О. В. МАТЫСИК

ЯВНЫЕ И НЕЯВНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2014

Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

О. В. Матысик

ЯВНЫЕ И НЕЯВНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Монография

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2014

УДК 517.983.54 + 519.6
ББК 22.193
М33

Рекомендовано редакционно-издательским советом
Учреждения образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Рецензенты:

Главный научный сотрудник отдела нелинейного и стохастического анализа
Института математики НАН Беларуси,
член-корресподент НАН Беларуси,
доктор физико-математических наук, профессор
Л.А. Янович

Профессор кафедры вычислительной математики факультета прикладной
математики и информатики Белорусского государственного университета,
доктор физико-математических наук, профессор
Н.А. Лиходед

Матысик, О. В.
М33 Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач : монография / О. В. Матысик ; Брест. гос. ун-т имени А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2014. – 213 с.
ISBN

В монографии разработаны и исследованы явные и неявные итерационные процедуры для решения некорректных задач (регуляризующие алгоритмы), описываемых операторными уравнениями первого рода с положительными, самосопряженными и несамосопряженными, ограниченными и неограниченными, с точно и приближенно заданными операторами в гильбертовом пространстве.

Книга адресована студентам физико-математических факультетов университетов, аспирантам, научным работникам, специализирующимся в области вычислительной математики и теории некорректно поставленных задач.

УДК 517.983.54 + 519.6
ББК 22.193

ISBN 978-985-555-152-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена итерационным методам решения операторных линейных уравнений в гильбертовом пространстве с ограниченными и неограниченными, положительными, самосопряжёнными и несамосопряжёнными операторами в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Такими операторными уравнениями задаются некорректные задачи, которые были сформулированы в начале прошлого столетия и долгое время не изучались, поскольку считалось, что они не могут отвечать никакой физической реальности и поэтому их решение не имеет смысла.

Однако потребности практики привели к необходимости решать некорректные задачи. Для их решения предложены и широко применяются метод регуляризации А.Н. Тихонова, метод квазирешений В.К. Иванова и метод невязки, предложенный Д.Л. Филлипсом и В.К. Ивановым. Наибольшее распространение получили итерационные методы решения некорректных задач. Их частое использование связано с тем, что эти методы сравнительно легко программируются на ПЭВМ.

В монографии предлагаются новые регуляризующие алгоритмы для некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода, в виде явных и неявных итерационных методов, обладающих более высокими скоростными качествами, чем ранее известные методы. Для построения новых явных и неявных итерационных методов был использован наиболее общий из известных в настоящее время подходов к решению некорректных задач – подход, основанный на введённом А.Н. Тихоновым понятии регуляризатора. Проведено сравнение предложенных методов с наиболее изученным в литературе методом простой итерации.

В частности, метод простой итерации с попеременно чередующимся шагом для получения решения требует в три раза меньше итераций, чем метод простой итерации с постоянным шагом. Семейство явных методов с более высокой степенью оператора, обобщающее метод простой итерации, для получения оптимального решения требует в k раз меньше итераций, чем метод простой итерации.

Неявные методы, представляющие собой семейства итерационных схем, зависящих от параметра k, в силу отсутствия ограничений сверху на шаг по антиградиенту позволяют получить оптимальное решение уже на первом шаге итераций. Один из предложенных неявных методов позволяет решать операторные уравнения с неограниченным оператором, притом необязательно положительным.

Для предложенных методов впервые проведено достаточно полное их исследование.

Сначала изучен априорный выбор числа итераций для уравнений с приближенно заданной правой частью и точным оператором. При этом установлены достаточные условия сходимости методов. Получены априорные оценки погрешности в предположении, что известен класс истокопредставимых решений, которому решение при данном $y \in R(A)$ принадлежит. Поскольку такая информация обычно недоступна или неточна, априорный выбор числа итераций имеет в основном теоретическое значение: он позволяет выявлять принципиальные возможности методов.

Использование в работе энергетической нормы делает предложенные методы эффективными и в случае, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения. В этом случае удается получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова методов уже без дополнительного требования на гладкость точного решения. Получены условия, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.

Предлагается и другой способ сделать методы эффективными и тогда, когда отсутствует дополнительная информация на гладкость точного решения. Для этого в монографии обосновано применение к итерационным методам правил останова по малости невязки: выбирается то значение итераций n, при котором невязка сравнима с уровнем погрешности правой части уравнения. Подобное согласование n с уровнем погрешности правой части принято называть *принципом невязки*. Оказывается, что при таком выборе n мы получаем оптимальные по порядку методы на классах истокопредставимых решений, при этом сам выбор n не использует информацию истокопредставимости и вообще какую-либо другую информацию, кроме оценки уровня погрешности правой части уравнения. Доказано, что предложенные итерационные методы сходятся к точному решению, для них получены оценки погрешности и оценки для момента останова. Обоснована также возможность применения к предложенным методам правила останова по разности соседних приближений: использование этого правила останова делает методы эффективными в случае отсутствия сведений об истокопредставимости точного решения.

Для всех методов исследован случай неединственного решения уравнения (нуль является собственным значением оператора). Показано, что тогда итерационные процессы сходятся к нормальному решению.

Для некоторых из предложенных методов изучен априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации в случае приближенно заданного самосопряженного и несамосопряженного оператора: доказана сходимость методов, получены оценки погрешности и оценки для апостериорного момента останова.

Некоторыми из предложенных методов решены модельные некорректные задачи. Для их решения использовались ПЭВМ, и программы составлялись в среде программирования DELPHI. При решении модельных задач нашли подтверждение выводы о преимуществах предложенных методов по сравнению с наиболее изученным в математической литературе явным методом простой итерации.

Рассмотренные в монографии итерационные методы найдут практическое применение в прикладной математике: они могут быть использованы для решения задач, встречающихся в динамике и кинетике, математической экономике, геофизике, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, автоматической обработке результатов физического эксперимента, определении формы радиоимпульса, излученного источником, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке (математическая обработка измерений), при решении обратной кинематической задачи сейсмики, космических исследованиях (спектроскопии) и медицине (томографии). Разработанные методы позволят успешно решать задачи, часто возникающие в различных отраслях агропромышленного комплекса Республики Беларусь.

Укажем ещё на используемую систему нумерации. Все утверждения типа лемм, теорем, замечаний, следствий и т.д. имеют в книге общую для них всех сплошную нумерацию, задаваемую двумя числами. Первое число есть номер главы, а второе – порядковый номер утверждения в данной главе. Пронумерованные соотношения имеют аналогичную двойную нумерацию.

Книга предназначена для научных работников и инженеров-исследователей, занимающихся применениями функционального анализа к приближённым и численным методам или прикладной математикой, а также для иных специалистов, чьи интересы связаны с некорректными задачами. Её можно использовать в курсе лекций и спецкурсах для студентов физико-математических факультетов университетов.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность рецензентам – докторам физико-математических наук члену-корреспонденту НАН Беларуси Л.А. Яновичу и профессору БГУ Н.А. Лиходеду, замечания которых способствовали улучшению содержания книги. Автор также весьма признателен профессору БГУ П.П. Забрейко и профессору ГрГУ имени Я. Купалы Ю.М. Вувуникяну за обсуждение отдельных результатов исследования.

О.В. Матысик

ВВЕДЕНИЕ

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач.

Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике и управлении может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \tag{1}$$

с заданным оператором $A: X \to Y$ и элементом y, X и Y – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы. Ж. Адамаром (J. Hadamard) [128, 129] было введено следующее понятие корректности:

Определение 1. *Задачу отыскания решения* $x \in X$ *уравнения* (1) *называют* *<u>корректной</u>* *(или* *<u>корректно поставленной</u>*, *или* *<u>корректной по Адамару</u>*), *если при любой фиксированной правой части* $y = y_0 \in Y$ *уравнения* (1) *его решение*:

а) существует в пространстве X *;*

б) определено в пространстве X *однозначно;*

в) устойчиво в пространстве X *, т. е. непрерывно зависит от правой части* $y \in Y$. *В случае нарушения любого из этих условий задачу называют* *<u>некорректной</u>* (*<u>некорректно поставленной</u>*); *более конкретно при нарушении условия в) ее принято называть* *<u>неустойчивой</u>*.

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора A^{-1} на всем пространстве Y.

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались.

Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения I-го рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2, обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии, задача аналитического продолжения функции, известной на части области, на всю область. Некорректны также и задача проектирования оптимальных систем, конструкций, задача создания систем автоматической обработки результатов физического эксперимента, задача Коши для уравнения теплопроводности с обращенным временем и т.д.

Однако обычные методы, применяемые для решения корректных задач, невозможно было применить к некорректным задачам, поэтому необходимо было пересмотреть определение корректности по Адамару. Это было сделано в 1943 году А.Н. Тихоновым [118].

Определение 2. *Задача отыскания решения уравнения* (1) *называется корректной по Тихонову на множестве* $M \subset X$ *, а множество* M *– ее классом корректности, если:*

а) точное решение задачи существует в классе M *;*

б) в классе M *решение задачи единственно при любой правой части* $y \in F = AM \subset Y$ *;*

в) принадлежащее множеству M *решение задачи устойчиво относительно правых частей* $y \in F$ *.*

Если $M = X$ и $F = Y$, то корректность по Тихонову совпадает с корректностью по Адамару.

После работ А.Н. Тихонова систематическое изучение некорректных задач и способов их решения началось в 50-х годах, но особенно широкий размах оно приняло в последние 50 лет. Основные результаты отражены в монографиях М.М. Лаврентьева [35], А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина [120], В.А. Морозова [89], В.К. Иванова, В.В. Васина и В.П. Тананы [24], О.А. Лисковца [40], Г.М. Вайникко и А.Ю. Веретенникова [12].

Наиболее общим из известных в настоящее время подходов к решению некорректных задач является подход, основанный на введенном А.Н. Тихоновым понятии регуляризатора.

Пусть имеется некорректная в классическом смысле задача математической физики.

Определение 3. *Параметрическое семейство операторов* $\{R_\alpha\}$*, действующих из пространства правых частей* Y *в пространство решений* X *, называется регуляризующим (регуляризующим алгоритмом, или регуляризатором), если:*

1) *при любом* $\alpha > 0$ *оператор* R_α *определен на всем пространстве* Y *;*

2) *если существует точное решение исходной задачи* $x \in X$ *, то для любого* $\delta > 0$ *существует* $\alpha(\delta)$ *такое, что для всех* $y_\delta \in Y$ *,* $\|y - y_\delta\| \le \delta$ *имеет место соотношение* $\left\|R_{\alpha(\delta)} y_\delta - x\right\|_X \to 0, \quad \delta \to 0.$ *Параметр* α *называется параметром регуляризации,* $x_{\alpha,\delta} = R_{\alpha(\delta)} y_\delta$ *– регуляризованными решениями.*

Использование регуляризатора задачи дает возможность сколь угодно точного ее решения при достаточно точных исходных данных.

В работе [119] А.Н. Тихонов предлагает способ построения регуляризующих операторов для уравнения (1). Это метод регуляризации решения некорректных задач. Он основан на вариационном принципе. В методе рационально выбирается параметр регуляризации, используется априорный способ выбора и предложены принципы невязки и сглаживающего функционала.

Для решения некорректных задач В.К. Иванов в работе [21] излагает метод квазирешений. Большое применение для регуляризации некорректных задач имеет также и метод невязки, предложенный Д.Л. Филлипсом (D.L. Phillips) [131] и В.К. Ивановым [23].

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы. Еще в 30-е годы в работах Т. Карлемана (T. Carleman) [125], Г.М. Голузина и В.И. Крылова [15], И.Г. Малкина [44] были предложены первые методы приближений, дающие в пределе точные решения уравнения (1), если данные, т. е. оператор A и правая часть y заданы точно. Для решения задачи Коши для уравнения Лапласа с точными данными итерационный метод изложен в работе Б.А. Андреева [1]. В общем виде итеративный метод сформулирован А.К. Маловичко [45]. Однако в этих работах отсутствует необходимое исследование влияния погрешностей данных, которое весьма важно для решения некорректных задач. В работе [35] М.М. Лаврентьев обосновал сходимость метода последовательных приближений при приближенной правой части линейных уравнений и распространил полученные результаты на случай нелинейных уравнений. При других предположениях метод последовательных приближений был исследован Ю.Т. Антохиным [2; 3]. Изучению итерационных методов посвящены работы В.Н. Страхова [115–117], М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицкого и В.Я. Стеценко [31]. Различные схемы итерационных методов, предложенные А.С. Апарциным [4], В.К. Ивановым [22; 23], А.С. Кряневым [34], М.М. Лаврентьевым [35], В. Липфертом (W. Lipfert) [130], А.Б. Бакушинским и А.В. Гончарским [5, 8], Г.В. Гроэтчем (G.W. Groetsch) [127], В.А. Морозовым [87], В.В. Васиным [13], С.М. Оганесяном и В.Ч. Старостенко [90], Л.Э. Сарвом [113], Г.В. Хромовой [123], Х. Бялым (H. Bialy) [124], С.Ф. Гильязовым и Н.Л. Гольдманом (S. F. Gilyazov and N.L. Gol'dman) [126], К.Р. Вогелем (C.R. Vogel) [132], применялись для решения многих некорректных задач в гильбертовых пространствах. Для решения некорректных задач в банаховых пространствах применялись методы итераций, предложенные в работах А.Б. Бакушинского и В.Н. Страхова [6; 7]. Метод простых итераций при приближенно заданных правой части и операторе изучался в работах О.А. Лисковца и Я.В. Константиновой [28; 29]. Различные схемы явных и неявных итерационных методов с априорным выбором числа итераций предложены в работах О.А. Лисковца и В.Ф. Савчука [36–39]. Методу простой итерации также посвящены работы А.М. Денисова [17], А.А. Самарского и П.Н. Вабищевича [112]. В некоторых из этих работ рассматриваются случай приближенно заданных операторов и случай неединственности решения.

Большинство перечисленных работ посвящено априорному выбору числа итераций. Это означает следующее. В предположении, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, т.е. $x = A^s z,\ s > 0,$ находилась оценка погрешности метода, которая затем оптимизировалась по $n,$ т.е. вычислялось значение итераций $n_{\text{опт}},$ при котором оценка погрешности являлась минимальной.

Однако поскольку не всегда имеются сведения об истокопредставимости точного решения, то трудно разумным образом определить число итераций $n_{\text{опт}}$. Тем не менее, итерационные методы решения некорректных задач можно сделать вполне эффективными, если воспользоваться правилами останова по невязке и по соседним приближениям. Апостериорный выбор числа итераций для метода простых итераций впервые был предложен И.В. Емелиным и М.А. Красносельским [19–20]. Дальнейшее развитие идеи работы [20] получили в работах Г.М. Вайникко [9–11], Г.М. Вайникко и А.Ю. Веретенникова [12].

В.Ф. Савчук [91–103] продолжил исследования в этом направлении. Им предложено несколько новых итерационных методов решения некорректных задач в гильбертовом пространстве с ограниченным и неограниченным, самосопряженным и несамосопряженным операторами. Обоснована возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям для различных схем методов итераций, явных и неявных, которые превращают предложенные итеративные методы в регуляризующие алгоритмы для задачи (1), не требуя при этом знания истокопредставимости точного решения, но в случае истокопредставимости обеспечивают оптимальную в классе скорость сходимости.

В монографии продолжено изучение явных и неявных итерационных методов. Предложены и изучены четыре явных и четыре неявных итерационных метода решения некорректных задач в гильбертовом пространстве. Для них исследован априорный выбор числа итераций при точной и приближенной правой части уравнения: доказана сходимость предложенных методов в исходной норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности, вычислительная погрешность. Исследован случай неединственности решения и показано, что в этом случае имеет место сходимость методов к решению с минимальной нормой. Использование энергетической нормы для исследования сходимости методов позволило получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова итераций без дополнительного требования на гладкость решения – его истокообразной представимости. Была обоснована возможность применения к итерационным методам правил останова по невязке и по соседним приближениям, что сделало эти методы эффективными и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения. Проведено сравнение предложенных явных методов между собой и с широко известным явным методом простой итерации. Показано, что для достижения оптимальной точности зачастую изучаемыми методами требуется выполнить в несколько раз меньше итераций, чем методом простой итерации, хотя по мажорантным оценкам погрешности все методы имеют один и тот же порядок и незначительно отличаются в ту или другую сторону только коэффициентами пропорциональности. Проведено сравнение неявных методов между собой и с явными методами. Показано преимущество неявных методов итераций по сравнению с явными: за счёт выбора итерационного параметра оптимальную оценку погрешности неявными методами можно получить уже на первом шаге итераций, что невозможно для явных методов.

Для некоторых из предложенных методов изучен априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации в случае приближенно заданного оператора: доказана сходимость методов, получены оценки погрешности и оценка для апостериорного момента останова.

При решении предложенными методами модельных некорректных задач нашли подтверждение выводы о преимуществах методов по сравнению с наиболее изученным явным методом простой итерации, т. е. подтвердилось то, что для достижения оптимальной точности предложенными в книге методами требуется в несколько раз меньше итераций, чем методом простой итерации.

Рассмотренные в монографии итерационные методы могут быть использованы для решения задач, встречающихся в геологоразведке, сейсмике, спектроскопии, гравиметрии, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, автоматической обработке результатов физического эксперимента, экономике.

ГЛАВА 1

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В последние десятилетия математическая наука обогатилась важным разделом − теорией некорректно поставленных задач и методов их приближенного решения. Развитие этого раздела математики вызвано многочисленными приложениями в технике, физике, экономике и других естественных науках.

Потребности практики приводят к необходимости решения подобных задач, которые во многих случаях описываются операторными уравнениями I рода. В настоящее время теория некорректных задач успешно применяется для решения широкого круга обратных задач оптики и спектроскопии, электродинамики, радиоастрономии, диагностики плазмы, геофизики, теории потенциала и гравиметрии. Для их решения широко используются итерационные схемы, позволяющие при обработке экспериментальной информации существенно повысить точность определения характеристик изучаемых физических явлений. Поэтому огромное значение имеют разработка и изучение новых итерационных методов решения некорректных задач, получение условий их сходимости, нахождение оценок погрешности и обоснование применения к методам правил останова в процессе вычислений. Изложим некоторые факты из истории развития теории итерационных методов решения некорректных задач.

Лаврентьев М.М. в работе [35] для операторного уравнения I рода $Au = f$, где A – линейный вполне непрерывный оператор, $A = A^* > 0$, $\|A\| \le 1$ и $0 \in S_A$ (S_A – спектр оператора A) при приближённой правой части f_δ: $\|f - f_\delta\| \le \delta$ рассмотрел применение следующей явной итеративной схемы:

$$u_n = u_{n-1} - (Au_{n-1} - f_\delta),\ u_0 = f_\delta .$$

Доказана сходимость предложенного итеративного метода к точному решению уравнения $\bar{u}$ при специальном выборе $n = n(\delta)$(при согласовании с погрешностью δ), т. е. что $u_n \to \bar{u}$, когда $\delta \to 0, n \to \infty$. Получена оценка погрешности метода: $\|u_n - \bar{u}\| \le \omega\left(\frac{1}{n+2}\right) + n\delta$. Здесь (см. [35]) $\omega = \omega(n)$. Автором была обоснована сходимость предложенного метода последовательных приближений для некоторых классов нелинейных операторных уравнений.

При других предположениях метод простой итерации был исследован *Антохиным Ю.Т.* [2]. Здесь рассматривается уравнение $Ax = f$ в гильбертовом пространстве, $A = A^*$ – линейный, неограниченный оператор со всюду плотной областью определения $D(A)$. Для оператора нуль служит точкой его же спектра, но в то же время не является собственным значением, т. е. существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\|x_n\|=1$, $\|Ax_n\| \to 0, n \to \infty$ и $Ax_n \neq 0$ при $x \neq 0$. В дальнейшем предполагается, что решение уравнения существует. Предложенная здесь схема явного метода последовательных приближений выглядит так:

$$x_1 = f,\ x_n = \left(E - \frac{1}{n}A\right)x_{n-1} + \frac{1}{n}f\,.$$

Для данного метода при условии, что оператор $A = A^* > 0$, доказана сходимость $\|R_n\|^2 = \|x - x_n\|^2 \to 0,\ n \to \infty$ и также ещё получена оценка погрешности $\|R_n\|^2 = \int\limits_0^{\|A\|} |r_n(\lambda)|^2\, d\,(E_\lambda x, x) \le \int\limits_0^{\varepsilon} d\,(E_\lambda x, x) + \left(\frac{K_1{}^2}{n^{2\varepsilon}} + \frac{1}{(n!)^2}\right)K^2$, где $K_1 \neq K_1(n)$, $K \neq K(n)$ и $\forall\ \varepsilon \in (0{,}1)$: $|r_n| \le 1$ при $0 \le \lambda \le \varepsilon$; $|r_n| \le K_1(\varepsilon)/n^{\varepsilon}$ при $\varepsilon \le \lambda \le n+1-\varepsilon$; $|r_n| \le \lambda^n/n!$ при $n < \lambda$, в предположении, что $f \in D(A^n)$, $n = 1,2,\ldots$, причём $\|A^n f\| \le K$ и $\|x\| \le K$.

Апарциным А.С. [4] в гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода $A\varphi = f$ с положительным самосопряжённым вполне непрерывным оператором A. Предполагается, что уравнение разрешимо. Пусть $\bar{\varphi}$ – нормальное решение, т. е. решение с минимальной нормой (случай неединственного решения рассматриваемого операторного уравнения). Хорошо известно, что задача нахождения $\bar{\varphi}$ некорректна. В настоящей работе рассматривается явная итерационная процедура вида

$$\varphi_{n+1,\alpha_{n+1}} = [(1-\mu\alpha_n)E - \mu A]\varphi_{n,\alpha_n} + \mu f,\ \varphi_{0,\alpha_0} = \mu f,$$

которая является дискретным аналогом линейного дифференциального уравнения $\dfrac{dW(t)}{dt} + [\alpha(t)E + A]W(t) = f$, где $W(t_0) = W_0 \in H$, $\alpha(t)$ – положительная монотонно убывающая функция при $t \ge t_0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = 0$. Рассмотрена сходимость метода и доказана

Теорема 1.1. *Пусть последовательность неотрицательных чисел* α_n *такова, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$*, и* $0 < \mu < \dfrac{2}{\alpha_n + \|A\|}$, $n = 0,1,2,\ldots$ ($A: H \to H$). *Тогда выполняется* $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\bar{\varphi} - \varphi_{n+1,\alpha_{n+1}}\right\|_H = 0$.

Также доказана сходимость предложенной процедуры при приближенной правой части уравнения ($\|f - f_n\| \le \delta_n$), и когда оператор A заменяют некоторым более удобным для вычислений “приближенным оператором” (если A – интегральный оператор, то его заменяют квадратурной формулой).

Крянев А.В. [34] решает линейное уравнение $Ax = y$, где $A: H \to H$ – ограниченный, самосопряжённый, линейный и неотрицательный оператор. Если A – вполне непрерывный, то $A(H) \ne H$ (задача некорректна, так как не для всех $y \in H$ разрешима). Рассмотрен случай неединственного решения данного уравнения.

Вводится $B: H \to H$ – ограниченный, самосопряжённый, линейный и положительно определённый оператор, для которого $M_B = \sup\limits_{\|x\|=1}(Bx, x)$, $m_B = \inf\limits_{\|x\|=1}(Bx, x) > 0$ и $M_A = \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax, x)$. При сделанных предположениях определён оператор $C = (A + B)^{-1}B$, спектральный радиус которого, очевидно, равен 1. Для решения линейного уравнения автор предлагает неявный итерационный процесс $Ax_n + Bx_n = Bx_{n-1} + f$, который можно переписать в эквивалентной форме:

$$x_n = Cx_{n-1} + (A + B)^{-1} f.$$

Доказана сходимость метода при точной и приближенной правой части уравнения.

Рассмотрен случай суммарных возмущений оператора и правой части уравнения: ΔA и Δf, получена оценка погрешности

$$\|x - x_n\| \le M_0(n) + \delta\frac{q^n - 1}{(q-1)m_B}\left[MqN_0 + \frac{MN}{m_B} + 1 + O(\delta)\right],$$

где $\|C\| = q$, $\|\Delta A\| \le M\delta$, $\|\Delta f\| \le \delta$, $\|f\| \le N$, $0 \le M_0(n) \to 0$ при $n \to \infty$ и $0 \le O(\delta) \le C_0\delta$ $(C_0 \ge 0,\ C_0 \ne C_0(\delta))$, $\left\|(A + B)^{-1}\Delta A\right\| < 1$.

Автором решён следующий *численный пример*. Ищется решение интегрального уравнения Фредгольма I рода

$$\int_{-3}^{3} K(t-s)x(s)ds = f(t), \quad |t| \le 3, \quad \text{где } K(z) = \begin{cases} 1+\cos(\pi z/3), |z| \le 3, \\ 0, |z| > 3. \end{cases}$$

Бралась такая функция $f(t)$, которой соответствует решение $x(t) = K(t)$. Интеграл заменялся квадратурной формулой по правилу Симпсона (число точек разбиения $m = 29$). В качестве матрицы B бралась трехдиагональная (формата 29×29) – матрица (b_{ij}): $b_{ii} = 2, i = \overline{1,29}, \quad b_{i,i-1} = b_{i-1,i} = -1, i = \overline{2,29}$. Сначала рассматривается итерационная схема $Ax_n + \varepsilon Bx_n = \varepsilon Bx_{n-1} + f, \varepsilon > 0$, где $A + \varepsilon B$ – положительно определенная симметричная матрица формата $m \times m$ (A, B – положительно определенные симметричные матрицы формата $m \times m$, но A – плохо обусловленная), которая при достаточно больших $\varepsilon > 0$ хорошо обусловленная. Представляется $A + \varepsilon B = C^T C$, где C – верхняя треугольная матрица, и предложенная схема заменяется более удобной

$$C^T Cx_n = \varepsilon Bx_{n-1} + f, \varepsilon > 0,$$

которой и решается рассмотренный численный пример.

Фридман В.М. в статье [122] для решения в гильбертовом пространстве уравнения I рода $Lx = Ax - y = 0$ с линейным ограниченным оператором A предлагает итерационный метод

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|Lx_n\|^2}{\|A^* Lx_n\|^2} A^* Lx_n.$$

С использованием интегрального представления оператора $A^* A$ рассмотрен случай неединственности решения уравнения (рассматриваемая задача некорректна) и доказана сходимость предлагаемого метода: $x_n \to Px_0 + u$, где $x_0 \in H$ – начальное приближение, u – единственное решение уравнения, P – оператор проектирования на подпространство нулей оператора A.

Страховым В.Н. [115] в гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода $f = (E - T)\varphi$, где оператор $T = T^* \ge 0$ и $\|T\| = 1$, $1 \in S_T$, $f \in R(E - T)$. Для решения уравнения предлагается итерационная схема

$$\varphi_n = T\varphi_{n-1} + f\ ,$$

из которого следует $\varphi - \varphi_n = T^n(\varphi - \varphi_0)$. С помощью интегрального представления положительного самосопряжённого оператора T получено: $\|\varphi - \varphi_n\|^2 = \int_0^1 \mu^{2n}\, d\left(E_\mu(\varphi - \varphi_0), \varphi - \varphi_0\right)$. Доказана сходимость метода, и для получения оценки погрешности $\left(\|\varphi - \varphi_n\| = O\left(\frac{1}{n^x}\right)\right)$ использовалось предположение об истокопредставимости точного решения, т. е. что $\varphi \in R\left((E - T)^x\right),\ x > 0$.

В работе [117] *Страхов В.Н.* решает операторное уравнение I рода $A\varphi = f\ \left(\|A^{-1}\| = +\infty\right)$ методом

$$\varphi_0 = f_0,\ \varphi_n = (E - A)\varphi_{n-1} + f\ ,$$

потребовав $\|E - A\| = 1$. Автором используется начальное приближение: $\varphi_0 = f_0$, где f_0 – произвольная функция из гильбертова пространства $H = L_2(-\infty, +\infty)$. В работе доказана сходимость метода: $\|\varphi_n - \varphi\| = \left\|(E - A)^n(\varphi_0 - \varphi)\right\| \to 0,\ n \to \infty$. Оценка погрешности метода не получена.

Наиболее подробно априорный выбор числа итераций для метода простой итерации

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta}),\ x_{0,\delta} = 0 \tag{1.1}$$

изучен *Лисковцом О.А.*, *Константиновой Я.В.* [28]. Здесь авторами показано, что метод простой итерации сходится к точному решению уравнения $Ax = y_\delta$ ($A: H \to H$ – положительный ограниченный самосопряжённый оператор) при условии $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$, если ограничиться числом итераций $n = n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n(\delta)\delta \to 0$ при $n \to \infty,\ \delta \to 0$. При условии $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$ и в предположении, что точное решение истокопредставимо, т. е. $x = A^s z,\ s > 0$, получена справедливая при всех $n \ge 1$ оценка погрешности $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s (n\alpha e)^{-s}\|z\| + n\alpha\delta$. Полученная оценка оптимизирована по n. Для этого при заданном δ найдено такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Оптимальная оценка погрешности для метода итераций (1.1) имеет вид $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (s+1)e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\left\|z\right\|^{\frac{1}{s+1}}$ и получается при $n_{\text{опт}} = s\alpha^{-1}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{1}{s+1}}\left\|z\right\|^{\frac{1}{s+1}}$. Очевидно, для уменьшения $n_{\text{опт}}$ (здесь и далее $n_{\text{опт}}$ есть целое число) и, значит, числа итераций для получения решения x уравнения следует выбирать параметр α возможно большим из условия $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$. Также для итерационной процедуры получена погрешность в счете и изучен случай приближенно заданного оператора A_h : $\|A_h - A\| \le h$. С учетом погрешности в операторе получена оценка погрешности метода $\left\|x - y_{n,\delta}\right\| \le s^s(n\alpha e)^{-s}\|z\| + n\alpha\delta + \left((1+\alpha h)^n - n\alpha h - 1\right)h^{-1}\|y_\delta\|$, принимающая оптимальный для задач этого класса порядок $\left\|y_{n,\delta} - x\right\| = O\left((\delta+h)^{s/(s+1)}\right)$, если $n \underset{\cap}{\overset{\cup}{}} (\delta+h)^{-1/(s+1)}$.

В [124] *Bialy H.* решает уравнение I рода $Ax = y$, где $H -$ полное, сепарабельное гильбертово пространство, $A: H \to H -$ линейный ограниченный положительный оператор, нуль является его собственным значением (решение уравнения неединственно). Для решения рассматриваемого уравнения используется итеративная схема

$$x_n = x_{n-1} + \tau(y - Ax_{n-1}),\ x_0 \in H,\ 0 < \tau < \frac{2}{\|A\|}.$$

Доказана сходимость метода в случае неединственного решения. Показано, что в этом случае метод сходится к решению с минимальной нормой. Автором рассматриваются обобщения метода простой итерации:

$$x_n = x_{n-1} + T(y - Ax_{n-1}),\ x_0 \in H,\ T: H \to H,\ T = \tau A^*,\ 0 < \tau < \frac{2}{\|A\|^2};$$

и в случае, когда $A -$ эрмитов оператор $\left(A \ne \varnothing,\ A = A^* \text{ и } \forall x \in H\ (Ax, x) \ge 0\right)$,

$$x_n = x_{n-1} + (-1)^{n-1}\tau(y - Ax_{n-1}),\ x_0 \in H,\ 0 < \tau < \frac{\sqrt{2}}{\|A\|}.$$

Для всех приведенных схем автор доказывает сходимость в случае неединственного решения.

Впервые *Савчуком В.Ф.* и *Лисковцом О.А.* [37] при условии $0 < \alpha < 2\|A\|^{-1}$ доказана сходимость метода простой итерации (1.1) в энергетической норме гильбертова пространства: $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. Для получения оценок погрешности не потребовалось сведений об истокопредставимости точного решения. Переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $s = 1/2$ для точного решения.

Справедлива

Теорема 1.2. *Итерационный процесс* (1.1) *при условии* $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$ *сходится в энергетической норме пространства H, если выбирать число итераций n из условия* $\sqrt{n}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0.$ *Для процесса* (1.1) *справедлива оценка погрешности* $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (2n\alpha e)^{-1/2}\|x\| + [(35/54)n\alpha]^{1/2}\delta, \quad n \ge 2.$

Полученная оценка оптимизирована по n и найдено $n_{\text{опт}}$: $\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le (35/27)^{1/4}(2\delta\|x\|)^{1/2}e^{-1/4},\ n_{\text{опт}} = (35/27)^{-1/2}\alpha^{-1}e^{-1/2}\delta^{-1}\|x\|.$

Работа *Лисковца О.А., Константиновой Я.В.* [29] посвящена решению в гильбертовом пространстве H уравнения $Ax = y$ с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A. $0 \in S_A$, но нуль не является собственным значением оператора. Предполагается существование единственного решения уравнения. Для его отыскания строится градиентный метод итерации с переменным шагом

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y),\ x_0 = 0.$$

При условиях

$$0 < \alpha_i < \frac{2}{\|A\|},\ \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty \tag{1.2}$$

доказана сходимость предложенного метода при точной правой части уравнения. В случае, когда правая часть уравнения известна приближенно $y_\delta : \|y - y_\delta\| \le \delta$, метод сходится при условиях (1.2) и если $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0.$ В предположении, что точное решение x истокопредставимо и при условии $0 < \alpha_i \le \frac{r(c_i)}{\|A\|}$ (где $r(c)$ − единственный корень уравнения $r = 1 + \left(\frac{c}{er}\right)^c$, $c > 0$) получена общая оценка погрешности в случае приближенно заданного оператора ($\|A - A_h\| \le h$):

$$\|x - y_{n,\delta}\| \le s^s(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)^{-s} e^{-s}\|z\| + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\delta +$$
$$+ ((1 + \alpha_1 h)(1 + \alpha_2 h) \cdot \ldots \cdot (1 + \alpha_n h) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)h - 1)h^{-1}\|y_\delta\|.$$

В статье [30] *Константиновой Я.В.* строится регуляризующий алгоритм в виде неявного итерационного процесса

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha(Ax_{n+1,\delta} - y_\delta), \ \alpha > 0, \ x_{0,\delta} = 0$$

в случае, когда правая часть уравнения $Ax = y_\delta$ задана приближённо. Здесь доказывается сходимость предложенного метода, но не получена эффективная оценка погрешности.

В [33] целая глава (автор *Лисковец О.А.*) посвящена некорректным задачам и методам их решений. Здесь для решения операторного уравнения I рода $Ax = y_\delta$ предлагаются вариационные методы решения (метод квазирешений Иванова, метод тихоновской регуляризации, метод и принцип невязки Филлипса и Иванова), обобщенное суммирование рядов, конечно-разностный метод и метод итераций. Даются определения корректности задачи по Адамару и по Тихонову, определения регуляризующего алгоритма рассматриваемой задачи, формулируются достаточные условия сходимости предлагаемых методов.

С помощью метода квазирешений, метода невязки, метода регуляризации и при $\alpha = 9{,}6$ итерационного метода (1.1) в гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$ решается модельная задача в виде уравнения $\int_0^1 A(t,s)\, x(s)\, ds = y(t), \quad 0 \le t \le 1$ с симметричным положительным ядром $A(t,s) = \begin{cases} t(1-s), 0 \le t \le s \le 1, \\ s(1-t), 0 \le s \le t \le 1, \end{cases}$ точной правой частью $y(t) = \frac{t(t-1)(t^2 - t - 1)}{12}$ и точным решением $x(t) = t(1-t)$. Оператор, описанный выше интегральным уравнением, непрерывен, взаимнооднозначен и аддитивен.

Работа *Лисковца О.А.* [41] посвящена обзору основных результатов по рассматриваемой теме. Здесь подчеркивается, что для линейного уравнения $Ax = y$ в гильбертовом пространстве H с самосопряжённым оператором $A = A^*$ некорректность задачи эквивалентна принадлежности значения $\lambda = 0$ спектру оператора S_A, поэтому для решения уравнения оператор A можно заменить близким к нему оператором, спектр которого отделен от нуля. Эта идея была реализована многообразными способами. При положительном самосопряженном операторе $A = A^* \geq 0$ к нему можно добавлять оператор αE, где $\alpha > 0$, а E – тождественный оператор, сводя тем самым исходную задачу к уравнению (метод Лаврентьева)

$$Ax + \alpha x = y, \quad \alpha > 0, \tag{1.3}$$

при этом необходимым и достаточным для регуляризации является условие $\delta = O(\alpha)$, регуляризатором служит семейство линейных операторов $R_\alpha = (A + \alpha E)^{-1}$. При самосопряжённом операторе $A = A^*$ к нему можно добавлять оператор $i\alpha E$, где i – мнимая единица, α – вещественное число, или оператор zE с комплексным z, не принадлежащим спектру S_A; то же верно при симметричном замкнутом операторе. При общем линейном операторе к рассматриваемому уравнению после левой трансформации Гаусса (умножения слева на сопряжённый A^*) применяют метод (1.3), сводящийся в этом случае к уравнению $A^*Ax + \alpha x = A^*y$, $\alpha > 0$; регуляризатором теперь служит семейство $R'_\alpha = \left(A^*A + \alpha E\right)^{-1} A^*$. Для решения преобразованного уравнения $A^*Ax = A^*y_\delta$ в случае погрешности в операторе ($\|A - A_h\| \leq h$) пригодны и нелинейные итерационные методы

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \gamma_n A_h^* r_n, \; r_n = A_h x_{n,\delta} - y_\delta, \; x_{0,\delta} = 0,$$
$$\gamma_n = \gamma_n(\alpha) = \left(\left(A_h A_h^*\right)^\alpha r_n, r_n\right) \Big/ \left(\left(A_h A_h^*\right)^{\alpha+1} r_n, r_n\right),$$

называемые α-методами. При $\alpha \geq 1$ априорный выбор $n = O\left((\delta + h)^{-2}\right)$, или выбор по невязке первого n, для которого $\|r_n\| \leq b\delta + dh = \eta(\delta, h)$ с заданными числами $b > 1$, $d > \|x\|$ превращает эти методы в регуляризующие алгоритмы.

