешности $\|x - x_\delta^n\| \leqslant |\lambda_n|^s C_0 + \delta / |\lambda_n|$, для которой оптимальный порядок $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ достигается при таких n, для которых $|\lambda_n| = O(\delta^{1/(s+1)})$.

Изложенный здесь метод суммирования можно представить как обобщённое суммирование ряда (5.3), т. е. как суммирование ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(i,\delta) \frac{y_i}{\lambda_i} z_i(t)$$

с множителями $p(i,\delta)$ равными 1 для $i \leqslant n(\delta)$ и равными 0 для $i > n(\delta)$. Можно, разумеется, подобрать и другие суммирующие множители. Вообще для решения некорректных задач, в которых решение представимо некоторым рядом, пригодны и иные методы обобщённого суммирования рядов, например методы Чезаро, Абеля и т. д.

6 МЕТОД КВАЗИРЕШЕНИЙ

Выше отмечалось, что корректность по Тихонову восстанавливается путем сужения множества рассматриваемых решений и соответствующего сужения множества правых частей уравнения. В.К. Иванов [23] предложил иной подход, основанный на обобщении понятия решения. Решается уравнение I рода

$$Ax = y, x \in X, y \in Y, \tag{6.1}$$

в котором по заданному, не обязательно линейному, оператору A и по заданной правой части $y \in Y$ требуется определить решение $x \in X$.

Определение 6.1. *<u>Квазирешением</u> уравнения (6.1) на множестве $M \subset X$ называется всякий элемент $x' \in M$, для которого справедливо равенство*

$$\rho(Ax', y) = \inf_{x \in M} \rho(Ax, y).$$

Другими словами, квазирешение $x' \in M$ — это такая точка, образ которой Ax' реализует расстояние правой части $y \in Y$ до образа $N = AM$ множества M. Если множество M содержит точное решение, то это решение является и квазирешением. Таким образом, понятие квазирешения обобщает понятие решения, и для его существования не требуется принадлежность решения множеству M. Тем самым снимаются трудности с требованием а) тихоновской корректности, вызывающим переопределенность задачи, и трудности с требованием в), поскольку обычно нам неизвестна принадлежность приближенных правых частей уравнения множеству N, а критерии этой принадлежности часто сами бывают неустойчивыми.

Значение нового понятия будет видно из дальнейшего.

Лемма 6.1. *Если множество $N \subset Y$ — компакт, то для $y \in Y$ всегда существует ближайшая точка $q(y) \in N$, и если для любого $y \in Y$ ближайшая в N точка $q(y)$ определена однозначно, то она непрерывно зависит от $y \in Y$.*

Доказательство.

Во-первых, докажем существование ближайшей точки $q(y) \in N$. По определению $\rho(y, N) = \inf\limits_{y' \in N} \rho(y, y')$, и, согласно смыслу инфимума, существует последовательность $\{q_n\} \subset N$ такая, что

$$\rho(y, q_n) \to \rho(y, N), n \to \infty.$$

Так как N — компакт, то последовательность $\{q_n\}$ имеет предельную точку $q \in N$, к которой сходится некоторая подпоследовательность $\{q_{n_k}\}$. В силу непрерывности метрики $\rho(y, q_{n_k}) \to \rho(y, q)$, $k \to \infty$. С другой стороны, очевидно, $\rho(y, q_{n_k}) \to \rho(y, N)$, $\quad k \to \infty$, и вследствие единственности предела $\rho(y, q) = \rho(y, N)$. Существование ближайшей к y точки компакта N доказано.

Остается проверить устойчивоть этой точки при ее единственности. Пусть $y_n \to y$, $n \to \infty$, и обозначим $q_n = q(y_n)$ ближайшую к y_n точку из N. Чтобы убедиться, что $\rho(q_n, q) \to 0$, $n \to \infty$, достаточно почти дословно повторить первую часть нашего доказательства. Лемма 6.1 доказана. ∎

Следствие 6.1. *Если оператор A непрерывен и взаимно однозначен, а компакт $M \subset X$ таков, что множество $N = AM \subset Y$ обладает свойством единственности ближайшей точки для любого $y \in Y$, то задача об определении квазирешения $x(y, M)$ уравнения (6.1) на множестве M поставлена корректно по Адамару.*

Доказательство.

Вначале покажем, что N — компакт. Рассмотрим произвольную последовательность $\{y_n\} \subset N$. На компакте M ей отвечает последовательность $\{x_n = A^{-1}y_n\}$, имеющая некоторую предельную точку $x \in M$. Не ограничивая общности, можно считать, что к x сходится вся последовательность $\{x_n\}$. Но тогда ввиду непрерывности оператора A имеет место и сходимость $y_n = Ax_n \to Ax = y \in N, n \to \infty$, так что взятая произвольная последовательность $\{y_n\} \subset N$ имеет предельную точку $y \in N$, а это и значит, что множество N — компакт.

Следовательно, по лемме 6.1 для любого $y \in N$ существует ближайшая в N точка $q(y)$, прообраз которой $A^{-1}q(y)$ заведомо существует и назван квазирешением $x(y, M)$ уравнения (6.1) на M. Единственность квазирешения следует из предположенной единственности точки $q(y)$ и взаимной однозначности оператора A. Так как по лемме 6.1 точка $q(y)$

непрерывно зависит от $y \in Y$, а оператор A^{-1} непрерывен по $q \in N$, то и квазирешение $x(y, M) = A^{-1}q(y)$ тоже непрерывно по $y \in Y$, что и требовалось доказать. ■

Этот результат показывает полезность рассмотрения квазирешений. Чтобы сделать его конструктивным, применим следующую лемму.

Лемма 6.2. *В выпуклом подмножестве N строго выпуклого банахова пространства Y существует не более одной ближайшей к $y \in Y$ точки $q(y)$.*

Доказательство.

Определение 6.2. *Банахово пространство X называется строго выпуклым, если его единичная сфера $\{x : \|x\| = 1\}$ не содержит ни одного прямолинейного отрезка, не вырождающегося в точку.*

Определение 6.3. *Множество M банахова пространства X называется выпуклым, если для $\forall x_1, x_2 \in M$ соединяющий их отрезок $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ тоже принадлежит M.*

Пусть $q_1, q_2 \in N$ и $\|y - q_1\| = \|y - q_2\| = \rho(y, N)$. Тогда весь отрезок $\alpha q_1 + (1-\alpha)q_2, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, принадлежит как множеству N, так и шару $V = \{q : \|q - y\| \leqslant \rho(y, N)\}$ вследствие их выпуклости. Но лежать на сфере, ограничивающей шар, этот отрезок не может, иначе пространство Y не было бы строго выпуклым. Значит, внутренность отрезка должна лежать внутри шара, что тоже невозможно, так как это означает, что в N существуют точки, расстояние от которых до точки y меньше расстояния $\rho(y,N)$. Следовательно, наш «отрезок» — вырожденный: $q_1 = q_2$, и лемма 6.2 доказана. ■

Из предыдущих результатов и того факта, что аддитивный оператор переводит выпуклые множества в выпуклые же множества, непосредственно следует

Теорема 6.1. *Пусть X, Y — банаховы пространства, причем пространство Y строго выпукло. Если оператор A взаимно однозначен, непрерывен и аддитивен, то задача об отыскании квазирешения уравнения (6.1) на выпуклом компакте $M \subset X$ поставлена корректно по Адамару.*

Таким образом, если компакт M содержит точное решение уравнения (6.1), то квазирешения на M для уравнения с приближенной правой частью аппроксимируют точное решение, несмотря на некорректность задачи.

С помощью теоремы (6.1) можно построить регуляризатор на некомпактном множестве. Покажем, как это сделать, если предположения теоремы относительно пространств X, Y и оператора A выполнены. Возьмем расширяющуюся систему выпуклых компактов в пространстве X:

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_i \subset \ldots \subset X.$$

Будем в определении регуляризатора придавать параметру α значения $1/i, i = 1, 2, \ldots$ Тогда значение оператора $R_{1/i}$, на элементе $y \in Y$

определим как квазирешение $R_{1/i}y = x(y, M_i)$ уравнения (6.1) на компакте M_i. Теорема 6.1 обеспечивает непрерывность каждого оператора $R_{1/i}$ на всем пространстве Y. Областью регуляризуемости в данном случае является множество $M_\infty = \bigcup\limits_{i\geqslant 1} M_i$. Действительно, для всякого $\overline{x} \in M_\infty$ имеет место сходимость $R_{1/i}A\overline{x} \to \overline{x}, i \to \infty$, так как такой $\overline{x}$, начиная с некоторого i, принадлежит всем компактам M_i, и, следовательно, начиная с этого i, все квазирешения $x(A\overline{x}, M_i) = R_{1/i}A\overline{x}$ попросту совпадают с данным $\overline{x}$. Область регуляризуемости M_∞ можно сделать некомпактной, взяв компакты M_i, например, так, чтобы множество M_∞ было плотным в пространстве X.

Теорема 6.2. *Если в условиях теоремы 6.1 пространство X — гильбертово, а под множеством $M \subset X$ понимается любой замкнутый ограниченный шар $\{x : \|x - \overline{x}\| \leqslant r\}$, то задача об отыскании квазирешений на этом шаре слабо корректна по Адамару.*

Теорема эта является простым следствием теоремы 6.1, поскольку для аддитивного оператора непрерывность относительно сильных топологий пространств X, Y эквивалентна непрерывности относительно их слабых топологий, а замкнутый ограниченный шар гильбертова пространства представляет собой слабый компакт. Таким образом, относительно слабых топологий мы попадаем в условия теоремы 6.1, что и обеспечивает корректность по Адамару в слабом смысле задачи о квазирешениях.

К сожалению, сильной устойчивости квазирешений в условиях теоремы 6.2 может не быть.

Если взять $M_i = \{x : \|x - \overline{x}\| \leqslant r_i\}, r_i \to \infty, i \to \infty$, и положить, как выше, $R_{1/i}y = x(y, M_i)$, то получим слабый регуляризатор с множеством регуляризуемости $M_\infty = X$ (т.е. этот регуляризатор будет глобальным). Это видно из теоремы 6.2.

Приведем конкретные примеры регуляризаторов для пространства $X = L_2(0, 1)$, основанные на теоремах 6.1 и 6.2. Обозначим $\|x\|_1$ норму элемента x в пространстве $W_2^1(0, 1)$. Известно, что пространство $W_2^1(0, 1)$ плотно в пространстве $L_2(0, 1)$ [27, с. 61], а множества $\{x : \|x\|_1 \leqslant r\}$ образуют (сильные) компакты в $L_2(0, 1)$. Поэтому в описанном выше регуляризаторе можно положить

$$M_i = \{x : \|x\|_1 \leqslant r_i\}, r_i \to \infty, i \to \infty.$$

При этом множество регуляризуемости совпадает с плотным в $L_2(0, 1)$ множеством функций из $W_2^1(0, 1)$, а регуляризация (сходимость $R_{1/i}Ax \to x, i \to \infty$) на этом множестве имеет место не только среднеквадратичная (в метрике $L_2(0, 1)$), но и равномерная (в метрике $C[0, 1]$), так как множества M_i по теоремам вложения являются компактами и в пространстве $C[0, 1]$. Построенный регуляризатор позволяет приближенно отыскать точное решение, если оно принадлежит пространству $W_2^1(0, 1)$.

Если положить

$$m_i = \{x : \|x\| \leqslant r_i\}, r_i \to \infty, i \to \infty,$$

то мы получим слабый регуляризатор. Хотя он обеспечивает лишь слабую сходимость в пространстве $L_2(0,1)$, но зато областью регуляризуемости является все пространство $L_2(0,1)$, так что для регуляризации достаточно лишь существования решения в $L_2(0,1)$.

Отметим, что минимизация невязки $\|Ax - y\|$ на множествах M_i и m_i, необходимая для отыскания квазирешений, затруднена тем, что эти множества бесконечномерны. Предложим конструкцию, облегчающую нахождение квазирешений.

Теорема 6.3. *Если в условиях теоремы 6.1 выбрать систему выпуклых компактов* $M^1 \subset M^2 \subset \ldots \subset M^n \subset \ldots \subset M$ *так, чтобы* $\overline{\bigcup\limits_{n\geqslant 1} M^n} = M$ *(черта означает замыкание множества), то квазирешения* $x(y, M^n)$ *будут сходиться к квазирешению* $x(y, M)$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство.

Нетрудно проверить, что из непрерывности оператор A и плотности множества $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} M^n$ в M следует, что и множество $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} AM^n$ тоже плотно в множестве AM.

Поэтому точки $q^n \in AM^n, n = 1, 2, \ldots,$ реализующие расстояние $\rho(y, AM^n)$, при $n \to \infty$ стремятся к точке $q \in AM$, реализующей расстояние $\rho(y, AM)$. Остальное доказывается ссылкой па непрерывность оператора A^{-1} на множестве AM. Теорема 6.3 доказана. ■

Применим доказанную теорему для приближенного построения квазирешений. Пусть $x_k(t), k = 1, 2, \dots,$ — полная в нашем пространстве $L_2(0,1)$ ортонормированная система функций, принадлежащих пространству $W_2^1(0,1)$, например, ею может быть система

$$1, \frac{\sin \pi x}{\sqrt{2}}, \frac{\cos \pi x}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{\sin k\pi x}{\sqrt{2}}, \frac{\cos k\pi x}{\sqrt{2}}, \dots.$$

Тогда будем искать квазирешения не на множестве M_i, а на множестве

$$M_i^n = \left\{ x : x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t), \quad \|x\|_1 \leqslant r_i \right\}$$

достаточно большой, но конечной размерности n. Согласно теореме 6.3, квазирешения $x(y, M_i^n)$ при больших n аппроксимируют квазирешение $x(y, M_i)$, но минимизация невязки $\|Ax - y\|$ на множестве M_i^n в силу его конечномерности значительно проще, и для нее могут быть применены простейшие методы вариационного исчисления.

Можно построить аналогичный регуляризатор также и при помощи системы конечномерных множеств

$$\mu_i^{(1)} = \left\{ x : x = \sum_{k=1}^{n_i} c_k x_k, \|x\|_1 \leqslant r_i \right\}, n_i, r_i \to \infty, i \to \infty,$$

но, к сожалению, его областью регуляризуемости будет лишь множество функций, имеющих конечное разложение в ряд по системе $\{x_k(t)\}$. Таким образом, различное использование вполне аналогичных множеств M_i^n и $\mu_i^{(1)}$ ведет к разным результатам: использование множеств M_i^n соответствует повторному пределу типа $\lim\limits_{i\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}$ и сохраняет сравнительно широкую область регуляризуемости регуляризатора, построенного с помощью множеств M_i, тогда как использование множеств $\mu_i^{(1)}$ соответствует двойному пределу с независимым стремлением $n_i, r_i \to \infty$, что существенно сужает область регуляризуемости.

Ту же самую область регуляризуемости имеет и регуляризатор, построенный с помощью множеств

$$\mu_i = \left\{ x : x = \sum_{k=1}^{n_i} c_k x_k, \|x\| \leqslant r_i \right\}, n_i, r_i \to \infty, i \to \infty,$$

так что и здесь предпочтительнее применять описанный выше слабый регуляризатор, построенный с использованием множеств m_i, и приближать его значения квазирешениями на конечномерных множествах.

Возникает важный вопрос об оценке устойчивости квазирешений. Дадим такую оценку в условиях теоремы 6.1, считая пространство Y гильбертовым. Пусть, как и выше, $M \subset X$ — выпуклый компакт, $N = AM$. Тогда оператор A^{-1} — непрерывен на N, а так как N — компакт, то существует модуль равномерной непрерывности на N оператора A^{-1}, определяемый как функция

$$\omega(\delta) = sup\,\|x - \overline{x}\| \text{ при } x, \overline{x} \in M, \|Ax - A\overline{x}\| \leqslant \delta.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 6.3. *Если Y — гильбертово пространство, $N \subset Y$ — замкнутое выпуклое множество, $q_1, q_2 \in N$ ближайшие к элементам $y_1, y_2 \in Y$ точки из N, то $\|q_1 - q_2\| \leqslant \|y_1, y_2\|$.*

Эта лемма при наличии модуля непрерывности $\omega(\delta)$, который часто бывает известен (точнее, бывает известна его мажоранта), позволяет оценить погрешность квазирешения по погрешности правой части уравнения (6.1). Действительно, если правым частям y_1 и y_2 отвечают квазирешения x_1 и x_2, то по определению функции $\omega(\delta)$ имеем

$$\|x_1 - x_2\| \leqslant \omega(\|q_1 - q_2\|),$$

и поскольку, согласно лемме 6.3,

$$\|q_1 - q_2\| \leqslant \|y_1 - y_2\|,$$

то

$$\|x_1 - x_2\| \leqslant \omega(\|y_1 - y_2\|)$$

Это и есть требуемая оценка. Она показывает, что если расстояние между правыми частями уравнения не превосходит δ, то в случае гильбертова пространства Y расстояние между отвечающими им квазирешениями не больше $\omega(\delta)$, причем в силу свойств модуля непрерывности при $\delta \to 0$ и $\omega(\delta) \to 0$.

Мы ограничились лишь изложением простейших фактов из теории квазирешений.

7 МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Этот метод был предложен А.Н. Тихоновым [24], почти одновременно с методом квазирешений В.К. Иванова и оказался достаточно удобным в практических вычислениях.

Пусть требуется решить уравнение

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \tag{7.1}$$

где по заданному не обязательно линейному оператору A и элементу $y \in Y$ требуется найти решение $x \in X$.

Предполагается дополнительно, что A — непрерывен, взаимнооднозначен и, возможно, нелинеен. Предполагаем, что точное решение существует, и подберём регуляризующий (стабилизирующий) функционал $\Omega(x)$ обладающий следующими свойствами:

1) точное решение принадлежит области определения $D(\Omega)$ функционала $\Omega(x)$;
2) на области определения функционал $\Omega(x)$ принимает вещественные неотрицательные решения
$(\Omega(x) \geqslant 0, \quad x \in D(\Omega))$;
3) все множества $M_C = \{x : \Omega(x) \leqslant C\}, \quad C \geqslant 0$, являются компактами в пространстве X.

Определение 7.1. *Множество $M \subset X$ называется* <u>*компактным*</u>*, если любая бесконечная последовательность его элементов имеет предельные точки. Если множество M, кроме того, замкнуто, то его называют компактом (т.е. компакту принадлежат все предельные точки последовательности).*

Идея метода регуляризации состоит в том, чтобы разыскать минимизирующий элемент некоторого функционала, но не функционала $\rho(Ax, y)$ — такая задача была бы эквивалентной уравнению (7.1) и поэтому тоже некорректной, а несколько «исправленного» и обладающего стабилизирующими свойствами функционала

$$f^{\alpha}(x, y) = \rho^2(Ax, y) + \alpha\Omega(x), x \in D(\Omega)$$

с регуляризующим параметром $\alpha > 0$. Минимизацию будем вести на множестве $D(\Omega)$. Применение метода регуляризации основано на следующих предложениях.