Работа [18] посвящена *спурт-методу* построения последовательных приближений. Решается линейное уравнение $x = Ax + f$, где A – самосопряжённый положительно определённый оператор, действующий в конечномерном евклидовом пространстве R^k. В работе утверждается:

1) если $\|A\| < 1$, то последовательные приближения $x_{n+1} = Ax_n + f$ сходятся к точному решению уравнения;

2) в случае, когда $\|A\|$ близка к единице (здесь скорость приближений из условия 1) оказывается недостаточно быстрой) для ускорения сходимости при подсчете некоторых приближений лучше использовать итерационную процедуру $x_{n+1} = [(1-c)E + cA]x_n + cf$, где c – некоторый параметр, не зависящий от x_n .

В итоге авторами был предложен следующий алгоритм спурт-схемы. Полагают $A_\alpha(x) = Ax + f$, $A_\beta(x) = [(1-c)E + cA]x + cf$, и, выбирая $0 < q < \|A\|$, обозначают через $r_n = x_n - Ax_n - f$ невязку. Выбрав какое-либо начальное приближение y_0, определяются последовательные приближения $\{y_n\}$ следующим образом:

$$y_{n+1} = \begin{cases} A_\alpha(y_n), \text{если либо } \|r_n\|/\|r_{n-1}\| < q, \text{ либо } y_n = A_\beta(y_{n-1}), \text{ либо } n = 0, \\ A_\beta(y_n), \text{если } n > 0\text{ , } \|r_n\|/\|r_{n-1}\| \geq q \text{ и } y_n = A_\alpha(y_{n-1}). \end{cases}$$

Приближения y_n называют α-итерациями, если $y_n = A_\alpha(y_{n-1})$, и β-итерациями, если $y_n = A_\beta(y_{n-1})$. Из построения алгоритма следует, что первое вычисленное приближение – α-итерация; после β-итерации всегда следует α-итерация. При условии $\dfrac{2}{2-\|A\|} < c < \dfrac{2}{2-\|A\|-q}$ доказана сходимость предложенного алгоритма. Показано, что метод сокращает объем вычислений по сравнению с методом простой итерации. Недостаток спурт-схемы – повышенная чувствительность к ошибкам округления.

В статье [19] *Емелиным И.В., Красносельским М.А.* решается операторное уравнение $Ax = f$, где $A: H \to H$ – ограниченный оператор. Известно, что $0 \in S_A$, но не является собственным значением оператора. Предполагается, что $\|A\| \leq 1$. Если уравнение разрешимо $(f \in R(A))$, то применяется итерационный процесс

$$y_{n+1} = y_n - A^* A y_n + A^* \bar{f} + u_n , \qquad (1.4)$$

где $\|f - \bar{f}\| \leq \delta$, $\|u_n\| \leq \beta$ (u_n – ошибки вычисления итераций). В статье для решения уравнения используется останов по поправке (по соседним приближениям)

$$\begin{cases} \|y_n - y_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m), \\ \|y_m - y_{m+1}\| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Здесь ε – заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова). Доказана сходимость метода (1.4) и получена оценка для момента останова. Справедлива

Теорема 1.3. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от оценок* δ *и* β *норм погрешностей* $\bar{f} - f$ и u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\beta$, *то момент останова* m *определён при любом начальном приближении* $y_0 \in H$ *и любых* $\bar{f}$ *и* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условиям* $\|f - \bar{f}\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \delta + 2\beta$, *то справедлива оценка* $m \le \dfrac{\|y_0 - x^*\|^2}{(\varepsilon - \delta - 2\beta)(\varepsilon - \delta)}$;

где x^* *– точное решение уравнения* $Ax = f$;

в) если $\varepsilon(\delta, \beta) \to 0$, $\delta, \beta \to 0$ *и при этом* $\varepsilon(\delta, \beta) \ge c(\delta + \beta^p)$, *где* $c > 1$, $p \in (0,\ 1)$, *то справедливо равенство* $\lim\limits_{\delta, \beta \to 0} \|y_m - x^*\| = 0.$

Этими же авторами [20] при решении линейного уравнения $Ax = f + u$, где $A: H \to H$ – ограниченный оператор, $\|A\| \le 1$, $0 \in S_A$ и $\|u\| \le \delta$ для итерационного метода

$$y_{n+1} = y_n - A^* A y_n + A^* f + A^* u \tag{1.5}$$

обосновывается применение останова по невязке

$$\|Ay_n - f - u\| > \varepsilon, \quad n < m, \quad \|Ay_m - f - u\| \le \varepsilon.$$

Предполагается, что $\|Ay_0 - f - u\| > \varepsilon$. Справедливы

Теорема 1.4. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ *итерационной процедуры* (1.5) *определяется по числу* δ, *удовлетворяет неравенству* $\varepsilon(\delta) > \delta$ *и стремится к нулю при* $\delta \to 0$. *Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\|u\| \le \delta} \|y_m - x_*\| = 0,$$

где x_* *– точное решение уравнения,* $y_m = y_m(\varepsilon, u, y_0)$ *– приближённое решение, полученное процедурой* (1.5) *с уровнем останова* ε.

Теорема 1.5. *Пусть* $\varepsilon(\delta)$ *процесса* (1.5) *удовлетворяет неравенству* $\varepsilon(\delta) > \delta$ *и пусть* $y_0 - x_* = (A^* A)^p v$, *где* $0 < p \le 1/2$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| y_m - x_* \right\| < [\delta + \varepsilon(\delta)]^{2p/(1+2p)} \|v\|^{1/(1+2p)} + \delta. \tag{1.6}$$

При $p > 1/2$ *из* (1.6) *вытекает оценка*

$$\left\| y_m - x_* \right\| \le [\delta + \varepsilon(\delta)]^{1/2} \left\| (A^* A)^{p-1/2} v \right\|^{1/2} + \delta.$$

Теорема 1.4 показывает, что метод (1.5) с правилом останова по невязке может трактоваться как метод регуляризации в смысле Тихонова.

Вайникко Г.М. [9] получил оценки погрешности метода последовательных приближений (1.5) при решении уравнений I рода с неточно заданными оператором и правой частью. Останов последовательных приближений осуществляется по невязке или по поправке (по соседним приближениям). Итак, автором решается уравнение

$$Au = f, \tag{1.7}$$

где $A \in L(H_1, H_2) -$ линейный ограниченный оператор ($A : H_1 \to H_2$). Область значений $R(A) \subset H_2$ оператора A, вообще говоря, не замкнута (задача (1.7) не корректна, так как решение уравнения может не существовать), однако предполагается, что $f \in R(A)$. Уравнение (1.7), таким образом, разрешимо; решений может быть много, т. е. нулевое подпространство $N(A) = \{ u \in H_1 : Au = 0 \}$ нетривиально.

Автор указывает, что в реальных задачах оператор A и элемент f известны лишь приближенно, вместо них в его распоряжении имеются некоторые приближения $A_\eta \in L(H_1, H_2)$, $f_\delta \in H_2$, где

$$\left\| A_\eta - A \right\| \le \eta, \ \left\| f_\delta - f \right\| \le \delta. \tag{1.8}$$

$$\|A\| \le 1, \ \left\| A_\eta \right\| \le 1. \tag{1.9}$$

Условие (1.9) не ограничивает класса решаемых задач (1.7), так как выполнение (1.9) можно всегда достичь, умножив (1.7) на подходящую константу.

Для приближенного решения уравнения (1.7) автором строится итерационный процесс

$$u_n = \left(E - A_\eta^{\ *} A_\eta\right) u_{n-1} + A_\eta^{\ *} f_\delta \ , \qquad (1.10)$$

где E – тождественный оператор, $A_\eta^{\ *} \in L(H_1, H_2)$ – сопряжённый к A_η оператор. Здесь уравнение

$$A_\eta^{\ *} A_\eta u = A_\eta^{\ *} f_\delta \ , \qquad (1.11)$$

по которому последовательные приближения (1.10) строятся, само может быть и неразрешимым. Тем не менее, если итерации (1.10) остановить в подходящий момент, то соответствующее u_n будет близким к решению уравнения (1.7).

Автором предлагается итерации (1.10) вычислять до такого номера n, при котором норма невязки $A_\eta u_n - f_\delta$ или норма поправки $u_n - u_{n-1}$ достигнет заданного уровня малости. Здесь обозначается через u_* – нормальное решение (1.7) относительно u_0 (начального приближения), т.е. решение, для которого норма $\|u_* - u_0\|$ минимальна по сравнению с другими решениями. Автор предлагает следующие правила останова для (1.10):

Правило останова (П. 0). *Зададим $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$; итерации остановим на таком номере $n = n(\delta, \eta)$, для которого впервые* $\|u_n - u_{n-1}\| \le a_1\delta + a_2\eta$.

Правило останова (П. 1). *Зададим $b_1 > 1$ и $b_* > \|u_*\|$; итерации остановим на таком номере $n = n(\delta, \eta)$, для которого впервые* $\|A_\eta u_n - f_\delta\| \le b_1\delta + b_*\eta$.

Правило останова (П. 2). *Зададим $b_1 > 1$, $b_2 > 1$ и $a > 0$; итерации остановим на таком номере $n = n(\delta, \eta)$, для которого впервые будет выполнено хотя бы одно из неравенств* $\|A_\eta u_n - f_\delta\| \le b_1\delta + b_2\|u_n\|\eta$,

$$n \ge \frac{a}{\left(b_1\delta + b_2\|u_n\|\eta\right)^2} .$$

Доказаны

Теорема 1.6. *Пусть итерации* (1.10) *останавливаются по любому из правил останова* (П. 0), (П. 1), (П. 2). *Тогда* $\left\|u_{n(\delta,\eta)} - u_*\right\| \to 0$, *при* $\delta, \eta \to 0$, *при этом для* $n(\delta, \eta)$ *в случае правила* (П. 0) *справедливо соотношение:* $(\delta + \eta)\, n(\delta, \eta) \to 0$, *при* $\delta, \eta \to 0$, *а в случае правил останова* (П. 1) и (П. 2) *соотношение:* $(\delta + \eta)^2 n(\delta, \eta) \to 0$, *при* $\delta, \eta \to 0$.

Теорема 1.7. *Пусть погрешность* $u_0 - u_*$ *принадлежит области значений положительной степени оператора* $A^* A$ *(требование истокопредставимости точного решения):* $u_0 - u_* = \left(A^* A\right)^p v, \quad p > 0,\ \|v\| \le r$. *Тогда в случае* (П. 0) *справедливы оценки:*

$$\left\|u_{n(\delta,\eta)} - u_*\right\| \le C_{p,r}(\delta+\eta)^{p/(p+1)},\ n(\delta,\eta) \le C'_{p,r}(\delta+\eta)^{-1/(p+1)},$$

а в случае правил останова (П. 1), (П. 2) – *оценки:*

$$\left\|u_{n(\delta,\eta)} - u_*\right\| \le C''_{p,r}(\delta+\eta)^{2p/(2p+1)},\ n(\delta,\eta) \le C'''_{p,r}(\delta+\eta)^{-2/(2p+1)}.$$

Соотношение $\left\|u_{n(\delta,\eta)} - u_*\right\| \to 0$, *при* $\delta, \eta \to 0$ означает, что правила (П. 0), (П. 1), (П. 2) последовательных приближений (1.10) определяют регуляризующие алгоритмы решения операторного уравнения (1.7).

Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. в монографии [12] для решения операторного уравнения $Au = f$, где $A \in L(H_1, H_2)$ (в самосопряжённом случае $H_1 = H_2$, $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$) используют явную и неявную итерационные схемы:

$$u_n = u_{n-1} - \mu(Au_{n-1} - f),\ 0 < \mu < \frac{2}{\|A\|},$$

$$\alpha u_n + Au_n = \alpha u_{n-1} + f,\ \alpha = \mathrm{const} > 0,$$

которые в случае несамосопряжённого оператора и приближённой правой части уравнения $f_\delta : \|f - f_\delta\| \le \delta$ запишутся

$$u_{n,\delta} = u_{n-1,\delta} - \mu A^*\left(Au_{n-1,\delta} - f_\delta\right),\ 0 < \mu < \frac{2}{\|A\|^2},$$

$$\alpha u_{n,\delta} + A^* A u_{n,\delta} = \alpha u_{n-1,\delta} + A^* f_\delta,\ \alpha = \mathrm{const} > 0.$$

Авторами подчеркивается, что в итеративных методах решение операторных уравнений, описывающих некорректные задачи, с приближенной правой частью $f_\delta : \|f - f_\delta\| \le \delta$ в приближениях $u_{n,\delta}$ нельзя устремлять n к бесконечности (при $n \to \infty$ эти приближения, как правило, расходятся). Вместо этого следует указать такое согласование $n = n(\delta)$ числа итераций n с уровнем погрешности δ правой части, чтобы при $\delta \to 0$ соответствующие приближения $u_{n,\delta}$ стремились к точному решению уравнения. Это согласование желательно провести так, чтобы получить оптимальные по порядку, а при возможности оптимальные по точности методы. В [12] используются два основных способа выбора (согласования с δ) параметра регуляризации – априорный и апостериорный. В итерационных методах параметром регуляризации является номер итерации. Априорный выбор n возможен, если известен класс решений (например, класс истокопредставимых решений), которому решение при данном $f \in R(A)$ принадлежит. Поскольку такая информация обычно недоступна или неточна, то априорный выбор n имеет в основном теоретическое значение: он позволяет выявлять принципиальные возможности метода. Более практичен апостериорный выбор по невязке (или по поправке [19]): выбирается то значение n, при котором норма невязки $\|Au_{n,\delta} - f_\delta\|$ будет достаточно малой. Подобное согласование n с δ принято называть принципом невязки. Оказывается [12], что при выборе n по принципу невязки получаются оптимальные по порядку методы на классах истокопредставимых решений и некоторых других классах, при этом сам выбор n не использует информацию об истокопредставимости и вообще какую-либо другую информацию, кроме оценки $\|f - f_\delta\| \le \delta$.

В работе [12] исследуется априорный выбор числа итераций с приближенной правой частью уравнения. Для явного метода итераций доказана сходимость при $n\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$ и в предположении истокопредставимости точного решения уравнения $u_0 - u_* = \left(A^* A\right)^{p/2} v$, $p > 0$, $\|v\| \le \rho$ для них получены оценки погрешности. Также авторами рассматривается апостериорный выбор параметра регуляризации, с этой целью обосновывается применение к явному методу итераций следующих правил
останова:

Правило останова (П. 3). *Зададим* $b_1 > 1$ *и* $b_2 \ge b_1$. *Если* $\|Au_0 - f_\delta\| \le b_2\delta$, *то положим* $n = 0$ *(т. е.* u_0 *– приближённое решение уравнения). В противном случае выберем такое* $n > 0$, *для которого* $b_1\delta \le \|Au_{n,\delta} - f_\delta\| \le b_2\delta$.

Правило останова (П. 4). *Зададим* $b > 1$ *и* $\theta \in (0,1)$. *Если* $\|Au_0 - f_\delta\| \le b\delta$, *то положим* $n = 0$. *В противном случае выберем любое такое* $n > 0$, *что* $\|Au_{n,\delta} - f_\delta\| \le b\delta$, $\|Au_{n',\delta} - f_\delta\| > b\delta$ *для некоторого* $n' \in [\theta n, n]$.

Кроме того, в работе рассматривается случай, когда не только правая часть, но и оператор в линейном уравнении считаются известными приближенно: вместо $f \in R(A)$ и $A \in L(H_1, H_2)$ даны некоторые их приближения $f_\delta \in H_2$, и $A_\eta \in L(H_1, H_2)$, $\|f_\delta - f\| \le \delta$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$. В этом случае при условии $n(\delta,\eta) \to \infty$, $(\delta+\eta)n(\delta,\eta) \to 0$, при $\delta,\eta \to 0$ доказана сходимость явного метода к точному решению уравнения. При условии истокообразной представимости начальной погрешности: $u_0 - u_* = |A|^p v$, $p > 0$, $\|v\| \le \rho$ получены оптимальные оценки погрешности методов $\|u_{n(\delta,\eta)} - u_*\|_{\text{опт}} \le C_{p,\rho,d}(\delta+\eta)^{p/(p+1)}$, $0 < p \le p_0$ при выборе $n_{\text{опт}} = d(\delta+\eta)^{-1/(p+1)}$ $(d > 0)$. Здесь же рассматривается и апостериорный выбор параметра регуляризации:

Правило останова (П. 5). *Зададим* $b_1 > 1$ *и* $b_2 \ge b_1$. *Если* $\|A_\eta u_0 - f_\delta\| \le$ $\le b_2(\delta + \|u_*\|\eta)$, *то положим* $n = 0$. *В противном случае выберем такое* $n > 0$, *для которого* $b_1(\delta + \|u_*\|\eta) \le \|A_\eta u_{n(\delta,\eta)} - f_\delta\| \le b_2(\delta + \|u_*\|\eta)$.

Правило останова (П. 6). *Зададим* $b > 1$ *и* $\theta \in (0,1)$. *Если при* $n = 0$ $\|A_\eta u_{n(\delta,\eta)} - f_\delta\| \le b(\delta + \|u_*\|\eta)$ (*), *то положим* $n = 0$, *иначе выберем любое такое* $n > 0$, *при котором* (*) *выполнено, причем для некоторого* $n' \in [\theta n, n]$ $\|Au_{n'(\delta,\eta)} - f_\delta\| \ge b(\delta + \|u_*\|\eta)$.

В [12] рассматривается устойчивость предложенных итерационных методов приближений относительно малых возмущений типа погрешностей округления: помехоустойчивость итерационных методов (в некорректных задачах подобные возмущения безопасны лишь при неслишком большом количестве итераций). В этом случае в правой части предложенных итерационных схем появится слагаемое $\omega_n \in H$, $n \ge 1$ – малые в каком-то смысле возмущения и $\|\omega_n\| \le \varepsilon$. Тогда в случае, когда $A = A^* > 0$, $A_\eta = A_\eta{}^*$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\| \le a$, $f \in R(A)$, $\|f_\delta - f\| \le \delta$, $\|\omega_n\| \le \varepsilon$ $(0 < \varepsilon << \delta + \eta)$ и $u_0 - u_* = A^p v$, $p > 0$, $\|v\| \le \rho$ (и в случае несамосопряженной задачи тоже) получены оценки погрешности методов: $\|\tilde{u}_{n(\delta,\eta,\varepsilon)} - u_*\| \le C_{a,p,\rho}(\delta+\eta+\varepsilon)^{p/(p+1)}$, $0 < p < \infty$.

Здесь также рассмотрен случай нормально разрешимой задачи, т. е. задачи $Au = f$ с оператором $A \in L(H_1, H_2)$, имеющим замкнутую область значений $R(A) \subseteq H_2$. Изучен априорный и апостериорный выборы параметра регуляризации.

Кроме этого авторы рассматривают предложенную ими явную итерационную процедуру в некорректных задачах в условиях случайных ошибок: доказана сходимость методов по вероятности, сходимость методов в среднем квадратичном, обоснован статистический подход к выбору числа итераций.

Различные схемы явных и неявных итеративных методов с априорным выбором числа итераций предложены в работах *О.А. Лисковца* и *В.Ф. Савчука* [36–39, 42]. *В.Ф. Савчук* [26–27, 91–103] продолжил исследования в этом направлении. Им предложено несколько новых явных и неявных итеративных методов решения некорректных задач в гильбертовом пространстве с ограниченным и неограниченным, самосопряженным и несамосопряженным операторами. Для этих методов подробно рассмотрен априорный выбор числа итераций, доказана их сходимость, получены эффективные оценки погрешности. Для некоторых из предложенных итеративных схем обоснована возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям, которые превращают эти методы в регуляризующие алгоритмы для задачи $Ax = y_\delta$, не требуя при этом знания истокопредставимости точного решения, но в случае истокопредставимости обеспечивают оптимальную в классе скорость сходимости.

Денисов А.М. [17] решает операторное уравнение $Az = \bar{u}$, где $A: Z \to U$ – линейный, вполне непрерывный оператор (Z, U – сепарабельные гильбертовы пространства), $0 \in S_A$ и 0 не является собственным значением оператора *A*. Предполагается, что рассматриваемое уравнение имеет единственное решение $\bar{z}$, элемент $\bar{u}$ не известен, а задана приближенная правая часть $\|u_\delta - \bar{u}\| \le \delta$. Для нахождения приближенного решения предлагается явный итерационный процесс

$$z_n = z_{n-1} + \mu\left(A^* u_\delta - A^* A z_{n-1}\right),\ z_0 = \mu A^* u_\delta,\ n = 1,2,\ldots,$$

где A^* – оператор, сопряженный с *A*, μ – положительный числовой параметр. Показано, что справедливо $z_n = R_n u_\delta = \mu \sum\limits_{i=0}^{n}\left(E - \mu A^* A\right)^i A^* u_\delta$. Затем доказано, что если при $0 < \mu < \dfrac{2}{\left\|A^* A\right\|}$ выбирать $n = n(\delta)$ так, что $n(\delta)\delta \to 0$, $n \to \infty$ при $\delta \to 0$, то предложенный метод сходится при приближенной правой части уравнения, т. е. что $\left\|R_{n(\delta)} u_\delta - \bar{z}\right\| \to 0,\ \ \delta \to 0$. Эффективной оценки погрешности метода не получено.

Самарским А.А., Вабищевичем П.Н. в монографии [112] рассматривается двухслойный итерационный метод для решения уравнения $Au = f_\delta$ с приближенной правой частью

$$B\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau_{k+1}}+Au_k=f_\delta,\ k=0,1,2,\ldots.$$

Здесь $B:H\to H$ и B^{-1} существует. Применение итерационного метода для симметризованной задачи соответствует использованию приближений

$$B\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau_{k+1}}+A^*Au_k=A^*f_\delta,\ k=0,1,2,\ldots.$$

При $B=E$ и постоянном итерационном параметре $\tau_k=\tau$ получен метод простой итерации

$$\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau}+Au_k=f_\delta,\ k=0,1,2,\ldots.$$

Доказана его сходимость. Скорость сходимости последнего метода определяется постоянными $\gamma_1,\ \gamma_2$ в неравенстве $\gamma_1 E\le A\le\gamma_2 E$. При $\gamma_1>0$ метод простой итерации сходится в *H*, если $0<\tau<\dfrac{2}{\gamma_2}$, а для числа итераций *n*, необходимого для достижения точности ε, справедлива оценка $n\ge n_0(\varepsilon)=\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\rho_0},\ \rho_0=\dfrac{1-\xi}{1+\xi},\ \xi=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$. Доказана

Теорема 1.8. *Пусть в методе последовательных приближений* $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{\tau}+Au_n=f_\delta,\ n=0,1,2,\ldots$ *при условии* $0<\tau<\dfrac{2}{\gamma_2}$ *число итераций* $n(\delta)\to\infty$ *и* $n(\delta)\delta\to 0,\ \delta\to 0$. *Тогда* $\left\|u_{n(\delta)}-u\right\|\to 0$, *если* $\delta\to 0$.

Рассматривается метод простой итерации и при более жестких ограничениях $0<\tau\le\dfrac{1}{\gamma_2}$, и в предположении истокопредставимости точного решения получена оценка погрешности. Справедлива

Теорема 1.9. *Пусть точное решение уравнения принадлежит классу* $\left\|A^{-p}u\right\|\le M,\ 0<p<\infty$, *тогда для метода простой итерации с* $u_0=0$ *справедлива оценка погрешности* $\|z_n\|\le n\tau\delta+M_1 n^{-p},\ M_1=M_1(\tau,p,M)$.

Авторами проведена минимизация правой части полученной оценки погрешности и найдено $n_{\text{опт}}=\left(\dfrac{pM_1}{\tau}\right)^{\frac{1}{p+1}}\delta^{-\frac{1}{p+1}}$, т. е. $n(\delta)=O\left(\delta^{-1/(p+1)}\right)$. Получена оптимальная оценка погрешности метода простой итерации

$\left\| z_{n_{\text{опт}}} \right\| \le M_2 \delta^{\frac{p}{p+1}}$, где $M_2 = \tau \left(\frac{pM_1}{\tau} \right)^{\frac{1}{p+1}} + M_1 \left(\frac{pM_1}{\tau} \right)^{-\frac{p}{p+1}}$. В работе [112] приводится программная реализация нахождения приближенного решения модельной двумерной задачи продолжения гравитационных полей (потенциала) с использованием метода простой итерации со случайными погрешностями во входных данных.

ГЛАВА 2

ЯВНЫЕ МЕТОДЫ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИБЛИЖЁННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В настоящей главе предлагаются явные итерационные процедуры для решения некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода. Получены достаточные условия сходимости таких методов, априорные оценки погрешности. Изучается сходимость методов в энергетической норме. Рассмотрен случай неединственного решения. Обоснована возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям, что делает эти методы эффективными и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения. Проведено сравнение предложенных методов с хорошо известным в математической литературе методом простой итерации. Решены численные модельные некорректные задачи.

2.1 Сходимость в гильбертовом пространстве метода итераций решения операторных уравнений

2.1.1 Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

В работе рассматривается уравнение

$$Ax = y \tag{2.1}$$

с действующим в гильбертовом пространстве H ограниченным положительно определённым самосопряжённым оператором $A: H \to H$ в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако, вообще говоря, не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (2.1) является некорректной. Если решение уравнения (2.1) все же существует и единственно, то для его отыскания естественно пытаться применить различные итерационные методы. В настоящей работе предлагается новый явный итерационный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^k x_n + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^k\right]y, \quad x_0 = 0. \tag{2.2}$$

Здесь k – некоторое натуральное число, а оператор A^{-1}, фигурирующий в (2.2), не означает, что для рассматриваемой схемы (2.2) необходимо его знать – нужно заметить, что после раскрытия скобок во втором слагаемом он сокращается и весь оператор в квадратных скобках является полиномом от оператора A: $C_k^1 \alpha E - C_k^2 \alpha^2 A + C_k^3 \alpha^3 A^2 - \ldots - (-1)^k \alpha^k A^{k-1}$.

Предложенный метод обобщает метод простой итерации, рассмотренный в работах [1–3, 9–10, 12–13, 17, 19–20, 28, 33, 35, 86, 112, 115, 117, 124], т.е. $x_{n+1} = x_n + \alpha(y - Ax_n),\ x_0 = 0,$ последний получается из (2.2) при $k = 1$.

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ, т. е. известен y_δ, для которого $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Поэтому вместо (2.2) приходится рассматривать приближения

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^k x_{n,\delta} + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^k\right] y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0,\ k \in N. \qquad (2.3)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (2.3) понимается утверждение о том, что приближения (2.3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (2.1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (2.3) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta \to 0}\left(\inf\limits_n \|x - x_{n,\delta}\|\right) = 0$.

Докажем сходимость метода (2.3). Получим оценки погрешности метода при точной правой части, при приближенной правой части уравнения (2.1) и погрешность в счете. Справедлива

Теорема 2.1. *Итерационный процесс* (2.2) *при условии*

$$0 < \alpha < 2/\|A\| \qquad (2.4)$$

сходится.

Доказательство

По индукции нетрудно показать, что $x_n = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{kn}\right] y.$ Так как уравнение (2.1) имеет по предположению единственное точное решение, то $x = A^{-1}y$ и, значит,

$$x - x_n = A^{-1}y - A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{kn}\right] y = A^{-1}(E - \alpha A)^{kn}\, y.$$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряжённого оператора [25, с. 309] $A = \int\limits_0^M \lambda\, dE_\lambda$ (E_λ – соответствующая спектральная функция, $M = \|A\|$), получим $x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^{kn}\, dE_\lambda y.$ Разобьем полученный интеграл на два интеграла

$$x - x_n = \int\limits_0^{\varepsilon_0} \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^{kn}\, dE_\lambda y + \int\limits_{\varepsilon_0}^{M} \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^{kn}\, dE_\lambda y.$$

При условии (2.4) величина $|1-\alpha\lambda|<1$, тогда $\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{M}\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^{kn}dE_\lambda y\right\|\le q^{kn}(\varepsilon_0)\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{M}\lambda^{-1}dE_\lambda y\right\|=q^{kn}(\varepsilon_0)\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{M}dE_\lambda x\right\|\to 0,\ n\to\infty.$

(Здесь $|1-\alpha\lambda|\le q(\varepsilon_0)<1, \quad \lambda\in[\varepsilon_0, M]$).

$$\left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^{kn}dE_\lambda y\right\|\le\left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}\lambda^{-1}dE_\lambda y\right\|=\left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}dE_\lambda x\right\|=\left\|E_{\varepsilon_0}x\right\|\to 0,\ \varepsilon_0\to 0,$$

так как E_{ε_0} сильно стремится к нулю при $\varepsilon_0\to 0$ в силу свойств спектральной функции [25, с. 302]. Следовательно, $\|x-x_n\|\to 0, n\to\infty$, т. е. итерационный процесс (2.2) сходится. Теорема 2.1 доказана.

Покажем, что при тех же условиях процесс (2.3) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Имеет место

Теорема 2.2. *При условии* (2.4) *итерационный процесс* (2.3) *сходится, если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0.$

Доказательство

Будем считать $x_{0,\delta}=0$ и рассмотрим разность $x-x_{n,\delta}=(x-x_n)+(x_n-x_{n,\delta})$. Как показано ранее, $x-x_n\to 0,\ n\to\infty$. Используя интегральное представление самосопряженного оператора A, получим

$$x_n-x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{kn}\right](y-y_\delta)=\int\limits_0^M\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{kn}\right]dE_\lambda(y-y_\delta).$$

По индукции нетрудно показать, что $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{kn}\right]\le kn\alpha.$ Тогда $\|x_n-x_{n,\delta}\|\le kn\alpha\delta$. Поскольку

$$\|x-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+\|x_n-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+kn\alpha\delta$$

и, как показано ранее, $\|x-x_n\|\to 0,\ n\to\infty$, то для сходимости метода (2.3) достаточно, чтобы $n\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. Теорема 2.2 доказана.

Оценить скорость сходимости метода (2.3) без дополнительных предположений невозможно, так как неизвестна и может быть сколь угодно малой скорость убывания к нулю $\|x-x_n\|$. Предположим, что точное решение уравнения (2.1) истокообразно представимо, т. е. $x = A^s z,\quad s > 0$. Тогда $y = A^{s+1}z$ и, следовательно, $x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^s (1-\alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda z$. Для оценки $\|x - x_n\|$ найдем максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s (1-\alpha\lambda)^{kn}$. Приравняв нулю производную от $f(\lambda)$, получим $\lambda^{s-1}(1-\alpha\lambda)^{kn-1}[s(1-\alpha\lambda) - kn\alpha\lambda] = 0$. Первые два сомножителя не равны нулю, ибо в противном случае $f(\lambda) = 0$. Поэтому $s(1-\alpha\lambda) - kn\alpha\lambda = 0$. Отсюда $\lambda_* = \dfrac{s}{\alpha(s+kn)}$ – стационарная точка функции $f(\lambda)$. Поскольку $f''(\lambda_*) < 0$, то λ_* – точка локального максимума для $f(\lambda)$. Отсюда

$$f(\lambda_*) = \left[\frac{s}{\alpha(s+kn)}\right]^s \left[1 - \frac{\alpha s}{\alpha(s+kn)}\right]^{kn} = (kn)^{kn} s^s \alpha^{-s} (kn+s)^{-kn-s} <$$

$< s^s (kn\alpha e)^{-s}$, так как $\left[1 + \dfrac{s}{kn}\right]^{s+kn} > e^s$ при всех $n > 0$ [28]. Следовательно, $f(\lambda_*) < s^s (kn\alpha e)^{-s}$. Покажем, что последняя величина не меньше максимального значения $|f(\lambda)|$ для всех α, удовлетворяющих условию $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$, более сильному, чем (1.4). (Можно было бы считать, что $\alpha M \in (0, 2-\varepsilon)$, но тогда последнее утверждение было бы верным лишь при достаточно больших *n*, а не для всех *n*). Чтобы проверить это, достаточно исследовать поведение функции $f(\lambda)$ на концах отрезка $[0, M]$. Очевидно, $f(0) = 0$, и максимум в точке $\lambda = 0$ быть не может. Значит, может оказаться, что $|f(M)| > f(\lambda_*)$. Покажем, что если взять $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$, то $|f(M)| < s^s (kn\alpha e)^{-s}$. При $\lambda < \dfrac{1}{\alpha}$ функция $f(\lambda)$ имеет максимум, оцененный ранее. При $\lambda > \dfrac{1}{\alpha}$ $f'(\lambda) > 0$ при четных kn и $f'(\lambda) < 0$ при нечетных kn, поэтому наибольшее значение $|f(\lambda)|$ получается в точке $\lambda = M$. А значение $|f(M)| = \left|M^s (1-\alpha M)^{kn}\right|$ тем больше, чем больше α, так как $\alpha M > 1$ (напомним, что исследуется случай $\lambda > 1/\alpha$). Поэтому достаточно вычислить $|f(M)|$ при максимальном $\alpha = \dfrac{5}{4M}$. Докажем, что $|f(M)| < s^s (kn\alpha e)^{-s}$

или $\left| M^s \left(-\frac{1}{4} \right)^{kn} \right| < (4s)^s (5kne)^{-s} M^s$, т. е. $(4s)^{-s}(5kne)^s < 4^{kn}$. Обозначим $\varphi(s) = (4s)^{-s}(5kne)^s$ и найдем максимум функции $\varphi(s)$. Итак,

$$\varphi'(s) = (4s)^{-s}(-\ln(4s) - 1)(5kne)^s + (4s)^{-s}\ (5kne)^s \ln(5kne) =$$
$$= (4s)^{-s}(5kne)^s(-\ln(4s) - 1 + \ln(5kne)) = (4s)^{-s}(5kne)^s \ln\left(5kn/(4s)\right).$$

Приравняв нулю производную $\varphi'(s)$, получим $(4s)^{-s}(5kne)^s \ln\left(5kn/(4s)\right) = 0$. Поскольку $(4s)^{-s} \neq 0$, $(5kne)^s \neq 0$, то $\ln\left(5kn/(4s)\right) = 0$, и, следовательно, $s_* = 5kn/4$ – стационарная точка функции $\varphi(s)$. Так как $\varphi''(s_*) = (4s_*)^{-s*}(5kne)^{s*}\left(-1/s_*\right) < 0$, то s_* – точка максимума функции $\varphi(s)$. Найдем его. $\varphi(s_*) = (4s)^{-s}(5kne)^s\Big|_{s=s*} = (5nk)^{-5nk/4}(5nke)^{5nk/4} = e^{5nk/4}$. Итак, докажем, что $e^{5nk/4} < 4^{kn}$, это очевидно при $n \geq 1$, поскольку $e^{5/2} < 4^2$. Таким образом, при α, удовлетворяющих условию $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$, для любых $n \geq 1$ справедливо неравенство $\max\limits_{\lambda\in[0,M]} |f(\lambda)| < s^s(kn\alpha e)^{-s}$, тогда $\|x - x_n\| < s^s(kn\alpha e)^{-s}\|z\|$. Общая оценка погрешности метода (1.3) при приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, запишется в виде

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq s^s(kn\alpha e)^{-s}\|z\| + kn\alpha\delta.$$

Итак, доказана

Теорема 2.3. *Если точное решение x уравнения* (2.1) *истокопредставимо, то при условии* $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$ *для метода* (2.3) *справедлива оценка погрешности* $\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s(kn\alpha e)^{-s}\|z\| + kn\alpha\delta$.

Оптимизируем по n полученную оценку погрешности. Для этого найдем значение числа итераций n, при котором оценка становится минимальной. Обозначим $\xi(n) = s^s(kn\alpha e)^{-s}\|z\| + kn\alpha\delta$ и приравняем $\xi'(n)$ к нулю. Имеем $-sn^{-s-1}s^s(k\alpha e)^{-s}\|z\| + k\alpha\delta = 0$. Отсюда, возведя обе части равенства в степень $-1/(s+1)$, получим $n_{\text{опт}} = s(k\alpha)^{-1} e^{-s/(s+1)} \delta^{-1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$. Подставив полученное выражение для $n_{\text{опт}}$ в оценку погрешности, найдем ее оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (s+1) e^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}.$$

Итак, доказана

Теорема 2.4. *Если точное решение* x *уравнения* (1.1) *истокопредставимо, то при условии* $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$ *оптимальная оценка погрешности для метода* (2.3) *имеет вид* $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (s+1) e^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$ *и достигается при* $n_{\text{опт}} = s(k\alpha)^{-1} e^{-s/(s+1)} \delta^{-1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$.

Оптимальная оценка погрешности для метода (2.3) не зависит от параметра α, но от него зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, значит, объема вычислительной работы, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$, и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым.

Сравнение явного итерационного метода (2.3) с методом простой итерации $x_{n+1} = x_n + \alpha(y - Ax_n)$, $x_0 = 0$, [1–3, 9–10, 12–13, 17, 19–20, 28, 33, 35, 86, 112, 115, 117, 124] показывает, что по мажорантным оценкам погрешности эти методы одинаковы. Однако метод (2.3) имеет преимущество по сравнению с методом простой итерации в следующем: выполнение одного шага итераций по методу (2.3) равносильно выполнению k шагов по методу простой итерации.

Рассмотрим погрешность метода (2.3) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (2.3), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом вычислительных погрешностей γ_n, т. е.

$$z_{n+1} = (E - \alpha A)^k z_n + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^k\right] y_\delta + \alpha\gamma_n, \quad z_0 = 0. \qquad (2.5)$$

Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (2.5) равенство (2.3), получим $\varepsilon_{n+1} = (E - \alpha A)^k \varepsilon_n + \alpha\gamma_n$. Так как нулевые приближения равны нулю, то

$\gamma_0 = 0$. По индукции получим $\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} (E - \alpha A)^{k(n-1-i)} \alpha\gamma_i$. В силу (2.4) и принадлежности нуля спектру оператора A $\|E - \alpha A\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma$, где $\gamma = \sup_i |\gamma_i|$.

Таким образом, оценка погрешности метода (2.3) при счете с округлениями имеет вид

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le s^s (kn\alpha e)^{-s} \|z\| + kn\alpha\delta + n\alpha\gamma.$$

2.1.2 Сходимость метода в случае неединственного решения

Покажем, что метод (2.2) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ – собственное значение оператора A (случай неединственного решения уравнения (2.1)). Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 2.5. *Пусть* $A \ge 0$, $y \in H$, $0 < \alpha < 2/\|A\|$. *Тогда для итерационного процесса* (2.2) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) *последовательность* x_n *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* – *минимальное решение уравнения* $Ax = y$.