Лемма 7.1. *Если пространства X и Y — метрические, оператор A непрерывен и взаимно однозначен, а функционал $\Omega(x)$ удовлетворяет указанным выше требованиям, то для $\forall y \in Y$ существует элемент $x^{\alpha} \in D(\Omega)$ минимизирующий на $D(\Omega)$ функционал $f^{\alpha}(x)$ с $\alpha > 0$.*

Доказательство.
Так как $\rho^2 \geqslant 0$, $\quad \Omega(x) \geqslant 0$, $\quad \alpha > 0$, то f^{α} сглаживающий функционал является ограниченным снизу (т.е. просто неотрицателен). Следо-

вательно, существует $\inf\limits_{x\in D(A)} f^\alpha(x) = m$. По определению inf существует минимизирующая последовательность $\{x_n\} \in D(\Omega)$, для которой

$$f^\alpha(x_n) \to m = \inf_{x\in D(\Omega)} f^\alpha(x), n \to \infty.$$

Можно считать, что $f^\alpha(x_{n+1}) < f^\alpha(x_n)$ для всех $n \geqslant 1$. Тогда

$$\rho^2(Ax_n, y) + \alpha\Omega(x_n) \leqslant f^\alpha(x_1).$$

Отбросив положительный член $\rho^2(Ax_n, y)$, получим

$$\alpha\Omega(x_n) \leqslant f^\alpha(x_1),$$

$$\Omega(x_n) \leqslant \frac{1}{\alpha} f^\alpha(x_1), n \geqslant 1,$$

и вся последовательность $\{x_n\}$ лежит в компакте M_C, $C = \frac{1}{\alpha} f^\alpha(x_1)$. Поэтому существует предельная точка $x^\alpha \in M_C \subset D(\Omega)$, которую можно считать пределом последовательности $\{x_n\}$. Покажем, что x^α — искомый элемент. Для этого нужно установить, что $f^\alpha(x^\alpha) = m$, т.е. $\rho^2(Ax^\alpha, y)+$ $+\alpha\Omega(x^\alpha) = m$ или что $\Omega(x^\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}\left[m - \rho^2(Ax^\alpha, y)\right]$. Так как оператор A непрерывен, а $x_n \to x^\alpha$, $n \to \infty$, то $Ax_n \to Ax^\alpha$, следовательно, $\rho(Ax_n, y) \to \rho(Ax^\alpha, y), n \to \infty$. Поэтому

$$\Omega(x_n) = \frac{1}{\alpha}[f^\alpha(x_n) - \rho^2(ax_n, y)] \to \frac{1}{\alpha}[m - \rho^2(Ax^\alpha, y)], n \to \infty.$$

Обозначим $\frac{1}{\alpha}[m - \rho^2(Ax^\alpha, y)] = a$, следовательно, $\Omega(x_n) \to a$, значит, для $\forall\varepsilon > 0$ для достаточно больших номеров $n \quad \Omega(x_n) < a + \varepsilon$ по определению предела, но этим равенством определяется компакт $M_{a+\varepsilon}$ следовательно, предельная точка последовательности $\{x_n\}$ должна принадлежать компакту $M_{a+\varepsilon}, \forall\varepsilon > 0$, т. е. $x^\alpha \in M_a, \Rightarrow \Omega(x^a) \leqslant a$.

Лемма 7.1 доказана. ■

Единственность минимизирующего элемента.

Лемма 7.2. *Если в дополнение к условиям леммы 7.1 пространства X, Y — банаховы, оператор A — аддитивный, а функционал $\Omega(x)$ строго выпуклый, то минимизирующий элемент x^α единственен.*

Доказательство.

Определение 7.2. *Заданный на выпуклом множестве M вещественный функционал $\Omega(x)$ называется строго выпуклым (вниз), если для $\forall x_1, x_2 \in M, \quad x_1 \neq x_2$ выполняется строгое неравенство*

$$\Omega\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}\Omega(x_1) + \frac{1}{2}\Omega(x_2).$$

Предположим противное, что имеются два элемента x_1 и x_2, для которых $f^\alpha(x_1) = f^\alpha(x_2) = m$. Покажем, что тогда должно быть $f^\alpha\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < m$. Сначала докажем неравенство

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2);\ a^2+2ab+b^2 \leqslant 2a^2+2b^2;$$
$$a^2-2ab+b^2 \geqslant 0;\ (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Так как пространства X, Y — банаховы, то в них введена норма, следовательно,

$$\left\| A\frac{x_1+x_2}{2} - y \right\|^2 = \left\| \frac{1}{2}(Ax_1 - y) + \frac{1}{2}(Ax_2 - y) \right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\|Ax_1 - y\| + \frac{1}{2}\|Ax_2 - y\| \right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\cdot\frac{1}{4}\left(\|Ax_1 - y\|^2 + \|Ax_2 - y\|^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|Ax_1 - y\|^2 + \|Ax_2 - y\|^2\right). \tag{7.2}$$

В силу строгой выпуклости стабилизирующего функционала получим

$$\Omega\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}\Omega(x_1) + \frac{1}{2}\Omega(x_2). \tag{7.3}$$

Сложив (7.2) и (7.3), получим (умножив предварительно (7.3) на α):

$$f^\alpha\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \left\| A\frac{x_1+x_2}{2} - y \right\|^2 + \alpha\Omega\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) <$$
$$< \frac{1}{2}f^\alpha(x_1) + \frac{1}{2}f^\alpha(x_2) = m.$$

Поэтому $f^\alpha\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) < m$ что противоречит определению величины m. Таким образом, двух минимизирующих элементов быть не может и лемма 7.2 доказана. ∎

Лемма 7.3. *Если для $y_0 \in Y$ существует точное решение уравнения (7.1), то в условиях леммы 7.1 с $y = y_0 = Ax_0$ имеет место сходимость $x^\alpha \to x_0, \alpha \to 0$.*

Доказательство.

Так как x^α — минимизирует функционал f^α , то

$$f^\alpha(x^\alpha, y_0) \leqslant f^\alpha(x_0, y_0) = \rho^2(Ax_0, y_0) + \alpha\Omega(x_0) = \alpha\Omega(x_0).$$

Следовательно,

$$\rho^2(Ax^\alpha, y_0) + \alpha\Omega(x^\alpha) \leqslant \alpha\Omega(x_0)$$

Отсюда $\alpha\Omega(x^\alpha) \leqslant f^\alpha(x^\alpha, y_0) \leqslant \alpha\Omega(x_0)$. Так как $\alpha > 0$, то $\Omega(x^\alpha) \leqslant$ $\leqslant \Omega(x_0)$. Следовательно, все $x^\alpha \in M_C, C = \Omega(x_0)$, т.е. все x^α принадлежат компакту. Кроме того, так как

$$\rho^2(Ax^\alpha, y_0) + \alpha\Omega(x^\alpha) \leqslant \alpha\Omega(x_0) \quad и \quad \alpha\Omega(x^\alpha) \geqslant 0,$$

то

$$\rho^2(Ax^\alpha, y_0) \leqslant \alpha\Omega(x_0) \to 0, \alpha \to 0, (\Omega(x_0) = const).$$

Поэтому $\rho^2(Ax^\alpha, y_0) \to 0$, $\alpha \to 0$. Значит, $y_\alpha = Ax^\alpha \to y_0$ на образе компакта при непрерывном отображении. Но на образе компакта непрерывное и взаимно однозначное отображение имеет непрерывное обратное отображение A^{-1}, т.е. праобразы образов тоже сходятся, $A^{-1}(Ax^\alpha) \to A^{-1}y_0$, т.е. $x^\alpha \to x_0$.

Лемма 7.3 доказана. ■

Теорема 7.1. *Пусть пространства X и Y — банаховы, оператор A — аддитивен, непрерывен и взаимно однозначен, функционал $\Omega(x)$ — строго выпуклый и удовлетворяет требованиям 1) —3) и пусть для $y_0 \in Y$ существует точное решение уравнения (7.1) $x_0 \in D(\Omega)$. Если вместо точной правой части уравнения $y_0 \in Y$ известны приближения $y_\delta \in Y$ такие, что $\rho(y_\delta, y_0) \leqslant \delta$, и значение параметра α выбирается так, чтобы*

$$\alpha(\delta) \to 0, \delta \to 0 \tag{7.4}$$

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \leqslant \gamma < \infty, \tag{7.5}$$

то элементы $x_\delta^{\alpha(\delta)}$, минимизирующие функционал $f^{\alpha(\delta)}(x; y_\delta)$ на $D(\Omega)$, сходятся к точному решению x_0 в пространстве X при $\delta \to 0$.

Доказательство.

Существование и единственность каждого минимизирующего элемента $x_\delta^{\alpha(\delta)}$ доказаны в леммах 7.1 и 7.2. Сходимость $x_\delta^{\alpha(\delta)} \to x_0$, $\delta \to 0$ покажем аналогично тому, как это сделано при доказательстве леммы 7.3. Имеем по определению, что $x_\delta^{\alpha(\delta)}$ — минимизирующий элемент:

$$f^{\alpha(\delta)}(x_\delta^{\alpha(\delta)}, y_\delta) \leqslant f^{\alpha(\delta)}(x_0, y_\delta) = \rho^2(Ax_0, y_\delta) + \alpha(\delta)\,\Omega(x_0) \leqslant$$
$$\leqslant \delta^2 + \alpha(\delta)\,\Omega(x_0) = \alpha(\delta)\left(\Omega(x_0) + \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)}\right). \qquad (7.6)$$

Отсюда видно, что $\Omega(x_\delta^{\alpha(\delta)}) \leqslant \Omega(x_0) + \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)}$.

Для любых достаточно малых δ в силу $\overline{\lim\limits_{\delta\to 0}}\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \leqslant \gamma$ можно утверждать, что $\Omega(x_\delta^{\alpha(\delta)}) \leqslant \Omega(x_0)+\gamma+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Следовательно, наши минимизирующие элементы принадлежат компакту M_C, где $C = \Omega(x_0)+\gamma+\varepsilon$. Посмотрим, как ведут себя образы этих минимизирующих элементов.

$$\rho(Ax_\delta^{\alpha(\delta)}, y_0) \leqslant \rho(y_\delta^{\alpha(\delta)}, y_\delta) + \rho(y_\delta, y_0) \leqslant \rho(y_\delta^{\alpha(\delta)}, y_\delta) + \delta.$$

Так как из (7.6) $\rho^2(Ax_\delta^{\alpha(\delta)}, y_\delta) \leqslant \delta^2 + \alpha(\delta)\,\Omega(x_0)$, то

$$\rho(Ax_\delta^{\alpha(\delta)}, y_0) \leqslant \delta + \sqrt{\delta^2 + \alpha(\delta)\,\Omega(x_0)} \to 0, \quad \delta \to 0,$$

поскольку $\alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0$.