Доказательство

Применим оператор A к (2.2) и получим $Ax_n = A(E - \alpha A)^k x_{n-1} + \left[E - (E - \alpha A)^k\right]\left(P(A)y + \Pi(A)y\right)$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то $Ax_n = A(E - \alpha A)^k x_{n-1} + \left[E - (E - \alpha A)^k\right]\Pi(A)y$. Последнее равенство запишем в виде $v_n = (E - \alpha A)^k v_{n-1}$, где $Ax_n - \Pi(A)y = v_n$ и $v_n \in M(A)$. Отсюда $v_n = (E - \alpha A)^{kn} v_0$. Имеем $A \ge 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т. е. $(Ax, x) > 0$ для любого $x \in M(A)$. Так как $0 < \alpha < 2/\|A\|$, то $\|E - \alpha A\| < 1$, поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|(E-\alpha A)^{kn} v_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|}(1-\alpha\lambda)^{kn}\, dE_\lambda v_0\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0}(1-\alpha\lambda)^{kn}\, dE_\lambda v_0\right\| +$$

$$+\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|}(1-\alpha\lambda)^{kn}\, dE_\lambda v_0\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda v_0\right\| + q^{kn}(\varepsilon_0)\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda v_0\right\| =$$

$$= \left\|E_{\varepsilon_0} v_0\right\| + q^{kn}(\varepsilon_0)\left\|v_0 - E_{\varepsilon_0} v_0\right\| < \varepsilon$$

при $\varepsilon_0 \to 0$, $n \to \infty$. (Здесь $|1-\alpha\lambda| \le q(\varepsilon_0) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$).

Следовательно, $v_n \to 0$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Тогда $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A,y)$ (по теореме 2.1 из [124]). Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2.2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^*– минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2.2) примет вид

$$x_n = (E-\alpha A)^k x_{n-1} + A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^k\right]\Pi(A)y = (E-\alpha A)^k x_{n-1} +$$
$$+ A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^k\right]Ax^* = (E-\alpha A)^k x_{n-1} + \left[E-(E-\alpha A)^k\right]x^* =$$
$$= x_{n-1} + \left[E-(E-\alpha A)^k\right]\left(x^* - x_{n-1}\right).$$

Разобьем последнее равенство на два, так как $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n$. Тогда

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + P(A)\left[E-(E-\alpha A)^k\right]\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} +$$

$$+\left[E-(E-\alpha A)^k\right]P(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0, \text{ так как}$$
$$AP(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = 0;$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \Pi(A)\left[E-(E-\alpha A)^k\right]\left(x^* - x_{n-1}\right) = \Pi(A)x_{n-1} -$$

$$-\left[E-(E-\alpha A)^k\right]\left(\Pi(A)x_{n-1}-\Pi(A)x^*\right)=\Pi(A)x_{n-1}-\left[E-(E-\alpha A)^k\right]\left(\Pi(A)x_{n-1}-x^*\right),$$

так как $x^* \in M(A)$ и, значит, $\Pi(A)x^* = x^*$. Обозначим $w_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда $w_n = (E-\alpha A)^k w_{n-1}$, и, аналогично v_n, можно показать, что $w_n \to 0$, $n \to \infty$. Итак, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема 2.5 доказана.

Замечание 2.1. *Так как у нас* $x_0 = 0$, *то* $x_n \to x^*$, *т. е. процесс* (2.2) *сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.*

2.1.3 Сходимость метода в энергетической норме

Сходимость процессов (2.2) и (2.3) в норме пространства H рассмотрена в подразделах 2.1.1 и 2.1.2. Изучим сходимость метода (2.3) в энергетической норме $\|x\|_A = \sqrt{(Ax,x)}$, где $x \in H$, в случае единственного решения уравнения (2.1). При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \tag{2.6}$$

Запишем первое слагаемое в виде $x - x_n = A^{-1}(E-\alpha A)^{kn} y = (E-\alpha A)^{kn} x$.

Как было доказано в подразделе 2.1.1, $x - x_n$ бесконечно мало в норме пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки делалось предположение об истокопредставимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не потребуется. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = \left(A(E-\alpha A)^{kn}x, (E-\alpha A)^{kn}x\right) = \int_0^M \lambda(1-\alpha\lambda)^{2kn}\, d(E_\lambda x, x),$$

где $M = \|A\|$, E_λ – соответствующая спектральная функция, E – единичный оператор. Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции при $\lambda \in [0, M]$. Функция $f(\lambda) = \lambda(1-\alpha\lambda)^{2kn}$ – частный случай при $s = 1$ функции, оцененной в подразделе 2.1.1. Поэтому при условии

$$0 < \alpha \le \frac{5}{4M} \tag{2.7}$$

$\max\limits_{\lambda \in [0,M]} |f(\lambda)| \le (2kn\alpha e)^{-1}$. Следовательно, при выполнении (2.7) справедлива оценка $\|x - x_n\|_A \le (2kn\alpha e)^{-1/2}\|x\|$.

Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $s = 1/2$ точного решения.

Оценим второе слагаемое в (2.6). Как показано в подразделе 2.1.1, справедливо равенство $x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{kn}\right](y - y_\delta)$. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{kn}\right]^2 d(E_\lambda(y - y_\delta), y - y_\delta).$$

Обозначим через $g(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим ее сверху при условии (2.7). Покажем, что при любом $p \in H$ выполняется неравенство

$$g(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^p\right]^2 \le (5/4)p\alpha, \quad p \ge 1. \tag{2.8}$$

При $p = 1$ $g(\lambda) = \alpha^2\lambda \le (5/4)\alpha$. При $p = 2$ $g(\lambda) \le (35/27)\alpha$. По индукции докажем, что

$$g(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^p\right]^2 \le (35/54)p\alpha, \quad p \ge 2. \tag{2.9}$$

При $p = 2$ утверждение верно. Предположим, что оно справедливо при $p = l$, т. е. $\lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^l\right]^2 \le (35/54)l\alpha$, и покажем, что (2.9) выполняется при $p = l + 1$. Рассмотрим интересующее нас выражение

$$\lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{l+1}\right]^2 = \lambda^{-1}\left[1 - 2(1 - \alpha\lambda)^{l+1} + (1 - \alpha\lambda)^{2(l+1)}\right] =$$

$$= \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{l}\right]^{2} + \lambda^{-1}\left\{2(1-\alpha\lambda)^{l}\alpha\lambda-(1-\alpha\lambda)^{2l}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{2}\right]\right\} \le$$
$$\le (35/54)l\alpha + \alpha\left[2(1-\alpha\lambda)^{l}-(1-\alpha\lambda)^{2l}(2-\alpha\lambda)\right].$$

Чтобы доказать требуемое, достаточно убедиться, что

$$B \equiv 2(1-\alpha\lambda)^{l}-(1-\alpha\lambda)^{2l}(2-\alpha\lambda) \le 35/54. \tag{2.10}$$

Рассмотрим три случая.

1) $1 \le \alpha\lambda \le 5/4$, $l-$ нечетное ($l \ge 3$). Тогда $-1 < (1-\alpha\lambda)^{l} \le 0$. Преобразуем левую часть неравенства (2.10), тогда $B = (1-\alpha\lambda)^{l}\ \left[2-(1-\alpha\lambda)^{l}-(1-\alpha\lambda)^{l+1}\right]$. Так как $2-(1-\alpha\lambda)^{l}-$ $-(1-\alpha\lambda)^{l+1} \ge 0$, то $B \le 0$ и тем более $B \le 35/54$.

2) $1 \le \alpha\lambda \le 5/4$, l – четное ($l \ge 2$). Тогда $0 \le (1-\alpha\lambda)^{l} < 1$. Требуется доказать неравенство (2.10), что равносильно $1-2(1-\alpha\lambda)^{l}+(1-\alpha\lambda)^{2l}+(1-\alpha\lambda)^{2l+1}-19/54 \ge 0$, что в свою очередь равносильно

$$1+(1-\alpha\lambda)^{2l}\ (2-\alpha\lambda)-\left[2(1-\alpha\lambda)^{l}+19/54\right] \ge 0. \tag{2.11}$$

Имеем $-1/4 \le 1-\alpha\lambda \le 0$. Следовательно, $2(1-\alpha\lambda)^{l}+19/54 < 1$, а поэтому неравенство (2.11) справедливо, и, значит, верно доказываемое неравенство (2.10).

3) $0 < \alpha\lambda < 1$, $l-$ любое ($l \ge 2$). Тогда $0 < (1-\alpha\lambda)^{l} < 1$. Неравенство (2.10) равносильно неравенству $35/54-2(1-\alpha\lambda)^{l}+(1-\alpha\lambda)^{2l}+(1-\alpha\lambda)^{2l+1} \ge 0$, которое в свою очередь равносильно такому

$$4/27+2\left[1/2-(1-\alpha\lambda)^{l}\right]^{2}+(1-\alpha\lambda)^{2l+1}-(1-\alpha\lambda)^{2l} \ge 0. \tag{2.12}$$

Так как $2\left[1/2-(1-\alpha\lambda)^{l}\right]^{2} \ge 0$, то для доказательства справедливости неравенства (2.12) достаточно показать, что $\varphi_{l}(\lambda) \equiv 4/27+(1-\alpha\lambda)^{2l+1}-(1-\alpha\lambda)^{2l} \ge 0$. Нетрудно убедиться, что

$\min\limits_{0<\alpha\lambda<1} \varphi_l(\lambda) \geq 0$ для $l \geq 2$. Отсюда вытекает справедливость неравенства (2.12) и, следовательно, неравенства (2.10). Эти три рассмотренных случая исчерпывают индукцию, значит, неравенство (2.9) справедливо. Таким образом, $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A^2 \leq (35/54)kn\alpha\delta^2$, $kn \geq 2$. Отсюда

$\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A \leq [(5/4)kn\alpha]^{1/2}\delta, \quad kn \geq 1,$

$$\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A \leq [(35/54)kn\alpha]^{1/2}\delta, \quad kn \geq 2. \tag{2.13}$$

Покажем, что порядок оценки для $\left\|x_{n,\delta} - x_n\right\|_A$ нельзя улучшить, т. е. показатель степени, с которым n входит в оценку, найден правильно. Найдем $g_n'(\lambda)$.

$$g_n'(\lambda) = -\lambda^{-2}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{kn}\right]^2 + 2\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{kn}\right]kn\alpha(1-\alpha\lambda)^{kn-1} =$$
$$= \lambda^{-2}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{kn}\right]\left[-1+(1-\alpha\lambda)^{kn} + 2kn\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{kn-1}\right].$$

Если $1-(1-\alpha\lambda)^{kn} = 0$, то $g_n(\lambda) = 0$, и функция $g_n(\lambda)$ не будет достигать максимального значения. Значит, точка максимума определяется из уравнения $-1+(1-\alpha\lambda)^{kn} + 2kn\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{kn-1} = 0$. Отсюда $1 = (1-\alpha\lambda)^{kn-1}(1-\alpha\lambda + 2kn\alpha\lambda)$.

Пусть $\alpha\lambda = a_n$, тогда последнее равенство перепишется в виде

$$(1-a_n)^{kn-1}(1-a_n + 2kna_n) = 1. \tag{2.14}$$

Так как $|1-a_n| < 1$, то $|1-a_n|^{kn-1} < 1$. Значит, если бы a_n не стремились к нулю при $n \to \infty$, а были бы лишь ограничены снизу, то равенство (2.14) не выполнялось бы. Таким образом, получаем, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Из (2.14) следует, что $(1-a_n)^{kn-1} = \dfrac{1}{1+(2kn-1)a_n}$, $(1-a_n)^{kn} = \dfrac{1-a_n}{1+(2kn-1)a_n}$, отсюда

$$1-(1-a_n)^{kn} = \frac{2kna_n}{1+(2kn-1)a_n}. \tag{2.15}$$

В левой части (2.15) стоит величина ограниченная, следовательно, и в правой части должна быть ограниченная величина. В знаменателе правой части стоит величина, ограниченная снизу, поэтому, для ограниченности величины $\frac{2kna_n}{1+(2kn-1)a_n}$, необходимо, чтобы a_n стремилось к нулю не медленнее, чем $1/n$, т. е. $a_n = b_n/n$, где $\{b_n\}$ – ограниченная числовая последовательность: $0 < b_n \le B < \infty$. Подставим $a_n = b_n/n$ в выражение для $g_n(\lambda)$, получим

$$g_n(\lambda) = \frac{\left[1-(1-a_n)^{kn}\right]^2}{a_n}\alpha = \frac{(2kna_n)^2\alpha}{a_n\left[1+(2kn-1)a_n\right]^2} = \frac{4k^2nb_n\alpha}{\left[1+(2kn-1)b_n/n\right]^2}.$$

Покажем, что нуль не является предельной точкой для последовательности $\{b_n\}$. Предположим противное, что какая-то подпоследовательность $\{b_m\}$, где $m \in N_0 \subset N$, последовательности $\{b_n\}$ стремится к нулю при $m \to \infty$, тогда $\frac{2kma_m}{1+(2km-1)a_m} = \frac{2kb_m}{1+(2km-1)\,b_m/m} \sim 2kb_m$. С другой стороны,

$$(1-b_m/m)^{km} = 1 - kb_m + \frac{k(km-1)}{2m}b_m{}^2 - \frac{k(km-1)(km-2)}{6m^2}b_m{}^3 + \dots .$$

Следовательно, $1-(1-b_m/m)^{km} \sim kb_m$. Так как из (1.15) следует, что

$$1-(1-b_m/m)^{km} = \frac{2kb_m}{1+(2km-1)\,b_m/m}, \tag{2.16}$$

то $2kb_m$ должно быть эквивалентно kb_m, что неверно. Пришли к противоречию. Значит, b_m не стремится к нулю при $m \to \infty$, и нуль не является предельной точкой числовой последовательности $\{b_n\}$. Значит, $0 < b \le b_n \le B < \infty$.

Из $g_n(\lambda) = \frac{4k^2nb_n\alpha}{\left[1+(2kn-1)b_n/n\right]^2}$ видно, что в оценку для $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A$ n входит с показателем степени $1/2$. Значит, найденная оценка для $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A$ верна по порядку.

Попытаемся уточнить константу $(35/54)^{1/2}$, фигурирующую в оценке $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A$. Для этого найдем предельную точку числовой последовательности $\{b_n\}$. Покажем, что $\{b_n\}$ сходится. Так как $\{b_n\}$ – ограниченная числовая последовательность и пространство H гильбертово, то по лемме Больцано - Вейерштрасса [121, с. 105], из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{b_m\}$ такую, что $b_m \to b^*$.

Перейдем к пределу в обеих частях равенства (2.16), получим

$$\lim_{m\to\infty}\left[1-(1-b_m/m)^{km}\right]=1-\lim_{m\to\infty}\left[(1-b_m/m)^m\right]^k=1-\lim_{m\to\infty}\left\{\left[(1-b_m/m)^{-m/b_m}\right]^{-b_m}\right\}^k=$$

$$=1-e^{-kb^*},\qquad \lim_{m\to\infty}\frac{2kb_m}{1+(2km-1)\,b_m/m}=\frac{2kb^*}{1+2kb^*}.$$

Таким образом, если обозначить через $z=kb^*$, то получим следующее уравнение: $1-e^{-z}=\dfrac{2z}{1+2z}$, $e^{-z}=1-\dfrac{2z}{1+2z}$, $e^{-z}=\dfrac{1}{1+2z}$, $e^z=1+2z$. Это уравнение имеет два решения: $z_1=0$ и $z_2\approx 1{,}256$. Т. е. $b_1^*=0$ и $b_2^*\approx 1{,}256/k$ и так как нуль не является предельной точкой для последовательности $\{b_n\}$, то $b_m \to b_2^* \approx 1{,}256/k$. Так как $\{b_m\}$ – произвольная подпоследовательность последовательности $\{b_n\}$, то и сама $\{b_n\}$ сходится к b_2^*.

А теперь вернемся к уточнению константы $(35/54)^{1/2}$ в оценке для $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A$. Рассмотрим функцию $g_n(\lambda)=\dfrac{4k^2nb_n\alpha}{[1+(2kn-1)b_n/n]^2}$. Отсюда $\max\limits_{0<a_n\le 5/4}\dfrac{g_n(\lambda)}{kn\alpha}\to\dfrac{4kb^*}{\left(1+2kb^*\right)^2}\approx 0{,}41$. Поэтому нельзя получить оценки лучшей, чем $\|x_{n,\delta}-x_n\|_A \le (0{,}41kn\alpha)^{1/2}\delta$. Таким образом, полученная нами константа $(35/54)^{1/2}$ завышена не более чем в 1,26 раза.

Поскольку имеем $\|x-x_{n,\delta}\|_A \le \|x-x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \|x-x_n\|_A +$ $+\left[(35/54)kn\alpha\right]^{1/2}\delta$, $kn\ge 2$ и $\|x-x_n\|_A \to 0$, $n\to\infty$, то для сходимости $\|x-x_{n,\delta}\|_A \to 0$, $n\to 0$, достаточно, чтобы $\sqrt{n}\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$.

Таким образом, если в процессе (1.3) выбрать число итераций $n = n(\delta)$ зависящим от δ так, что $\sqrt{n}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0,$ то получим регуляризованный метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (1.3) при выполнении условия (2.7)

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A \le (2kn\alpha e)^{-1/2} \|x\| + [(5/4)kn\alpha]^{1/2}\delta, \quad kn \ge 1,$$

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A \le (2kn\alpha e)^{-1/2} \|x\| + [(35/54)kn\alpha]^{1/2}\delta, \quad kn \ge 2. \qquad (2.17)$$

Итак, доказана

Теорема 2.6. *Итерационный процесс* (2.3) *при условии* (2.7) *сходится в энергетической норме пространства* H*, если выбирать число итераций* n *из условия* $\sqrt{n}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0.$ *Для процесса* (2.3) *справедлива оценка погрешности* (2.17).

Оптимизируем полученную оценку (2.17) по n, т. е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по n от правой части неравенства (2.17), получим

$$n_{\text{опт}} = (35/27)^{-1/2} (k\alpha)^{-1} e^{-1/2} \delta^{-1} \|x\|. \qquad (2.18)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (1.17), получим ее оптимальное значение

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A^{\text{опт}} \le (35/27)^{1/4} (2\delta \|x\|)^{1/2} e^{-1/4}. \qquad (2.19)$$

Из (2.19) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α. Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α, поэтому для уменьшения n и, значит, объема вычислительной работы следует брать α возможно большим, удовлетворяющим условию (2.7), и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым. Таким образом, доказана

Теорема 1.7. *В условиях предыдущей теоремы оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса* (2.3) *имеет вид* (2.19) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (2.18).

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H. Эти условия дает

Теорема 2.8. *Если выполнены условия* 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$, 2) $E_\varepsilon x=0$, *где* $E_\varepsilon=\int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda$, $\varepsilon -$ *фиксированное положительное число* $(0<\varepsilon<\|A\|)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к решению* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства*.

Доказательство

Так как по условию теоремы $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$ и $E_\varepsilon x=0$, то $E_\varepsilon(x_{n,\delta}-x)=0$ и $\left(E_\varepsilon(x_{n,\delta}-x),x_{n,\delta}-x\right)=0$, т. е. $\int\limits_0^\varepsilon d(E_\lambda\,(x_{n,\delta}-x),x_{n,\delta}-x)=0$. Следовательно, справедливо записать $\int\limits_0^\varepsilon\frac{1}{\lambda}\,d(E_\lambda\,(x_{n,\delta}-x),A(x_{n,\delta}-x))=0$. Тогда получим, что

$$\|x_{n,\delta}-x\|^2=\int\limits_0^M\frac{1}{\lambda}\,d(E_\lambda\,(x_{n,\delta}-x),A(x_{n,\delta}-x))=$$

$$=\int\limits_0^\varepsilon\frac{1}{\lambda}\,d(E_\lambda\,(x_{n,\delta}-x),A(x_{n,\delta}-x))+\int\limits_\varepsilon^M\frac{1}{\lambda}\,d(E_\lambda\,(x_{n,\delta}-x),A(x_{n,\delta}-x))=$$

$$=\int\limits_\varepsilon^M\frac{1}{\lambda}\,d(E_\lambda\,(x_{n,\delta}-x),A(x_{n,\delta}-x))\le\frac{1}{\varepsilon}\|x_{n,\delta}-x\|_A^2.$$

Теорема 2.8 доказана.

Замечание 2.2. *Так как* $x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{kn}\right]y_\delta$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_\varepsilon y_\delta=0$. *Таким образом, если* $E_\varepsilon x=0$ *и* $E_\varepsilon y_\delta=0$, *то из сходимости метода итераций в энергетической норме следует его сходимость в обычной норме пространства* H. *Следовательно, для оценки погрешности не потребуется предположения истокопредставимости точного решения.*

2.1.4 Правило останова по невязке

Решается задача из подраздела 2.1.1. Для ее решения используется метод (2.3). Все результаты подраздела 2.1.1 получены в предположении, что точное решение x уравнения (2.1) истокопредставимо, т.е. $x = A^s z, s > 0$. Однако, поскольку сведения об элементе z и степени истокопредставимости s имеются не всегда, то на основании результатов подраздела 2.1.1 трудно определить число итераций n, обеспечивающих сходимость метода (2.3). Тем не менее, этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [9, 12, 20, 54, 94].

Определим момент m останова итерационного процесса (2.3) условием

$$\left.\begin{aligned} &\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m), \\ &\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \tag{2.20}$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (2.20) к методу (2.3). Метод (2.3) с остановом (2.20) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_m \|x - x_{m,\delta}\|\right) = 0$. Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{kn}\right]$ из подраздела 2.1.1. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |g_n(\lambda)| \le kn\alpha, \quad n > 0,\ M = \|A\|,\ 0 < \alpha < 2/M, \tag{2.21}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le 1,\ 0 < \alpha < 2/M, \tag{2.22}$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0,\ n \to \infty, \forall\lambda \in (0, M],\ 0 < \alpha < 2/M, \tag{2.23}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le \left(\frac{s}{k\alpha e}\right)^s n^{-s},\ n > 0,\ 0 \le s < \infty, 0 < \alpha \le \frac{5}{4M}. \tag{2.24}$$

Справедлива

Лемма 2.1. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Тогда для любого* $w \in H \quad (E - Ag_n(A))w \to 0,\ n \to \infty.$

Доказательство

Воспользуемся интегральным представлением самосопряженного оператора $A = \int_0^M \lambda\, dE_\lambda$, где E_λ – спектральная функция. Рассмотрим $(E - Ag_n(A))w = \int_0^M (1-\lambda g_n(\lambda))\, dE_\lambda w = \int_0^M (1-\alpha\lambda)^{kn}\, dE_\lambda w.$ Так как при $0 < \alpha < 2/\|A\|,\ \lambda \in [\varepsilon_0, M]$ имеем $|1-\alpha\lambda| \leq q < 1,$ то $\left\| \int_{\varepsilon_0}^M (1-\alpha\lambda)^{kn}\, dE_\lambda w \right\| \leq q^{kn} \left\| \int_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda w \right\| \leq q^{kn} \|w\| \to 0,\ n \to \infty.$

В силу свойств спектральной функции $\left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1-\alpha\lambda)^{kn}\, dE_\lambda w \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda w \right\| \leq$ $\leq \left\| E_{\varepsilon_0} w \right\| \to 0, \varepsilon_0 \to 0$. Итак, $(E - Ag_n(A))w \to 0,\quad n \to \infty$. Лемма 2.1 доказана.

Имеет место

Лемма 2.2. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Тогда для любого* $v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение*

$$n^s \left\| A^s (E - Ag_n(A))v \right\| \to 0,\ n \to \infty,\ 0 \leq s < \infty. \qquad (2.25)$$

Доказательство

Так как (2.24) верно, то $n^s \left\| A^s (E - Ag_n(A)) \right\| \leq n^s \sup\limits_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq$

$\leq \gamma_s, n > 0$, где $\gamma_s = \left(\dfrac{s}{k\alpha e} \right)^s$. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [43, с. 151], по которой сходимость $B_n u \to Bu$ при $n \to \infty$ для $\forall u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|,\ n = 1, 2, \ldots$ ограничены независящей от n постоянной. Здесь $\|B_n\| = n^s \left\| A^s (E - Ag_n(A)) \right\| \leq \gamma_s$, т. е. $\|B_n\|$ совокупно ограничены. В качестве плотного в $\overline{R(A)}$ подмножества возьмем $R(A)$. Положим $s_1 = s + 1$. Тогда для каждого $v = Aw \in R(A)$ имеем

$$n^s\left\|A^s(E-Ag_n(A))v\right\| = n^s\left\|A^{s+1}(E-Ag_n(A))w\right\| \le$$

$$\le n^s\left(\frac{s+1}{k\alpha e}\right)^{s+1} n^{-(s+1)}\|w\| = \gamma_{s_1} n^{-1}\|w\| \to 0,\ n\to\infty,$$

так как $s_1 < \infty$. Лемма 2.2 доказана.

Справедлива

Лемма 2.3. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le M$. *Если для некоторых* $n_p < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $p\to\infty$ *имеем* $w_p = A\left(E - Ag_{n_p}(A)\right)v_0 \to 0,$ *то* $v_p = \left(E - Ag_{n_p}(A)\right)v_0 \to 0.$

Доказательство

В силу (2.22) последовательность v_p ограничена $\left\|v_p\right\| \le \|v_0\|,\ p\in N$, поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $v_p - \to v\ \left(p\in N' \subseteq N\right)$, тогда $Av_p - \to Av\ \left(p \in N'\right)$. Но по условию $w_p = Av_p \to 0,\ p\to\infty$, следовательно, $Av = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора *A*, то $v = 0$. Тогда

$$\left\|v_p\right\|^2 = \left(v_p, \left(E - Ag_{n_p}(A)\right)v_0\right) = \left(v_p, v_0\right) - \left(v_p, Ag_{n_p}(A)v_0\right) =$$

$$= \left(v_p, v_0\right) - \left(Av_p, g_{n_p}(A)v_0\right) = \left(v_p, v_0\right) - \left(w_p, g_{n_p}(A)v_0\right) \to \left(v, v_0\right) = 0,$$

так как $w_p \to 0,\ v = 0$ и по условию (2.21) $\left\|g_{n_p}(A)\right\| \le \alpha k n_p < \alpha k\bar{n}$. Следовательно, $\left\|v_p\right\| \to 0$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности v_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $v_p \to 0,\ p\to\infty$. Лемма 2.3 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2.9. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (2.3) *выбирается по правилу* (2.20). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство

Из подраздела 2.1.1 следует, что $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{kn}\right]y_\delta$. Тогда

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - \left(E - Ag_n(A)\right)x. \qquad (2.26)$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A\left(E - Ag_n(A)\right)x - \left(E - Ag_n(A)\right)(y_\delta - y). \qquad (2.27)$$

В силу лемм 2.1 и 2.2 имеем

$$\left\|\left(E - Ag_n(A)\right)x\right\| \to 0, \quad n \to \infty, \qquad (2.28)$$

$$\sigma_n = n\left\|A\left(E - Ag_n(A)\right)x\right\| \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (2.29)$$

Кроме того, из (2.21) и (2.22) следует, что

$$\left\|g_n(A)(y_\delta - y)\right\| \le k\alpha n\delta, \qquad (2.30)$$

$$\left\|E - Ag_n(A)\right\| \le 1. \qquad (2.31)$$

Применим правило останова (2.20). Тогда $\left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| \le b\delta,\ b > 1$ и из (2.27) и (2.31) получим

$$\left\|A\left(E - Ag_m(A)\right)x\right\| \le \left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| + \left\|\left(E - Ag_m(A)\right)(y_\delta - y)\right\| \le (b+1)\delta. \qquad (2.32)$$

Для любых $n < m$ справедливы неравенства $\left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon$, поэтому

$$\left\|A\left(E - Ag_n(A)\right)x\right\| \ge \left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| - \left\|\left(E - Ag_n(A)\right)(y - y_\delta)\right\| \ge (b-1)\delta.$$

Итак, для любых $n < m$

$$\left\|A\left(E - Ag_n(A)\right)x\right\| \ge (b-1)\delta. \qquad (2.33)$$

Из (2.29) и (2.33) при $n = m-1$ получаем $\dfrac{\sigma_{m-1}}{m-1} = \left\|A\left(E - Ag_{m-1}(A)\right)x\right\| \ge (b-1)\delta$ или, что то же самое, $(m-1)\delta \le \dfrac{\sigma_{m-1}}{b-1} \to 0,\ \delta \to 0,$ (так как из (2.29) $\sigma_m \to 0,\ m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$, то используя (2.26), получим

$$\left\|x_{m,\delta} - x\right\| \le \left\|\left(E - Ag_m(A)\right)x\right\| + \left\|g_m(A)(y_\delta - y)\right\| \le$$
$$\le \left\|\left(E - Ag_m(A)\right)x\right\| + k\alpha m\delta \to 0,\ m \to \infty,\ \delta \to 0,$$

так как из (2.28) $\|(E - Ag_m(A))x\| \to 0,\ m \to \infty.$

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x,\ \delta_n \to 0.$ Действительно, из (2.32) выполняется $\left\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\right\| \le (b+1)\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0.$ Следовательно, имеем $A\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0,\ \delta_n \to 0$ и по лемме 2.3 получаем, что при $\delta_n \to 0$ $\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0.$ Отсюда

$$\left\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\right\| \le \left\|\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\| + k\alpha m(\delta_n)\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0.$$

Теорема 2.9 доказана. Имеет место

Теорема 2.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.9 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0$*, тогда справедливы оценки* $m(\delta) \le 1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$,

$$\left\|x_{m(\delta),\delta} - x\right\| \le [(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} + k\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \quad (2.34)$$

Доказательство

Имеем

$$\|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| = \left\|A^{s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z\right\| =$$

$$= \left\|\int_0^M \lambda^{s+1}(1-\alpha\lambda)^{k(m-1)}\,dE_\lambda z\right\| \le (s+1)^{s+1}[k(m-1)\alpha e]^{-(s+1)}\|z\|.$$

Воспользовавшись (2.33), получим $(b-1)\delta \le (s+1)^{s+1}[k(m-1)\alpha e]^{-(s+1)}\|z\|$, откуда $m \le 1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\|(E - Ag_m(A))x\| = \left\|A^s(E - Ag_m(A))z\right\| \le \left\|A^{s+1}(E - Ag_m(A))z\right\|^{s/(s+1)} \times$$
$$\times \|(E - Ag_m(A))z\|^{1/(s+1)} \le \|A(E - Ag_m(A))x\|^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} \le$$
$$\le [(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$$

(см. (2.32)). Поскольку соотношение (2.26) справедливо для любых n, то

$$\|x_{m,\delta}-x\|\le\|(E-Ag_m(A))x\|+\|g_m(A)(y_\delta-y)\|\le[(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+$$

$$+km\alpha\delta\le[(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+k\alpha\left\{1+\frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta.$$

Теорема 2.10 доказана.

Замечание 2.3. *Порядок оценки* (2.34) *есть* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, *и, как следует из* [12], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x=A^s z,\ s>0$.

Замечание 2.4. *Хотя формулировка теоремы* 2.10 *дается с указаниями степени истокопредставимости* s *и истокопредставляющего элемента* z, *на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова* (2.20). *Тем не менее, в теореме* 2.10 *утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций* m, *обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (2.20), *как показывает теорема* 2.9, *обеспечивает сходимость метода, т. е. его регуляризующие свойства*.

2.1.5 Правило останова по соседним приближениям для уравнений с несамосопряжённым оператором

Как известно [31], уравнение $Ax=y$ с действующим в гильбертовом пространстве H оператором, не обладающим свойством самосопряжённости или положительной определённости, может быть сведено к решению уравнения $A^*Ax=A^*y$ уже с положительно определенным и самосопряжённым оператором A^*A. Применение вышеописанных результатов для уравнения (2.1) приводит к аналогичным результатам для уравнений $Ax=y$ уже с произвольным действующим в гильбертовом пространстве оператором A.

Решаем уравнение (2.1) с несамосопряжённым оператором A. Используем явную схему метода итераций

$$x_{n+1} = \left(E - \alpha A^* A\right)^k x_n + \left(A^* A\right)^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^* A\right)^k\right] A^* y,$$

$$k \in N,\ x_0 \in H,\ 0 < \alpha \le \frac{5}{4\left\|A^* A\right\|}. \qquad (2.35)$$

Здесь оператор $\left(A^* A\right)^{-1}$, фигурирующий в (2.35), не означает, что для рассматриваемой схемы (2.35) необходимо его знать – нужно заметить, что после раскрытия скобок во втором слагаемом он сокращается и весь оператор в квадратных скобках является полиномом от оператора $A^* A$

$$C_k^1 \alpha E - C_k^2 \alpha^2 A^* A + C_k^3 \alpha^3 \left(A^* A\right)^2 - \ldots - (-1)^k \alpha^k \left(A^* A\right)^{k-1}.$$

В случае, когда правая часть y уравнения (2.1) известна приближенно, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, метод (2.35) примет вид

$$z_{n+1} = \left(E - \alpha A^* A\right)^k z_n + \left(A^* A\right)^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^* A\right)^k\right] A^* y_\delta + \left(E - \alpha A^* A\right)^k u_n,$$

$$k \in N,\ z_0 \in H,\ 0 < \alpha \le \frac{5}{4\left\|A^* A\right\|}. \qquad (2.36)$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Использовано равенство $A^* A x = A^* y$. Обозначим $B = \left(A^* A\right)^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^* A\right)^k\right] A^*$, $C = \left(E - \alpha A^* A\right)^k$, тогда метод (2.36) запишется в виде $z_{n+1} = C z_n + B y_\delta + C u_n$. Для простоты будем считать, что $\|A\| = 1$.

Определим момент m останова итерационного процесса условием [9, 19, 96]

$$\left.\begin{aligned} &\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, \quad (n < m), \\ &\|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon, \end{aligned}\right\} \qquad (2.37)$$

где ε – заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова). Аналогично [19] докажем, что метод (2.36) с правилом останова (2.37) сходится, и получим оценку для момента останова. Справедливы леммы

Лемма 2.4. *Пусть приближение* w_n *определяется равенствами*

$$w_0 = z_0,\ w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n,\ n \ge 0, \tag{2.38}$$

тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} \left\| w_k - w_{k+1} + Cu_k \right\|^2 \le \left\| w_0 - x \right\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \left\| Cu_k \right\|^2 . \tag{2.39}$$

Доказательство

Из (2.38) имеем $Cu_k = w_{k+1} - Cw_k - By.$ Отсюда, используя равенство $A^* Ax = A^* y$, получим

$$u_k = C^{-1} w_{k+1} - w_k - C^{-1} By = C^{-1} w_{k+1} - w_k -$$
$$-\left(E - \alpha A^* A\right)^{-k} \left(A^* A\right)^{-1} \left[E - \left(E - \alpha A^* A\right)^k \right] A^* y = C^{-1} w_{k+1} - w_k -$$
$$-\left(E - \alpha A^* A\right)^{-k} \left(A^* A\right)^{-1} \left[E - \left(E - \alpha A^* A\right)^k \right] A^* Ax = C^{-1} w_{k+1} - w_k -$$
$$- C^{-1}(E - C)x = C^{-1} w_{k+1} - w_k - C^{-1} x + x = C^{-1}(w_{k+1} - x) - (w_k - x).$$

Обозначим $\Delta_k = w_k - x$, тогда $u_k = C^{-1}\Delta_{k+1} - \Delta_k$, откуда $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\| Cu_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_{k+1} - C\Delta_k, \Delta_{k+1} - C\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n} (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) -$$
$$- 2\sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_{k+1}, C\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n} (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\sum_{k=0}^{n-1} \left(C^{\frac{1}{2}} \Delta_{k+1}, C^{\frac{1}{2}} \Delta_k \right). \tag{2.40}$$

Оценивая абсолютную величину последнего слагаемого правой части (2.40) по неравенству Коши–Буняковского, приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\| Cu_k \right\|^2 \ge \sum_{k=1}^{n} (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) -$$
$$- 2\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}},\ n \ge 1. \tag{2.41}$$

Покажем, что $(E-C)\Delta_k = w_k - w_{k+1} + Cu_k$, $k \ge 0.$ Имеем $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, $\Delta_k + Cu_k = \Delta_k + \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, тогда $\Delta_k + Cu_k = (E-C)\Delta_k + \Delta_{k+1}$, $w_k - x + Cu_k = (E-C)\Delta_k + w_{k+1} - x$, отсюда справедливо, что

$$(E-C)\Delta_k = w_k - w_{k+1} + Cu_k,\ k \ge 0. \tag{2.42}$$

Запишем неравенство (2.41) в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \ge \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k,\Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -(\Delta_0,\Delta_0) + \sum_{k=0}^{n}(\Delta_k,\Delta_k) + \sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k, C\Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k) +$$

$$+2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} = -(\Delta_0,\Delta_0) +$$

$$+2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k) + \sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k) -$$

$$-(C\Delta_n, C\Delta_n) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -(\Delta_0,\Delta_0) + \sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k) + \gamma_n,$$

где $\gamma_n = 2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Докажем, что $\gamma_n \ge 0$ при любых $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Для этого сначала докажем неравенство: $(C\Delta_n, C\Delta_n) \le (C\Delta_n, \Delta_n)$. Ему равносильно неравенство: $\|C\Delta_n\|^2 \le \left\|C^{1/2}\Delta_n\right\|^2$. Так как $\|C\| = \left\|\left(E - \alpha A^* A\right)^k\right\| = \sup_{\lambda}|1-\alpha\lambda|^k = 1$, то имеем $\|C\Delta_n\| \le \left\|C^{1/2}\right\|\left\|C^{1/2}\Delta_n\right\| = \left\|C^{1/2}\Delta_n\right\|$. Поэтому $(C\Delta_n, C\Delta_n) \le (C\Delta_n, \Delta_n)$. Следовательно, $\gamma_n \ge 2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k) - (C\Delta_n,\Delta_n) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Покажем, что

$$2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-(C\Delta_n,\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\geq 0\ . \quad (2.43)$$

В самом деле, неравенство (2.43) равносильно неравенству

$$2\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+2(C\Delta_n,\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+(C\Delta_n,\Delta_n)-(C\Delta_0,\Delta_0)\right\}^{\frac{1}{2}}-(C\Delta_n,\Delta_n)\geq 0,$$

которое, в свою очередь, равносильно такому $2\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+(C\Delta_n,\Delta_n)\geq$ $\geq 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+(C\Delta_n,\Delta_n)-(C\Delta_0,\Delta_0)\right\}^{\frac{1}{2}}$. Возведя обе части последнего неравенства в квадрат, получим

$$4\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^2+4\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)(C\Delta_n,\Delta_n)+(C\Delta_n,\Delta_n)^2\geq$$

$$\geq 4\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+(C\Delta_n,\Delta_n)-(C\Delta_0,\Delta_0)\right\}.$$

Пришли к очевидному неравенству

$$4\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)(C\Delta_0,\Delta_0)+(C\Delta_n,\Delta_n)^2\geq 0,$$

поэтому неравенство (2.43) справедливо ввиду равносильности неравенств. (Здесь возведенное в квадрат неравенство на самом деле содержало лишь положительные члены.) Следовательно, $\gamma_n\geq 0$. Отсюда $\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\geq-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k)$. Используя равенство (2.42), получим $\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\geq-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\|^2$, откуда выполняется

$$\sum_{k=0}^{n} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 .$$

Лемма 2.4 доказана.