Итак, образы минимизирующих элементов стремятся к y_0, поэтому их прообразы $x_\delta^{\alpha(\delta)} \to x_0, \quad \delta \to 0$.

Теорема 7.1 доказана. ■

Эта теорема показывает, что для регуляризации нужно выбирать параметр α стремящимся к нулю, но не быстрее δ^2.

Не следует думать, что более быстрое убывание α обязательно неприемлемо: легко построить пример, в котором и более высокая, и даже любая скорость стремления к нулю параметра α обеспечивает сходимость метода регуляризации. Однако в условиях теоремы 7.1 этого доказать нельзя, так как существуют задачи, в которых нарушение условия (7.5) ведет к расходимости элементов $x_\delta^{\alpha(\delta)}$, так что в классе задач, описываемых теоремой 7.1, это условие необходимо.

В гильбертовом пространстве X функционал $\Omega(x)$ можно брать более простой, в виде $\|x\|^2$, и хотя множества M_C в этом случае лишь слабо компактны, сходимость регуляризованных решений получается сильная. Такой выбор стабилизирующего функционала, кроме своей простоты, удобен еще тем, что область его определения совпадает со всем пространством X. Для регуляризуемости уравнения достаточно лишь факта существования точного решения. Но условия на параметр α при этом несколько жестче: α должно стремиться к нулю медленнее, чем δ^2.

Теорема 7.2. *Пусть X — гильбертово пространство, $\Omega(x) = \|x\|^2$ и выполнены остальные условия теоремы 7.1. Тогда при $\alpha(\delta)$, удовлетворяющих соотношениям (7.4) и (7.5) с $\gamma = 0$, регуляризованные элементы $x_\delta^{\alpha(\delta)}$ сходятся при $\delta \to 0$ к точному решению по норме пространства X.*

Доказательство.

При $\forall\gamma$ слабая сходимость имеет место $x_\delta^{\alpha(\delta)} \rightharpoonup x_0,\ \ \delta \to 0$. Но из слабой сходимости следует, что $\|x_0\| \leqslant \varliminf\limits_{\delta\to 0} \left\| x_\delta^{\alpha(\delta)} \right\|$.

Поскольку $\Omega(x) = \|x\|^2$ и $\Omega(x_\delta^{\alpha(\delta)}) \leqslant \Omega(x_0) + \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)}$ (из теоремы 7.1 и из (7.6)), следовательно,

$$\left\| x_\delta^{\alpha(\delta)} \right\|^2 \leqslant \|x_0\|^2 + \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)}.$$

Тогда

$$\varlimsup_{\delta\to 0} \left\| x_\delta^{\alpha(\delta)} \right\|^2 \leqslant \varlimsup_{\delta\to 0} \left(\|x_0\|^2 + \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \right) = \|x_0\|^2 .$$

Следовательно, $\left\| x_\delta^{\alpha(\delta)} \right\| \to \|x_0\|, \delta \to 0$, а это вместе со слабой сходимостью дает ввиду свойств гильбертова пространства и сильную сходимость: $\left\| x_\delta^{\alpha(\delta)} - x_0 \right\| \to 0,\ \ \delta \to 0$.

Теорема 7.2 доказана. ■

В случае, когда $X = Y$ – гильбертово пространство, то выбор $\Omega(x) = \|x\|^2$ дает для функционала $f^\alpha(x,\ y)$ уравнение Эйлера вида

$$A^*A + \alpha x = A^*y. \tag{7.7}$$

Таким образом, мы получили в явной форме линейный регуляризатор $R_\alpha = (A^*A + \alpha E)^{-1}A^*,\ \ E$ — тождественный оператор, и тем самым теорема 7.2 дает обоснование для перехода от уравнения I рода (7.1) к уравнению II рода (7.7). Это обоснование можно получить и иначе, если учесть, что в наших условиях уравнение (7.1) эквивалентно уравнению $A^*Ax = A^*y$ с положительным оператором A^*A. По сравнению с этим последним оператором оператор уравнения (7.7) имеет спектр, сдвинутый вправо на $\alpha > 0$, и, следовательно, не содержащий нуля. Поэтому оператор $A^*A + \alpha E$ заведомо имеет ограниченный обратный, и регуляризация сводится к разумному согласованию параметра α со значением погрешности δ. Правила такого согласования дает теорема 7.2.

Получим априорную оценку погрешности для метода регуляризации, которая позволяет рационально выбирать значение параметра α по заданному фиксированному δ.

Теорема 7.3. *Пусть $X = Y$ — гильбертовы пространства, $\Omega(x) = \|x\|^2$ и выполнены остальные условия теоремы 7.2. Тогда, если точное решение x_0 является истокопредставимым с оператором A^*, т.е. $x_0 = A^*z_0$, $\|z_0\| \leqslant C_0$, то справедливо следующее неравенство*

$$\|x_\delta^\alpha - x_0\| \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}C_0.$$

Оптимальная оценка получается при выборе $\alpha = {}^{\delta}/_{C_0}$.

Доказательство.

Очевидно, что $\|x_\delta^\alpha - x_0\| \leqslant \|x_\delta^\alpha - x_0^\alpha\| + \|x_0^\alpha - x_0\|$, где x_0^α — минимизирующий элемент того самого функционала, у которого в правой части стоит не y_δ, а y_0:

$$f^\alpha(x, y_0) = \|Ax - y_0\|^2 + \alpha\,\|x\|^2 .$$

Оценим первое слагаемое справа. Как отмечалось выше, для функционала $f^\alpha(x, y) = \|Ax - y\|^2 + \alpha\,\|x\|^2$ уравнением Эйлера служит уравнение $A^*Ax + \alpha x = A^*y$. Поэтому элементы x_δ^α и x_0^α удовлетворяют соответствующим равенствам

$$A^*Ax_\delta^\alpha + \alpha x_\delta^\alpha = A^*y_\delta, \quad A^*Ax_0^\alpha + \alpha x_0^\alpha = A^*y_0.$$

Следовательно, разность $x_\delta^\alpha - x_0^\alpha$ есть минимизирующий элемент функционала $f^\alpha(x, y_\delta - y_0)$. Это получается, если из первого уравнения вычесть второе:

$$A^*A(x_\delta^\alpha - x_0^\alpha) + \alpha(x_\delta^\alpha - x_0^\alpha) = A^*(y_\delta - y_0).$$

По определению минимизирующего элемента

$$f^\alpha(x_\delta^\alpha - x_0^\alpha,\ y_\delta - y_0) \leqslant f^\alpha(0,\ y_\delta - y_0) = \|y_\delta - y_0\|^2 \leqslant \delta^2$$

и поскольку

$$\alpha\,\|x_\delta^\alpha - x_0^\alpha\|^2 \leqslant f^\alpha(x_\delta^\alpha - x_0^\alpha,\ y_\delta - y_0),$$

то $\|x_\delta^\alpha - x_0^\alpha\| \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}$.

Переходим ко второму слагаемому. Предположим, что $x_0 = A^* z_0$, где x_0 — решение уравнения $A^*Ax_0 = A^*y_0$, а x_0^α — решение уравнения $A^*Ax_0^\alpha + \alpha x_0^\alpha = A^*y_0$. Рассмотрим разность этих уравнений:

$$A^*A(x_0^\alpha - x_0) + \alpha\, x_0^\alpha = 0$$

или

$$A^*A(x_0^\alpha - x_0) + \alpha(x_0^\alpha - x_0) = -\alpha\, x_0.$$

$A^*A(x_0^\alpha - x_0) + \alpha(x_0^\alpha - x_0) = -\alpha\, A^*z_0$ — это уравнение Эйлера для функционала $f^\alpha(x, -\alpha\, x_0)$. Отсюда следует, что элемент $x_0^\alpha - x_0$ минимизирует функционал $f^\alpha(x, -\alpha\, z_0)$. Очевидно поэтому, что

$$f^\alpha(x_0^\alpha - x_0, -\alpha\, z_0) \leqslant f^\alpha(0, -\alpha\, z_0) = \alpha^2 \left\| z_0 \right\|^2.$$

Так как

$$\alpha \left\| x_0^\alpha - x_0 \right\|^2 \leqslant f^\alpha(x_0^\alpha - x_0, -\alpha\, z_0),$$

то

$$\left\| x_0^\alpha - x_0 \right\| \leqslant \sqrt{\alpha}\, \left\| z_0 \right\|.$$

Поэтому

$$\left\| x_\delta^\alpha - x_0 \right\| \leqslant \left\| x_\delta^\alpha - x_0^\alpha \right\| + \left\| x_0^\alpha - x_0 \right\| \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha} C_0.$$

Оптимизируем полученную оценку по α. Обозначим

$$\sqrt{\alpha} = t,$$

тогда
$$f(t) = \frac{\delta}{t} + C_0 t,\ f'(t) = -\frac{\delta}{t^2} + C_0.$$
$$f'(t) = 0, \ \Rightarrow\ t^2 = \frac{\delta}{C_0},$$
т. е. $t^* = \sqrt{\frac{\delta}{C_0}}$, $\alpha = \frac{\delta}{C_0}$, $f''(t) = \frac{2\delta}{t^3}$, $f''(t^*) = \frac{2\delta}{\left(\sqrt{\frac{\delta}{C_0}}\right)^3} > 0.$

Следовательно, t^* — точка минимума. Отсюда
$$\|x_\delta^\alpha - x_0\|_{\text{опт}} \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{\frac{\delta}{C_0}}} + \sqrt{\frac{\delta}{C_0}}C_0 = 2\sqrt{\delta\, C_0}.$$

Теорема 7.3 доказана. ■

Как видно из доказанной теоремы, априорное значение истообразности точного решения $x_0 = A^* z_0$ с оценкой $\|z_0\| \leqslant C_0$ весьма важно для получения оценки погрешности метода регуляризации и для разумного выбора значения регуляризующего параметра α.

8 МЕТОД НЕВЯЗКИ

Он предложен без обоснования для простейшего случая Д.П.Филлипсом [25] и обоснован для широкого класса задач В.К.Ивановым [26].

Метод состоит в минимизации описанного в методе регуляризации стабилизирующего функционала $\Omega(x)$

$$f^\alpha(x, y) = \rho^2(Ax, y) + \alpha\Omega(x), \alpha > 0,$$

где $\Omega(x)$ удовлетворяет условиям:

1) точное решение уравнения $Ax = y$ принадлежит $D(\Omega)$;
2) $\Omega(x) \geqslant 0$, $x \in D(\Omega)$;
3) множества $M_C = \{x|\Omega(x) \leqslant C\}$, $C \geqslant 0$ являются компактами в пространстве X.

Функционал $\Omega(x)$ минимизируем при условии на величину невязки

$$\rho(Ax, y_\delta) \leqslant \varphi(\delta), \tag{8.1}$$

где $\varphi(\delta) \geqslant \delta$, $\varphi(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$.

Чаще всего полагают $\varphi(\delta) = \delta$. Если оператор A — аддитивный, то в соотношении (8.1) вместо неравенства можно писать знак равенства:

$$\rho(Ax, y_\delta) = \varphi(\delta).$$

Теорема 8.1. *Пусть X, Y — метрические пространства, A — непрерывный оператор, а функционал $\Omega(x)$ удовлетворяет условиям 1) – 3). Если существует единственное точное решение x_0 уравнения (7.1), принадлежащее области $D(\Omega)$, а приближения y_δ точной правой части y_0 уравнения (7.1) таковы, что $\rho(y_\delta, y_0) \leqslant \delta$, то элементы $x_{\varphi(\delta)}$, минимизирующие функционал $\Omega(x)$ при условии (8.1), сходятся к точному решению x_0 при $\delta \to 0$*

Доказательство.

Во-первых, условие (8.1) выделяет непустое подмножество, так как ему всегда удовлетворяет точное решение

$$\rho(Ax_0, y_\delta) = \rho(y_0, y_\delta) \leqslant \delta \leqslant \varphi(\delta).$$

Во-вторых, при $\forall\delta$ существует хотя бы один минимизирующий элемент $x_{\varphi(\delta)}$. Действительно, поскольку элемент x_0 удовлетворяет условию (8.1), то нас интересуют лишь такие x, для которых $\Omega(x) \leqslant \Omega(x_0)$, т.е. элементы компакта M_C, $C = \Omega(x_0)$. Поэтому соответствующая минимизирующая последовательность имеет в M_C предельные точки $x_{\varphi(\delta)}$, которые в силу непрерывности оператора A тоже удовлетворяют условию (8.1). Остается доказать сходимость $x_{\varphi(\delta)}$ к x_0 при $\delta \to 0$.

Предположим противное, что $x_{\varphi(\delta)} \nrightarrow x_0$. Пусть имеется последовательность $\delta_n \to 0, n \to \infty$ для которой найдутся элементы $x_n = x(\varphi_{\delta_n})$, лежащие вне некоторой ε-окрестности точного решения x_0, $(\varepsilon > 0)$. Поскольку все x_n обязаны принадлежать компакту M_C, $C = \Omega(x_0)$, то у нашей последовательности есть предельная точка $\bar{x} \in M_C$, к которой без ограничения общности можно считать сходящейся всю последовательность $\{x_n\}$: $x_n \to \bar{x}$, $n \to \infty$. Ввиду непрерывности оператора A образы $y_n = Ax_n$ тоже сходятся:

$$y_n = Ax_n \to A\bar{x}, \;\; n \to \infty.$$

Но из (8.1) следует

$$\rho(y_n, y_0) \leqslant \rho(y_n, y_{\delta_n}) + \rho(y_{\delta_n}, y_0) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(y_n, y_{\delta_n}) + \delta_n \leqslant \varphi(\delta_n) + \delta_n \to 0, \;\; n \to \infty.$$

Так, что $A\bar{x} = y_0$. В силу единственности решения $x_0 \in D(\Omega)$ уравнения (7.1), это означает, что $\bar{x} = x_0$, и теорема 8.1 доказана. ■

ПЛАН СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Изучить примеры некорректно поставленных задач: задачу спектроскопии; обратную задачу гравиметрии; обратную задачу теории потенциала; задачу аналитического продолжения функции, известной на части области, на всю область; задачу Коши для уравнения Лапласа; задачу дифференцирования функции, известной приближенно; численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2.

2. Доказать сходимость методов при точной и приближенной части уравнения в случае априорного выбора числа итераций. Получить оценки погрешности методов и оптимизировать их, найти погрешность в счете.

3. Исследовать случай неединственного решения уравнения и случай оператора, заданного приближенно.

4. Доказать сходимость методов и получить априорные оценки погрешности в энергетической норме гильбертова пространства. Решить уравнения Фредгольма методами итераций.

5. Доказать сходимость методов итераций с правилом останова по соседним приближениям. Получить оценки для момента останова.

6. Доказать теоремы о сходимости методов итераций с правилом останова по невязке. Получить оценки для момента останова и оценки погрешности.

7. Доказать сходимость метода обобщенного суммирования рядов, получить оценки погрешности при точной и приближенной правых частях уравнения.

8. Построить регуляризующий оператор с помощью минимизации сглаживающего функционала. Применить методы регуляризации и невязки к решению интегральных уравнений первого рода.

9. Изучить методы подбора и квазирешений решения некорректно поставленных задач. Решить модельные задачи.

Задача 8.1. *Решаем в пространстве $L_2(0,1)$ модельную задачу в виде уравнения*

$$\int\limits_0^1 A(t,s)x(s)ds = y(t), 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{8.2}$$

с симметричным положительным ядром

$$A(t,s) = \begin{cases} t(1-s), 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s(1-t), 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1; \end{cases} \tag{8.3}$$

точной правой частью

$$y(t) = \frac{t(t-1)(t^2-t-1)}{12} \tag{8.4}$$

и точным решением

$$x(t) = t(1-t).$$

Нетрудно проверить, что решение $x(t) = t(1-t)$ истокопредставимо

$$x(t) = \int\limits_0^1 A(s,t)z_0(s)ds$$

с функцией $z_0(t) \equiv 2$, причем, очевидно, $\|z_0\| = 2$. Можно показать, что оператор интегрального уравнения (8.2) непрерывен, взаимно однозначен и аддитивен (линеен).

Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ, и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\tilde{y}_i$, $i = \overline{1, m}$, полученные следующим образом $\tilde{y}_i = [y(t_i)10^k + 0,5]/10^k$, где $y(t_i)$ вычислены по формулам (8.4), квадратные скобки означают целую часть числа и $k = 3; 4$. При $k = 3$ величина погрешности $\delta = 10^{-3}$. При $k = 4$ величина погрешности $\delta = 10^{-4}$. Действительно, имеем

$$\int\limits_0^1 [y(t) - \tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum_{i=1}^{m} [y(t_i) - \tilde{y}_i]^2 h \leqslant mh(10^{-k})^2 = 10^{-2k}.$$

Заменим интеграл в уравнении (8.2) квадратурной суммой, например, по формуле правых прямоугольников с узлами $s_j = jh$, $j = \overline{1, m}, h = 1/m$, т.е.

$$\int\limits_0^1 A(t, s)x(s)ds \approx \sum_{j=1}^{m} A(t, s_j)hx_j.$$

Тогда получим равенство

$$\sum_{j=1}^{m} A(t, s_j) h x_j + \rho_m(t) = y(t),$$

где $\rho_m(t)$ — остаток квадратурной замены. Записав последее равенство в точках $t_i, i = \overline{1, m}$, получим уравнения

$$\sum_{j=1}^{m} A(t_i, s_j) h x_j + \rho_m(t_i) = y(t_i), i = \overline{1, m}.$$

Точные значения $y(t_i)$ мы не знаем, а знаем лишь приближения $\tilde{y}(t_i)$ и, отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближённого решения

$$\sum_{j=1}^{m} A(t_i, s_j) h x_j = \tilde{y}_i, i = \overline{1, m} \qquad (8.5)$$

симметрическая матрица которой вычисляется на основании формулы (8.3).

I. Методы итераций. Выберем для определнности $m = 32$ и будем решать систему (8.5) методом интераций (3.3) при $k = 2$, который и в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} - 2\alpha \sum_{j=1}^{m} A(t_i, s_j) h x_j^{(n)} - \alpha^2 \sum_{j=1}^{m} A(t_i, s_j) h \tilde{y}_j +$$

$$+2\alpha\tilde{y}_i + \alpha^2 \sum_{j=1}^{m} A(t_i, s_j)h(\sum_{k=1}^{m} A(t_j, s_k)hx_k^{(n)}), x_1^{(0)} = 0, i = \overline{1, m}. \qquad (8.6)$$

При счёте используется $\alpha = 0,8$. Задача была решена при $\delta = 10^{-3}$ и $\delta = 10^{-4}$. Результаты счёта приведены в таблице 8.1.

Затем система (8.5) решалась методом простой интерации при $\alpha = = 0,8$

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta}), x_{0,\delta} = 0, \qquad (8.7)$$

который в данном случае запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^{m} A(t_i, s_j)hx_j^{(n)})x_i^{(0)} = 0, i = \overline{1, m}. \qquad (8.8)$$

Результаты счета приведены в *таблице* 8.1.