Имеет место

Лемма 2.5. *При любом* $w_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta. \tag{2.44}$$

Доказательство

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1} + Cu_n\| + \|C\|\beta \le \|C\|\beta +$$

$$+ \overline{\lim}_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n} \|w_0 - x\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \|C\|\beta \le$$

$$\le \overline{\lim}_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n} \|w_0 - x\|^2 + \frac{1}{n} n \|C\|^2 \beta^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \|C\|\beta = 2\|C\|\beta,$$

так как $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|w_0 - x\|^2 = 0$. Отсюда следует (2.44). Лемма 2.5 доказана.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2.11. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определён при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta, \quad \|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}$;

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0,\ \delta,\beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1,\quad p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0.$

Доказательство

а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{n-k-1}\right). \qquad (2.45)$$

При $n=1$ из $z_n = Cz_{n-1} + By_\delta + Cu_{n-1}$ имеем $z_1 = Cz_0 + By_\delta + Cu_0$, из (2.45) получим то же самое, т. е. при $n=1$ формула (2.45) верна. Предположим, что (2.45) верна при $n=p$, т. е. $z_p = C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k-1}\right)$, и докажем ее справедливость при $n = p+1$. Имеем

$$z_{p+1} = Cz_p + By_\delta + Cu_p = C\left[C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k-1}\right)\right] + By_\delta + Cu_p =$$
$$= C^{p+1}z_0 + C^2\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-1} + CC^{-1}By_\delta + Cu_{p-2} + \ldots + C^{p-1}C^{-1}By_\delta + C^{p-1}u_0\right) +$$
$$+ By_\delta + Cu_p = C^{p+1}z_0 + C\left(By_\delta + Cu_{p-1} + CBy_\delta + C^2u_{p-2} + \ldots + C^{p-1}By_\delta +\right.$$
$$\left.+ C^p u_0 + C^{-1}By_\delta + u_p\right) = C^{p+1}z_0 + C\sum_{k=0}^{p} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k}\right).$$

Таким образом, справедливость (2.45) доказана. Отсюда

$$w_n = C^n w_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left(C^{-1}By + u_{n-k-1}\right) = C^n w_0 + \sum_{k=0}^{n-1} C^k By + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} =$$
$$= C^n w_0 + \left(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1}\right)By + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n w_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} +$$
$$+ \left(E - C^n\right)(E - C)^{-1}\left(A^*A\right)^{-1}(E - C)A^*y = C^n w_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0 = w_0$, получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n z_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y_\delta + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} z_0 - A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y_\delta -$$

$$-C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} = C^n w_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y - A^{-1}\left(E - C^n\right)y + A^{-1}\left(E - C^n\right)y_\delta +$$

$$+C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} w_0 - A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y + A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y - A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y_\delta -$$

$$-C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} = w_n - w_{n+1} - A^{-1}\left(E - C^n\right)(y - y_\delta) + A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)(y - y_\delta) =$$

$$= w_n - w_{n+1} + A^{-1}\left[(y - y_\delta) - C^{n+1}(y - y_\delta) - (y - y_\delta) + C^n(y - y_\delta)\right] =$$

$$= w_n - w_{n+1} + A^{-1}\left(C^n - C^{n+1}\right)(y - y_\delta) = w_n - w_{n+1} +$$

$$+ A^{-1}(E - C)C^n(y - y_\delta) = w_n - w_{n+1} + BC^n(y - y_\delta).$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \le \|w_n - w_{n+1}\| + \left\|BC^n(y - y_\delta)\right\|. \qquad (2.46)$$

Обозначим $\sigma = B(y - y_\delta)$, тогда при условии $0 < \alpha \le 5/4$, $\lambda \in [0, 1]$ получим $\left\|BC^n(y - y_\delta)\right\| = \left\|C^n \sigma\right\| \to 0,\ n \to \infty$. Поэтому (см. лемму 2.5) $\varliminf_{n\to\infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \varliminf_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta$. Следовательно, условием $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ и u_n, $\|u_n\| \le \beta$.

б) Рассмотрим последовательность (2.38) и определим момент останова m' условием

$$\left.\begin{aligned} &\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta, \quad (n < m'), \\ &\|w_{m'} - w_{m'+1}\| \le \varepsilon - \|B\|\delta. \end{aligned}\right\} \qquad (2.47)$$

Из (2.46) следует, что $m \le m'$. Из леммы 2.4 при $n = m'$ получим $\sum_{k=0}^{m'} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2$, поэтому справедливо

$\sum\limits_{k=0}^{m'-1}\left\|w_k - w_{k+1} + Cu_k\right\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{m'-1}\left\|Cu_k\right\|^2$. Отсюда получим неравенство $\sum\limits_{k=0}^{m'-1}\left(\|w_k - w_{k+1}\| - \|C\|\beta\right)^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{m'-1}\left\|Cu_k\right\|^2$. Так как по (2.47) при $n < m'$ имеем $\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta,$ то $m'\left(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\right)^2 \le \|w_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2.$

Учитывая, что $w_0 = z_0$ и $m \le m'$, из последнего неравенства получим

$$m \le m' \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\right)^2 - \|C\|^2\beta^2} = \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)}.$$

в) Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y. \tag{2.48}$$

Предположим, что (2.48) верна, тогда имеем

$$x - C^n x = \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y, \quad \left(E - C^n\right)x = \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y,$$
$$\left(E - C^n\right)x = B\left(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1}\right)y,$$
$$\left(E - C^n\right)x = A^{-1}(E - C)\left(E - C^n\right)(E - C)^{-1} y, \quad \left(E - C^n\right)x = \left(E - C^n\right)A^{-1}y,$$
$$\left(E - C^n\right)x = \left(E - C^n\right)x.$$

Следовательно, предположение верно и формула (2.48) доказана. Из (2.45) вычтем (2.48), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]. \tag{2.49}$$

Отсюда $\Delta_n = C^n\Delta_0 + C\sum\limits_{k=0}^{n-1} C^k\left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right],$ где $\Delta_n = z_n - x$ и $\Delta_0 = z_0 - x$. Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \le \left\|C^n\Delta_0\right\| + \left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)n. \tag{2.50}$$

В частности, (2.50) справедлива и при $n = m$. Если $m \to \infty$ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, тогда, как показано ранее, $\left\| C^m \Delta_0 \right\| \to 0,\ m \to \infty$. Поэтому для доказательства $\| z_m - x \| \to 0,\ \delta \to 0,\ \beta \to 0$ достаточно показать, что $m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0,$ $m \to \infty,\ \ \delta \to 0,\ \ \beta \to 0.$ Из (2.49)

$$z_n - z_{n+1} = (z_n - x) - (z_{n+1} - x) = C^n (z_0 - x) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1} B(y_\delta - y) + u_{n-k-1} \right] -$$
$$- C^{n+1}(z_0 - x) - C \sum_{k=0}^{n} C^k \left[C^{-1} B(y_\delta - y) + u_{n-k} \right] = C^n (E - C)(z_0 - x) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} C^k B(y_\delta - y) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n} C^k B(y_\delta - y) - C \sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} =$$
$$= C^n (E - C)(z_0 - x) - C^n B(y_\delta - y) + C\left(u_{n-1} + C u_{n-2} + C^2 u_{n-3} + \ldots + C^{n-1} u_0\right) -$$
$$- C\left(u_n + C u_{n-1} + C^2 u_{n-2} + \ldots + C^n u_0\right) = C^n (E - C)(z_0 - x) - C u_n -$$
$$- C^n B(y_\delta - y) + C\left[\left(u_{n-1} - C u_{n-1}\right) + \left(C u_{n-2} - C^2 u_{n-2}\right) + \ldots + \left(C^{n-1} u_0 - C^n u_0\right)\right].$$

Отсюда получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n (E - C)(z_0 - x) - C^n B(y_\delta - y) - C u_n + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (E - C) u_{n-k-1}\,. \tag{2.51}$$

Нетрудно показать, что при $0 < \alpha \le 5/4$

$$\left\| C^n (E - C) \right\| \le \frac{1}{n+1}\,. \tag{2.52}$$

Из (2.51) при $n = m - 1$ получим

$$\| z_{m-1} - z_m \| \le \left\| C^{(m-1)/2} C^{(m-1)/2} (E - C)(z_0 - x) \right\| + \left\| C^{m-1} B(y_\delta - y) \right\| + \| C u_{m-1} \| +$$

$$+ \left\| C \sum_{k=0}^{m-2} C^k (E - C) u_{m-k-2} \right\| \le \left\| C^{(m-1)/2} (E - C) \right\| \left\| C^{(m-1)/2} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta +$$

$$+ \|C\|\beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \le \frac{2}{m} \left\| C^{(m-1)/2} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta (2 + \ln m),$$

так как $\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}\le 1+\ln m$ [16, с. 16]. Поскольку по условию теоремы $\varepsilon(\delta,\beta)\ge d\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta^p\right)$, $d>1$, $p\in(0,1)$, то при всех достаточно малых δ,β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta,\beta)>\|B\|\delta+2\|C\|\beta$, поэтому из б) получим $m\le\|z_0-x\|^2\left[(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|B\|\delta)\right]^{-1}$. Так как $\|z_{m-1}-z_m\|>\varepsilon$, то имеем $\varepsilon\le\frac{2}{m}\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|+\|B\|\delta+\|C\|(2+\ln m)\beta$. Отсюда получим, что

$$m\le\frac{2\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|}{\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\left\{2+\ln\left(\|z_0-x\|^2\left[(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|B\|\delta)\right]^{-1}\right)\right\}}.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $\|B\|\delta+\|C\|\beta$, получим

$$m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\le\frac{2\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)}{\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\left\{2+\ln\left(\|z_0-x\|^2\left[(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|B\|\delta)\right]^{-1}\right)\right\}}.$$

При $m\to\infty$ множитель $\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|\to 0$, и при $\delta,\beta\to 0$ дробь $\dfrac{2\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)}{\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\left[2+\ln\dfrac{\|z_0-x\|^2}{(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|B\|\delta)}\right]}$ ограничена. Поэтому при $m\to\infty$, $\delta,\beta\to 0$ $m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\to 0$. Отсюда и из неравенства (2.50) при $m\to\infty$ выполняется

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\|\Delta_m\|=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\|z_m-x\|\le\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\left(\left\|C^m\Delta_0\right\|+m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\right)=0.$$

Теорема 2.11 доказана.

Сравнение явного итерационного метода (2.3) с методом простой итерации $x_{n+1}=x_n+\alpha(y-Ax_n)$, $x_0=0$, [1–3, 9–10, 12–13, 17, 19–20, 28, 33, 35, 86, 112, 115, 117, 124] показывает, что по мажорантным оценкам погрешности эти методы одинаковы. Однако метод (2.3) имеет преимущество по сравнению с методом простой итерации в следующем: выполнение одного шага итераций по методу (2.3) равносильно выполнению k шагов по методу простой итерации.

2.2 Оценка погрешностей в двухшаговой итерационной процедуре решения операторных уравнений первого рода

2.2.1 Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

2.2.1.1 Сходимость при точной правой части уравнения

Решается задача из раздела 2.1. Предлагается новый явный итерационный метод

$$x_n = 2(E - \alpha A)x_{n-1} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2} + \alpha^2 Ay, \quad x_0 = x_1 = 0. \qquad (2.53)$$

Пусть правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ, т. е. известен y_δ, для которого $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Поэтому вместо схемы (2.53) приходится рассматривать приближения

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 Ay_\delta, \; x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \qquad (2.54)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (2.54) понимается утверждение о том, что приближения (2.54) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (2.54) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{n}\|x - x_{n,\delta}\|\right) = 0$.

Воспользовавшись интегральным представлением ограниченного положительного самосопряженного оператора A и формулой (2.53), по индукции получим

$$x - x_n = \int_0^M \left[\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^n + n\alpha(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right] dE_\lambda y,$$

где $M = \|A\|$, E_λ – спектральная функция оператора A. Так как при $0 < \alpha < 2/M$ имеем $|1 - \alpha\lambda| < 1$, то отсюда легко выводится сходимость процесса (2.53) при $n \to \infty$.

2.2.1.2 Сходимость при приближенной правой части уравнения

Итерационный процесс (2.54) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Справедлива

Теорема 2.16. *Итерационный процесс* (2.54) *сходится при* $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$, *если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0$, *при* $n \to \infty, \delta \to 0.$

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 2.1. При этом легко показывается оценка $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta.$

2.2.1.3 Оценка погрешности двухшаговой итерационной процедуры

Скорость сходимости приближений (2.54) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения (2.1), т. е. $x = A^s z,\ s > 0.$ Тогда $y = A^{s+1} z$, и, следовательно, получим

$$x - x_n = \int_0^M \lambda^s (1-\alpha\lambda)^{n-1} dE_\lambda z + \int_0^M \lambda^{s+1} (1-\alpha\lambda)^{n-1} (n-1)\alpha\, dE_\lambda z.$$

Для оценки нормы $\|x - x_n\|$ найдем максимумы модулей подынтегральных функций $f_1(\lambda) = \lambda^s (1-\alpha\lambda)^{n-1}$ и $f_2(\lambda) = \lambda^{s+1}(1-\alpha\lambda)^{n-1}(n-1)\alpha$. В подразделе 2.1.1 показано, что $|f(\lambda)| = \left|\lambda^s (1-\alpha\lambda)^{kn}\right| \le s^s (kn\alpha e)^{-s}$ при условии $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$. Поэтому $|f_1(\lambda)| \le s^s [(n-1)\alpha e]^{-s}$, $|f_2(\lambda)| \le (s+1)^{s+1} [(n-1)\alpha]^{-s} e^{-(s+1)}$. Отсюда $\|x - x_n\| \le s^s (s+2)[(n-1)\alpha e]^{-s} \|z\|$. Таким образом, общая оценка погрешности итерационной процедуры (2.54) запишется в виде

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le \|x - x_n\| + \left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le s^s (s+2)[(n-1)\alpha e]^{-s} \|z\| + \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим оценку

$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le \left(\frac{5}{4}\right)^{s/(s+1)}(s+1)(s+2)^{1/(s+1)}e^{-s/(s+1)}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$ и априорный момент останова $n_{\text{опт}} = 1+\left(\frac{5}{4}\delta\right)^{-1/(s+1)}e^{-s/(s+1)}s(s+2)^{1/(s+1)}\alpha^{-1}\|z\|^{1/(s+1)}$. Существенно, что порядок оптимальной оценки есть $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, и, как следует из [12], он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями. Очевидно, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α, но от него зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, значит, объема вычислительной работы, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию $0<\alpha\le\frac{5}{4M}$, и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым.

Сравнение метода (2.54) с хорошо известным явным методом итераций $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right)$, $x_{0,\delta} = 0$ показывает, что порядки их оптимальных оценок совпадают.

Приведем погрешность схемы (2.54) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – значение, полученное по формуле (2.54), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом погрешностей вычисления γ_n, т. е. $z_n = 2(E-\alpha A)z_{n-1} - (E-\alpha A)^2 z_{n-2} + \alpha^2 Ay_\delta + \alpha\gamma_n$, $z_0 = z_1 = 0.$ Оценка погрешности итерационного метода (2.54) в этом случае имеет вид $\|x-z_n\| \le s^s(s+2)\left[(n-1)\alpha e\right]^{-s}\|z\| + \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta + \frac{(n-1)n}{2}\alpha\gamma$, где $\gamma = \sup\limits_i|\gamma_i|$.

2.2.2 Сходимость метода в энергетической норме

Изучим сходимость метода (2.54) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax,x)}$, где $x\in H$, в случае единственного решения уравнения (2.1). При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta}=0$ и рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x-x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. С помощью интегрального представления самосопряженного оператора A получим

$$\|x-x_n\|_A^2 = \int_0^M \lambda(1-\alpha\lambda)^{2n-2}[1+(n-1)\alpha\lambda]^2\, d(E_\lambda x,x)\ ,$$

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right]^2 d\left(E_\lambda\left(y-y_\delta\right), y-y_\delta\right)\ ,$$

где $M=\|A\|$. Оценив подынтегральные функции, получим при условии $0<\alpha\le\frac{5}{4M}$ оценку погрешности для итерационного метода (2.54) в энергетической норме

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A\le(e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}[(n-1)\alpha]^{-1/2}\|x\|+15^{1/2}\cdot 2^{-1}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta,\ n\ge 1.$$

Следовательно, если в процессе (2.54) выбирать число итераций $n=n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $\sqrt{n-1}\,\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$, то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Итак, справедлива

Теорема 2.17. *При условии* $0<\alpha\le\frac{5}{4M}$ *метод* (2.54) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия* $\sqrt{n-1}\,\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. *Для метода* (2.54) *справедлива оценка погрешности*

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A\le(e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}[(n-1)\alpha]^{-1/2}\|x\|+15^{1/2}\cdot 2^{-1}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta,\ n\ge 1.$$

Для минимизации оценки погрешности метода (2.54) вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим $\|x-x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}}\le 2^{1/2}\cdot 15^{1/4}(e+1)^{1/4}(e+4)^{1/4}e^{-3/4}\delta^{1/2}\,\|x\|^{1/2}$ и $n_{\text{опт}}=1+2\cdot 15^{-1/2}\,(\alpha\delta)^{-1}\,(e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}\|x\|$.

Отметим тот факт, что для сходимости метода (2.54) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций $n=n(\delta)$ так, чтобы $\sqrt{n-1}\,\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. Однако $n_{\text{опт}}=O\left(\delta^{-1}\right)$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-1}, и такой порядок обеспечивает сходимость метода итераций (2.54).

Ответ на вопрос: когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H, даёт

Теорема 2.18. *Если выполнены условия*: 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$, 2) $E_\varepsilon x=0$, *где* $E_\varepsilon=\int_0^\varepsilon dE_\lambda$, ε *– фиксированное положительное число* $\left(0<\varepsilon<\|A\|\right)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

Замечание 2.5. *Так как* $x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^n-n\alpha A(E-\alpha A)^{n-1}\right]y_\delta$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$, *достаточно* *потребовать, чтобы* $E_\varepsilon y_\delta = 0$. *Таким образом, если решение* x *и приближенная правая часть* y_δ *таковы, что* $E_\varepsilon x = 0$ *и* $E_\varepsilon y_\delta = 0$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства, и, следовательно, для сходимости приближений* (2.54) *в норме пространства H не требуется предположения истокопредставимости точного решения.*

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности и априорный момент останова $n_{\text{опт}}$ для метода (2.54) без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения.

2.2.3 Правило останова по невязке

Априорный выбор числа итераций n в исходной норме гильбертова пространства (см. подраздел 2.2.1) получен в предположении, что имеется дополнительная информация на гладкость точного решения x уравнения (2.1) – его истокообразная представимость. Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны, и тем самым приведенные в подразделе 2.2.1 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее, метод (2.54) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [9, 12, 20, 54, 94]. Зададим $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова итерационного процесса (2.54) условием (2.20).

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (2.20) к методу (2.54). Ниже метод итераций (2.54) с остановом (2.20) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_m \|x - x_{m,\delta}\|\right) = 0$. Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right]$. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |g_n(\lambda)| \le \frac{5}{4}(n-1)\alpha, \quad n \ge 1, \; M = \|A\|, \; 0 < \alpha \le \frac{5}{4M}, \tag{2.55}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le 2, \; 0 < \alpha \le \frac{5}{4M}, \tag{2.56}$$

$$1-\lambda g_n(\lambda)\to 0,\ n\to\infty,\ \forall\lambda\in(0,M],\ 0<\alpha<2/M, \tag{2.57}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^s\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\le (s+2)\left(\frac{s}{\alpha e}\right)^s (n-1)^{-s},\ \ n\ge 1,\ 0\le s<\infty,\ 0<\alpha\le\frac{5}{4M}. \tag{2.58}$$

Лемма 2.6. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M$. *Тогда для любого* $w\in H \quad (E-Ag_n(A))w\to 0,\ n\to\infty.$

Доказательство

Воспользовавшись интегральным представлением ограниченного самосопряженного оператора A, получим

$$\|(E-Ag_n(A))w\|=\left\|\int_0^M (1-\lambda g_n(\lambda))\,dE_\lambda w\right\|\le$$

$$\le\left\|\int_0^M (1-\alpha\lambda)^n\ dE_\lambda w\right\|+\left\|\int_0^M n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\ dE_\lambda w\right\|.$$

Так как $|1-\alpha\lambda|<1$ при условии $0<\alpha<2/M$, то каждый из интегралов по норме стремится к 0 при $n\to\infty$, а, значит, и $\|(E-Ag_n(A))w\|\to 0$ при $n\to\infty$. Лемма 2.6 доказана.

Лемма 2.7. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M$. *Тогда для* $\forall v\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $(n-1)^s\left\|A^s(E-Ag_n(A))v\right\|\to 0,\ n\to\infty,\quad 0\le s<\infty.$

Доказательство

Так как (2.58) верно, то выполняется неравенство

$$(n-1)^s\left\|A^s(E-Ag_n(A))\right\|\le$$

$$\le (n-1)^s\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^s\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\le (s+2)\left(\frac{s}{\alpha e}\right)^s=\gamma_s,\ n\ge 1.$$

Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [43, с. 151], по которой сходимость $B_n u\to Bu$ при $n\to\infty$ для $\forall u\in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|,\ n=1,2,\ldots$ ограничены независящей от n постоянной. У нас $\|B_n\|=(n-1)^s\left\|A^s(E-Ag_n(A))\right\|\le\gamma_s$, т. е. $\|B_n\|$ совокупно ограничены.

В качестве плотного в $\overline{R(A)}$ подмножества возьмем множество $R(A)$ и положим $s_1 = s + 1$. Тогда для каждого $v = Aw \in R(A)$ получим

$$(n-1)^s \left\| A^s (E - Ag_n(A))v \right\| = (n-1)^s \left\| A^{s+1} (E - Ag_n(A))w \right\| \le (n-1)^s \times$$

$$\times \sup_{0 \le \lambda \le M} \lambda^{s+1} \left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \, \|w\| \le (n-1)^s (s+3) \left(\frac{s+1}{\alpha e} \right)^{s+1} (n-1)^{-(s+1)} \|w\| =$$

$$= (n-1)^{-1} \gamma_{s_1} \|w\| \to 0, \; n \to \infty,$$

так как $s_1 < \infty$. Лемма 2.7 доказана.

Лемма 2.8. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \; \|A\| \le M$. *Если для некоторых* $n_k < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $k \to \infty$ *имеем* $w_k = A\left(E - Ag_{n_k}(A)\right)v_0 \to 0,$ *то* $v_k = \left(E - Ag_{n_k}(A)\right)v_0 \to 0.$

Доказательство

В силу (2.56) справедливо $\|v_k\| = \left\| \left(E - Ag_{n_k}(A)\right)v_0 \right\| \le 2\|v_0\|, \; k \in N$. Следовательно, последовательность v_k ограничена. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $v_k - \to v \; \left(k \in N' \subseteq N\right)$, тогда $Av_k - \to Av \; \left(k \in N'\right)$. Но по условию имеем $w_k = Av_k \to 0, \; k \to \infty$, следовательно, $Av = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора *A*, то $v = 0$. Тогда

$$\|v_k\|^2 = \left(v_k, \left(E - Ag_{n_k}(A)\right)v_0\right) = (v_k, v_0) - \left(v_k, Ag_{n_k}(A)v_0\right) = (v_k, v_0) -$$
$$- \left(Av_k, g_{n_k}(A)v_0\right) = (v_k, v_0) - \left(w_k, g_{n_k}(A)v_0\right) \to 0, \; k \to \infty,$$

так как $w_k \to 0, \; v = 0$ и по условию (2.55) $\left\| g_{n_k}(A) \right\| \le \frac{5}{4}(n_k - 1)\alpha < \frac{5}{4}\left(\bar{n} - 1\right)\alpha$. Следовательно, $\|v_k\| \to 0, \; k \to \infty$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности v_k стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $v_k \to 0, \; k \to \infty$. Лемма 2.8 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 2.19. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (2.54) *выбирается по правилу* (2.20). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство

По индукции нетрудно показать, что $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^n - n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1}\right] y_\delta$. Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \tag{2.59}$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A[E - Ag_n(A)]x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y). \tag{2.60}$$

В силу лемм 2.6 и 2.7 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2.61}$$

$$\sigma_n = (n-1)\|A(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.62}$$

Кроме того, из (2.55) и (2.56) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta, \tag{2.63}$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leq 2. \tag{2.64}$$

Применим правило останова (2.20). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b\delta,\quad b > 1$ и из (2.60) и (2.64) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b+2)\delta. \tag{2.65}$$

Для любых $n < m$ справедливы неравенства $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Поэтому $\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \geq (b-2)\delta$. Итак, для любых $n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq (b-2)\delta. \tag{2.66}$$

Из (2.62) и (2.66) при $n = m-1$ получаем $\frac{\sigma_{m-1}}{m-2} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geq (b-2)\delta$ или, что то же самое, $(m-2)\delta \leq \frac{\sigma_{m-1}}{b-2} \to 0, \quad \delta \to 0$ (так как из (2.62) $\sigma_m \to 0, m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$, то, используя равенство (2.59), получим

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| +$$
$$+\frac{5}{4}\alpha(m-1)\delta,\ m \to \infty,\ \delta \to 0,$$

так как из (2.61) вытекает $\|(E - Ag_m(A))x\| \to 0, m \to \infty.$

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x,\ \delta_n \to 0.$ Действительно, из (2.65) имеем $\left\|A\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\| \leq (b+2)\delta_n, \delta_n \to 0$. Следовательно,

$$A\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0,\ \delta_n \to 0,$$

поэтому по лемме 2.8 получаем, что тогда $\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0,\ \delta_n \to 0.$ Отсюда $\left\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\right\| \leq \left\|\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\| + \frac{5}{4}\alpha\left(m(\delta_n) - 1\right)\delta_n,\ \delta_n \to 0$. Теорема 2.19 доказана.

Теорема 2.20. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.19 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m(\delta) \leq 2 + \frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}$,

$$\left\|x_{m(\delta),\delta} - x\right\| \leq 2^{1/(s+1)}\left[(b+2)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} + \frac{5}{4}\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \quad (2.67)$$

Доказательство

$$\|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| = \left\|\int_0^M \lambda^{s+1}\left(1 - \lambda g_{m-1}(\lambda)\right)dE_\lambda z\right\| \leq$$
$$\leq (s+3)(s+1)^{s+1}\left[(m-2)\alpha e\right]^{-(s+1)}\|z\|.$$

Тогда, воспользовавшись неравенством (2.66), получим $(b-2)\delta \le (s+3)(s+1)^{s+1}\left[(m-2)\alpha e\right]^{-(s+1)}\|z\|$, откуда имеем $m \le 2 + \dfrac{s+1}{\alpha e}\left[\dfrac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\|(E - Ag_m(A))x\| = \left\|A^s(E - Ag_m(A))z\right\| \le$$

$$\le \left\|A^{s+1}(E - Ag_m(A))z\right\|^{s/(s+1)}\|(E - Ag_m(A))z\|^{1/(s+1)} \le 2^{1/(s+1)}\|A(E - Ag_m(A))x\|^{s/(s+1)} \times$$

$$\times \|z\|^{1/(s+1)} \le 2^{1/(s+1)}\left[(b+2)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} \text{ (см. (2.65)).}$$

Теперь, поскольку соотношение (2.59) справедливо для любых n, то

$$\left\|x_{m,\delta} - x\right\| \le \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \le$$

$$\le 2^{1/(s+1)}\left[(b+2)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} + \frac{5}{4}\alpha(m-1)\delta \le$$

$$\le 2^{1/(s+1)}\left[(b+2)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} + \frac{5}{4}\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta.$$

Теорема 2.20 доказана.

Замечание 2.6. *Порядок оценки* (2.67) *есть* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, *и он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0$ [12].

Замечание 2.7. *Хотя формулировка теоремы* 2.20 *дается с указаниями степени истокопредставимости* s *и истокопредставляющего элемента* z, *на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова* (2.20). *Тем не менее в теореме* 2.20 *утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций* m, *обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (2.20), *как показывает теорема* 2.19, *обеспечивает сходимость метода, т. е. его регуляризующие свойства.*

2.3 Итерационный метод явного типа решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве

2.3.1 Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

2.3.1.1 Сходимость при точной правой части

Решается задача из раздела 2.1. Предлагается явная итерационная схема

$$x_{n+1} = \left(E - \alpha A^k\right)x_n + \alpha A^{k-1}y,\ x_0 = 0,\ k \in N. \tag{2.68}$$

В случае приближенной правой части уравнения (2.1) метод (2.68) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^k\right)x_{n,\delta} + \alpha A^{k-1}y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0,\ k \in N. \tag{2.69}$$

Этот метод для решения некорректных задач впервые предложен в [91], а частные случаи этого метода изучались в [130] при ограниченном операторе A^{-1}, т. е. для корректной задачи. Как нетрудно увидеть, метод (2.69) обобщает явный метод простой итерации $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right),\ x_{0,\delta} = 0.$ Последний получается из (2.69) при $k = 1$.

Воспользовавшись интегральным представлением положительно определенного самосопряжённого оператора *A* и формулой (2.68), по индукции получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda^k)^n dE_\lambda y$, где $M = \|A\|$, E_λ – спектральная функция оператора *A*. Отсюда легко выводится сходимость процесса (2.68) при $n \to \infty$ для $0 < \alpha < 2/M^k$.

2.3.1.2 Сходимость при приближённой правой части

Итерационный процесс (2.69) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций *n* в зависимости от уровня погрешности δ. Справедлива

Теорема 2.21. *Итерационный процесс* (2.69) *сходится при* $0 < \alpha < 2/M^k$ *, если выбирать число итераций n в зависимости от* δ *так, чтобы* $n^{1/k}\delta \to 0$ *при* $n \to \infty, \delta \to 0.$

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 2.1. При этом при условии $0<\alpha\le 5/\left(4M^k\right)$ легко показываются оценки: $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le \left(\frac{5}{4}\right)^{(k-1)/k} kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta,\ n\ge 1$ и $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta,\ n\ge 2$.

2.3.1.3 Оценка погрешности

Скорость сходимости метода (2.69) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения (2.1), т. е. $x = A^s z,\ s>0$. Тогда $y = A^{s+1}z$, и, следовательно, получим $x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^s \left(1-\alpha\lambda^k\right)^n dE_\lambda z$. Для оценки $\left\|x-x_n\right\|$ найдём максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda)=\lambda^s(1-\alpha\lambda^k)^n$. Нетрудно показать, что при условии $0<\alpha\le 5/\left(4M^k\right)$ справедливо неравенство $\left\|x-x_n\right\| \le s^{s/k}(kn\alpha e)^{-s/k}\left\|z\right\|,\ n\ge 1$. Таким образом, общая оценка погрешности метода итераций (2.69) запишется в виде

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\| \le s^{s/k}(kn\alpha e)^{-s/k}\left\|z\right\| + \left(\frac{5}{4}\right)^{(k-1)/k} k(n\alpha)^{1/k}\delta,\ n\ge 1, \tag{2.70}$$

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\| \le s^{s/k}(kn\alpha e)^{-s/k}\left\|z\right\| + k(n\alpha)^{1/k}\delta,\ n\ge 2. \tag{2.71}$$

Для минимизации оценки погрешности (2.71) вычислим её правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим априорный момент останова $n_{\text{опт}} = s^{(s+k)/(s+1)} k^{-(s+k)/(s+1)} \alpha^{-1} e^{-s/(s+1)} \left\|z\right\|^{k/(s+1)} \delta^{-k/(s+1)}$ и оптимальную оценку погрешности явного метода $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le$ $\le (1+s)\left(s/k\right)^{s(1-k)/(k(s+1))} e^{-s/(k(s+1))} \left\|z\right\|^{1/(s+1)} \delta^{s/(s+1)},\ n\ge 2$.

Приведём погрешность метода (2.69) при счёте с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (2.69), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учётом погрешностей вычисления γ_n, т. е. $z_{n+1} = \left(E-\alpha A^k\right)z_n + \alpha A^{k-1}y_\delta + \alpha\gamma_n,\ \ z_0 = 0$. Оценка погрешности метода (2.69) в этом случае имеет вид

$$\left\|x-z_n\right\| \le \left\|x-x_{n,\delta}\right\| + \left\|x_{n,\delta}-z_n\right\| \le \left(\frac{s}{kn\alpha e}\right)^{s/k}\left\|z\right\| + k(n\alpha)^{1/k}\delta + \alpha(n-1)\gamma,\ n \ge 2,$$

где $\gamma = \sup\limits_i |\gamma_i|$.

Очевидно, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α, но от него зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, значит, объёма вычислительной работы, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию $0 < \alpha \le 5\big/\left(4M^k\right)$, и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым.

Оценку $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}}$ можно оптимизировать по k. Для этого производную по k от $\varphi(k) = (s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}}$ приравняем к нулю. Получим $(s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}} \frac{s}{k^2(s+1)}\left(k - \ln\frac{s}{k}\right) = 0$. Отсюда видно, что оптимальное k должно удовлетворять равенству $k = \ln\frac{s}{k}$. Но k должно быть целым числом, поэтому, как показывают расчеты, для $s \le 5$ $k_{\text{опт}} = 1$, для $6 \le s \le 27$ $k_{\text{опт}} = 2$. Следовательно, при $6 \le s \le 27$ предпочтительно использовать метод (2.69) при $k = 2$, а при $s \le 5$ метод простой итерации $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right)$, $x_{0,\delta} = 0$.

2.3.2 Сходимость метода в случае неединственного решения

Пусть теперь 0 – собственное значение оператора A (т. е. уравнение (2.1) имеет неединственное решение). Положим $N(A) = \left\{x \in H \,\middle|\, Ax = 0\right\}$, и пусть $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть далее $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 2.22. Пусть $A \ge 0,\ y \in H,\ 0 < \alpha < 2\big/M^k$. Тогда для итерационного процесса (2.68) верны следующие утверждения:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\left\|Ax_n - y\right\| \to I(A,y) = \inf\limits_{x \in H}\left\|Ax - y\right\|$;

б) *метод* (2.69) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* – *минимальное решение уравнения.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 2.1. Так как $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, т. е. процесс (2.68) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

2.3.3 Сходимость метода в энергетической норме

Здесь и ниже предполагается, что решение уравнения (2.1) единственно. Изучим сходимость метода (2.69) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. С помощью интегрального представления самосопряженного оператора A получим

$$\|x - x_n\|_A^2 = \int_0^M \lambda \left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{2n} d(E_\lambda x, x),$$

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^M \lambda^{-1} \left[1 - \left(1 - \alpha\lambda^k\right)^n\right]^2 d\left(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta\right),$$

где $M = \|A\|$. Оценив подынтегральные функции, получим при условии $0 < \alpha \le 5/\left(4M^k\right)$ оценки погрешности для итерационного метода (2.69) в энергетической норме:

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (2kn\alpha e)^{-1/(2k)} \|x\| + \left(\frac{5}{4}\right)^{(2k-1)/(2k)} k(n\alpha)^{1/(2k)} \delta, \ n \ge 1,$$

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (2kn\alpha e)^{-1/(2k)} \|x\| + k(n\alpha)^{1/(2k)} \delta, \ n \ge 2.$$

Следовательно, если в процессе (2.69) выбирать число итераций $n = n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/(2k)}\delta \to 0, \ n \to \infty, \ \delta \to 0$, то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Итак, справедлива

Теорема 2.23. *При условии* $0 < \alpha \le 5/\left(4M^k\right)$ *итерационный метод* (2.69) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать из условия* $n^{1/(2k)}\delta \to 0, \ n \to \infty, \ \delta \to 0$. *Для метода* (2.69) *справедливы оценки погрешности*

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A \le \left(2kn\alpha e\right)^{-1/(2k)} \|x\| + \left(\frac{5}{4}\right)^{(2k-1)/(2k)} k(n\alpha)^{1/(2k)} \delta,\ n \ge 1, \quad (2.72)$$

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A \le \left(2kn\alpha e\right)^{-1/(2k)} \|x\| + k\left(n\alpha\right)^{1/(2k)} \delta,\ n \ge 2\,. \quad (2.73)$$

Для минимизации оценки погрешности (2.73) вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим $\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A^{\text{опт}} \le 2 \cdot 2^{-1/(4k)} k^{(2k-1)/(4k)} e^{-1/(4k)} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}$ и $n_{\text{опт}} = k^{-(2k+1)/2} (\alpha \delta^k)^{-1} (2e)^{-1/2} \|x\|^k$.

Отметим тот факт, что для сходимости метода (2.69) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций $n = n(\delta)$ так, чтобы $n^{1/(2k)} \delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O\left(\delta^{-k}\right)$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-k}, и такой порядок обеспечивает сходимость метода (2.69).

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности для метода (2.69) и априорный момент останова $n_{\text{опт}}$ без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения, что делает метод (2.69) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения x уравнения (2.1).

Исследован вопрос о том, когда из сходимости метода (2.69) в энергетической норме следует его сходимость в обычной норме гильбертова пространства H. Эти условия дает

Теорема 2.24. *Если выполнены условия* 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, *где* $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$, $\varepsilon -$ *фиксированное положительное число* $(0 < \varepsilon < \|A\|)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства*.

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 2.1.

2.3.4 Правило останова по невязке

Для получения априорного выбора числа итераций n потребовалось знание истокопредставимости точного решения x уравнения (2.1). Поскольку обычно сведения об истокопредставимости искомого решения неизвестны, то приведенные в подразделе 2.3.1 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее, метод (2.69) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться правилом останова по невязке (2.20).

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем, что правило останова по невязке применимо к методу (2.69). Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \left(1 - \alpha\lambda^k\right)^n\right]$ из подраздела 2.3.1. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия

$$\sup_{0 \le \lambda \le M} |g_n(\lambda)| \le (5/4)^{(k-1)/k} k\alpha^{1/k} n^{1/k},\ n > 0,\ M = \|A\|,\ 0 < \alpha < 2/M^k, \quad (2.74)$$

$$\sup_{0 \le \lambda \le M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le 1,\ 0 < \alpha < 2/M^k, \quad (2.75)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0,\ n \to \infty, \forall \lambda \in (0, M],\ 0 < \alpha < 2/M^k, \quad (2.76)$$

$$\sup_{0 \le \lambda \le M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le \left(\frac{s}{k\alpha e}\right)^{s/k} n^{-s/k},\ n > 0,\ 0 \le s < \infty,\ 0 < \alpha \le \frac{5}{4M^k}. \quad (2.77)$$

Аналогично леммам 2.1, 2.2 и 2.3 доказываются следующие леммы.

Лемма 2.9. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le M$. *Тогда для любого* $w \in H$ $(E - Ag_n(A))w \to 0,\ n \to \infty.$

Лемма 2.10. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le M$. *Тогда для любого* $v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение*

$$n^{s/k}\left\|A^s(E - Ag_n(A))v\right\| \to 0,\ n \to \infty,\ 0 \le s < \infty. \quad (2.78)$$

Лемма 2.11. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le M$. *Если для некоторых* $n_p < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $p \to \infty$ *имеем* $w_p = A\left(E - Ag_{n_p}(A)\right)v_0 \to 0$, *то* $v_p = \left(E - Ag_{n_p}(A)\right)v_0 \to 0.$

Используем леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2.25. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (2.69) выбирается по правилу (2.20). Тогда $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство

По индукции легко показать, что $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^k\right)^n\right] y_\delta$. Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \qquad (2.79)$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A(E - Ag_n(A))x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y). \qquad (2.80)$$

В силу лемм 2.9 и 2.10 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \quad n \to \infty, \qquad (2.81)$$

$$\sigma_n = n^{1/k}\|A(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (2.82)$$

Кроме того, из (2.74) и (2.75) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq (5/4)^{(k-1)/k} k\alpha^{1/k} n^{1/k}\delta, \qquad (2.83)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leq 1. \qquad (2.84)$$

Применим правило останова (2.20). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b\delta$, $b > 1$ и из (2.80) и (2.84) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b+1)\delta. \qquad (2.85)$$

Для любых $n < m$ справедливы неравенства $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Поэтому

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \geq (b-1)\delta.$$

Итак, для любых $n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq (b-1)\delta. \qquad (2.86)$$

Из (2.82) и (2.86) при $n=m-1$ получаем $\frac{\sigma_{m-1}}{(m-1)^{1/k}}=\|A(E-Ag_{m-1}(A))x\|\ge(b-1)\delta$ или, что то же, $(m-1)^{1/k}\delta\le\frac{\sigma_{m-1}}{b-1}\to 0,\ \delta\to 0$ (так как из (2.82) $\sigma_m\to 0,\ m\to\infty$). Если при этом $m\to\infty$ при $\delta\to 0$, то используя (2.79), получим

$$\|x_{m,\delta}-x\|\le\|(E-Ag_m(A))x\|+\|g_m(A)(y_\delta-y)\|\le\|(E-Ag_m(A))x\|+$$
$$+(5/4)^{(k-1)/k}k\alpha^{1/k}m^{1/k}\delta\to 0,\ m\to\infty,\ \delta\to 0,$$

так как из (2.81) выполняется $\|(E-Ag_m(A))x\|\to 0,\ m\to\infty.$

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n}\to x,\ \delta_n\to 0.$ Действительно, из (2.85) имеем $\|A(E-Ag_{m(\delta_n)}(A))x\|\le(b+1)\delta_n\to 0,\ \delta_n\to 0.$ Следовательно, при $\delta_n\to 0$ $A(E-Ag_{m(\delta_n)}(A))x\to 0,$ и тогда по лемме 2.11 получаем, что при $\delta_n\to 0$ $(E-Ag_{m(\delta_n)}(A))x\to 0.$ Отсюда

$$\|x_{m(\delta_n),\delta_n}-x\|\le(5/4)^{(k-1)/k}k\alpha^{1/k}m^{1/k}(\delta_n)\delta_n+$$
$$+\|(E-Ag_{m(\delta_n)}(A))x\|\to 0,\delta_n\to 0.$$

Теорема 2.25 доказана.

Имеет место

Теорема 2.26. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.25 *и пусть* $x=A^s z,\ s>0$, *тогда справедливы оценки* $m(\delta)\le 1+\frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}$,

$$\|x_{m(\delta),\delta}-x\|\le[(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+$$
$$+(5/4)^{(k-1)/k}k\alpha^{1/k}\left\{1+\frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}\right\}^{1/k}\delta. \qquad (2.87)$$

Доказательство

Используя результаты подраздела 2.3.1, имеем

$$\|A(E-Ag_{m-1}(A))x\| = \left\|A^{s+1}(E-Ag_{m-1}(A))z\right\| =$$

$$= \left\|\int_0^M \lambda^{s+1}(1-\alpha\lambda^k)^{m-1}\,dE_\lambda z\right\| \le (s+1)^{(s+1)/k}[k(m-1)\alpha e]^{-(s+1)/k}\|z\|.$$

Воспользовавшись неравенством (2.86), получим $(b-1)\delta \le (s+1)^{(s+1)/k}[k(m-1)\alpha e]^{-(s+1)/k}\|z\|$, откуда имеем $m \le 1 + \dfrac{s+1}{k\alpha e}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\|(E-Ag_m(A))x\| = \left\|A^s(E-Ag_m(A))z\right\| \le$$

$$\le \left\|A^{s+1}(E-Ag_m(A))z\right\|^{s/(s+1)}\|(E-Ag_m(A))z\|^{1/(s+1)} \le$$

$$\le \|A(E-Ag_m(A))x\|^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} \le [(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$$

(см. (2.85)). Тогда, поскольку соотношение (2.79) справедливо для любых n, то

$$\|x_{m,\delta}-x\| \le \|(E-Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \le [(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} +$$

$$+ (5/4)^{(k-1)/k} k m^{1/k}\alpha^{1/k}\delta \le [(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} +$$

$$+ (5/4)^{(k-1)/k} k\alpha^{1/k}\left\{1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}\right\}^{1/k}\delta.$$

Теорема 2.26 доказана.

Замечание 2.8. *Порядок оценки* (2.87) *есть* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, *и, как следует из* [12], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0$.

Замечание 2.9. *Знания степени истокопредставимости* s *и истокопредставляющего элемента* z *на практике не потребуются, так как они не содержатся в правиле останова по малости невязки* (2.20).

2.3.5 Правило останова по соседним приближениям в итерационном методе для уравнений с несамосопряжённым оператором

Решается задача из подраздела 2.1.5. Используем явную схему метода итераций

$$z_{n+1} = \left(E - \alpha\left(A^* A\right)^k \right) z_n + \alpha\left(A^* A\right)^{k-1} A^* y_\delta + \left(E - \alpha\left(A^* A\right)^k \right) u_n,$$
$$k \in N,\ z_0 \in H,\ 0 < \alpha \le \frac{5}{4\left\|A^* A\right\|^k}. \tag{2.88}$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = E - \alpha\left(A^* A\right)^k$, $B = \alpha\left(A^* A\right)^{k-1} A^*$. Для простоты считаем, что $\|A\| = 1$. Метод (2.88) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$. Обоснуем возможность применения к методу (2.88) правила останова по соседним приближениям (2.37). Аналогично [19] докажем, что метод (2.88) с правилом останова (2.37) сходится, и получим оценку для момента останова. Справедливы леммы.

Лемма 2.12. *Пусть приближение* w_n *определяется равенствами* $w_0 = z_0,\ \ w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n,\ n \ge 0,$ *тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n} \left\| w_k - w_{k+1} + Cu_k \right\|^2 \le \left\| w_0 - x \right\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \left\| Cu_k \right\|^2.$$

Лемма 2.13. *При любом* $w_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство*

$$\varliminf_{n \to \infty} \left\| w_n - w_{n+1} \right\| \le 2\|C\|\beta.$$

Леммы доказываются аналогично подобным леммам из подраздела 2.1.5. Они будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2.27. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta,$ *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n*, удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta, \quad \|u_n\| \le \beta;$

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta,$ *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0,\ \delta,\beta \to 0$ и $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right),$ *где* $d > 1,\ p \in (0,1),$ *то* $\lim\limits_{\delta,\beta \to 0} \|z_m - x\| = 0.$

Доказательство

а) По индукции нетрудно показать, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left(C^{-1} B y_\delta + u_{n-k-1}\right), \tag{2.89}$$

отсюда $w_n = C^n w_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y + C\sum\limits_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$ Учитывая, что $z_0 = w_0$, получим

$$\|z_n - z_{n+1}\| \le \|w_n - w_{n+1}\| + \left\|BC^n (y - y_\delta)\right\|. \tag{2.90}$$

Используя интегральное представление оператора, нетрудно показать, что $\left\|BC^n(y - y_\delta)\right\| \to 0, \quad n \to \infty.$ Поэтому (см. лемму 2.13) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \|z_n - z_{n+1}\| =$ $= \varlimsup\limits_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$ Следовательно, условием $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ и u_n, $\|u_n\| \le \beta$.

б) Рассмотрим последовательность $w_0 = z_0,\ w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n$, $n \ge 0,$ и определим момент останова m' условием

$$\left.\begin{aligned} &\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta, \quad (n < m'), \\ &\|w_{m'} - w_{m'+1}\| \le \varepsilon - \|B\|\delta. \end{aligned}\right\} \tag{2.91}$$

Из (2.90) следует, что $m \le m'$. Из леммы 2.12 при $n = m'$ получим

$\sum_{k=0}^{m'} \left\| w_k - w_{k+1} + Cu_k \right\|^2 \le \left\| w_0 - x \right\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \left\| Cu_k \right\|^2$. Отсюда справедливо неравенство $\sum_{k=0}^{m'-1} \left(\left\| w_k - w_{k+1} \right\| - \|C\| \beta \right)^2 \le \left\| w_0 - x \right\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \left\| Cu_k \right\|^2$. Так как при $n < m'$ имеем $\left\| w_n - w_{n+1} \right\| > \varepsilon - \|B\| \delta,$ то $m' \left(\varepsilon - \|B\| \delta - \|C\| \beta \right)^2 \le \left\| w_0 - x \right\|^2 + m' \|C\|^2 \beta^2$. Учитывая, что $w_0 = z_0$ и $m \le m'$, получим $m \le m' \le \dfrac{\left\| z_0 - x \right\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\| \delta - 2\|C\| \beta \right) \left(\varepsilon - \|B\| \delta \right)}$.

в) Из (2.89) вычтем $x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y$, получим

$$z_n - x = C^n (z_0 - x) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1} B (y_\delta - y) + u_{n-k-1} \right]. \tag{2.92}$$

Отсюда

$$\left\| \Delta_n \right\| \le \left\| C^n \Delta_0 \right\| + \left(\|B\| \delta + \|C\| \beta \right) n, \tag{2.93}$$

где $\Delta_n = z_n - x, \quad \Delta_0 = z_0 - x$. В частности, (2.93) справедливо и при $n = m$.

Нетрудно показать, что при условии $0 < \alpha \le 5/4 \quad \left\| C^n (E - C) \right\| \le \dfrac{1}{n+1}$. Поэтому из равенства (2.92) при $n = m - 1$ получим $\left\| z_{m-1} - z_m \right\| \le \dfrac{2}{m} \left\| C^{(m-1)/2} (z_0 - x) \right\| + \|B\| \delta + \|C\| (2 + \ln m) \beta.$

Поскольку по условию теоремы $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d \left(\|B\| \delta + \|C\| \beta^p \right)$, $d > 1, \quad p \in (0,1)$, то для достаточно малых δ, β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\| \delta + 2\|C\| \beta$, поэтому из б) получим

$$m \le \frac{\left\| z_0 - x \right\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\| \delta - 2\|C\| \beta \right) \left(\varepsilon - \|B\| \delta \right)}.$$

Так как $\|z_{m-1}-z_m\|>\varepsilon$, то $\varepsilon \le \frac{2}{m}\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|+\|B\|\delta+\|C\|(2+\ln m)\beta$. Отсюда
$$m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\le \frac{2\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)}{\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\left[2+\ln\frac{\|z_0-x\|^2}{\left(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon-\|B\|\delta\right)}\right]}.$$

Множитель $\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|\to 0,\ m\to\infty,$ а дробь

$$\frac{2\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)}{\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\left[2+\ln\frac{\|z_0-x\|^2}{\left(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon-\|B\|\delta\right)}\right]}$$

ограничена при $\delta,\beta\to 0$. Поэтому при $m\to\infty,\ \delta,\beta\to 0$ $m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\to 0$.

Так как при $m\to\infty$ $\left\|C^m\Delta_0\right\|\to 0$, то

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\|\Delta_m\|=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\|z_m-x\|\le\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\left(\left\|C^m\Delta_0\right\|+m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\right)=0.$$

Теорема 2.27 доказана.

2.4 Сходимость в гильбертовом пространстве метода простой итерации с попеременно чередующимся шагом решения линейных уравнений

Как известно, погрешность метода простой итерации с постоянным $x_{n+1,\delta}=x_{n,\delta}+\alpha\left(y_\delta-Ax_{n,\delta}\right),\ x_{0,\delta}=0$ или переменным [29] шагом зависит от суммы итерационных шагов, и притом так, что для сокращения числа итераций желательно, чтобы итерационные шаги были как можно большими. Однако на эти шаги накладываются ограничения сверху [28–29]. Возникла идея попытаться ослабить эти ограничения. Это удалось сделать, выбирая для шага два значения α и β попеременно, где β уже не обязано удовлетворять прежним требованиям.

2.4.1 Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

Для решения уравнения $Ax = y$ из раздела 2.1 предлагается явная итерационная процедура с попеременно чередующимся шагом

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0,$$

$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{2.94}$$

В случае приближенной правой части уравнения y_δ $\left(\|y - y_\delta\| \le \delta\right)$ соответствующие методу (2.94) итерации примут вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0,$$

$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{2.95}$$

Далее будем считать, что $\|A\| = 1$.

Методы (2.94)–(2.95) впервые были предложены в работе [39], в которой показана сходимость обоих методов в исходной норме гильбертова пространства. Для их сходимости в [39] требуется, чтобы при $0 < \alpha < 2,\ \beta > 0$ было

$$\left|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)\right| < 1 \tag{2.96}$$

для любого $\lambda \in (0,1]$. Условие (2.96) равносильно совокупности двух условий

$$(\alpha + \beta)^2 < 8\alpha\beta, \tag{2.97}$$

$$\alpha\beta < \alpha + \beta. \tag{2.98}$$

Доказано, что итерационный процесс (2.95) сходится при условиях (2.97), (2.98) и $0 < \alpha < 2$, если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \to 0,$ при $n \to \infty, \delta \to 0.$ В предположении, что точное решение x является истокообразно представимым с некоторым показателем $s > 0$, получена следующая оценка погрешности итерационного метода (2.95): $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s \left[\frac{n}{2}(\alpha + \beta)e^{3/4}\right]^{-s} \|z\| + \frac{n}{2}(\alpha + \beta)\delta.$ Оптимальная оценка погрешности для итераций (2.95) имеет вид $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le$

$\le (1+s)e^{-3s/(4(s+1))}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$ и достигается при $n_{опт}$ =
$= se^{-3s/(4(s+1))}\delta^{-1/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^{-1}$.

Сравним метод (2.95) с хорошо известным методом простой итерации

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right),\ x_{0,\delta} = 0. \qquad (2.99)$$

Оптимальная оценка погрешности метода (2.95) за счет неточности в правой части уравнения оказывается несколько хуже, чем аналогичная оценка для метода простой итерации (2.99), и совпадает с ней лишь в пределе при $n \to \infty$.

Таким образом, метод (2.95) не дает преимущества в мажорантных оценках по сравнению с методом (2.99). Но он дает выигрыш в следующем. В методе простой итерации с постоянным шагом (2.99) на шаг α накладывается ограничение – неравенство $0 < \alpha \le 1{,}25$, а в этом же методе с переменным шагом [29] допускается более широкий диапазон $0 < \alpha_n < 2$. А в методе (2.95) из условий (2.97) и (2.98) следует, что $0 < \dfrac{\alpha+\beta}{2} < 4$. Следовательно, выбирая α и β соответствующим образом, можно сделать $n_{опт}$ в методе (2.95) примерно втрое меньшим, чем для метода простой итерации с постоянным шагом, и вдвое меньшим, чем для того же метода с переменным шагом.

Поэтому, используя метод (2.95), для достижения оптимальной точности достаточно сделать итераций соответственно в три или два раза меньше, чем методами простых итераций с постоянным или переменным шагом.

2.4.2 Правило останова по невязке

Априорный выбор числа итераций n получен в предположении, что точное решение x уравнения $Ax = y$ истокообразно представимо. Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны, и тем самым приведенные в подразделе 2.4.1 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее, метод (2.95) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке (2.20).

Предположим, что при начальном приближении невязка достаточно велика, а именно больше уровня останова, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила останова по невязке (2.20) к явному итерационному методу (2.95). Ниже метод итераций (2.95) с остановом (2.20) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_m \left\|x - x_{m,\delta}\right\|\right) = 0$. Рассмотрим для четных n семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/2}(1-\beta\lambda)^{n/2}\right]$. Нетрудно показать, что при условиях (2.97), (2.98) и $0<\alpha<2$ для $g_n(\lambda)$ выполняются условия:

$$\sup_{0\le\lambda\le 1}\left|g_n(\lambda)\right| \le \frac{n(\alpha+\beta)}{2}, \quad n>0,$$

$$\sup_{0\le\lambda\le 1}\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right| \le 1, \quad n>0,$$

$$1-\lambda g_n(\lambda)\to 0,\ n\to\infty,\ \forall\lambda\in(0,1],$$

$$\sup_{0\le\lambda\le 1}\lambda^s\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right| \le s^s\left(\frac{n(\alpha+\beta)}{2}e^{3/4}\right)^{-s}, \ n>0,\ 0\le s<\infty.$$

Аналогично подобным леммам из подраздела 2.1.4 доказываются следующие леммы.

Лемма 2.13. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\|\le 1$. *Тогда для* $\forall w\in H$ $(E - Ag_n(A))w \to 0,\ n\to\infty.$

Лемма 2.14. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\|\le 1$. *Тогда для* $\forall v\in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^s\left\|A^s(E - Ag_n(A))v\right\| \to 0,\ n\to\infty,\ 0\le s<\infty.$

Лемма 2.15. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\|\le 1$. *Если для некоторых* $n_k < \overline{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $k\to\infty$ *имеем* $w_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0$, *то* $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0.$

Леммы 2.13–2.15 использовались при доказательстве следующих теорем.

Теорема 2.28. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\|\le 1$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ (m *– четное*) *в методе* (2.95) *выбирается по правилу* (2.20), *тогда* $x_{m,\delta}\to x$ *при* $\delta\to 0$.

Теорема 2.29. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.28 *и пусть* $x = A^s z,\ s>0$. *Тогда справедливы оценки* $m(\delta) \le 2 + \dfrac{s+1}{\alpha+\beta}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$,

$$\left\|x_{m(\delta),\delta}-x\right\|\le\left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+\frac{\alpha+\beta}{2}\left\{2+\frac{s+1}{\alpha+\beta}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \quad (2.100)$$

Доказательство теорем 2.28–2.29 аналогично доказательству подобных теорем из подраздела 2.1.4.

Замечание 2.10. *Порядок оценки* (2.100) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$*, и, как следует из* [12]*, он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x=A^s z,\ s>0$.

Замечание 2.11. *Хотя формулировка теоремы* 2.29 *дается с указаниями степени истокопредставимости s и истокопредставляющего элемента z, на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова по невязке* (2.20).

2.4.3 Сходимость метода в случае неединственного решения

Пусть теперь 0 – собственное значение оператора A (т. е. операторное уравнение (2.1) имеет неединственное решение). Положим $N(A)=\{x\in H\,|\,Ax=0\}$, и пусть $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть далее $P(A)x$ – проекция $x\in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x\in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 2.30. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\quad \|A\|\le 1,\quad y\in H,\quad 0<\alpha<2,$ $(\alpha+\beta)^2<8\alpha\beta,\ \ \alpha\beta<\alpha+\beta$*, тогда для итерационного процесса* (2.94) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n\to\Pi(A)y, \|Ax_n-y\|\to I(A,y)=\inf\limits_{x\in H}\|Ax-y\|$;

б) *метод* (2.94) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax=\Pi(A)y$ *разрешимо; в последнем случае* $x_n\to P(A)x_0+x^*$*, где* x^* *– минимальное решение операторного уравнения* (2.1).

Доказательство

Применив оператор A к (2.94), получим $Ax_n=A(E-\alpha_n A)x_{n-1}+\alpha_n Ay,$ где $y=P(A)y+\Pi(A)y.$ Так как $AP(A)y=0,$ то $Ax_n=A(E-\alpha_n A)x_{n-1}+\ +\alpha_n A\Pi(A)y.$ Отсюда

$$Ax_n - \Pi(A)y = A(E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n A\Pi(A)y - \Pi(A)y =$$
$$= A(E-\alpha_n A)x_{n-1} - (E-\alpha_n A)\Pi(A)y = (E-\alpha_n A)(Ax_{n-1} - \Pi(A)y) =$$
$$= (E-\alpha_n A)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_1 A)(Ax_0 - \Pi(A)y).$$

Обозначим $\nu_n = Ax_n - \Pi(A)y$, тогда $\nu_n = (E-\alpha_n A)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_1 A)\nu_0$. Имеем $A \geq 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т. е. $(Ax, x) > 0$ для любого $x \in M(A)$. Так как $0 < \alpha < 2$, $(\alpha+\beta)^2 < 8\alpha\beta$ и $\alpha\beta < \alpha + \beta$, то $|1-\alpha\lambda| < 1$ и $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)| < 1$. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора A, получим $\|\nu_n\| = \left\| \int_0^1 (1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\ldots(1-\alpha_n\lambda) dE_\lambda \nu_0 \right\| = \left\| \int_0^1 (1-\alpha\lambda)^l (1-\beta\lambda)^m dE_\lambda \nu_0 \right\|$. Здесь m, l – натуральные показатели, где $l + m = n$. Считаем, что $l = m = \left[\frac{n}{2}\right]$ или $l = m+1$. Справедлива цепочка неравенств

$$\|\nu_n\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1-\alpha\lambda)^l (1-\beta\lambda)^m dE_\lambda \nu_0 \right\| + \left\| \int_{\varepsilon_0}^1 (1-\alpha\lambda)^l (1-\beta\lambda)^m dE_\lambda \nu_0 \right\| \leq$$
$$\leq \left\| E_{\varepsilon_0}\nu_0 \right\| + q^{n/2}(\varepsilon_0) \left\| \nu_0 - E_{\varepsilon_0}\nu_0 \right\| < \varepsilon,$$

при $\varepsilon_0 \to 0$, $n \to \infty$. Здесь $q = \max\limits_{\lambda \in [\varepsilon_0, 1]} |(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)| < 1$. Следовательно, $\nu_n \to 0$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Таким образом, $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$ (по теореме 2.1 из [124]). Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2.94) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$, и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда метод итераций (2.94) примет вид $x_n = (E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n y = (E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n \Pi(A)y = (E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n Ax^* = x_{n-1} + \alpha_n A(x^* - x_{n-1})$. Разобьем последнее равенство на два, ибо $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n$. Тогда

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha_n P(A)A(x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0,$$

так как $AP(A)\left(x^{*}-x_{n-1}\right)=0$.

Кроме этого, $\Pi(A)x_n=\Pi(A)x_{n-1}+\alpha_n\Pi(A)A\left(x^{*}-x_{n-1}\right)=\Pi(A)x_{n-1}+$ $+\alpha_n A\left(\Pi(A)x^{*}-\Pi(A)x_{n-1}\right)=\quad \Pi(A)x_{n-1}-\alpha_n A\left(\Pi(A)x_{n-1}-x^{*}\right)$, так как $x^{*}\in M(A)$ и, следовательно, $\Pi(A)x^{*}=x^{*}$. Обозначим $\omega_n=\Pi(A)x_{n-1}-x^{*}$, тогда $\Pi(A)x_n-x^{*}=\Pi(A)x_{n-1}-x^{*}-\alpha_n A\left(\Pi(A)x_{n-1}-x^{*}\right)$. Отсюда имеем $\omega_n=\omega_{n-1}-\alpha_n A\omega_{n-1}=(E-\alpha_n A)\omega_{n-1}=(E-\alpha_n A)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_1 A)\omega_0$, и, аналогично ν_n, можно показать, что $\omega_n\to 0,\ n\to\infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n\to x^{*}$. Следовательно, $x_n=P(A)x_n+\Pi(A)x_n\to P(A)x_0+x^{*}$. Теорема 2.30 доказана.

Замечание 2.12. *Так как у нас* $x_0=0$, *то* $x_n\to x^{*}$, *т .е. итерационный процесс* (2.94) *сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.*

Замечание 2.13. *Уравнение* $Ax=y$ *с действующим в гильбертовом пространстве H оператором, не обладающим свойством самосопряженности или положительности, может быть сведено к решению уравнения* $A^{*}Ax=A^{*}y$ *уже с положительным и самосопряженным оператором* $A^{*}A$. *Вышеописанные во второй главе результаты для операторного уравнения* (2.1) *аналогичны результатам для уравнений* $Ax=y$ *уже с произвольным действующим в гильбертовом пространстве оператором* A.

2.5 Численные модельные примеры

Для иллюстрации некоторых свойств описанных методов проанализируем модельные численные примеры. В первых двух задачах задаются точные решения $x(s)$ и ядра $K(t,s)$, а с помощью методов численного интегрирования [32] находятся правые части $y(t)$, в которые вносятся ошибки. В *задаче 2.3* задаются ядро $A(t,s)$, точные решения $x(s)$ и правые части $y(t)$. Примеры решались на ПЭВМ методом простых итераций $x_{n+1,\delta}=x_{n,\delta}+\alpha\left(y_\delta-Ax_{n,\delta}\right)$, $x_{0,\delta}=0$ и методами, предложенными в разделах 2.1 – 2.4, при этом использовались правила останова по невязке и по соседним приближениям.

Программы для решения всех трёх предложенных задач были реализованы в среде программирования *DELPHI*.

Задача 2.1 *Рассмотрим в пространстве* $L_2(0,1)$ *задачу в виде уравнения*

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds = y(t), \qquad 0 \le t \le 1 \tag{2.101}$$

с симметричным положительным ядром

$$K(t,s) = \frac{1}{1+100(t-s)^2}. \tag{2.102}$$

В качестве точного решения сформулированной задачи выберем функцию

$$x(s) = \begin{cases} s, & 0 \le s < \dfrac{1}{2}, \\ 1-s, & \dfrac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

С использованием метода правых прямоугольников при $m = 32$, $h = 1/m$ была вычислена в точках $t_i = ih,\ i = \overline{1,m}$ правая часть $y(t)$ уравнения (2.101), результаты указаны в *таблице 2.1*, см. с. 99 (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы).

Сформулированная задача относится к классу обратных задач теории потенциала. Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ, и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\tilde{y}_i$, $i = \overline{1,m}$, полученные следующим образом $\tilde{y}_i = [\, y(t_i)\cdot 10^k + 0{,}5] / 10^k$, где $y(t_i)$ взяты из *таблицы 2.1*, квадратные скобки означают целую часть числа и $k = 3; 4$. При $k = 3$ величина погрешности $\delta = 10^{-3}$. При $k = 4$ величина погрешности $\delta = 10^{-4}$. Действительно, имеем $\int_0^1 [y(t) - \tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum_{i=1}^m [y(t_i) - \tilde{y}_i]^2 h \le mh\left(10^{-k}\right)^2 = 10^{-2k}$. Заменим интеграл в (2.101) квадратурной суммой, например, по формуле правых прямоугольников с узлами $s_j = jh,\ j = \overline{1,m},\ h = 1/m$, т. е. $\int_0^1 K(t,s)x(s)ds \approx$ $\approx \sum_{j=1}^m K(t,s_j)hx_j$. Тогда получим равенство $\sum_{j=1}^m K(t,s_j)hx_j + \rho_m(t) = y(t)$, где $\rho_m(t) -$ остаток квадратурной замены. Записав последнее равенство в точ-

ках t_i, $i=\overline{1,m}$, получим уравнения $\sum\limits_{j=1}^{m} K\left(t_i,s_j\right)hx_j + \rho_m(t_i) = y(t_i)$, $i=\overline{1,m}$.
Точные значения $y(t_i)$ мы не знаем, а знаем лишь приближения $\tilde{y}_i$ и, отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближённого решения

$$\sum_{j=1}^{m} K\left(t_i,s_j\right)hx_j = \tilde{y}_i, \quad i=\overline{1,m}. \tag{2.103}$$

Выберем для определённости $m=32$ и будем решать систему (2.103) методом итераций (2.3) при $k = 2$, который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} - 2\alpha\sum_{j=1}^{m} K\left(t_i,s_j\right)hx_j^{(n)} - \alpha^2\sum_{j=1}^{m} K\left(t_i,s_j\right)h\tilde{y}_j + 2\alpha\tilde{y}_i +$$
$$+\alpha^2\sum_{j=1}^{m} K\left(t_i,s_j\right)h\left(\sum_{l=1}^{m} K\left(t_j,s_l\right)hx_l^{(n)}\right), \quad x_i^{(0)}=0, \quad i=\overline{1,m}. \tag{2.104}$$

При счёте используется $\alpha=0{,}8$. Задача была решена при $\delta=10^{-3}$ и $\delta=10^{-4}$. Результаты счёта приведены в *таблице 2.1* (с. 99).

Затем система (2.103) решалась методом простой итерации $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right)$, $x_{0,\delta}=0$, который в данном случае запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha\left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^{m} K\left(t_i,s_j\right)hx_j^{(n)}\right], \quad x_i^{(0)}=0, \quad i=\overline{1,m}. \tag{2.105}$$

Здесь $\alpha=0{,}8$ выбиралось из условия $0<\alpha\le\dfrac{5}{4\|A\|}$ при $\|A\|\le 0{,}32$. Для получения оценки $\|A\|$ использовалась теорема 1 из [25, с. 324] при $p=q=2$, $\sigma=r=1$. Результаты счёта также приведены в *таблице 2.1* (с. 99).

При решении задачи методами (2.104) и (2.105) на каждом шаге итерации вычислялись: $\left\|Ax^{(n)}-\tilde{y}\right\|_m = \left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\left[\sum\limits_{j=1}^{m} K\left(t_i,s_j\right)hx_j^{(n)} - \tilde{y}_i\right]^2 h\right\}^{1/2}$ – дискретная норма невязки, $\left\|x^{(n)}\right\|_m = \left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\left[x_i^{(n)}\right]^2 h\right\}^{1/2}$ – норма приближённого решения и дискретная норма разности между точным и приближённым решениями $\left\|x - x^{(n)}\right\|_m = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{m} \left[x(t_i) - x_i^{(n)}\right]^2 h \right\}^{1/2}$. В обоих случаях для решения задачи сведений об истокопредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (2.20), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. Итак, при $\delta = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ для достижения оптимальной точности при счёте методом итераций (2.104) потребовалось 10 итераций, при счете методом простой итерации (2.105) – 21 итерация. При $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ соответственно потребовалось 17 и 48 итераций. Пример счёта показал, что для достижения оптимальной точности метод итераций (2.104) требует примерно в 2,5 раза меньше итераций, чем метод простой итерации (2.105), что соответствует результатам раздела 2.1. Графики точного решения и приближённого решения, полученного методом (2.104) при $\delta = 10^{-4}$, приведены на *рисунке 2.1* (с. 100).

Кроме этого, предложенная задача была решена методом (2.95), который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha_{n+1}\left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^{m} K\left(t_i, s_j\right) h x_j^{(n)}\right], \ x_i^{(0)} = 0,$$

$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \ \alpha_{2n+2} = \beta, \ i = \overline{1, m}.$$

При счёте выбирались: $\alpha = 0{,}8$, $\beta = 4{,}4$. Применялось правило останова по соседним приближениям (2.37). Используя метод (2.95), для достижения оптимальной точности при $\delta = 10^{-3}$ потребовалось 6 итераций, а при $\delta = 10^{-4}$ – 15 итераций. Пример счёта показал, что для достижения оптимальной точности метод итераций (2.95) требует примерно в 3 раза меньше итераций, чем метод простой итерации (2.105), что соответствует результатам раздела 2.4.

Задача 2.2 *Будем решать в пространстве* $L_2(0,1)$ *уравнение* (2.101) *с симметричным положительным ядром* (2.102). *В качестве точного решения задачи возьмем функцию* $x(s) = \begin{cases} 2s, & 0 \le s < 0{,}25, \\ -s + 0{,}75, & 0{,}25 \le s < 0{,}5, \\ s - 0{,}25, & 0{,}5 \le s < 0{,}75, \\ -2s + 2, & 0{,}75 \le s \le 1. \end{cases}$

Путём интегрирования по методу правых прямоугольников вычислена при $m = 32$ правая часть уравнения (2.101), полученные значения указаны в *таблице 2.2*, см. с. 101 (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы). Сформулированная задача тоже относится к обратным задачам теории потенциала. Её будем решать аналогично *задаче 2.1* методом итераций (2.104) ($\alpha = 0{,}8$) и методом простой итерации (2.105) ($\alpha = 0{,}8$), взяв $m = 32$. Погрешность в правую часть уравнения была внесена по тем же формулам, что и в *задаче 2.1*. Пользуемся правилом останова по невязке (2.20), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. При $\delta = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ и счёте методом (2.104) потребовалось 11 итераций, методом (2.105) – 26 итераций. При $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ соответственно потребовалось 17 и 62 итераций. Таким образом, нашли подтверждение результаты раздела 2.1, т. е. для достижения оптимальной точности методом итераций (2.104) требуется примерно в 2,5 раза меньше итераций, чем методом простой итерации (2.105). Здесь также не потребовалось сведений об истокопредставимости точного решения. Использование правила останова по невязке сделало методы (2.104) и (2.105) вполне эффективными. Результаты счёта приведены в *таблице 2.2* (с. 101). Графики точного решения и приближённого решения, полученного методом (2.104) при $\delta = 10^{-4}$, приведены на *рисунке 2.2* (с. 102).

Данная задача была решена также методом (2.69) при $k = 2$, который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} - \alpha \sum_{j=1}^{m} K\left(t_i, s_j\right) h \left(\sum_{k=1}^{m} K\left(t_j, s_k\right) h x_k^{(n)} \right) + \alpha \sum_{j=1}^{m} K\left(t_i, s_j\right) h \tilde{y}_j, \quad i = \overline{1, m}.$$

Применялось правило останова по соседним приближениям (2.37). На каждом шаге итерации вычислялась дискретная норма разности соседних приближений $\left\| x^{(n+1)} - x^{(n)} \right\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)} \right]^2 h \right\}^{1/2}$. Выбиралось $\alpha = 0{,}8$. Для достижения оптимальной точности при $\delta = 10^{-3}$ потребовалось 11 итераций, а при $\delta = 10^{-4}$ – 22 итерации.

Задача 2.3 *Решим в пространстве* $L_2(0,1)$ *модельную задачу* $\int_0^1 A(t,s)\, x(s)\, ds = y(t), \quad 0 \le t \le 1$ *с симметричным положительным ядром*

$A(t,s)=\begin{cases} t(1-s),\, 0\le t\le s\le 1, \\ s(1-t),\, 0\le s\le t\le 1, \end{cases}$ *точной правой частью* $y(t)=\dfrac{t(t-1)(t^2-t-1)}{12}$ *и решением* $x(t)=t(1-t)$.

Оператор, описанный выше интегральным уравнением, непрерывен, взаимнооднозначен и аддитивен. Для метода (2.104) возьмём $\alpha=0{,}8$. В задаче использовано правило останова по невязке (2.20). Задача была решена методами (2.105) и (2.104) при $\delta=10^{-3}$ и $\delta=10^{-4}$. Результаты счёта приведены в *таблице 2.3* на с. 103 (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы).

В обоих случаях для решения предложенной задачи сведений об истокопредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (2.20), выбрав уровень останова $\varepsilon=1{,}5\delta$. Итак, при $\delta=10^{-3}$, $\varepsilon=1{,}5\cdot 10^{-3}$ для достижения оптимальной точности при счёте методом (2.104) потребовалось 6 итераций, при счёте методом (2.105) – 14 итераций. При $\delta=10^{-4}$, $\varepsilon=1{,}5\cdot 10^{-4}$ соответственно потребовалось 7 и 26 итераций. Пример счёта показал, что для достижения оптимальной точности метод итераций (2.104) требует примерно в 2,5 раза меньше итераций, чем метод простой итерации (2.105), что соответствует результатам раздела 2.1. На *рисунке 2.3* (с. 104) изображены графики точного решения и приближённого решения, полученного методом (2.104) при $\delta=10^{-4}$.

Кроме этого, предложенная задача была решена методом (2.95). При счёте выбирались: $\alpha=0{,}8$, $\beta=4{,}4$. Применялось правило останова по соседним приближениям (2.37). Для достижения оптимальной точности при $\delta=10^{-3}$ потребовалось 5 итераций, а при $\delta=10^{-4}$ – 12 итераций.