При решении задачи методом (3.3) и (8.7) на каждом шаге итерации вычислялись:

— дискретная норма невязки

$$\left\| Ax^{(n)} - \tilde{y} \right\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{m} A(t_i, s_j)hx_j^{(n)} - \tilde{y}_i \right]^2 h \right\}^{1/2},$$

— норма приближнного решения

$$\left\|x^{(n)}\right\|_m = \left\{\sum_{i=1}^{m}\left[x_i^{(n)}\right]^2 h\right\}^{1/2},$$

— дискретная норма разности между точным и приближёнными решениями

$$\left\|x - x^{(n)}\right\|_m = \left\{\sum_{i=1}^{m}\left[x(t_i) - x_i^{(n)}\right]^2 h\right\}^{1/2}.$$

В обоих случаях для решения предложенной задачи сведений об истокопредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (3.20), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1,5\delta$. Итак, при $\delta = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-3}$ для достижения оптимальной точности при счёте (3.3) потребовалось 6 итераций, при счте методом (8.7) — 14 итераций. При $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-4}$ соответственно потребовалось 7 и 26 итераций. Пример счёта показал, что для достижения оптимальной точности методом итераций (3.3) требует примерно в 2,5 раза меньше итераций, чем метод простой итерации (8.7), что соответствует результатам подраздела 3.1.

На рис. 8.1 изображены графики точного решения и приближённого решения, полученного методом (3.3) при $\delta = 10^{-4}$.

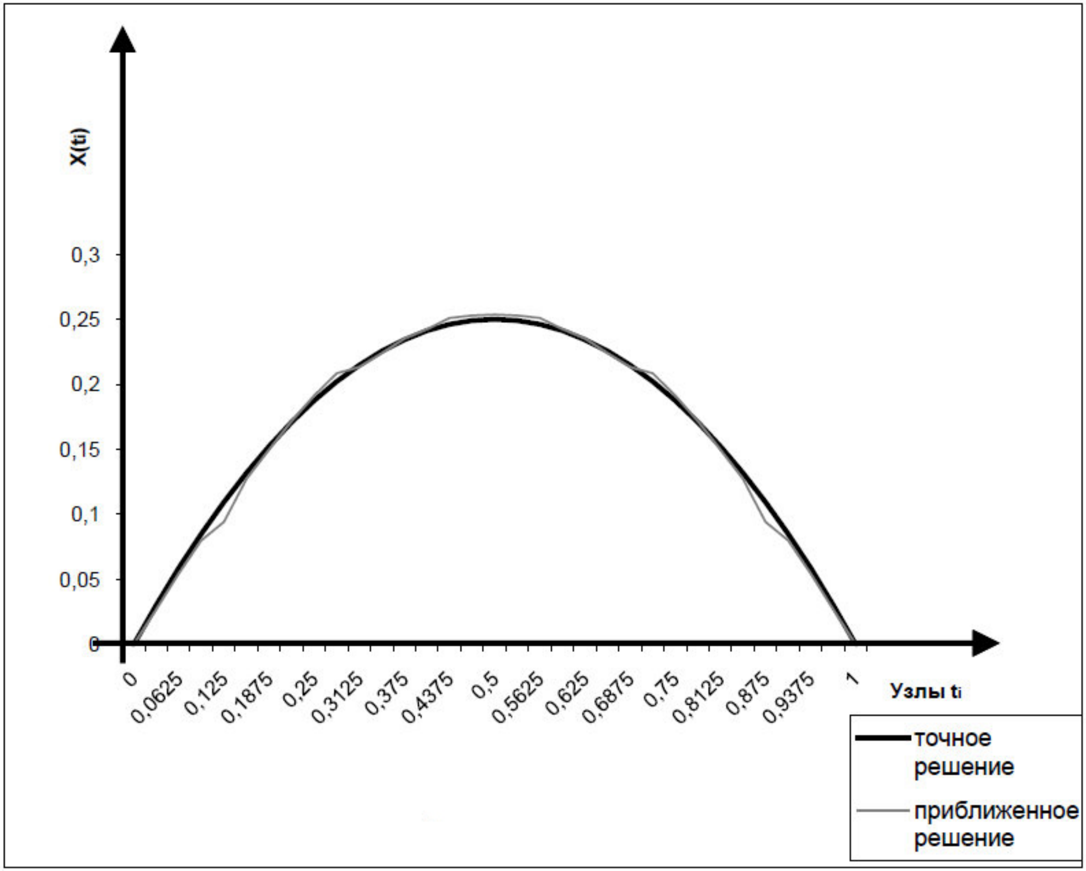
X(ti)
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
0
0,0625
0,125
0,1875
0,25
0,3125
0,375
0,4375
0,5
0,5625
0,625
0,6875
0,75
0,8125
0,875
0,9375
1
Узлы ti
точное решение
приближенное решение

Рис. 8.1

Таблица 8.1

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближенное решение			
			Метод (8.7) $\delta = 10^{-3}$	Метод (3.3) $\delta = 10^{-3}$	Метод (8.7) $\delta = 10^{-4}$	Метод (3.3) $\delta = 10^{-3}$
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,03125	0,00260	0,03027	0,03442	0,03452	0,02652	0,02700
0,06250	0,00517	0,05859	0,04415	0,04781	0,05399	0,05437
0,09375	0,00768	0,08496	0,07984	0,08325	0,07869	0,07999
0,12500	0,01011	0,10938	0,09159	0,09803	0,10152	0,10421
0,15625	0,01243	0,13184	0,10488	0,11393	0,12330	0,12737
0,18750	0,01463	0,15234	0,14515	0,15275	0,14487	0,14982
0,21875	0,01668	0,17090	0,16257	0,17169	0,16698	0,17186
0,25000	0,01855	0,18750	0,18264	0,19257	0,18575	0,19128
0,28125	0,02025	0,20215	0,18848	0,19403	0,20184	0,20836
0,31250	0,02175	0,21484	0,20654	0,21932	0,21586	0,22335
0,34375	0,02304	0,22559	0,21080	0,22551	0,22364	0,23392
0,37500	0,02411	0,23438	0,21857	0,23427	0,23490	0,24530
0,40625	0,02495	0,24121	0,22998	0,24573	0,24067	0,25258
0,43750	0,02555	0,24609	0,24521	0,26000	0,25057	0,26093
0,46875	0,02592	0,24902	0,23926	0,25562	0,25886	0,26289
0,50000	0,02604	0,25000	0,23728	0,25416	0,26012	0,26354
$\|R\|_m$			0,00138	0,00091	0,00013	0,00009
$\left\|x^{(n)}\right\|_m$			0,16996	0,17477	0,18116	0,18276
$\left\|x - x^{(n)}\right\|_m$			0,01492	0,01057	0,00454	0,00542

Количество итераций: 14 6 26 7

Решим также систему (8.5) неявным методом интераций (4.3) при $k = 1$, который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} + \alpha \sum_{j=1}^{m} A(t_i, s_j) x_j^{(n+1)} h = x_i^{(n)} - \alpha \sum_{j=1}^{m} A(t_i, s_j) x_j^{(n)} h + 2\alpha \tilde{y}_i, \quad (8.9)$$

$$i = \overline{1, m}.$$

Задача была решена при $\delta = 10^{-4}$. Результаты счёта приведены в *таблице* 8.2 (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы). Для решения предложенной задачи сведений об истокопредстовимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке, выбрав уровень останова $\varepsilon = 1,5\delta$. Пример счёта показал, что для достижения оптимальной точности методом интераций (4.3) при $\alpha = 9$ требуется только одна итерация, что соответствует результатам подраздела 4.1. На *рис.* 8.2 изображены графики точного решения и приближённого решения, полученного методом (4.3) при $\delta = 10^{-4}$.

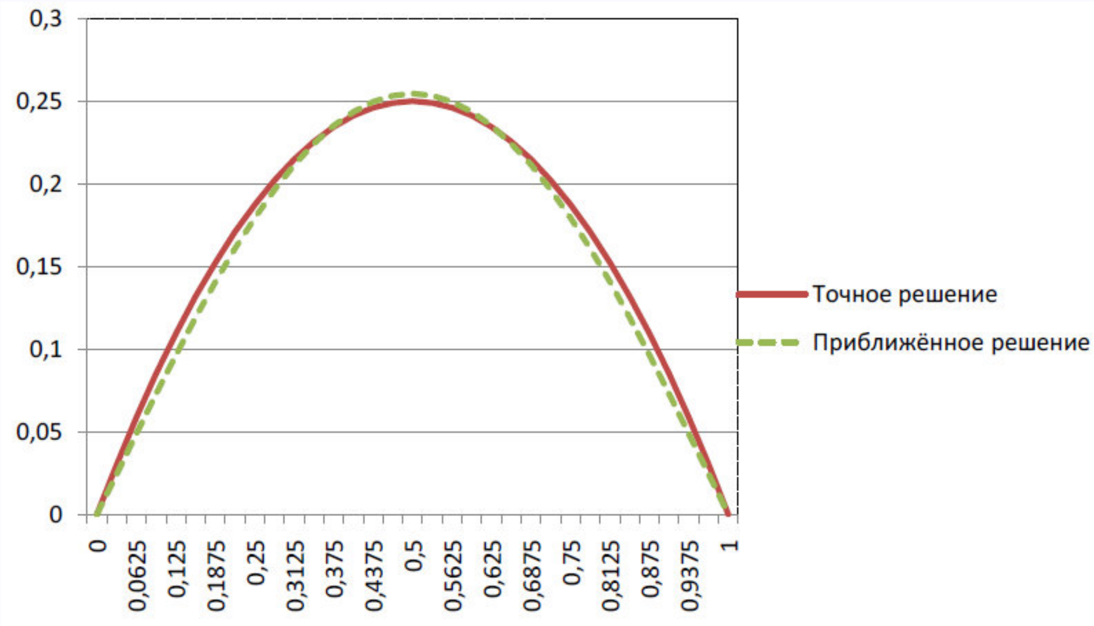
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
0
0,0625
0,125
0,1875
0,25
0,3125
0,375
0,4375
0,5
0,5625
0,625
0,6875
0,75
0,8125
0,875
0,9375
1
Точное решение
Приближённое решение