Таблица 2.1

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближённые решения			
			Метод (2.105) $\delta=10^{-3}$	Метод (2.104) $\delta=10^{-3}$	Метод (2.105) $\delta=10^{-4}$	Метод (2.104) $\delta=10^{-4}$
0,00000	0,01928	0,00000	0,02545	0,02747	0,01743	0,01792
0,03125	0,02731	0,03125	0,04720	0,05036	0,03168	0,03218
0,06250	0,02895	0,06250	0,06434	0,06746	0,05962	0,06012
0,09375	0,03481	0,09375	0,09336	0,09657	0,08898	0,08925
0,12500	0,04109	0,12500	0,11916	0,12165	0,12293	0,12303
0,15625	0,04763	0,15625	0,15809	0,16048	0,15407	0,15397
0,18750	0,05433	0,18750	0,17986	0,18059	0,18629	0,18614
0,21875	0,06107	0,21875	0,21664	0,21667	0,21965	0,21959
0,25000	0,06778	0,25000	0,25403	0,25327	0,25037	0,25039
0,28125	0,07437	0,28125	0,27776	0,27508	0,28194	0,28211
0,31250	0,08075	0,31250	0,32050	0,31732	0,31061	0,31077
0,343750,37500	0,08680	0,34375	0,35277	0,34834	0,34454	0,34471
	0,09239	0,37500	0,37633	0,37013	0,37835	0,37840
0,40625	0,09729	0,40625	0,40855	0,40152	0,41187	0,41171
0,437500,46875	0,10123	0,43750	0,43586	0,42815	0,44206	0,44168
	0,10384	0,46875	0,46042	0,45265	0,46570	0,46520
0,50000	0,10476	0,50000	0,46830	0,46053	0,47776	0,47732

$\left\|Ax^{(n)}-\tilde{y}\right\|_m$	0,00140	0,00137	0,00013	0,00015
$\left\|x^{(n)}\right\|_m$	0,28343	0,28332	0,28843	0,28834
$\left\|x-x^{(n)}\right\|_m$	0,01465	0,01331	0,00656	0,00667

Количество итераций: 21 10 48 17

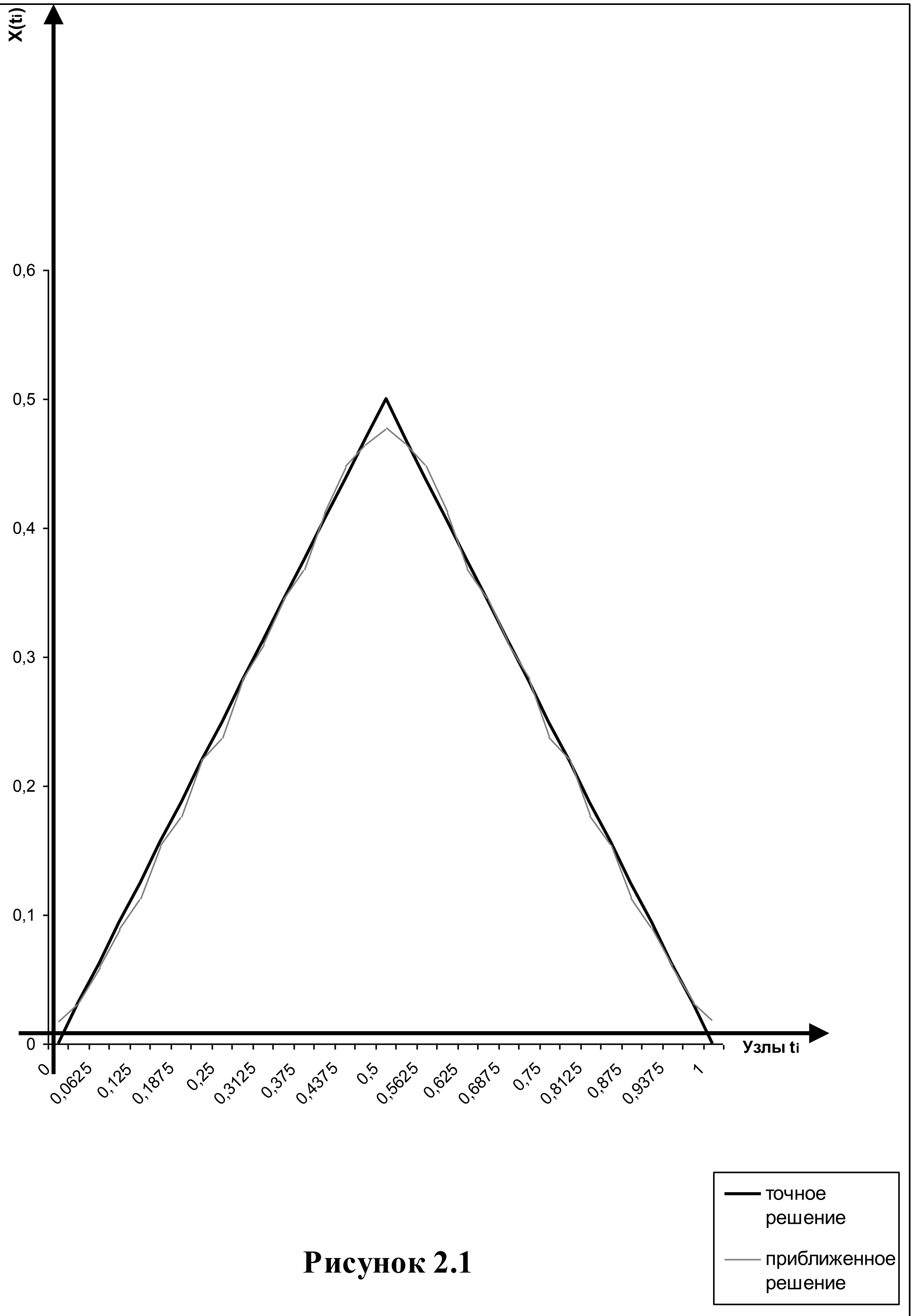
X(ti)
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
Узлы ti
0
0,0625
0,125
0,1875
0,25
0,3125
0,375
0,4375
0,5
0,5625
0,625
0,6875
0,75
0,8125
0,875
0,9375
1
точное решение
приближенное решение

Рисунок 2.1

Таблица 2.2

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближённые решения			
			Метод (2.105) $\delta = 10^{-3}$	Метод (2.104) $\delta = 10^{-3}$	Метод (2.105) $\delta = 10^{-4}$	Метод (2.104) $\delta = 10^{-4}$
0,00000	0,03038	0,00000	0,04025	0,04669	0,02731	0,02795
0,03125	0,03801	0,06250	0,07789	0,08404	0,06017	0,06099
0,06250	0,04695	0,12500	0,12639	0,13130	0,11313	0,11391
0,09375	0,05669	0,18750	0,19125	0,19389	0,18107	0,18168
0,12500	0,06669	0,25000	0,25682	0,25691	0,24990	0,25001
0,15625	0,07639	0,31250	0,30803	0,30600	0,31914	0,31879
0,18750	0,08519	0,37500	0,37318	0,36851	0,38502	0,38444
0,21875	0,09244	0,43750	0,41555	0,40922	0,43699	0,43621
0,25000	0,09753	0,50000	0,46200	0,45415	0,46778	0,46717
0,28125	0,10021	0,46875	0,45018	0,44334	0,46967	0,46910
0,31250	0,10071	0,43750	0,44362	0,43792	0,44699	0,44646
0,34375	0,09961	0,40625	0,41646	0,41287	0,41290	0,41256
0,37500	0,09755	0,37500	0,38401	0,38280	0,37434	0,37428
0,40625	0,09508	0,34375	0,33873	0,34033	0,34103	0,34144
0,43750	0,09274	0,31250	0,31626	0,31964	0,30473	0,30520
0,46875	0,09103	0,28125	0,28839	0,29362	0,27946	0,27998
0,50000	0,09040	0,25000	0,27274	0,27859	0,27103	0,27159

$\left\| Ax^{(n)} - \tilde{y} \right\|_m$	0,00102	0,00145	0,00011	0,00015
$\left\| x^{(n)} \right\|_m$	0,33540	0,33322	0,33792	0,33777
$\left\| x - x^{(n)} \right\|_m$	0,01794	0,02211	0,01267	0,01272

Количество итераций: 26 11 62 17

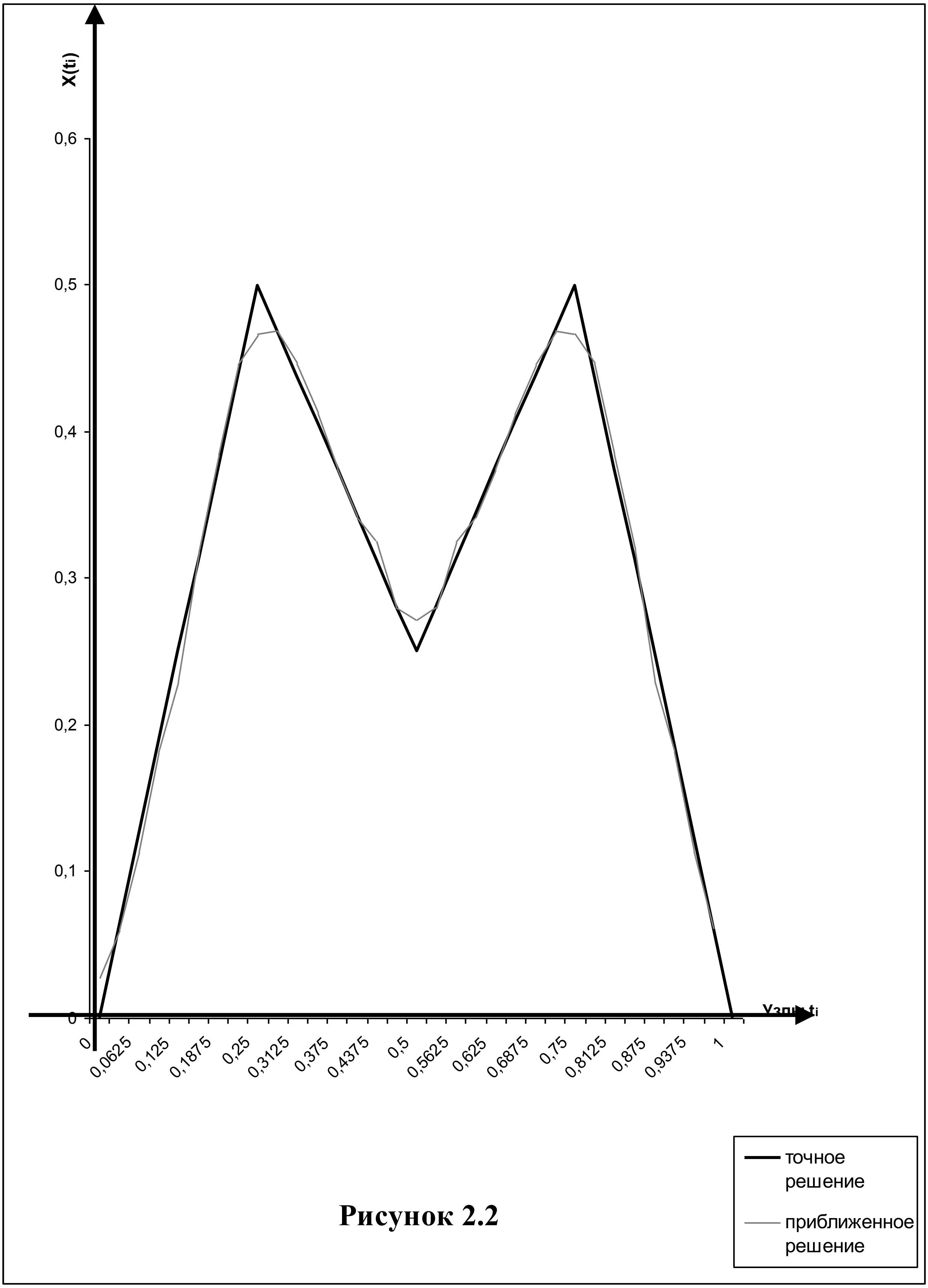
X(ti)
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
0,0625
0,125
0,1875
0,25
0,3125
0,375
0,4375
0,5
0,5625
0,625
0,6875
0,75
0,8125
0,875
0,9375
1
точное решение
приближенное решение

Рисунок 2.2

Таблица 2.3

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближённые решения			
			Метод (2.105) $\delta=10^{-3}$	Метод (2.104) $\delta=10^{-3}$	Метод (2.105) $\delta=10^{-4}$	Метод (2.104) $\delta=10^{-4}$
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,03125	0,00260	0,03027	0,03442	0,03452	0,02652	0,02700
0,06250	0,00517	0,05859	0,04415	0,04781	0,05399	0,05437
0,09375	0,00768	0,08496	0,07984	0,08325	0,07869	0,07999
0,12500	0,01011	0,10938	0,09159	0,09803	0,10152	0,10421
0,15625	0,01243	0,13184	0,10488	0,11393	0,12330	0,12737
0,18750	0,01463	0,15234	0,14515	0,15275	0,14487	0,14982
0,21875	0,01668	0,17090	0,16257	0,17169	0,16698	0,17186
0,25000	0,01855	0,18750	0,18264	0,19257	0,18575	0,19128
0,28125	0,02025	0,20215	0,18848	0,19403	0,20184	0,20836
0,31250	0,02175	0,21484	0,20654	0,21932	0,21586	0,22335
0,34375	0,02304	0,22559	0,21080	0,22551	0,22364	0,23392
0,37500	0,02411	0,23438	0,21857	0,23427	0,23490	0,24530
0,40625	0,02495	0,24121	0,22998	0,24573	0,24067	0,25258
0,43750	0,02555	0,24609	0,24521	0,26000	0,25057	0,26093
0,46875	0,02592	0,24902	0,23926	0,25562	0,25886	0,26289
0,50000	0,02604	0,25000	0,23728	0,25416	0,26012	0,26354

$\left\|Ax^{(n)}-\widetilde{y}\right\|_m$	0,00138	0,00091	0,00013	0,00009
$\left\|x^{(n)}\right\|_m$	0,16996	0,17477	0,18116	0,18276
$\left\|x-x^{(n)}\right\|_m$	0,01492	0,01057	0,00454	0,00542

Количество итераций: 14 6 26 7

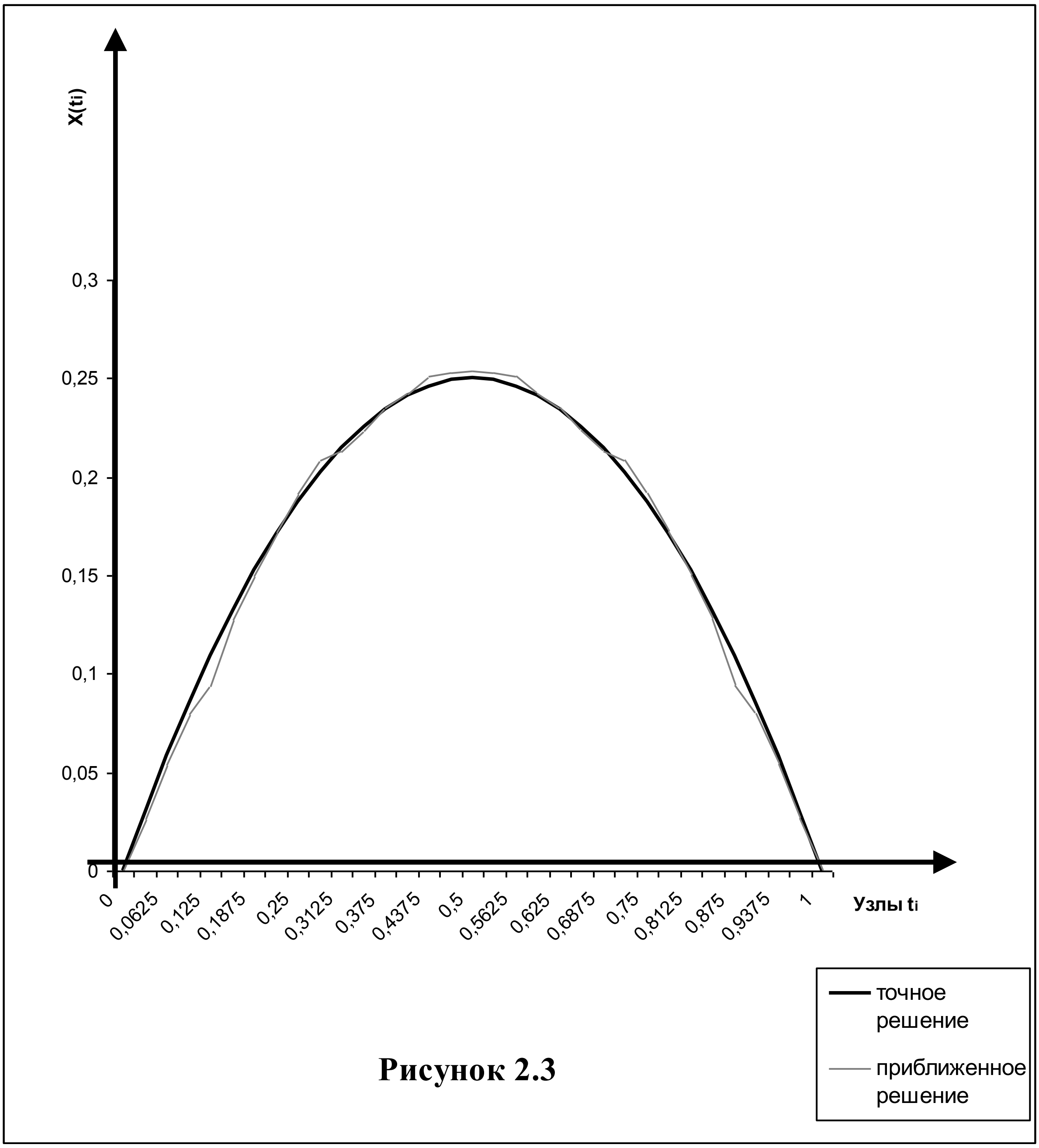
X(ti)
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
0
0,0625
0,125
0,1875
0,25
0,3125
0,375
0,4375
0,5
0,5625
0,625
0,6875
0,75
0,8125
0,875
0,9375
1
Узлы ti
точное решение
приближенное решение

Рисунок 2.3

ГЛАВА 3

НЕЯВНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИБЛИЖЁННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В данной главе изучаются неявные методы решения операторных уравнений I рода в гильбертовом пространстве. Доказаны соответствующие теоремы о сходимости этих методов, получены оценки погрешности в случае априорного выбора числа итераций. Изучен случай неединственности решения. Доказана сходимость методов в энергетической норме гильбертова пространства. Обоснована возможность использования правила останова по невязке и правила останова по соседним приближениям, что делает неявные методы эффективными и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения. Дается сравнительная характеристика этих методов, показано их преимущество по сравнению с явными методами. Одним из предложенных методов решена численная модельная задача.

3.1 Регуляризация операторных уравнений при помощи неявного итерационного метода

3.1.1 Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

В разделе предлагается регуляризатор некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода, в виде неявного итерационного процесса, который дает возможность сократить число итераций для достижения оптимальной точности по сравнению с ранее известными явными методами итераций решения уравнения $Ax = y$.

Рассматривается задача из раздела 2.1. Для ее решения используется метод, представляющий собой семейство итерационных схем, зависящих от параметра k.

$$\left(E+\alpha A^k\right)x_{n+1}=\left(E-\alpha A^k\right)x_n+2\alpha A^{k-1}y,\quad x_0=0,\quad k\in N. \tag{3.1}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения $Ax = y$ при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ, $\|y-y_\delta\|\le\delta$. В этом случае метод итераций (3.1) примет вид

$$\left(E+\alpha A^k\right)x_{n+1,\delta}=\left(E-\alpha A^k\right)x_{n,\delta}+2\alpha A^{k-1}y_\delta,\quad x_{0,\delta}=0,\ \ k\in N. \tag{3.2}$$

Ниже под сходимостью метода (3.2) понимается утверждение о том, что приближения (3.2) сколь угодно близко подходят к точному решению x

операторного уравнения (2.1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ, т. е. если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{n}\left(\left\|x - x_{n,\delta}\right\|\right)\right) = 0$.

3.1.1.1 Сходимость метода при точной правой части уравнения

Теорема 3.1. *Итерационный метод* (3.1) *при условии* $\alpha > 0$ *сходится в исходной норме гильбертова пространства*.

Доказательство

По индукции нетрудно показать, что

$$x_n = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^k\right)^n \left(E + \alpha A^k\right)^{-n}\right] y.$$

Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A = \int\limits_0^M \lambda dE_\lambda$ ($M = \|A\|$, E_λ −спектральная функция), имеем

$$x - x_n = A^{-1}\left(E - \alpha A^k\right)^n \left(E + \alpha A^k\right)^{-n} y = \int\limits_0^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda y =$$

$$= \int\limits_0^\varepsilon \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda y + \int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda y\,.$$

Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0, M]$ выполнялось

$$\alpha > 0\,. \tag{3.3}$$

Тогда $\left|\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right| \le q < 1$ и, следовательно, $\left\|\int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1}\left(\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda y\right\| \le$ $\le q^n \left\|\int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1} dE_\lambda y\right\| = q^n \left\|\int\limits_\varepsilon^M dE_\lambda x\right\| \le q^n \|x\| \to 0,\ n \to \infty$.

$\left\|\int\limits_0^\varepsilon \lambda^{-1}\left(\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda y\right\| \le \left\|\int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda x\right\| = \|E_\varepsilon x\| \to 0,$ так как при $\varepsilon \to 0$ E_ε сильно стремится к нулю в силу свойств спектральной функции. Таким образом, доказано, что при условии (3.3) метод (3.1) сходится. Теорема 3.1 доказана.

3.1.1.2 Оценка скорости сходимости

Скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$ неизвестна и может быть сколь угодно малой. Для ее оценки предположим, что точное решение уравнения $Ax = y$ истокообразно представимо, т. е. $x = A^s z,\ s > 0$. Тогда имеем

$$x - x_n = \int_0^M \lambda^s \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k} \right)^n dE_\lambda z\,.$$

Используя результаты из пункта 2.3.1.3, получим оценку для подынтегральной функции:

$$|f(\lambda)| = \left| \lambda^s \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k} \right)^n \right| \le \left| \lambda^s \left(1-\alpha\lambda^k\right)^n \right| \le s^{s/k} (kn\alpha e)^{-s/k}\,.$$

Отсюда $\|x - x_n\| \le s^{s/k} (kn\alpha e)^{-s/k} \|z\|$.

Но может оказаться, что локальный максимум внутри $[0, M]$ не будет являться глобальным, поэтому будем учитывать значение функции $f(\lambda)$ на правом конце отрезка, т. е. в точке $\lambda = M$ (на левом конце отрезка $f(0) = 0$). Тогда справедливо

$$\|x - x_n\| \le \max\left\{ s^{s/k} (kn\alpha e)^{-s/k},\ M^s \left| \left(\frac{1-\alpha M^k}{1+\alpha M^k} \right)^n \right| \right\} \|z\|.$$

3.1.1.3 Сходимость при приближенной правой части уравнения

Покажем, что при условии (3.3) метод (3.2) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ приближенной правой части уравнения $Ax = y$. Рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. По доказанному $x - x_n \to 0,\ n \to \infty$. Убедимся, что $x_n - x_{n,\delta}$ можно сделать сходящимся к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, имеем

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^k\right)^n \left(E + \alpha A^k\right)^{-n} \right](y - y_\delta) = \int_0^M \lambda^{-1} \left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k} \right)^n \right] dE_\lambda (y - y_\delta).$$

Оценим сверху подынтегральную функцию $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n\right]\geq 0$ при условии (3.3).

При $n=1$ $g_1(\lambda)=\frac{2\alpha\lambda^{k-1}}{1+\alpha\lambda^k}$. Ее производная равна $g_1'(\lambda)=\frac{2\alpha\lambda^{k-2}\left(k-1-\alpha\lambda^k\right)}{\left(1+\alpha\lambda^k\right)^2}$, следовательно, $\lambda^*=\left(\frac{k-1}{\alpha}\right)^{1/k}$ – стационарная точка для функции $g_1(\lambda)$. Поскольку $g_1''\left(\lambda^*\right)<0$, то λ^*– точка максимума функции $g_1(\lambda)$ и $\max\limits_{[0,M]} g_1(\lambda)=g_1\left(\lambda^*\right)\leq 2\alpha^{1/k}$.

Покажем по индукции, что при $n\in N$

$$g_n(\lambda)=\left|g_n(\lambda)\right|\leq 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}. \tag{3.4}$$

При $n=1$ неравенство (3.4) проверено выше. В дальнейшем будем считать $n\geq 2$. Предположим, что (3.4) верно при $n=m$, т. е. $g_m(\lambda)\leq 2km^{1/k}\alpha^{1/k}$ и рассмотрим

$$g_{m+1}(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{m+1}}{\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{m+1}}\right]=\lambda^{-1}\left[1-\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{m}}{\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{m}}\right]+\lambda^{-1}\left[1-\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{m+1}}{\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{m+1}}\right]-$$

$$-\lambda^{-1}\left[1-\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{m}}{\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{m}}\right]\leq 2km^{1/k}\alpha^{1/k}+\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^m\cdot\frac{2\alpha\lambda^{k-1}}{1+\alpha\lambda^k}.$$

Поэтому

$$g_{m+1}(\lambda)\leq 2km^{1/k}\alpha^{1/k}+\left|\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^m\cdot 2\alpha\lambda^{k-1}}{\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{m+1}}\right|\leq 2km^{1/k}\alpha^{1/k}+\left|2\alpha\lambda^{k-1}\left(1-\alpha\lambda^k\right)^m\right|.$$

Покажем, что

$$km^{1/k}\alpha^{1/k}+\left|\alpha\lambda^{k-1}\left(1-\alpha\lambda^k\right)^m\right|\leq k(m+1)^{1/k}\alpha^{1/k}, \tag{3.5}$$

что равносильно неравенству $\left|\alpha^{(k-1)/k}\left(1-\alpha\lambda^k\right)^m\lambda^{k-1}\right| \le \left(\sqrt[k]{m+1}-\sqrt[k]{m}\right)k$.

Имеем

$$\sqrt[k]{m+1}=\sqrt[k]{m\left(1+\frac{1}{m}\right)}=\sqrt[k]{m}\left\{1+\frac{1}{km}+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{2!m^2}+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{1}{k}-2\right)}{3!m^3}+\right.$$

$$+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{1}{k}-2\right)\left(\frac{1}{k}-3\right)}{4!m^4}+\ldots+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot m^{2p-1}}+$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]\cdot\left[\frac{1}{k}-(2p-1)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot 2p\cdot m^{2p}}+\ldots\right\}.$$

Покажем, что каждый положительный член ряда больше модуля следующего за ним отрицательного члена, т. е.

$$\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot m^{2p-1}}>\left|\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]\cdot\left[\frac{1}{k}-(2p-1)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot 2p\cdot m^{2p}}\right|,$$

что равносильно $1>\dfrac{\left|\frac{1}{k}-(2p-1)\right|}{2pm}$ или $\dfrac{2p-1-\frac{1}{k}}{2pm}<1$, а это уже очевидно при $m\ge 1$. Следовательно, $\sqrt[k]{m+1}>\sqrt[k]{m}\left(1+\dfrac{1}{km}-\dfrac{k-1}{2k^2m^2}\right)$.

Вернемся к доказательству неравенства (3.5). Поскольку (см. пункт 3.1.1.2) $\left|\left(1-\alpha\lambda^k\right)^m\lambda^{k-1}\right|\le(k-1)^{(k-1)/k}(km\alpha e)^{-(k-1)/k}$, то вместо (3.5) докажем более сильное неравенство

$$(k-1)^{(k-1)/k}(km\alpha e)^{-(k-1)/k}\alpha^{(k-1)/k}\le km^{1/k}\left(\frac{1}{km}-\frac{k-1}{2k^2m^2}\right). \qquad (3.6)$$

Преобразуем его: $\left(\frac{k-1}{k}\right)^{(k-1)/k} m^{-(k-1)/k} e^{-(k-1)/k} \le k m^{1/k} \frac{1}{km}\left(1-\frac{k-1}{2km}\right)$.

Поскольку $\left(\frac{k-1}{k}\right)^{(k-1)/k} m^{-(k-1)/k} e^{-(k-1)/k} \le m^{-(k-1)/k} e^{-(k-1)/k}$, то докажем более сильное неравенство $m^{-(k-1)/k} e^{-(k-1)/k} \le m^{-(k-1)/k}\left(1-\frac{k-1}{2km}\right)$, что то же самое $1 \le e^{(k-1)/k}\left(1-\frac{k-1}{2km}\right)$, $m \ge 2$.

При $k=1$ имеем $1 \le 1$, следовательно, последнее неравенство справедливо при $k=1$. При $k \ge 2$ $1-\frac{k-1}{2km} \ge \frac{3}{4}$, отсюда $e^{(k-1)/k}\left(1-\frac{k-1}{2km}\right) \ge \frac{3}{4} e^{1/2} > 1$.

Значит, неравенство (3.6) выполняется, и тем более справедливо неравенство (3.5). Таким образом, для $n \ge 1$ справедлива оценка (3.4), т. е. $g_n(\lambda) \le 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}$, $n \ge 1$. Отсюда $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta,\ n \ge 1$.

Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta$ и $\|x - x_n\| \to 0,\ n \to \infty$, то для сходимости метода (3.2) достаточно выбрать $n = n(\delta)$ так, чтобы $n^{1/k}\delta \to 0,\quad n \to \infty,\quad \delta \to 0$. Итак, доказана

Теорема 3.2. *При условии* (3.3) *итерационный метод* (3.2) *сходится, если число итераций n выбирать из требования* $n^{1/k}\delta \to 0,\quad n \to \infty,\quad \delta \to 0$.

3.1.1.4 Оценка погрешности метода и ее оптимизация

Запишем теперь общую оценку погрешности метода (3.2)

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le$$
$$\le \max\left\{ s^{s/k}(kn\alpha e)^{-s/k},\ M^s\left|\left(\frac{1-\alpha M^k}{1+\alpha M^k}\right)^n\right| \right\}\|z\| + 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta,\ n \ge 1.$$

Так как для достаточно больших n $M^s\left|\left(\frac{1-\alpha M^k}{1+\alpha M^k}\right)^n\right| \le s^{s/k}(kn\alpha e)^{-s/k}$, то для этих n справедлива оценка

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\| \le s^{s/k}\left(kn\alpha e\right)^{-s/k}\|z\|+2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta,\ n\ge 1. \tag{3.7}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3.3. *Если решение x уравнения Ax = y истокообразно представимо, то при условии* (3.3) *для метода* (3.2) *справедлива оценка погрешности* (3.7).

Для минимизации оценки погрешности вычислим правую часть оценки (3.7) в точке, в которой производная от нее равна нулю: в результате получим априорный момент останова

$$n_{\text{опт}} = 2^{-k/(s+1)}\left(\frac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)}\alpha^{-1}e^{-s/(s+1)}\|z\|^{k/(s+1)}\delta^{-k/(s+1)}. \tag{3.8}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (3.7), имеем

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1+s)\cdot 2^{s/(s+1)}\left(\frac{s}{k}\right)^{s(1-k)/(k(s+1))}e^{-s/(k(s+1))}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}. \tag{3.9}$$

Замечание 3.1. *Оценка погрешности* (3.9) *имеет порядок* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, *и, как следует из* [12], *он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z,\ s>0$.

Замечание 3.2. *Оптимальная оценка* (3.9) *не зависит от* α, *но от параметра* α *зависит* $n_{опт}$, *поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать* $\alpha>0$ *и таким, чтобы* $n_{опт}=1$. *Для этого достаточно выбрать*

$$\alpha_{опт} = 2^{-k/(s+1)}\left(\frac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)}e^{-s/(s+1)}\|z\|^{k/(s+1)}\delta^{-k/(s+1)}.$$

Сравнение метода (3.2) с широко известным явным методом итераций

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta}+\alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right),\ x_{0,\delta}=0 \tag{3.10}$$

показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод (3.10) предпочтительнее неявного метода (3.2). Однако неявный метод (3.2) обладает следующим важным достоинством. В явном методе (3.10) на шаг α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|}$, что может привести на практике к необходимости большого числа вычислений. В неявном методе (3.2) ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет считать $\alpha > 0$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с чем оптимальную оценку для неявного метода (3.2) можно получить уже на первом шаге итераций.

Оценку $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}$ можно оптимизировать по k. Для этого производную по k от $\varphi(k) = (s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}}$ приравняем к нулю. Получим $(s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}} \cdot \dfrac{s}{k^2(s+1)} \cdot \left(k - \ln\dfrac{s}{k}\right) = 0$. Отсюда видно, что оптимальное k должно удовлетворять равенству $k = \ln\dfrac{s}{k}$. Но k должно быть целым числом, поэтому, как показывают расчеты, для $s \le 5$ $k_{\text{опт}} = 1$, для $6 \le s \le 27$ $k_{\text{опт}} = 2$.

3.1.1.5 Погрешность в счете

Рассмотрим погрешность метода при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, получаемое по формуле (3.3), а z_n – значение с учетом вычислительной погрешности, т. е.

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha A^k\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha A^k\right)z_n + 2\alpha A^{k-1} y_\delta\right] + \alpha\gamma_n, \quad z_0 = 0. \qquad (3.11)$$

Здесь γ_n – погрешность вычислений. Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (3.11) равенство (3.2). Имеем $\varepsilon_{n+1} = \left(E + \alpha A^k\right)^{-1}\left(E - \alpha A^k\right)\varepsilon_n + \alpha\gamma_n$, $\varepsilon_0 = 0$. Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции нетрудно получить, что $\varepsilon_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(E + \alpha A^k\right)^{-(n-1-i)}\left(E - \alpha A^k\right)^{n-1-i}\alpha\gamma_i$.

В силу (3.3) и того, что $0 \in Sp\, A$, справедливо $\left\|\left(E + \alpha A^k\right)^{-1}\left(E - \alpha A^k\right)\right\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma$, $\gamma = \sup\limits_i |\gamma_i|$.

Таким образом, с учетом вычислительной погрешности оценка погрешности неявного метода (3.2) запишется в виде

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le s^{s/k}(kn\alpha e)^{-s/k}\|z\| + 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta + n\alpha\gamma,\ n \ge 1.$$

3.1.2 Сходимость метода в случае неединственного решения

Пусть теперь 0 – собственное значение оператора A (т. е. уравнение (2.1) имеет неединственное решение). Обозначим через $N(A)=\{x\in H | Ax=0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x\in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x\in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 3.4. *Пусть* $A\ge 0, y\in H, \alpha>0$, *тогда для итерационного метода* (3.1) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y, \|Ax_n - y\| \to I(A,y)=\inf\limits_{x\in H}\|Ax-y\|$;

б) *итерационный метод* (3.1) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax=\Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* *– минимальное решение*.

Доказательство

Применим оператор A к (3.1), получим $A\left(E+\alpha A^k\right)x_n = A\left(E-\alpha A^k\right)x_{n-1}+2\alpha A^k y$, где $y=P(A)y+\Pi(A)y$. Так как $AP(A)y=0$, то получим $\left(E+\alpha A^k\right)(Ax_n-\Pi(A)y)=\left(E-\alpha A^k\right)(Ax_{n-1}-\Pi(A)y)$. Обозначим $Ax_n-\Pi(A)y=v_n$, $v_n\in M(A)$, тогда $\left(E+\alpha A^k\right)v_n=\left(E-\alpha A^k\right)v_{n-1}$. Отсюда $v_n=\left(E+\alpha A^k\right)^{-1}\left(E-\alpha A^k\right)v_{n-1}$, и, значит, $v_n=\left(E+\alpha A^k\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^n v_0$. Имеем $A\ge 0$ и $A-$положительно определен в $M(A)$, т. е. $(Ax,x)>0$ $\forall x\in M(A)$. Так как $\alpha>0$, то $\left\|\left(E+\alpha A^k\right)^{-1}\left(E-\alpha A^k\right)\right\|\le 1$. Поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|\left(E+\alpha A^k\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^n v_0\right\| = \left\|\int\limits_0^{\|A\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda v_0\right\| \le$$

$$\le \left\|\int\limits_0^{\varepsilon}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda v_0\right\| + \left\|\int\limits_\varepsilon^{\|A\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda v_0\right\| \le$$

$$\le \left\|\int\limits_0^{\varepsilon} dE_\lambda v_0\right\| + q^n(\varepsilon)\left\|\int\limits_\varepsilon^{\|A\|} dE_\lambda v_0\right\| \le \|E_\varepsilon v_0\| + q^n(\varepsilon)\|v_0\| \to 0$$

при $\varepsilon \to 0, n \to \infty$. Здесь $\left|\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right| \le q(\varepsilon) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon, \|A\|]$. Следовательно, $v_n \to 0,\quad n \to \infty$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Отсюда $\|Ax_n - y\| \to \quad \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A,y)$ [124]. Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (3.1) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^*– минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (3.1) примет вид

$$\left(E+\alpha A^k\right)x_n = \left(E-\alpha A^k\right)x_{n-1} + 2\alpha A^{k-1}\Pi(A)y = \left(E-\alpha A^k\right)x_{n-1} + 2\alpha A^k x^* =$$
$$= \left(E+\alpha A^k\right)x_{n-1} - 2\alpha A^k x_{n-1} + 2\alpha A^k x^* = \left(E+\alpha A^k\right)x_{n-1} + 2\alpha A^k\left(x^* - x_{n-1}\right).$$

Отсюда $x_n = x_{n-1} + 2\alpha A^k\left(E+\alpha A^k\right)^{-1}(x^* - x_{n-1})$. Последнее равенство разобьем на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + 2\alpha(E+\alpha A^k)^{-1}A^k P(A)(x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0;$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha A^k\right)^{-1}A^k\,\Pi(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) =$$
$$= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha A^k\right)^{-1}A^k\left(\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right) =$$
$$= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha A^k\right)^{-1}A^k\left(x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right),$$

так как $x^* \in M(A)$. Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства

$$\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + 2\alpha\left(E+\alpha A^k\right)^{-1}A^k\left(x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right).$$

получим

$$\omega_n = \omega_{n-1} - 2\alpha\left(E+\alpha A^k\right)^{-1}A^k\omega_{n-1} = \left(E+\alpha A^k\right)^{-1}\left(E-\alpha A^k\right)\omega_{n-1}$$

и, аналогично v_n, можно показать, что $\omega_n \to 0, n \to \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема 3.4 доказана.

Замечание 3.3. *Так как у нас* $x_0 = 0$*, то* $x_n \to x^*$*, т. е. итерационный метод* (3.1) *сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.*

3.1.3 Сходимость метода в энергетической норме

Ниже предполагается, что нуль не является собственным значением оператора A, следовательно, предположим, что уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение. Однако нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача отыскания решения уравнения $Ax = y$ неустойчива и, значит, некорректна. Сходимость процессов (3.1) и (3.2) в исходной норме пространства H была рассмотрена в подразделе 3.1.1. Там показано, что предложенный неявный метод (3.2) сходится при условии $\alpha > 0$, если число итераций n выбирать в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $n^{1/k}\delta \to 0$ при $n \to \infty, \delta \to 0$. В предположении, что точное решение уравнения (2.1) истокообразно представимо, получены априорные оценки погрешности и априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. Тем не менее, метод (3.2) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться энергетической нормой гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. Покажем сходимость метода (3.2) в энергетической норме и получим для него априорные оценки погрешности в энергетической норме. Рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \tag{3.12}$$

Запишем первое слагаемое в виде

$$x - x_n = A^{-1}\left(E + \alpha A^k\right)^{-n}\left(E - \alpha A^k\right)^n y = \left(E + \alpha A^k\right)^{-n}\left(E + \alpha A^k\right)^n x.$$

Как было показано в подразделе 3.1.1, $x - x_n$ бесконечно мало в исходной норме гильбертова пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для её оценки делалось предположение об истокообразной представимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не понадобится. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и E_λ – соответствующая спектральная функция, имеем

$$\|x-x_n\|_A^2=\left(A\left(E+\alpha A^k\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^n x,\ \left(E+\alpha A^k\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^n x\right)=$$

$$=\int_0^M \lambda\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^{2n} d(E_\lambda x,x).$$

Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции $f(\lambda)=\lambda\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^{2n}$ при $\lambda\in[0,M]$. Функция $f(\lambda)$ – частный случай при s = 1 функций, оцененных в подразделе 3.1.1. Там показано, что при условии (3.3) $\max\limits_{\lambda\in[0,M]}|f(\lambda)|\le(2kn\lambda e)^{-1/k}$. Следовательно, справедлива оценка $\|x-x_n\|_A^2\le(2kn\alpha e)^{-1/k}\|x\|^2$. Отсюда $\|x-x_n\|_A\le(2kn\alpha e)^{-1/(2k)}\|x\|$.

Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокообразной представимости порядка $s=\frac{1}{2}$ для точного решения.

Оценим второе слагаемое в (3.12). Как показано в подразделе 3.1.1, справедливо равенство $x_n-x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-\left(E+\alpha A^k\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^n\right](y-y_\delta)$. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим

$$\|x_n-x_{n,\delta}\|_A^2=\int_0^M \lambda^{-1}\left[1-\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n\right]^2 d(E_\lambda(y-y_\delta),y-y_\delta).$$

Обозначим через $g(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n\right]^2$ подынтегральную функцию, а через $g_1(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n\right]$, тогда $g(\lambda)=g_1(\lambda)\left[1-\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n\right]$.

Функция $g_1(\lambda)$ была оценена в подразделе 3.1.1. Там показано, что при условии (3.3) $g_1(\lambda)\le 2kn^{\frac{1}{k}}\alpha^{\frac{1}{k}}$.

При этом же условии имеем $\left|\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right| \le 1, \forall\lambda \in [0, M]$, поэтому $1-\left(\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n \le 2$, откуда $g(\lambda) \le 4kn^{\frac{1}{k}}\alpha^{\frac{1}{k}}$. Таким образом, $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 \le 4kn^{\frac{1}{k}}\alpha^{\frac{1}{k}}\delta^2$, отсюда $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le 2k^{\frac{1}{2}}(n\alpha)^{\frac{1}{2k}}\delta, n \ge 1$. Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \|x - x_n\|_A + 2k^{\frac{1}{2}}(n\alpha)^{\frac{1}{2k}}\delta$ и $\|x - x_n\|_A \to 0,\quad n \to \infty$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \to 0, n \to \infty$, достаточно, чтобы $n^{\frac{1}{2k}}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$. Итак, доказана

Теорема 3.5. *При условии* (3.3) *итерационный метод* (3.2) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия* $n^{\frac{1}{2k}}\delta \to 0$ *при* $n \to \infty, \delta \to 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3.2) в энергетической норме

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (2kn\alpha e)^{-\frac{1}{2k}}\|x\| + 2k^{\frac{1}{2}}(n\alpha)^{\frac{1}{2k}}\delta,\ n \ge 1. \tag{3.12}$$

Оптимизируем оценку (3.12) по n. Для этого при заданном δ найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв к нулю производную по n от правой части неравенства (3.12), получим

$$n_{\text{опт}} = 2^{-\frac{2k+1}{2}}k^{-\frac{k+1}{2}}\alpha^{-1}e^{-\frac{1}{2}}\delta^{-k}\|x\|^k. \tag{3.13}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (3.12), найдем её оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le 2^{\frac{6k-1}{4k}}k^{\frac{k-1}{4k}}e^{-\frac{1}{4k}}\delta^{\frac{1}{2}}\|x\|^{\frac{1}{2}}. \tag{3.14}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.6. *Оптимальная оценка погрешности для метода* (3.2) *при условии* (3.3) *в энергетической норме имеет вид* (3.14) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (3.13).

Замечание 3.4. *Из неравенства* (3.14) *вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра* α. *Но* $n_{опт}$ *зависит от* α, *поскольку на* α *нет ограничений сверху* $(\alpha > 0)$, *то за счет выбора* α *можно получить* $n_{опт} = 1$, *т. е. оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно взять* $\alpha_{опт} = 2^{-\frac{2k+1}{2}} k^{-\frac{k+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \delta^{-k} \|x\|^k$.

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства *H*. Очевидно, для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном ε $(0 < \varepsilon < \|A\|)$, было $P_\varepsilon x = 0$, $P_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, где $P_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \lambda dE_\lambda$. Так как $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha A^k\right)^{-n}\left(E - \alpha A^k\right)^n\right] y_\delta$, то для выполнения последнего из указанных условий должно выполняться условие $P_\varepsilon y_\delta = 0$.

Таким образом, если решение *x* и приближенная правая часть y_δ таковы, что $P_\varepsilon x = 0$ и $P_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к решению *x* в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства *H*, и, следовательно, для сходимости в исходной норме пространства *H* не требуется истокопредставимости точного решения.

3.1.4 Апостериорный выбор числа итераций в неявном методе решения некорректных задач

3.1.4.1 Правило останова по невязке

Априорный выбор числа итераций *n* в исходной норме гильбертова пространства (см. подраздел 3.1.1) получен в предположении, что имеется дополнительная информация об истокопредставимости точного решения *x* уравнения (2.1). Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны, и тем самым приведенные в подразделе 3.1.1 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее, метод (3.2) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке: зададим $\varepsilon > 0$ и определим момент *m* останова итерационного процесса (3.2) условием (2.20).

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Ниже метод итерации (3.2) с правилом останова (2.20) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_m \|x - x_{m,\delta}\|\right) = 0$. Покажем, что правило останова по невязке (2.20) применимо к методу (3.2).

Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \dfrac{(1-\alpha\lambda^k)^n}{(1+\alpha\lambda^k)^n}\right] \geq 0$. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ при $\alpha > 0$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |g_n(\lambda)| \le 2k(n\alpha)^{1/k}, \ n > 0, \tag{3.15}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le 1, \ n > 0, \tag{3.16}$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0, \ n \to \infty, \ \forall\lambda \in (0, M], \tag{3.17}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le \left(\frac{s}{kn\alpha e}\right)^{s/k}, \ n > 0, \ 0 \le s < \infty. \tag{3.18}$$

Справедлива

Лемма 3.1. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \le M$. *Тогда для любого* $\omega \in H$ $(E - Ag_n(A))\omega \to 0$, $n \to \infty$.

Доказательство

Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A = \int\limits_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и E_λ – спектральная функция оператора A, получим

$$(E - Ag_n(A))\omega = \int\limits_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda))dE_\lambda\omega = \int\limits_0^{\varepsilon_0}(1 - \lambda g_n(\lambda))dE_\lambda\omega + \int\limits_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)dE_\lambda\omega.$$

Так как $1-\lambda g_n(\lambda)=\left(\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n$ и $\left|\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right|\le q(\varepsilon_0)<1$ для всех $\lambda\in(0,M]$ и $\alpha>0$, то $\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{M}\bigl(1-\lambda g_n(\lambda)\bigr)dE_\lambda\omega\right\|\le q^n\left(\varepsilon_0\right)\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{M}dE_\lambda\omega\right\|\le q^n\left(\varepsilon_0\right)\|\omega\|\to 0,\ n\to\infty.$

Из (3.16) имеем $\left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}(1-\lambda g_n(\lambda)dE_\lambda\omega\right\|\le\left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}dE_\lambda\omega\right\|=\left\|E_{\varepsilon_0}\omega\right\|\to 0,\ \varepsilon_0\to 0$ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, $(E-Ag_n(A))\omega\to 0,\ n\to\infty.$ Лемма 3.1 доказана.

Имеет место

Лемма 3.2. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M$. *Тогда для* $\forall v\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{\frac{s}{k}}\left\|A^s(E-Ag_n(A))v\right\|\to 0,$ *при* $n\to\infty,\ 0\le s<\infty.$

Доказательство

Так как верно неравенство (3.18), то получим

$$n^{\frac{s}{k}}\left\|A^s(E-Ag_n(A))\right\|\le n^{\frac{s}{k}}\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^s\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\le n^{\frac{s}{k}}\gamma_s n^{\frac{-s}{k}}=\gamma_s,$$

где $\gamma_s=\left(\dfrac{s}{k\alpha e}\right)^{\frac{s}{k}}$. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [43, с. 151], по которой сходимость $B_n u\to Bu$ при $n\to\infty$ для всех $u\in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|, n=1,2,\ldots,$ ограничены независящей от n постоянной.

Возьмём в качестве плотного в $\overline{R(A)}=H$ множество $R(A)$. Положим $s_1=s+1.$ Тогда для каждого $v=A\omega\in R(A)$ имеем

$$n^{\frac{s}{k}}\left\|A^s(E-Ag_n(A))v\right\|=n^{\frac{s}{k}}\left\|A^{s+1}(E-Ag_n(A))\omega\right\|\le$$

$$\le n^{\frac{s}{k}}\left(\frac{s+1}{k\alpha e}\right)^{\frac{s+1}{k}}n^{\frac{-(s+1)}{k}}\|\omega\|=\gamma_{s_1}n^{\frac{-1}{k}}\|\omega\|\to 0,$$

при $n\to\infty,$ так как $s_1<\infty$. Лемма 3.2 доказана.

Справедлива

Лемма 3.3. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Если для некоторой последовательности* $n_p < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $p \to \infty$ *имеем* $\omega_p = A\left(E - Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0 \to 0$, *то* $\upsilon_p = \left(E - Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0 \to 0.$

Доказательство

В силу (3.16) последовательность υ_p ограничена $\|\upsilon_p\| \leq \gamma_0\|\upsilon_0\|, \gamma_0 = 1,\ p \in N$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\upsilon_p - \to \upsilon, (p \in N' \subseteq N)$, тогда $A\upsilon_p - \to A\upsilon, (p \in N')$. Но по условию $\omega_p = A\upsilon_p \to 0,\ p \to \infty,$ следовательно, $A\upsilon = 0.$ Поскольку нуль не является собственным значением оператора A, то $\upsilon = 0.$ Тогда

$$\|\upsilon_p\|^2 = \left(\upsilon_p, (E - Ag_{n_p}(A))\upsilon_0\right) = (\upsilon_p, \upsilon_0) - (\upsilon_p, Ag_{n_p}(A)\upsilon_0) =$$
$$= (\upsilon_p, \upsilon_0) - \left(A\upsilon_p, g_{n_p}(A)\upsilon_0\right) = (\upsilon_p, \upsilon_0) - \left(\omega_p, g_n(A)\upsilon_0\right) \to (\upsilon\ \ , \upsilon_0),$$

так как $\omega_p \to 0,\ \ p \to \infty,\ \ \upsilon = 0$ и по условию (3.15) $\left\|g_{n_p}(A)\right\| \leq 2k\left(n_p\alpha\right)^{1/k} < 2k\left(\bar{n}\alpha\right)^{1/k}$. Следовательно, $\|\upsilon_p\| \to 0.$ Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности υ_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $\upsilon_p \to 0,\ p \to \infty.$ Лемма 3.3 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 3.7. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3.2) *выбирается по правилу* (2.20). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство

По индукции легко показать, что справедливо записать $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^k\right)^n \left(E + \alpha A^k\right)^{-n}\right] y_\delta$. Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \tag{3.19}$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A[E - Ag_n(A)]x - [E - Ag_n(A)](y_\delta - y). \qquad (3.20)$$

В силу лемм 3.1 и 3.2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \ \ n \to \infty, \qquad (3.21)$$

$$\sigma_n = n^{1/k}\|A(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \ \ n \to \infty. \qquad (3.22)$$

Кроме того, из (3.15) и (3.16) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \le 2k(n\alpha)^{1/k}\delta, \qquad (3.23)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \le 1. \qquad (3.24)$$

Применим правило останова (2.20). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le b\delta, \ \ b > 1$ и из (3.20) и (3.24) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \le \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \le (b+1)\delta. \ (3.25)$$

Для любого $n < m$ $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon,$ поэтому

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \ge \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \ge (b-1)\delta.$$

Итак, для $\forall n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \ge (b-1)\delta. \qquad (3.26)$$

Из (3.22) и (3.26) при $n = m - 1$ получим $\dfrac{\sigma_{m-1}}{(m-1)^{1/k}} =$ $= \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \ge (b-1)\delta$ или $(m-1)^{1/k}\delta \le \dfrac{\sigma_{m-1}}{b-1} \to 0, \ \ \delta \to 0$ (так как из (3.22) $\sigma_m \to 0, m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$, то, используя (3.19), получим

$$\|x_{m,\delta} - x\| \le \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \le$$
$$\le \|(E - Ag_m(A))x\| + 2k(m\alpha)^{1/k}\delta \to 0, m \to \infty, \delta \to 0,$$

так как из (3.21) $\|(E-Ag_m(A))x\|\to 0, m\to\infty.$

Если же для некоторых $\delta_n \to 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x,\ \delta_n \to 0.$ Действительно, из (3.25) имеем $\left\|A(E-Ag_{m(\delta_n)}(A))x\right\| \le (b+1)\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0$. Отсюда по лемме 3.3 получаем, что $(E-Ag_{m(\delta_n)}(A))x \to 0, \delta_n \to 0.$ Поэтому

$$\left\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\right\| \le \left\|(E-Ag_{m(\delta_n)}(A))x\right\| + 2k\big(m(\delta_n)\alpha\big)^{\frac{1}{k}}\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0.$$

Теорема 3.7 доказана.

Имеет место

Теорема 3.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.7 *и пусть* $x = A^s z$, $s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m \le 1 + \dfrac{s+1}{k\alpha e}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{k}{s+1}}$,

$$\left\|x_{m,\delta} - x\right\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 2k\alpha^{\frac{1}{k}}\left\{1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{k}{s+1}}\right\}^{\frac{1}{k}}\delta. \quad (3.27)$$

Доказательство

Так как $x = A^s z$, $s > 0$, то

$$\|A(E-Ag_{m-1}(A))x\| = \left\|A^{s+1}(E-Ag_{m-1}(A))z\right\| = \left\|\int_0^M \lambda^{s+1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^{m-1} dE_\lambda z\right\| \le$$

$$\le (s+1)^{\frac{s+1}{k}}(k(m-1)\alpha e)^{-\frac{(s+1)}{k}}\|z\|.$$

Воспользовавшись неравенством (3.26), получим $(b-1)\delta \le (s+1)^{\frac{s+1}{k}}\left[k(m-1)\alpha e\right]^{-\frac{(s+1)}{k}}\|z\|,$, отсюда $m \le 1 + \dfrac{s+1}{k\alpha e}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{k}{s+1}}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\|(E-Ag_m(A))x\| \le \left\|A^{s+1}(E-Ag_m(A))z\right\|^{s/(s+1)}\|(E-Ag_m(A))z\|^{1/(s+1)} \le$$

$$\le \left\| A\left(E - Ag_m(A)\right)x \right\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \le [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \text{ (см. (3.25)).}$$

Так как соотношение (3.19) справедливо для любых n, то

$$\|x_{m,\delta} - x\| \le \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} +$$

$$+ 2k\alpha^{1/k} \left\{ 1 + \frac{s+1}{k\alpha e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{k}{s+1}} \right\}^{1/k} \delta.$$

Теорема 3.8 доказана.

Замечание 3.4. *Порядок оценки* (3.27) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$, *и, как следует из* [12], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 3.5. *В формулировке теоремы* 3.8 *предполагается, что точное решение истокопредставимо, но знание истокопредставимости не потребуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку решения.*

3.1.4.2 Правило останова по соседним приближениям в итерационном методе для уравнений с несамосопряженным оператором

Для решения уравнения $Ax = y$ с несамосопряженным оператором A используем метод

$$x_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)x_n + 2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y\right],\ x_0 \in H, k \in N. \tag{3.28}$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближенно $\|y - y_\delta\| \le \delta,$ метод итераций (3.28) примет вид

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)z_n + 2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y_\delta\right] +$$

$$+\left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)u_n,\ z_0 \in H,\ k \in N, \tag{3.29}$$

где u_n – ошибки в вычислении итераций, причём $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим через $C = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)$, $B = 2\left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*$. Тогда метод (3.29) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$. Определим момент m останова итерационной процедуры с помощью правила останова по разности соседних приближений (2.37). Покажем, что метод (3.29) с правилом останова (2.37) сходится. Аналогично леммам подраздела 2.1.5 доказываются леммы.

Лемма 3.4. *Пусть приближение* ω_n *определяется условиями*

$$\omega_0 = z_0,\ \omega_{n+1} = C\omega_n + By + Cu_n,\ n \ge 0. \tag{3.30}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{n}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$$

Лемма 3.5. *При* $\forall \omega_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство* $\varlimsup_{n\to\infty}\|\omega_n - \omega_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta$.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3.9. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta,\beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|\beta\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка* $m \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)}$;

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0$, $\delta,\beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0$.

Доказательство

а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left(C^{-1} B y_\delta + u_{n-k-1}\right). \qquad (3.31)$$

При $n=1$ из $z_n = Cz_{n-1} + By_\delta + Cu_{n-1}$ имеем $z_1 = Cz_0 + By_\delta + Cu_0$, из (3.31) получим то же самое, т. е. при $n=1$ формула (3.31) верна. Предположим, что (3.31) верна при $n=p$, т. е. $z_p = C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k \left(C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1}\right)$, и докажем её справедливость при $n = p+1$. Имеем

$$z_{p+1} = C^p z_p + By_\delta + Cu_p = C\left(C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k \left(C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1}\right)\right) + By_\delta + Cu_p =$$

$$= C^{p+1} z_0 + C^2\Big(C^{-1}By_\delta + u_{p-1} + By_\delta + Cu_{p-2} + CBy_\delta + C^2 u_{p-3} + \ldots +$$

$$+ C^{p-2}By_\delta + C^{p-1}u_0\Big) + By_\delta + Cu_p = C^{p+1}z_0 + C\Big(By_\delta + Cu_{p-1} +$$

$$+ CBy_\delta + C^2 u_{p-2} + \ldots + C^{p-1}By_\delta + Cu_0 + C^{-1}By_\delta + u_p\Big) =$$

$$= C^{p+1}z_0 + C\sum_{k=0}^{p} C^k \left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k}\right).$$

Таким образом, справедливость (3.31) доказана. Отсюда

$$\omega_n = C^n\omega_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1}By + u_{n-k-1}) = C^n\omega_0 + (E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1})By +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n\omega_0 + (E - C^n)(E-C)^{-1}(A^*A)^{-1}(E-C)A^* y +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n\omega_0 + A^{-1}(E - C^n)y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0 = \omega_0$, получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n z_0 + A^{-1}(E - C^n)y_\delta + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}z_0 + A^{-1}(E - C^{n+1})y_\delta -$$

$$-C\sum_{k=0}^{n}C^k u_{n-k} = C^n\omega_0 + A^{-1}(E-C^n)y - A^{-1}(E-C^n)y + A^{-1}(E-C^n)y_\delta +$$

$$+C\sum_{k=0}^{n-1}C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}\omega_0 - A^{-1}(E-C^{n+1})y + A^{-1}(E-C^{n+1})y - A^{-1}(E-C^n)y_\delta -$$

$$-C\sum_{k=0}^{n-1}C^k u_{n-k} = \omega_n - \omega_{n+1} + A^{-1}(E-C)(y_\delta - y) = \omega_n - \omega_{n+1} + C^n B(y-y_\delta).$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \le \|\omega_n - \omega_{n+1}\| + \left\|C^n B(y-y_\delta)\right\|. \tag{3.32}$$

Обозначим $\sigma = B(y-y_\delta)$, тогда

$$\left\|C^n B(y-y_\delta)\right\| = \left\|C^n\sigma\right\| = \left\|\int_0^{\|A^*A\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda\sigma\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda\sigma\right\| +$$

$$+\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A^*A\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda\sigma\right\| \le \left\|E_{\varepsilon_0}\sigma\right\| + q^n\|\sigma\| \to 0,\ n\to\infty,\ \varepsilon_0\to 0,$$

так как при $\alpha > 0$, $\lambda \in \left(0, \left\|A^*A\right\|\right]$ имеем $\left|\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right| \le q < 1.$

Поэтому (см. лемму 3.5) $\underline{\lim}_{n\to\infty}\|z_n - z_{n+1}\| = \underline{\lim}_{n\to\infty}\|\omega_n - \omega_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых $y_\delta, \|y-y_\delta\| \le \delta$ и u_n, $\|u_n\| \le \beta$.

б) Рассмотрим последовательность (3.30) и определим момент останова m' условием

$$\left.\begin{aligned}&\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta,\ (n < m'),\\ &\|\omega_{m'} - \omega_{m'+1}\| \le \varepsilon - \|B\|\delta.\end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

Из (3.32) следует, что $m \le m'$. Из леммы 3.4 при $n = m'$ получим неравенство $\sum_{k=0}^{m'}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2$, поэтому справедливо записать $\sum_{k=0}^{m'-1}\|\omega_k-\omega_{k+1}+Cu_k\|^2\le\|\omega_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2$. Отсюда получим

$$\sum_{k=0}^{m'-1}(\|\omega_k-\omega_{k+1}\|-\|C\|\beta)^2\le\|\omega_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2.$$

Так как по (3.33) при $n<m'$ имеем $\|\omega_n-\omega_{n+1}\|>\varepsilon-\|B\|\delta$, то $m'\left(\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\right)^2\le\|\omega_0-x\|^2+m'\|C\|^2\beta^2$. Учитывая, что $\omega_0=z_0$ и $m\le m'$, из последнего неравенства получим оценку для момента останова

$$m\le m'\le\|z_0-x\|^2\left((\varepsilon-\|\beta\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|B\|\delta)\right)^{-1}.$$

в) Докажем, что

$$x=C^n x+\sum_{k=0}^{n-1}BC^k y. \qquad (3.34)$$

Предположим, что (3.34) верно, тогда

$$x-C^n x=B\left(E+C+C^2+\ldots+C^{n-1}\right)y,\ (E-C^n)x=B(E-C^n)(E-C)^{-1}y,$$
$$(E-C^n)x=A^{-1}(E-C)(E-C^n)(E-C)^{-1}Ax,\ (E-C^n)x=(E-C^n)x.$$

Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (3.34) доказана. Из (3.31) вычтем (3.34), получим

$$z_n-x=C^n(z_0-x)+C\sum_{k=0}^{n-1}C^k\left[C^{-1}B(y_\delta-y)+u_{n-k-1}\right]. \qquad (3.35)$$

Отсюда $\Delta_n=C^n\Delta_0+C\sum_{k=0}^{n-1}C^k\left[C^{-1}B(y_\delta-y)+u_{n-k-1}\right]$, где $\Delta_n=z_n-x$ и $\Delta_0=z_0-x$. Следовательно,

$$\|\Delta_n\|\le\left\|C^n\Delta_0\right\|+\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)n. \qquad (3.36)$$

В частности, (3.36) справедливо и при $n=m$. Если $m\to\infty$ при $\varepsilon,\delta,\beta\to 0$, тогда, как показано ранее, $\left\|C^m\Delta_0\right\|\to 0,\ m\to\infty.$ Поэтому для доказательства $\|z_m-x\|\to 0,\ \delta\to 0,\ \beta\to 0$ достаточно показать, что $m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\to 0,\ m\to\infty,\ \delta\to 0,\ \beta\to 0$. Из (3.35) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n (E-C)(z_0 - x) - Cu_n -$$

$$-C^n B(y_\delta - y) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k (E-C) u_{n-k-1}. \qquad (3.37)$$

Так как спектр оператора $C = \left(E + \alpha\left(A^* A\right)^k\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^* A\right)^k\right)$ принадлежит [0,1], то можно доказать, что

$$\left\| C^n (E-C) \right\| \le \frac{1}{n+1}. \qquad (3.38)$$

Поэтому из (3.37) получим при $n = m - 1$

$$\left\| z_{m-1} - z_m \right\| \le \left\| C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E-C)(z_0 - x) \right\| + \left\| C^{m-1} B(y_\delta - y) \right\| + \left\| Cu_{m-1} \right\| +$$

$$+ \left\| C\sum_{k=0}^{m-2} C^k (E-C) u_{m-k-2} \right\| \le \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (E-C) \right\| \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|C\|\beta + \|B\|\delta +$$

$$+ \|C\|\beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \le \frac{2}{m}\left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m),$$

так как $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \le 1 + \ln m$ ([16]).

Так как по условию теоремы $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right), d > 1, p \in (0,1),$ то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из б) получим $m \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}$.

Поскольку $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon,$ то $\varepsilon \le \dfrac{2}{m}\left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta.$

Отсюда получим, что $m \le \dfrac{2\left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\|}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}.$

Умножим обе части последнего равенства на $\|B\|\delta+\|C\|\beta,$ получим

$$m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\le \frac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0-x)\right\|\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)}{\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\left[2+\ln\frac{\|z_0-x\|^2}{(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|B\|\delta)}\right]}.$$

При $m\to\infty$ множитель $2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0-x)\right\|\to 0,$ а дробь $\dfrac{\|B\|\delta+\|C\|\beta}{\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\left[2+\ln\dfrac{\|z_0-x\|^2}{(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|B\|\delta)}\right]}$ ограничена при $\delta,\beta\to 0.$ Поэтому $m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\to 0,$ при $m\to\infty,$ $\delta,$ $\beta\to 0.$ Отсюда и из неравенства (3.36) при $m\to 0$

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\|\Delta_m\|=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\|z_m-x\|\le\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\left(\left\|C^m\Delta_0\right\|+m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\right)=0.$$

Итак, доказано, что $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m-x\|=0$ при $m\to\infty$, т. е. метод (3.29) с правилом останова (2.37) сходится в исходной норме гильбертова пространства. Теорема 3.9 доказана.

3.2 Итерационная процедура неявного типа решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве

3.2.1 Оценки погрешности метода в случае априорного выбора числа итераций

Решается уравнение $Ax = y$ из раздела 2.1. Предлагается новая неявная итерационная процедура, представляющая собой семейство итерационных схем, зависящих от параметра k :

$$\left(E+\alpha A^k\right)x_{n+1}=x_n+\alpha A^{k-1}y,\ x_0=0,\ k\in N. \tag{3.39}$$

В случае приближенной правой части y_δ $\left(\|y-y_\delta\|\le\delta\right)$ соответствующие методу (3.39) итерации примут вид

$$\left(E+\alpha A^k\right)x_{n+1,\delta}=x_{n,\delta}+\alpha A^{k-1}y_\delta,\quad x_{0,\delta}=0,\ k\in N. \qquad (3.40)$$

Воспользовавшись интегральным представлением положительно определенного самосопряжённого оператора A и формулой (3.39), по индукции получим $x-x_n=\int\limits_0^M \lambda^{-1}(1+\alpha\lambda^k)^{-n}dE_\lambda y$, где $M=\|A\|$, $E_\lambda-$ спектральная функция оператора A. Отсюда легко выводится сходимость метода (3.39) при $n\to\infty$ для $\alpha>0$.

Итерационный процесс (3.40) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Справедлива

Теорема 3.10. *Итерационный процесс* (3.40) *сходится при* $\alpha>0$, *если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n^{1/k}\delta\to 0$ *при* $n\to\infty,\delta\to 0.$

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 3.1. При этом легко показывается оценка $\|x_n-x_{n,\delta}\|\le kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta,\ n\ge 1.$

Скорость сходимости процедуры (3.40) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения (2.1), т. е. $x=A^s z,\ s>0.$ Тогда $y=A^{s+1}z$, и, следовательно, получим $x-x_n=\int\limits_0^M \lambda^s\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{-n}dE_\lambda z$. Для оценки $\|x-x_n\|$ найдём максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda)=\lambda^s(1+\alpha\lambda^k)^{-n}$. Нетрудно показать, что при условии $\alpha>0$ справедливо неравенство $\|x-x_n\|\le s^{s/k}\left(2kn\alpha\right)^{-s/k}\|z\|$. Таким образом, общая оценка погрешности итерационной процедуры (3.40) запишется в виде

$$\|x-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+\|x_n-x_{n,\delta}\|\le s^{s/k}\left(2kn\alpha\right)^{-s/k}\|z\|+k(n\alpha)^{1/k}\delta,\ n\ge 1.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим её правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате для процедуры (3.40) получим априорный момент останова

$$n_{\text{опт}}=2^{-s/(s+1)}\left(\frac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)}\alpha^{-1}\|z\|^{k/(s+1)}\delta^{-k/(s+1)}$$

и оптимальную оценку погрешности

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1+s)\cdot 2^{-s/(k(s+1))}\left(\frac{s}{k}\right)^{s(1-k)/(k(s+1))}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}.$$

Приведём погрешность метода (3.40) при счёте с округлениями. Пусть
$x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (3.30), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учётом погрешностей вычисления γ_n, т. е. $z_{n+1} = \left(E + \alpha A^k\right)^{-1}\left[z_n + \alpha A^{k-1} y_\delta\right] + \alpha\gamma_n,\quad z_0 = 0$. Оценка погрешности метода (3.40) в этом случае имеет вид

$$\|x - z_n\| \le \left\|x - x_{n,\delta}\right\| + \left\|x_{n,\delta} - z_n\right\| \le \left(\frac{s}{2kn\alpha}\right)^{s/k}\|z\| + k(n\alpha)^{1/k}\delta + n\alpha\gamma,\ n \ge 1,$$

где $\gamma = \sup\limits_i |\gamma_i|$.

Сравнение метода (3.40) с хорошо известным явным методом итераций (3.10) показывает, что порядки их оптимальных оценок совпадают. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод (3.10) предпочтительнее неявного метода (3.40). Однако неявный метод (3.40) обладает следующим важным достоинством. В явном методе (3.10) на шаг α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|}$, что может на практике привести к необходимости большого числа итераций. В неявных методах никаких ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет считать $\alpha > 0$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с чем оптимальную оценку для метода итераций (3.40) можно получить уже на первых шагах итераций. Для этого достаточно взять $\alpha_{\text{опт}} = 2^{-s/(s+1)}\left(\dfrac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)}\|z\|^{k/(s+1)}\delta^{-k/(s+1)}$.

3.2.2 Сходимость метода в случае неединственного решения

Пусть теперь 0 – собственное значение оператора A (т. е. уравнение (2.1) имеет неединственное решение). Положим $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, и пусть $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть далее $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 3.11. Пусть $A \geq 0, y \in H, \alpha > 0$. *Тогда для итерационного процесса* (3.39) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y, \ \|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) *метод* (3.39) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* – *минимальное решение уравнения.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 3.1. Так как $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, т. е. процесс (3.39) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

3.2.3 Сходимость метода в энергетической норме

Здесь и ниже предполагается, что решение уравнения $Ax = y$ единственно. Изучим сходимость метода (3.40) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. С помощью интегрального представления самосопряженного оператора A получим $\|x - x_n\|_A^2 = \int_0^M \lambda \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^k\right)^{2n}} d(E_\lambda x, x)$

и $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \ = \int_0^M \lambda^{-1} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^k\right)^n}\right]^2 d(E_\lambda(y - y_\delta), y - y_\delta)$, где $M = \|A\|$.

Оценив подынтегральные функции, получим при условии $\alpha > 0$ оценку погрешности для итерационного метода (3.40) в энергетической норме $\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq (4kn\alpha)^{-1/(2k)}\|x\| + k^{1/2}(n\alpha)^{1/(2k)}\delta, \ n \geq 1$. Следовательно, если в процессе (3.40) выбирать число итераций $n = n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/(2k)}\delta \to 0, \ n \to \infty, \ \delta \to 0$, то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Итак, справедлива

Теорема 3.12. *При условии* $\alpha > 0$ *итерационный метод* (3.40) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать из условия* $n^{1/(2k)}\delta \to 0, \ n \to \infty, \ \delta \to 0$. *Для метода итераций* (3.40) *справедлива оценка погрешности* $\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq (4kn\alpha)^{-1/(2k)}\|x\| + k^{1/2}(n\alpha)^{1/(2k)}\delta, \ n \geq 1$.

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{опт}} \le 2^{(2k-1)/(2k)} k^{(k-1)/(4k)} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}$ и $n_{\text{опт}} = k^{-(k+1)/2} \times$ $\times (2\alpha)^{-1} \delta^{-k} \|x\|^k$.

Отметим тот факт, что для сходимости метода (3.40) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций $n = n(\delta)$ так, чтобы $n^{1/(2k)}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O\left(\delta^{-k}\right)$, т.е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-k}, и такой порядок обеспечивает сходимость метода (3.40).

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности для метода (3.40) и априорный момент останова $n_{\text{опт}}$ без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения, что делает метод (3.40) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения x уравнения $Ax = y$.

3.2.4 Правило останова по невязке

Решается уравнение $Ax = y$ из раздела 2.1. Зададим уровень останова ε и определим момент m останова условием (2.20). Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\left\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon$. Покажем, что правило останова по невязке применимо к методу (3.40).

Ниже метод (3.40) с правилом останова по невязке (2.20) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_m \left\|x - x_{m,\delta}\right\|\right) = 0$. Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \dfrac{1}{\left(1+\alpha\lambda^k\right)^n}\right] \ge 0$. Нетрудно показать, что при $\alpha > 0$ для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \left|g_n(\lambda)\right| \le k(n\alpha)^{1/k},\ n > 0,$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \le 1, n > 0,$$

$$1-\lambda g_n(\lambda)\to 0,\ n\to\infty,\ \forall\lambda\in(0, M],$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^s\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\le\left(\frac{s}{2kn\alpha}\right)^{s/k},\ n>0,\ 0\le s<\infty .$$

Аналогично подобным леммам из раздела 3.1 доказываются следующие леммы.

Лемма 3.6. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M$. *Тогда для любого* $\omega\in H$ $(E-Ag_n(A))\omega\to 0,\ n\to\infty.$

Лемма 3.7. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M$. *Тогда для* $\forall v\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{\frac{s}{k}}\left\|A^s(E-Ag_n(A))v\right\|\to 0,$ *при* $n\to\infty,\ 0\le s<\infty.$

Лемма 3.8. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M$. *Если для некоторой последовательности* $n_p<\bar{n}=const$ *и* $v_0\in\overline{R(A)}$ *при* $p\to\infty$ *имеем* $\omega_p=A\left(E-Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0\to 0$, *то* $\upsilon_p=\left(E-Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0\to 0.$

Леммы 3.6–3.8 использовались при доказательстве следующих теорем.

Теорема 3.13. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M$ *и пусть момент останова* $m=m(\delta)$ *в методе* (3.40) *выбирается по правилу* (2.20), *тогда* $x_{m,\delta}\to x$ *при* $\delta\to 0$.

Теорема 3.14. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.13 *и пусть* $x=A^s z,\ s>0$. *Тогда справедливы оценки* $m(\delta)\le 1+\frac{s+1}{2k\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}$,

$$\left\|x_{m(\delta),\delta}-x\right\|\le\left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+$$

$$+k\alpha^{1/k}\left\{1+\frac{s+1}{2k\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}\right\}^{1/k}\delta. \qquad (3.41)$$

Доказательство теорем 3.13–3.14 аналогично доказательству подобных теорем из раздела 3.1.

Замечание 3.6. *Порядок оценки* (3.41) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$, *и, как следует из* [12], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0$.

Замечание 3.7. *Сведения о степени истокопредставимости* s *и истокопредставляющем элементе* z *на практике не потребуются. Их знание необходимо только для получения оценок из теоремы* 3.14.

3.2.5 Правило останова по соседним приближениям для уравнений с несамосопряжённым оператором

Решаем уравнение $Ax = y$ с несамосопряженным оператором A. Используем неявную схему метода итераций

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left[z_n + \alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y_\delta\right] +$$

$$+\left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}u_n,\ z_0 \in H,\ k \in N. \qquad (3.42)$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}$, $B = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*$. Тогда метод (3.42) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n,\ z_0 \in H$ при приближенной правой части y_δ $\left(\|y - y_\delta\| \le \delta\right)$ и $w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n,\ w_0 \in H$ при точной правой части y. Определим момент m останова итерационного процесса условием (2.37).

Аналогично подобным леммам из подраздела 2.1.5 доказываются леммы.

Лемма 3.9. *Пусть приближение* w_n *определяется равенствами* $w_0 = z_0,\ \ w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n,\ n \ge 0$, *тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n}\|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$$

Лемма 3.10. *При любом* $w_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство* $\varliminf_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$

При использовании лемм 3.9–3.10 аналогично, как в подразделе 3.1.4.2, доказано, что метод итераций (3.42) с правилом останова по соседним приближениям (2.37) сходится, и получена оценка для момента останова. Справедлива

Теорема 3.15. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *если* $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) *если* $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)};$$

в) *если, кроме того,* $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0$, $\delta, \beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,\ 1)$, *то* $\lim_{\delta,\beta\to 0} \|z_m - x\| = 0.$

3.3 Итерационный метод неявного типа решения операторных уравнений первого рода в гильбертовом пространстве

3.3.1 Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

Решается уравнение $Ax = y$ из раздела 2.1. Предлагается семейство неявных итерационных схем, зависящих от параметра k:

$$\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right) x_{n+1} = \left(E - \alpha A^k\right)^2 x_n + 2\alpha A^{k-1} y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \qquad (3.43)$$

В случае приближенной правой части y_δ $\left(\|y - y_\delta\| \le \delta\right)$ соответствующие методу (3) итерации примут вид

$$\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right) x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^k\right)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1} y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N. \qquad (3.44)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (3.44) понимается утверждение о том, что приближения (3.44) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (3.44) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{n}\left\|x-x_{n,\delta}\right\|\right)=0$.

3.3.1.1 Сходимость при точной правой части

Воспользовавшись интегральным представлением положительно определенного самосопряжённого оператора A и формулой (3.43), по индукции получим $x-x_n=\int\limits_0^M \lambda^{-1}\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda y$, где $M=\|A\|$, E_λ – спектральная функция оператора A. Отсюда легко выводится сходимость процесса (3.43) при $n\to\infty$ для $\alpha>0$.