Рис. 8.2

Таблица 8.2

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближенное решение, полученное методом (8.9) $\delta = 10^{-4}$
0	0	0	0
0.0312	0.00259	0.03027	0.02429
0.0625	0.00517	0.05859	0.04865
0.0937	0.00768	0.08496	0.07275
0.1250	0.01011	0.10938	0.09629
0.1562	0.01243	0.13184	0.11898
0.1875	0.01463	0.15234	0.14056
0.2187	0.01668	0.17089	0.1608
0.2500	0.01855	0.18750	0.17948
0.2812	0.02025	0.20215	0.19641
0.3125	0.02175	0.21484	0.21142
0.3437	0.02304	0.22559	0.22437
0.3750	0.02411	0.23438	0.23514
0.4062	0.02495	0.24121	0.24361
0.4375	0.02555	0.24609	0.24972
0.4687	0.02591	0.24902	0.25341
0.5000	0.02604	0.25000	0.25464
$\|R\|_m$		0.00015	
$\left\|x^{(n)}\right\|_m$		0.17972	
$\left\|x - x^{(n)}\right\|_m$		0.00798	

II. Метод регуляризации. Выберем для определённости $m = 30$ и будем решать уравнение (8.2) методом регуляризации со стабилизирующим функционалом $\Omega(x) = \|x\|^2$. Для такого случая уравнение Эйлера соответствующего сглаживающего функционала принимает вид

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds + \alpha\, x(t) = \int_0^1 A(s,t)y(s)ds, \tag{8.10}$$

где ядро $K(t,\, s)$ оператора A^*A легко вычисляется

$$K(t,\, s) = \begin{cases} \frac{t(s-1)}{6}(t^2+s^2-2s), & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ \frac{s(t-1)}{6}(t^2+s^2-2t), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Задача (8.10) при $\alpha > 0$ уже корректна, и для ее решения используем метод замены ядра квадратурной суммой. Выберем формулу средних прямоугольников, получим

$$\sum_{j=1}^{m} K(t_i,\, s_j)\, h\, x_j + \alpha\, x_i = Y_i, \;\; i = \overline{1,\, m}\,, \tag{8.11}$$

где $Y_i = \sum\limits_{j=1}^{m} hA(\, s_j,\, t_i)\, \tilde{y}_j, \;\; i = \overline{1,\, m}$. Здесь $t_i = h\left(i - \frac{1}{2}\right),\; s_j = h\,\left(j - \frac{1}{2}\right)$, $i, j = \overline{1,\, m},\; h = \frac{1}{m}$.

Исходная задача свелась к решению системы уравнений (8.11) с подходящим значением параметра α. Выбирать α будем из следующих соображений. Будем считать априори известным, что точное решение истокопредставимо через некоторую функцию $z_0(t)$ с оценкой $\|z_0\| \leqslant 4$. Следовательно, при $\delta = 10^{-3}$ (см. теорему 7.3), $C_0 = 4$, $\alpha_{\text{опт}} = \frac{\delta}{C_0} = \frac{10^{-3}}{4} = 0,00025$. Решение $\{\tilde{x}_i\}$ по методу регуляризации с найденным $\alpha_{\text{опт}}$ и при прежнем $m = 30$ приведено в *таблице* 8.3. По теореме 7.3 к искомому решению при $\delta \to 0$ сильно сходится решение задачи (8.10), а оно в силу корректности уравнении (8.10) аппроксимируется при $m \to \infty$ решением $\{\tilde{x}_i\}$ системы (8.11). Поскольку мы решали не точное уравнение (8.10), а приближенную систему (8.11), то оценка погрешности из теоремы 7.3 может иметь лишь ориентировочное значение. Теорема 7.3 при взятом значении α дает оценку погрешности, приблизительно равную $0,13$, тогда как дискретный аналог нормы погрешности

$$\|x - \tilde{x}\|_m = \left\{ h \sum_{i=1}^{m} [x(t_i) - \tilde{x}_i]^2 \right\}^{1/2}$$

оказывается равным 0,0071.

III. Метод невязки. Для решения уравнения (8.2) применим метод невязки, возьмём $\Omega(x) = \|x\|^2$. Для этого случая метод невязки

Кафедры ИиПМ АиГ

Начало

Содержание

Литература

◄ ►

◄◄ ►►

Назад

На весь экран

Закрыть

состоит в минимизации функционала

$$\Omega(x) = \|x\|^2 = \int_0^1 x^2(t)dt$$

при условии, что

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 A(t,s)x(s)ds - \tilde{y}(t) \right]^2 dt = \delta^2. \qquad (8.12)$$

Согласно методу Лагранжа неопределённого множителя, наша условная минимизация сводится к безусловной минимизации функционала

$$\alpha \int_0^1 x^2(t)dt + \int_0^1 \left[\int_0^1 A(t,s)x(s)ds - \tilde{y}(t) \right]^2 dt \qquad (8.13)$$

с таким множителем α, что удовлетворяется равенство (8.12).

Уравнением Эйлера функционала (8.13) служит уравнение (8.10), которое мы прежним образом сведем к системе (8.11). Следовательно, нужно решить ту же самую систему (8.11), но на этот раз параметр должен выбираться из условия (8.12). Его дискретным аналогом является равенство

$$\|R\|_m^2 = \sum_{i=1}^m h \left[\sum_{j=1}^m A(t_i, s_j)hx_j - \tilde{y}_i \right]^2 = \delta^2, \qquad (8.14)$$

которое и будем проверять, считая, как и выше, $\delta = 10^{-3}$.

Левая часть равенства (8.14) является квадратом нормы невязки и монотонно растёт с ростом α, и это позволяет без особого труда, например, методом линейной интерполяции найти нужное значение α и соответствующее решение $\{\tilde{x}_i\}$ системы (8.11). Зависимость решения системы (8.11) от параметра α достаточно гладкая, так что малые изменения параметра α не сильно влияют на решения системы. Поэтому достаточно решить систему (8.11) при некотором наборе значений α и выбрать из этого набора такое значение α, для которого приблизительно выполняется условие (8.14).

В нашем случае система уравнений (8.11) решалась при $m = 30$ с $\alpha = 10^{-p}$, $p = 2(0,5)6$. Наиболее пригодным оказалось $\alpha = 10^{-3}$. Соответствующее ему решение $\{\tilde{x}_i\}$ приведено в *таблице* 8.3 вместе с величиной получающейся невязки.

IV. Метод квазирешений. Ещё один способ решения, который мы применим к уравнению (8.2) — это *метод квазирешений*. Как нетрудно подсчитать, для нормы точного решения уравнения справедливы соотношения $\|x\| = 1/\sqrt{30} \approx 0,183$. На практике мы этой величины обычно не знаем, но пусть всё же из каких-либо априорных соображений известно, что $\|x\| \leqslant 0,2$. Метод квазирешений в рассматриваемом случае сводится к минимизации функционала

$$\int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^1 A(t,s)x(s)ds - \tilde{y}(t)\right]^2 dt$$

при условии, что

$$\|x\|^2 \equiv \int\limits_0^1 x^2(t)dt \leqslant 0,04. \tag{8.15}$$

Эту условную минимизацию можно, разумеется, вести непосредственно, но мы поступим аналогично прежнему и с помощью обобщённого метода Лагранжа неопределённого множителя сведём задачу к безусловной минимизации функционала (8.13), выбирая значение множителя α таким, чтобы выполнялось условие (8.15). Уравнением Эйлера для функционала (8.13), как уже говорилось, является уравнение (8.10). Указанным выше способом сведём его к системе алгебраических уравнений (8.11). Дискретным аналогом условия (8.15) является условие

$$\|x\|_m^2 \equiv \sum_{i=1}^m hx_i^2 \leqslant 0,04, \tag{8.16}$$

которое должно служить для выбора значения α при решении системы (8.11). Как и в пункте II, здесь тоже нетрудно найти нужное значение α каким-либо регулярным способом, так как норма решения монотонно убывает с ростом α. Но можно, как и в пункте II, просто подбирать α, решая систему уравнений (8.11) с несколькими значениями α и выбирая затем из этих значений α подходящее по критерию (8.16). При этом не следует стремиться к точному равенству в этом критерии по тем же причинам, что и в пункте II, но в то же время левая часть соотношения (8.16) не должна быть намного меньше правой его части, так как в противном случае решение системы (8.11) окажется лежащим в слишком малом шаре, не содержащем, быть может, точного решения.

В нашем случае система уравнений (8.11) решалась при том же $m = 30$ и при том же α, что и в пункте II. Описанным требованиям более всего удовлетворяет $\alpha = 10^{-5,5}$. Соответствующее ему решение $\{\tilde{x}_i\}$ тоже приведено в *таблице* 8.3 вместе с величиной нормы. Как видим, это решение колеблющееся и даже знакопеременное в отличие от точного. Это может служить признаком излишней малости выбранного значения α. Если бы мы априори знали, что решение является положительным, то должны были бы выбрать значение $\alpha = 10^{-4,5}$ и получили бы неколеблющееся положительное решение с нормой $\|\tilde{x}\|_m = 0,182$ и погрешностью $\|\tilde{x} - x\|_m = 0,011$.

Напомним, что в нашем случае теорема 6.2 гарантирует лишь слабую сходимость квазирешений к точному решению при $\delta \to 0$.

Таблица 8.3

Узлы t_i	Точное решение x_i	Приближенные правые части $\tilde{y}_i$	Приближенное решение $\tilde{x}_i$		
			Метод регуляризации, $\alpha = 0.00025$	Метод невязки, $\alpha = 0.001$	Метод квазирешений $\alpha = 10^{-5.5}$
0.017	0.0164	0.001	0.0126	0.0122	– 0.035
0.050	0.0475	0.004	0.0392	0.0368	0.013
0.083	0.0764	0.007	0.0659	0.0611	0.073
0.117	0.1031	0.009	0.0908	0.0845	0.030
0.150	0.1275	0.012	0.1163	0.1073	0.099
0.183	0.1497	0.014	0.1400	0.1289	0.128
0.217	0.1697	0.017	0.1633	0.1492	0.275
0.250	0.1875	0.019	0.1824	0.1673	0.292
0.283	0.2031	0.020	0.1971	0.1830	0.185
0.317	0.2164	0.022	0.2110	0.1970	0.203
0.350	0.2275	0.023	0.2221	0.2086	0.163
0.383	0.2364	0.024	0.2317	0.2183	0.159
0.417	0.2431	0.025	0.2402	0.2259	0.218
0.450	0.2475	0.026	0.2468	0.2313	0.304
0.483	0.2497	0.026	0.2495	0.2338	0.290
$\|R\|_m$			0.178	0.166	0.191
$\|\tilde{x}\|_m$			0.0005	0.0016	0.0002
$\|x - \tilde{x}\|_m$			0.0071	0.018	0.057

Задача 8.2. *Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$задачу в виде уравнения*

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds = y(t), 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{8.17}$$

с симметричным положительным ядром

$$K(t,s) = \frac{1}{1+100(t-s)^2}. \tag{8.18}$$

В качестве точного решения сформулирванной задачи выберем функцию

$$x(s) = \begin{cases} s, 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1-s, \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Задача 8.3. *Будем решать в пространстве $L_2(0,1)$ (8.17) с симметричным положительным ядром (8.18). В качестве точного решения задачи возьмём функцию*

$$x(s) = \begin{cases} 2s, 0 \leqslant s \leqslant 0,25, \\ -s+0,75, \quad 0,25 \leqslant s < 0,5, \\ s-0,25, \quad 0,5 \leqslant s < 0,75, \\ -2s+2, \quad 0,75 \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Задача 8.4. *Решаем в пространстве* $L_2(0,1)$ *модельную задачу в виде уравнения* $x(s) = \int\limits_1^0 A(t,s)x(s)ds = y(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$ *с симметричным положительным ядром*

$$A(t,s) = \begin{cases} t(1-s), 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s(1-t), 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

точной правой частью $y(t) = \frac{t(t-1)(t^2-t-1)}{12}$ *и точным решением* $x(t) = = t(1-t)$.

Задача 8.5. *Решить задачу 8.2 с ядром* $K(t,s) = \dfrac{1}{1+10(t-s)^2}$.

Задача 8.6. *Решить задачу 8.3 с ядром* $K(t,s) = \dfrac{1}{1+10(t-s)^2}$.

Лабораторная работа №1

Итерационным методом явного типа

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^k x_n + A^{-1}\left[E - (E-\alpha A)^k\right] y, x_0 = 0,$$

взяв $k = 1{,}2$, решить задачи 8.2, 8.3, 8.5, 8.6, используя:

а) правило останова по невязке;

б) правило останова по соседним приближениям.

Лабораторная работа №2

Итерационным методом неявного типа

$$\left(E+\alpha A^{k}\right)x_{n+1}=\left(E-\alpha A^{k}\right)x_{n}+2\alpha A^{k-1}y,\quad x_0=0,\quad k\in N,$$

взяв $k = 1{,}2$, решить задачи 8.2, 8.3, 8.5, 8.6, используя:

а) априорный выбор числа итераций;

б) правило останова по невязке.

Лабораторная работа № 3

Методом *регуляризации* решить задачи 8.2, 8.3, 8.5, 8.6.

Лабораторная работа № 4

Методом *невязки* решить задачи 8.2, 8.3, 8.5, 8.6.

Лабораторная работа № 5

Методом *квазирешений* решить задачи 8.2, 8.3, 8.5, 8.6.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Определение метрического пространства.
2. Определение полного метрического пространства.
3. Определение сходящейся последовательности.
4. Определение фундаментальной последовательности.
5. Определение линейного пространства.
6. Определение линейного нормированного пространства.
7. Запишите три наиболее употребительные метрики.
8. Определение банахова пространства.
9. Определение гильбертова пространства.
10. Определение слабо сходящейся последовательности.
11. Определение непрерывного оператора.
12. Определение аддитивного оператора.
13. Перечислите свойства аддитивного оператора.
14. Определение однородного оператора.

15. Определение линейного оператора.
16. Определение ограниченного оператора.
17. Определение нормы оператора.
18. Определение сопряженного оператора.
19. Определение самосопряженного оператора.
20. Определение положительного самосопряженного оператора.
21. Определение собственного значения и собственного вектора (элемента) оператора.
22. Определение спектра оператора.
23. Определение точки спектра оператора.
24. Определение регулярного значения оператора.
25. Определение проектора.
26. Перечислите свойства проекторов.
27. Определение спектральной функции оператора.
28. Перечислите свойства спектральной функции оператора.

29. Определение интегрального представления самосопряженного оператора.

30. Когда семейство проекторов называют разложением единицы?

31. Определение устойчивой задачи нахождения решения уравнения.

32. Определение корректной задачи.

33. Какие примеры некорректных задач вам известны?

34. Определение квазирешения операторного уравнения.

35. Определение компактного множества.

36. Перечислите известные вам методы решения некорректных задач.

37. Ответьте на вопросы теста

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Правило останова по соседним приближениям в методе итераций решения некорректных задач. Теорема (доказать пункт *в*, т. е. сходимость метода)

2. Правило останова по соседним приближениям в методе итераций решения некорректных задач. Теорема (получить оценку для момента останова, т.е. доказать пункт *б*)

3. Правило останова по соседним приближениям в методе итераций решения некорректных задач. Теорема (доказать пункт a, что момент останова определён при любом начальном приближении Z_0 и любых y_0 и y_n)

4. Правило останова по соседним приближениям в методе итераций решения некорректных задач. Доказательство леммы 2

5. Правило останова по соседним приближениям в методе итераций решения некорректных задач. Доказательство леммы 1

6. Правило останова по невязке в методе итераций решения некорректных задач. Получение оценки для момента останова и оценки погрешности (Теорема 2)

7. Правило останова по невязке в методе итераций решения некорректных задач. Доказательство теоремы 1 (о сходимости метода с правилом останова по невязке)

8. Правило останова по невязке в методе итераций решения некорректных задач. Доказательство леммы 3

9. Правило останова по невязке в методе итераций решения некорректных задач. Доказательство леммы 2

10. Правило останова по невязке в методе итераций решения некорректных задач. Доказательство леммы 1

11. Оценка погрешности метода итераций в энергетической норме и её оптимизация

12. Сходимость в энергетической норме метода итераций решения некорректных задач

13. Сходимость метода итераций в случае неединственного решения

14. Метод простых итераций для решения некорректных задач с априорным выбором числа итераций. Оптимизация полученной оценки погрешности. Погрешность в счёте

15. Метод простых итераций для решения некорректных задач с априорным выбором числа итераций. Оценка погрешности

16. Метод простых итераций для решения некорректных задач с априорным выбором числа итераций. Доказательство сходимости при приближённой правой части уравнения

17. Метод простых итераций для решения некорректных задач с априорным выбором числа итераций. Доказательство сходимости при точной правой части уравнения

18. Метод обобщённого суммирования рядов

19. Понятие корректно поставленных и некорректно поставленных задач. Определение устойчивости задачи. Корректность по Адамару. Корректность по Тихонову. Примеры некорректных задач

20. Билинейные операторы. Дифференцирование операторов

21. Пространство линейных операторов

22. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Определение спектральной функции оператора и её свойства. Интегральное представление самосопряжённого оператора

23. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Понятие сопряжённого, самосопряжённого, положительного операторов. Собственное значение и спектр оператора

24. Линейные операторы. Понятие линейного, непрерывного, ограниченного операторов. Теорема об аддитивном операторе. Норма оператора. Обратный оператор

25. Линейные нормированные пространства. Гильбертово пространство

26. Метрические пространства

27. Методы регуляризации и невязки.

Литература

1. Канторович, Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М. Физматгиз, 1959. — 680 с.

2. Константинова, Я.В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. — 1973. — № 1. — С. 9–15.

3. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. — 1959. — Vol. 4, № 2. — P. 166–176.

4. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа: в 2 т. / Г.М. Фихтенгольц. — М.: Наука. — 1968. — Т. I. — 440 с.

5. Вайникко, Г.М. Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректных задач / Г.М. Вайникко // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 3. — С. 84–92.

6. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. — М.: Наука, 1986. — 178 с.

7. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — М.: Наука, 1965. — 520 с.

8. Красносельский, М.А. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицкий, В.Я. Стеценко. — М.: Наука, 1969. — 456 с.

9. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. — 1978. — № 12. — С. 59–63.

10. Градштейн, И.С.Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.

11. Гусак, А.А.Элементы методов вычислений / А.А. Гусак. — Минск: Изд-во БГУ, 1982. — 164 с.

12. Савчук, В.Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве /В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. — 2006. — Т. 50, № 5. — С. 37–42.

13. Матысик, О.В. Итерационный метод неявного типа решения некорректных задач в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вестник Гродненского университета. Серия 2. — 2011. — № 1(107). — С. 36–42.

14. Крылов, В.И. Вычислительные методы / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. — Минск. — Т. 2. — 1976. — 584 с.

15. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. — М.: Наука, 1979. — 288 с.

16. Лаврентьев, М.М. О некоторых задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. — Новосибирск, 1973. — 92 с.

17. Лисковец, О.А. Теория и методы решения неустойчивых задач / О.А. Лисковец. — Минск, 1981. — 342 с.

18. Иванов, В.К. Теория некорректных задач и их приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. — М.: Наука, 1978. — 206 с.

19. Морозов, В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В.А. Морозов. — М.: Изд-во МГУ, 1974. — 320 с.

20. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач. / А.М. Денисов — М.: Изд-во МГУ,1994. — 207 с.

21. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 480 с.

22. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик. — Брест: изд-во БрГУ имени А. С. Пушкина, 2008. — 195 с.

23. Иванов, В.К. О некорректно поставленных задачах / В.К. Иванов // Мат. сб. — 1963. — Т. 61 (103), № 2. — С. 211–223.

24. Тихонов, А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 151, № 3. — С. 501–504.

25. Phillips, D.L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind / D.L. Phillips // J. Accoc. Comput. Mach. — 1962. — Vol. 9, № 1. — P. 84–97.

26. Иванов, В.К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода / В.К. Иванов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1966. — Т. 6, № 6. — С. 1089–1094.

27. Крылов, В.И. Начала теории вычислительных методов / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырский. — 1984. — 264 с.