3.3.1.2 Сходимость при приближённой правой части

Итерационный процесс (3.44) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Справедлива

Теорема 3.16. *Итерационный процесс* (3.44) *сходится при* $\alpha>0$, *если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n^{1/k}\delta\to 0$ *при* $n\to\infty, \delta\to 0.$

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 3.1. При этом легко показывается оценка $\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|\le 2k(n\alpha)^{1/k}\delta,\ n\ge 1.$

3.3.1.3 Оценка погрешности метода

Скорость сходимости метода (3.44) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения (2.1), т. е. $x=A^s z, s>0$. Тогда $y=A^{s+1}z$, и, следовательно, получим $x-x_n=\int\limits_0^M \lambda^s\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda z$. Для оценки $\|x-x_n\|$ найдём максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda)=\lambda^s\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}$. Нетрудно показать, что при условии $\alpha>0$ справедливо неравенство $\|x-x_n\| \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}\|z\|$. Таким образом, общая оценка погрешности метода (3.44) запишется в виде $\|x-x_{n,\delta}\| \le \|x-x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}\|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k}\delta,\ n \ge 1.$ Для минимизации оценки погрешности вычислим её правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим априорный момент останова $n_{\text{опт}} = s^{\frac{s+k}{s+1}}(2k)^{-\frac{s+k}{s+1}}\alpha^{-1}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{k}{s+1}}\|z\|^{\frac{k}{s+1}}$ и оптимальную оценку погрешности

$$\|x-x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1+s)\left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{-\frac{s}{k(s+1)}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}. \qquad (3.45)$$

Замечание 3.8. *Оценка погрешности* (3.45) *имеет порядок* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, *и, как следует из* [12], *он является оптимальным в классе задач с истокообразно представимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0$.

Замечание 3.9. *Оптимальная оценка* (3.45) *не зависит от* α, *но от параметра* α *зависит* $n_{опт}$, *поэтому для уменьшения объёма вычислительной работы следует брать* α, *удовлетворяющим условию* $\alpha > 0$ *и так, чтобы* $n_{опт} = 1$. *Для этого достаточно выбрать* $\alpha_{опт} = s^{\frac{s+k}{s+1}}(2k)^{-\frac{s+k}{s+1}}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{k}{s+1}}\|z\|^{\frac{k}{s+1}}$.

Оценку $\|x-x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}$ можно оптимизировать по k. Для этого производную по k от $\varphi(k) = (s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}}$ приравняем к нулю. Получим, $(s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}} \cdot \frac{s}{k^2(s+1)} \cdot \left(k - \ln\frac{s}{k}\right) = 0$. Отсюда видно, что оптимальное k должно удовлетворять равенству $k = \ln\frac{s}{k}$. Но k должно быть целым числом, поэтому, как показывают расчеты, для $s \le 5$ $k_{\text{опт}} = 1$, для $6 \le s \le 27$ $k_{\text{опт}} = 2$.

Приведём погрешность метода (3.44) при счёте с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (4), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учётом погрешностей вычисления γ_n, т. е.

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha A^k\right)^2 z_n + 2\alpha A^{k-1} y_\delta\right] + \alpha\gamma_n, \quad z_0 = 0.$$

Оценка погрешности метода (3.44) в этом случае имеет вид

$$\|x-z_n\| \le \|x-x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta}-z_n\| \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}\|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k}\delta + n\alpha\gamma, \quad n \ge 1,$$

где $\gamma = \sup\limits_i |\gamma_i|$.

3.3.2 Сходимость метода в случае неединственного решения

Пусть теперь 0 – собственное значение оператора A (т.е. уравнение $Ax = y$ имеет неединственное решение). Положим $N(A) = \{x \in H \,|\, Ax = 0\}$, и пусть $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть далее $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 3.17. Пусть $A \ge 0, y \in H, \alpha > 0$. *Тогда для итерационного процесса* (3.43) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) *метод* (3.43) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* – *минимальное решение уравнения.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 3.1. Так как $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, т. е. процесс (3.43) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

3.3.3 Сходимость метода в энергетической норме

Здесь и ниже предполагается, что решение уравнения $Ax = y$ единственно. Изучим сходимость метода (3.44) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$.

С помощью интегрального представления самосопряженного оператора A получим $\|x - x_n\|_A^2 = \int\limits_0^M \lambda(1-\alpha\lambda^k)^{4n}(1+\alpha^2\lambda^{2k})^{-2n} d(E_\lambda x, x)$ и $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 =$

$$= \int\limits_0^M \lambda^{-1}\left[1 - \frac{(1-\alpha\lambda^k)^{2n}}{(1+\alpha^2\lambda^{2k})^n}\right]^2 d(E_\lambda(y-y_\delta), y-y_\delta),$$

где $M = \|A\|$. Оценив подынтегральные функции, получим при условии $\alpha > 0$ оценку погрешности для метода (3.44) в энергетической норме

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (4kn\alpha e)^{-1/(2k)}\|x\| + 2k^{1/2}(n\alpha)^{1/(2k)}\delta,\ n \ge 1.$$

Следовательно, если в процессе (3.44) выбирать число итераций $n = n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/(2k)}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$, то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Итак, справедлива

Теорема 3.18. *При условии* $\alpha > 0$ *итерационный метод* (3.44) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать из условия* $n^{1/(2k)}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. *Для итерационного метода* (3.44) *справедлива оценка погрешности* $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (4kn\alpha e)^{-1/(2k)}\|x\| + 2k^{1/2}(n\alpha)^{1/(2k)}\delta,\ n \ge 1$.

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим $\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le 2^{(3k-1)/(2k)}k^{(k-1)/(4k)}e^{-1/(4k)}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}$ и $n_{\text{опт}} = 2^{-(k+1)}k^{-(k+1)/2}\alpha^{-1}e^{-1/2}\delta^{-k}\|x\|^k$.

Отметим тот факт, что для сходимости метода (3.44) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций $n = n(\delta)$ так, чтобы $n^{1/(2k)}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O\left(\delta^{-k}\right)$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-k}, и такой порядок обеспечивает сходимость метода (3.44).

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности для метода (3.44) и априорный момент останова $n_{\text{опт}}$ без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения, что делает метод (3.44) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения x уравнения $Ax = y$.

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H. Очевидно, для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном $\varepsilon, \left(0 < \varepsilon < \|A\|\right)$ было: $P_\varepsilon x = 0,\ P_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, где $P_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \lambda dE_\lambda$. Так как $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-n}\left(E - \alpha A^k\right)^{2n}\right]y_\delta$, то для выполнения последнего из указанных условий должно выполняться условие $P_\varepsilon y_\delta = 0$. Таким образом, если решение x и приближенная правая часть y_δ таковы, что $P_\varepsilon x = 0$ и

$P_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства *H,* и, следовательно, для сходимости в исходной норме пространства H не требуется истокопредставимость точного решения.

3.3.4 Правило останова по невязке

Априорный выбор числа итераций *n* получен в предположении, что точное решение *x* уравнения *Ax* = *y* истокообразно представимо. Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны, и тем самым приведенные в подразделе 3.3.1 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее, метод (3.44) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться правилом останова по невязке (2.20).

Предположим, что при начальном приближении невязка достаточно велика, а именно больше уровня останова, т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (2.20) к методу (3.44). Ниже метод (3.44) с остановом (2.20) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_m \|x - x_{m,\delta}\|\right) = 0$. Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\right] \ge 0.$ Нетрудно показать, что при $\alpha > 0$ для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |g_n(\lambda)| \le 2k(n\alpha)^{1/\kappa},\ n>0,$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |1-\lambda g_n(\lambda)| \le 1, \quad n>0,$$

$$1-\lambda g_n(\lambda) \to 0,\ n\to\infty,\ \forall\lambda\in(0, M],$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s |1-\lambda g_n(\lambda)| \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}, \quad n>0,\ 0\le s<\infty.$$

Аналогично подобным леммам из раздела 3.1 доказываются следующие леммы.

Лемма 3.11. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$. *Тогда для любого* $\omega \in H$ $(E - Ag_n(A))\omega \to 0,\ n\to\infty.$

Лемма 3.12. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Тогда для* $\forall v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{\frac{s}{k}} \left\| A^s (E - Ag_n(A))v \right\| \to 0,$ *при* $n \to \infty, 0 \leq s < \infty.$

Лемма 3.13. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Если для некоторой последовательности* $n_p < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $p \to \infty$ *имеем* $\omega_p = A\left(E - Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0 \to 0$, *то* $\upsilon_p = \left(E - Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0 \to 0.$

Леммы 3.11–3.13 использовались при доказательстве следующих теорем.

Теорема 3.19. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3.44) *выбирается по правилу* (2.20), *тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 3.20. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.19 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}$,

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + 2k\alpha^{1/k}\left\{1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}\right\}^{1/k} \delta. \quad (3.46)$$

Доказательство теорем 3.19 –3.20 аналогично доказательству подобных теорем из раздела 3.1.

Замечание 3.10. *Порядок оценки* (3.46) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$, *и как следует из* [12], *он оптимален в классе задач с истокообразно представимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0$.

Замечание 3.11. *Хотя формулировка теоремы* 3.20 *дается с указаниями степени истокопредставимости s и истокопредставляющего элемента z, на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова* (2.20). *И тем не менее в теореме* 3.20 *утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m, обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (2.20), *как показывает теорема* 3.19, *обеспечивает сходимость метода, т. е. его регуляризующие свойства.*

3.3.5 Правило останова по соседним приближениям для уравнений с несамосопряжённым оператором

Решаем уравнение $Ax = y$ с несамосопряжённым оператором A. Используем неявную схему метода итераций

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha^2 \left(A^* A\right)^{2k}\right)^{-1} \left[\left(E - \alpha \left(A^* A\right)^k\right)^2 z_n + 2\alpha \left(A^* A\right)^{k-1} A^* y_\delta\right] +$$
$$+ \left(E - \alpha \left(A^* A\right)^k\right)^2 \left(E + \alpha^2 \left(A^* A\right)^{2k}\right)^{-1} u_n,\ z_0 \in H,\ k \in N. \qquad (3.47)$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = \left(E + \alpha^2 \left(A^* A\right)^{2k}\right)^{-1} \left(E - \alpha \left(A^* A\right)^k\right)^2$, $B = \left(E + \alpha^2 \left(A^* A\right)^{2k}\right)^{-1} 2\alpha \left(A^* A\right)^{k-1} A^*$. Тогда метод (3.47) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$, $z_0 \in H$ при приближенной правой части y_δ $\left(\|y - y_\delta\| \le \delta\right)$ и $w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n$, $w_0 \in H$ при точной правой части y. Определим момент m останова метода (3.47) условием (2.37).

Аналогично подобным леммам из раздела 2.1 доказываются леммы

Лемма 3.14. *Пусть приближение* w_n *определяется равенствами* $w_0 = z_0,$ $w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n$, $n \ge 0$, *тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2.$$

Лемма 3.15. *При любом* $w_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство* $\underline{\lim}_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta$.

При использовании лемм 3.14–3.15 аналогично, как в разделе 3.1, доказано, что метод (3.47) с правилом останова (2.37) сходится, и получена оценка для момента останова. Справедлива

Теорема 3.21. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *если* $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) *если* $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то* $m \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}$;

в) *если, кроме того,* $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0$, $\delta,\beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,\ 1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0$.

3.4 Регуляризация некорректных задач с неограниченным оператором при помощи итерационного метода неявного типа в гильбертовом пространстве

В разделе предлагается неявный итерационный метод решения некорректных задач, представляющий собой семейство итерационных схем, зависящих от параметра k. Для этого метода исследована сходимость в исходной и энергетической нормах гильбертова пространства, получены оценки погрешности и априорный момент останова, изучен случай неединственного решения, обоснована возможность применения правил останова по невязке и по разности соседних приближений.

Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным явным методом итераций (3.10) показывает, что порядки их оптимальных оценок совпадают. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод (3.10) предпочтительнее предлагаемого неявного метода. Однако предложенный неявный метод обладает следующим важным достоинством. В явном методе (3.10) на шаг α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|}$, что может на практике привести к необходимости большого числа итераций. В рассматриваемом неявном методе никаких ограничений сверху на $b > 0$ нет. В связи с чем оптимальную оценку для рассматриваемого неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций. Более того, предложенный неявный метод, в отличии от метода (3.10) и других явных и неявных методов, позволяет решать уравнения с неограниченным оператором и притом необязательно положительным.

В действительном гильбертовом пространстве H исследуется операторное уравнение первого рода $Ax = y$, где A – неограниченный линейный самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора A, и, следовательно, задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части y уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение x. Для отыскания этого решения предлагается итерационная процедура неявного типа

$$\left(A^{2k}+B\right)x_{n+1}=Bx_n+A^{2k-1}y,\quad x_0=0,\quad k\in N. \tag{3.48}$$

Здесь B – ограниченный вспомогательный самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмем оператор $B=bE,\, b>0,\, E-$тождественный оператор.

В случае приближенной правой части y_δ $\left(\|y-y_\delta\|\le\delta\right)$ соответствующие методу (3.48) приближения примут вид

$$\left(A^{2k}+B\right)x_{n+1,\delta}=Bx_{n,\delta}+A^{2k-1}y_\delta,\quad x_{0,\delta}=0,\quad k\in N. \tag{3.49}$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (3.49) понимается утверждение о том, что приближения (3.49) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при подходящем выборе n и достаточно малых δ.

3.4.1 Сходимость и априорные оценки метода в случае априорного выбора числа итераций

Воспользовавшись интегральным представлением неограниченного самосопряжённого оператора A и формулой (3.48), по индукции получим $x-x_n=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda^{-1}\dfrac{b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n}dE_\lambda y,$ где $E_\lambda-$ спектральная функция оператора A. Отсюда легко выводится сходимость процесса (3.48) при $n\to\infty$ для $b>0$.

Итерационный процесс (3.49) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Справедлива

Теорема 3.21. *Итерационный процесс* (3.49) *сходится при* $b>0$, *если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n^{1/(2k)}\delta\to 0$ *при* $n\to\infty,\delta\to 0.$

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 3.1. При этом легко показывается оценка $\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|\le 2k\left(\dfrac{n}{b}\right)^{1/(2k)}\delta,\ n\ge 1.$

Скорость сходимости метода (3.49) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения $Ax=y$, т. е. $x=A^{2s}z,\, s>0.$ Тогда

$y = A^{2s+1}z$, и, следовательно, получим $x - x_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^{2s} b^n}{\left(\lambda^{2k} + b\right)^n} dE_\lambda z.$ Для оценки $\|x - x_n\|$ найдём максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda) = \frac{\lambda^{2s} b^n}{\left(\lambda^{2k} + b\right)^n}$. Нетрудно показать, что при условии $b > 0$ справедливо неравенство $\|x - x_n\| \le \left(\frac{bs}{2kn}\right)^{s/k} \|z\|$. Таким образом, общая оценка погрешности метода итераций (3.49) запишется в виде $\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le \left(\frac{bs}{2kn}\right)^{s/k} \|z\| + 2k\left(\frac{n}{b}\right)^{1/(2k)} \delta,\ n \ge 1.$ Для минимизации оценки погрешности вычислим её правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим априорный момент останова $n_{\text{опт}} = 2^{-\frac{2s}{2s+1}} \left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{2(s+k)}{2s+1}} b\delta^{-\frac{2k}{2s+1}} \|z\|^{\frac{2k}{2s+1}}$ и оптимальную оценку погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1 + 2s)\left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{s(1-2k)}{k(2s+1)}} 2^{-\frac{s}{k(2s+1)}} \delta^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}}. \tag{3.50}$$

Замечание 3.12. *Оценка погрешности* (3.50) *имеет порядок* $O\left(\delta^{2s/(2s+1)}\right)$ *,и, как следует из* [12], *он является оптимальным в классе задач с истокообразно представимыми решениями* $x = A^{2s}z,\ s > 0.$

Замечание 3.13. *Оптимальная оценка* (3.50) *не зависит от итерационного параметра* b, *но от параметра* b *зависит* $n_{опт}$, *поэтому для уменьшения объёма вычислительной работы следует брать* b, *удовлетворяющим условию* $b > 0$, *и так, чтобы* $n_{опт} = 1$. *Для этого достаточно выбрать* $b_{опт} = 2^{\frac{2s}{2s+1}} \left(\frac{s}{k}\right)^{-\frac{2(s+k)}{2s+1}} \delta^{\frac{2k}{2s+1}} \|z\|^{-\frac{2k}{2s+1}}$.

Оценку $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}$ можно оптимизировать по k. Для этого производную по k от $\varphi(k) = (s/k)^{\frac{s(1-2k)}{k(2s+1)}} 2^{\frac{-s}{k(2s+1)}}$ приравняем к нулю. Получим

$(s/k)^{\frac{s(1-2k)}{k(2s+1)}} 2^{\frac{-s}{k(2s+1)}} \cdot \dfrac{s}{k^2(2s+1)} \cdot \left(-\ln\dfrac{s}{k} - 1 + 2k + \ln 2 \right) = 0$. Отсюда видно, что оптимальное k должно удовлетворять равенству $1 - 2k = \ln\dfrac{2k}{s}$ или $s = 2ke^{2k-1}$. Но k должно быть целым числом, поэтому, как показывают расчеты, для $s \le 17$ $k_{\text{опт}} = 1$, для $22 \le s \le 214$ $k_{\text{опт}} = 2$.

Приведём погрешность метода (3.49) при счёте с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (3.49), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учётом погрешностей вычисления γ_n, т.е.

$$z_{n+1} = \left(A^{2k} + B\right)^{-1}\left[Bz_n + A^{2k-1}y_\delta\right] + \frac{1}{b}\gamma_n, \quad z_0 = 0.$$

Оценка погрешности метода (3.49) в этом случае имеет вид

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le \left(\frac{bs}{2kn}\right)^{s/k}\|z\| + 2k\left(\frac{n}{b}\right)^{1/(2k)}\delta + \frac{n}{b}\gamma, \quad n \ge 1,$$

где $\gamma = \sup\limits_i |\gamma_i|$.

3.4.2 Сходимость метода в случае неединственного решения

Пусть теперь 0 – собственное значение оператора A (т. е. уравнение $Ax = y$ имеет неединственное решение). Положим $N(A) = \{x \in H \,|\, Ax = 0\}$, и пусть $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть далее $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 3.22. Пусть $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$, $y \in H, b > 0$. Тогда для итерационного процесса (3.48) верны следующие утверждения:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H}\|Ax - y\|$;

б) *метод* (3.48) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* – *минимальное решение уравнения.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 3.1. Так как $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, т. е. процесс (3.48) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

3.4.3 Сходимость метода в энергетической норме

Здесь и ниже предполагается, что решение уравнения $Ax = y$ единственно. Изучим сходимость метода (3.49) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. С помощью интегрального представления самосопряженного оператора A получим $\|x - x_n\|_A^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left(\frac{b}{\lambda^{2k} + b} \right)^{2n} d(E_\lambda x, x)$ и $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 =$ $= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-1} \left[1 - \frac{b^n}{\left(\lambda^{2k} + b\right)^n} \right]^2 d(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta)$. Оценив подынтегральные функции, получим при условии $b > 0$ оценку погрешности для неявного метода итераций (3.49) в энергетической норме $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \left(\frac{b}{8kn} \right)^{1/(4k)} \|x\| + (2k)^{1/2} \left(\frac{n}{b} \right)^{1/(4k)} \delta,\ n \ge 1$. Следовательно, если в процессе (3.49) выбирать число итераций $n = n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/(4k)}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$, то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Итак, справедлива

Теорема 3.23. *При условии* $b > 0$ *итерационный метод* (3.49) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать из условия* $n^{1/(4k)}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. *Для метода* (3.49) *справедлива оценка погрешности* $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \left(\frac{b}{8kn} \right)^{1/(4k)} \|x\| + (2k)^{1/2} \left(\frac{n}{b} \right)^{1/(4k)} \delta,\ n \ge 1$.

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим $\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le 2^{(10k-3)/(8k)} k^{(2k-1)/(8k)} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}$ и априорный момент останова $n_{\text{опт}} = 2^{-(2k+3)/2} k^{-(2k+1)/2} b \delta^{-2k} \|x\|^{2k}$.

Отметим тот факт, что для сходимости метода (3.49) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций $n = n(\delta)$ так, чтобы $n^{1/(4k)}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O\left(\delta^{-2k}\right)$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно

δ имеет порядок δ^{-2k}, и такой порядок обеспечивает сходимость метода (3.49).

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности для метода (3.49) и априорный момент останова $n_{\text{опт}}$ без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения, что делает метод (3.49) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения x уравнения (2.1).

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H. Очевидно, для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном $\varepsilon, \left(0 < \varepsilon < \|A\|\right)$ было: $P_\varepsilon x = 0,\ P_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, где $P_\varepsilon = \int\limits_0^\varepsilon \lambda dE_\lambda$. Так как $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - B^n\left(A^{2k} + B\right)^{-n}\right]y_\delta$, то для выполнения последнего из указанных условий должно выполняться условие $P_\varepsilon y_\delta = 0$. Таким образом, если решение x и приближенная правая часть y_δ таковы, что $P_\varepsilon x = 0$ и $P_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства H.

3.4.4 Правило останова по невязке

Здесь A – ограниченный линейный самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора A. Априорный выбор числа итераций n получен в предположении, что точное решение x уравнения $Ax = y$ истокообразно представимо. Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны, и тем самым приведенные в разделе 3.4.1 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее, метод (3.49) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке: определим момент m останова итерационного процесса (3.49) условием

$$\left.\begin{aligned} &\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon,\quad (n < m),\\ &\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \end{aligned}\right\}\quad \varepsilon = b_1\delta,\quad b_1 > 1. \tag{3.51}$$

Предположим, что при начальном приближении невязка достаточно велика, а именно больше уровня останова, т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (3.51) к методу (3.49). Ниже метод (3.49) с остановом (3.51) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{m}\left\|x - x_{m,\delta}\right\|\right) = 0$. Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \dfrac{b^n}{\left(\lambda^{2k} + b\right)^n}\right] \geq 0$. Нетрудно показать, что при $b > 0$ для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия

$$\sup_{-M\leq\lambda\leq M}\left|g_n(\lambda)\right| \leq 2k\left(\frac{n}{b}\right)^{1/(2\kappa)}, n > 0,$$

$$\sup_{-M\leq\lambda\leq M}\left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \leq 1, \quad n > 0,$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0, \; n \to \infty, \; \forall\lambda \in [-M, M],$$

$$\sup_{-M\leq\lambda\leq M}\left|\lambda^{2s}\left(1 - \lambda g_n(\lambda)\right)\right| \leq \left(\frac{bs}{2kn}\right)^{s/k}, \quad kn > s, \; 0 \leq s < \infty.$$

Аналогично подобным леммам из раздела 3.1 доказываются следующие леммы.

Лемма 3.16. *Пусть* A *– ограниченный оператор,* $A = A^*$. *Тогда для* $\forall w \in H \quad (E - Ag_n(A))w \to 0, \; n \to \infty.$

Лемма 3.17. *Пусть* A *– ограниченный оператор,* $A = A^*$. *Тогда для* $\forall\upsilon \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение*

$$n^{s/k}\left\|A^{2s}(E - Ag_n(A))v\right\| \to 0, \; n \to \infty, \; 0 \leq s < \infty.$$

Лемма 3.18. *Пусть* A *– ограниченный оператор,* $A = A^*$. *Если для некоторых* $n_p < \overline{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $p \to \infty$ *имеем* $w_p = A(E - Ag_{n_p}(A))v_0 \to 0,$ *то* $v_p = (E - Ag_{n_p}(A))v_0 \to 0.$

Если A – ограниченный несамосопряженный оператор, то справедлива аналогичная лемме 3.18

Лемма 3.19. *Пусть* A *– ограниченный несамосопряженный оператор. Если для некоторых* $n_p < \overline{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $p \to \infty$ *имеем* $w_p = A^*A(E - A^*Ag_{n_p}(A^*A))v_0 \to 0,$ *то* $v_p = (E - A^*Ag_{n_p}(A^*A))v_0 \to 0.$

Для доказательства леммы 3.19 следует перейти к оператору $A = A^*A$ и использовать лемму 3.18.

Леммы 3.16–3.18 использовались при доказательстве следующих теорем.

Теорема 3.24. *Пусть* A *– ограниченный оператор,* $A = A^*$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3.49) *выбирается по правилу* (3.51), *тогда* $x_{m(\delta),\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 3.25. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.24*, оператор* A *– положителен, и пусть* $x = A^{2s}z,\ s > 0$. *Тогда справедливы оценки*

$$m \le 1 + \frac{(2s+1)b}{4k}\left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta}\right]^{2k/(2s+1)},$$

$$\|x_{m,\delta} - x\| \le [(b_1+1)\delta]^{2s/(2s+1)}\|z\|^{1/(2s+1)} +$$
$$+\frac{2k}{b^{1/(2k)}}\left\{1 + \frac{(2s+1)b}{4k}\left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta}\right]^{2k/(2s+1)}\right\}^{1/(2k)}\delta. \quad (3.52)$$

Доказательство теорем 3.24–3.25 аналогично доказательству подобных теорем из раздела 3.1.

Замечание 3.14. *Порядок оценки* (3.52) *есть* $O\left(\delta^{\frac{2s}{2s+1}}\right)$, *и, как следует из* [12]*, он оптимален в классе задач с истокообразно представимыми решениями* $x = A^{2s}z,\ s > 0$.

Замечание 3.15. *Хотя формулировка теоремы* 3.25 *дается с указаниями степени истокопредставимости* s *и истокопредставляющего элемента* z*, на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова* (3.51).

3.4.5 Правило останова по соседним приближениям

Решаем уравнение $Ax = y$ с несамосопряженным оператором A. Используем неявную схему метода итераций

$$z_{n+1} = \left(\left(A^*A\right)^{2k} + B\right)^{-1}\left[Bz_n + \left(A^*A\right)^{2k-1}A^*y_\delta\right] +$$
$$+\left(\left(A^*A\right)^{2k} + B\right)^{-1}Bu_n,\ z_0 \in H,\ k \in N. \quad (3.53)$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = \left(\left(A^*A\right)^{2k} + B\right)^{-1} B,\ D = \left(\left(A^*A\right)^{2k} + B\right)^{-1} \left(A^*A\right)^{2k-1} A^*$. Тогда метод (3.53) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + Dy_\delta + Cu_n$, $z_0 \in H$ при приближенной правой части y_δ $\left(\|y - y_\delta\| \le \delta\right)$ и $w_{n+1} = Cw_n + Dy + Cu_n$, $w_0 \in H$ при точной правой части y. Определим момент m останова итерационного процесса условием (2.37).

Аналогично подобным леммам из раздела 2.1 доказываются леммы

Лемма 3.20. *Пусть приближение* w_n *определяется равенствами* $w_0 = z_0,\ \ w_{n+1} = Cw_n + Dy + Cu_n$, $n \ge 0$, *тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2.$$

Лемма 3.21. *При любом* $w_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство* $\varliminf_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta$.

При использовании лемм 3.20–3.21 аналогично, как в разделе 3.1, доказано, что метод (3.53) с правилом останова (2.37) сходится, и получена оценка для момента останова. Справедлива

Теорема 3.26. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *если* $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) *если* $\varepsilon(\delta, \beta) > \|D\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|D\|\delta\right)};$$

в) *если, кроме того,* $\varepsilon(\delta, \beta) \to 0$, $\delta, \beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d\left(\|D\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,\ 1)$, *то* $\lim_{\delta,\beta\to 0} \|z_m - x\| = 0$.

3.5 Численная модельная задача

Задача 3.1. *Решаем в пространстве* $L_2(0,1)$ *модельную задачу в виде уравнения*

$$\int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds = y(t), \quad 0 \le t \le 1 \tag{3.54}$$

с симметричным положительным ядром $K(t,s) = \begin{cases} t(1-s),\ 0 \le t \le s \le 1, \\ s(1-t),\ 0 \le s \le t \le 1, \end{cases}$ *точной правой частью* $y(t) = \dfrac{t(t-1)\left(t^2 - t - 1\right)}{12}$ *и точным решением* $x(t) = t(1-t)$.

Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ, и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\tilde{y}_i$, $i = \overline{1,m}$, полученные следующим образом: $\tilde{y}_i =$ $[\, y(t_i) \cdot 10^k + 0{,}5] / 10^k$, где $y(t_i)$ – значения функции $y(t)$ в точках $t_i = ih$, $i = \overline{1,m}$, $h = 1/m$. Квадратные скобки означают целую часть числа и $k = 4$. При $k = 4$ величина погрешности $\delta = 10^{-4}$. Действительно, имеем $\int_0^1 [y(t) - \tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum_{i=1}^m [y(t_i) - \tilde{y}_i]^2 h \le mh\left(10^{-k}\right)^2 = 10^{-2k}$. Заменим интеграл в (3.54) квадратурной суммой, например, по формуле правых прямоугольников с узлами $s_j = jh$, $j = \overline{1,m}$, $h = 1/m$, т. е. $\int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds \approx \sum_{j=1}^m K\left(t, s_j\right) h x_j$. Тогда получим равенство $\sum_{j=1}^m K\left(t, s_j\right) h x_j$ + $+ \rho_m(t) = y(t)$, где $\rho_m(t)$ – остаток квадратурной замены. Записав последнее равенство в точках $t_i = ih$, $i = \overline{1,m}$, получим уравнения $\sum_{j=1}^m K\left(t_i, s_j\right) h x_j$ + $+ \rho_m(t_i) = y(t_i)$, $i = \overline{1,m}.$ Отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближённого решения

$$\sum_{j=1}^{m} K\left(t_i, s_j\right) h x_j \ = \ \tilde{y}_i \ , \ \ i = \overline{1, m}. \tag{3.55}$$

Выберем для определённости $m = 32$ и будем решать систему (3.55) неявным методом итераций (3.2) при $k = 1$, который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} + \alpha \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) x_j^{(n+1)} h = x_i^{(n)} - \alpha \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) x_j^{(n)} h + 2\alpha \tilde{y}_i, i = \overline{1, m}. \tag{3.56}$$

При решении задачи итерационным методом (3.56) вычислялись: $\left\| Ax^{(n)} - \tilde{y} \right\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{m} K\left(t_i, s_j\right) h x_j^{(n)} - \tilde{y}_i \right]^2 h \right\}^{1/2}$ – дискретная норма невязки, $\left\| x^{(n)} \right\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[x_i^{(n)} \right]^2 h \right\}^{1/2}$ – норма приближённого решения и дискретная норма разности между точным и приближённым решениями $\left\| x - x^{(n)} \right\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[x(t_i) - x_i^{(n)} \right]^2 h \right\}^{1/2}$.

Оператор, описанный выше интегральным уравнением, непрерывен, взаимнооднозначен и аддитивен. Задача была решена методом (3.56) при $\delta = 10^{-4}$. Результаты счёта приведены в *таблице 3.1*, см. с. 156 (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы). Для решения предложенной задачи сведений об истокопредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (2.20), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. Пример счёта показал, что для достижения оптимальной точности методом итераций (3.56) при $\alpha = 9$ требуется только одна итерация, что соответствует результатам раздела 3.1. На *рисунке 3.1* (с. 157) изображены графики точного решения и приближённого решения, полученного методом (3.56) при $\delta = 10^{-4}$.

Таблица 3.1

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближённое решение
			Метод (3.56) $\delta = 10^{-4}$
0	0	0	0
0,0312	0,00259	0,03027	0,02429
0,0625	0,00517	0,05859	0,04865
0,0937	0,00768	0,08496	0,07275
0,125	0,01011	0,10938	0,09629
0,1562	0,01243	0,13184	0,11898
0,1875	0,01463	0,15234	0,14056
0,2187	0,01668	0,17089	0,1608
0,2500	0,01855	0,1875	0,17948
0,2812	0,02025	0,20215	0,19641
0,3125	0,02175	0,21484	0,21142
0,3437	0,02304	0,22559	0,22437
0,375	0,02411	0,23438	0,23514
0,4062	0,02495	0,24121	0,24361
0,4375	0,02555	0,24609	0,24972
0,4687	0,02591	0,24902	0,25341
0,5000	0,02604	0,25000	0,25464
$\left\Vert Ax^{(n)} - \tilde{y} \right\Vert_m$			0,00015
$\left\Vert x^{(n)} \right\Vert_m$			0,17972
$\left\Vert x - x^{(n)} \right\Vert_m$			0,00798

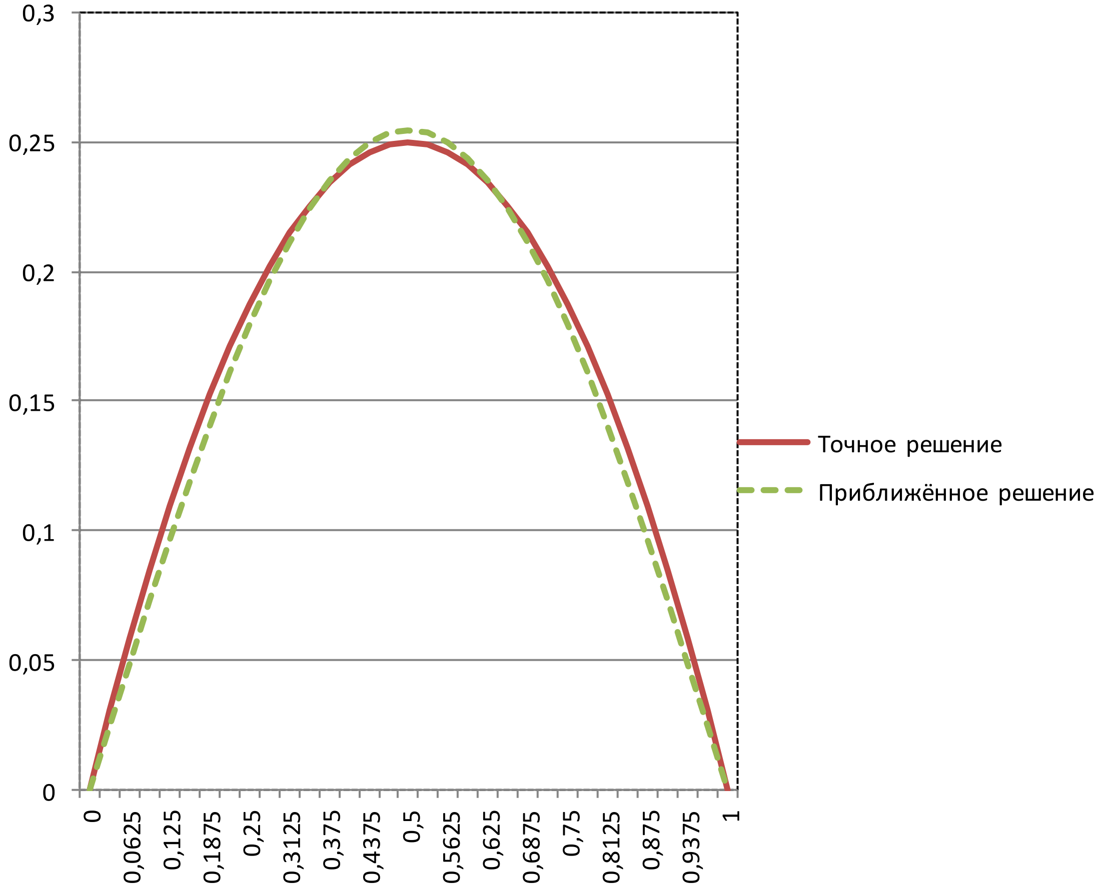
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
0
0,0625
0,125
0,1875
0,25
0,3125
0,375
0,4375
0,5
0,5625
0,625
0,6875
0,75
0,8125
0,875
0,9375
1
Точное решение
Приближённое решение

Рисунок 3.1

ГЛАВА 4
ЯВНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРИБЛИЖЁННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В данной главе доказывается сходимость явного метода решения операторных уравнений I рода с априорным и апостериорным выбором числа итераций в исходной норме гильбертова пространства в случае самосопряжённого и несамосопряжённого оператора, в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Получены оценки погрешности явного метода, априорный момент останова и оценка для апостериорного момента останова.

4.1 Априорный выбор параметра регуляризации в явном методе решения некорректных задач с приближённым оператором

4.1.1 Постановка задачи

Пусть H и F – гильбертовы пространства и $A \in \mathscr{L}(H, F)$, т. е. A – линейный непрерывный оператор, действующий из H в F. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением. Решается уравнение

$$Ax = y. \tag{4.1}$$

Задача отыскания элемента $x \in H$ по элементу $y \in F$ является некорректной, так как сколь угодно малые возмущения в правой части y могут вызывать сколь угодно большие возмущения решения.

Предположим, что точное решение $x^* \in H$ уравнения (4.1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью итерационного процесса

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^k x_n + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^k\right] y, \ x_0 = 0, \ k \in N, \tag{4.2}$$

(E – тождественный оператор).

Считаем, что оператор A и правая часть y уравнения (4.1) заданы приближённо, т. е. вместо y известно приближение y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, а вместо оператора A известен оператор A_η, $\|A - A_\eta\| \le \eta$. Предполагаем, что $0 \in Sp(A_\eta)$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$. Тогда метод (4.2) примет вид

$$x_{n+1} = (E - \alpha A_\eta)^k x_n + A_\eta^{-1}\left[E - (E - \alpha A_\eta)^k\right] y_\delta, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \tag{4.3}$$

Случай приближенной правой части уравнения и точного оператора для рассматриваемого метода изучен в разделе 2.1. Там исследован априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации, изучен случай неединственного решения задачи, доказана сходимость метода в энергетической норме.

Докажем сходимость метода (4.3) в случае априорного выбора параметра регуляризации при решении уравнения $A_\eta x = y_\delta$ с приближенным оператором A_η и приближённой правой частью y_δ, получим априорные оценки погрешности. Подобные вопросы изучались в [12], но только для других методов.

4.1.2 Случай самосопряжённых неотрицательных операторов

Пусть $H = F,\ \ A = A^* \ge 0,\ \ A_\eta = A_\eta^* \ge 0,\ \ Sp(A_\eta) \subseteq [0, M],\ \ 0 < \eta \le \eta_0$. Итерационный метод (4.3) запишем в виде:

$$x_n = g_n(A_\eta) y_\delta, \tag{4.3^1}$$

где $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{kn}\right]$. В разделе 2.1 получены условия для функций $g_n(\lambda)$:

$$\sup_{0 \le \lambda \le M} |g_n(\lambda)| \le \gamma n, \quad \gamma = k\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{2}{M}, \quad n > 0; \tag{4.4}$$

$$\begin{gathered} \sup_{0 \le \lambda \le M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le \gamma_s n^{-s},\ (n > 0),\ 0 < s \le s_0 < \infty, \\ \gamma_s = \left(\frac{s}{k\alpha e}\right)^s, \quad 0 < \alpha \le \frac{5}{4M}. \end{gathered} \tag{4.5}$$

(здесь s – степень истокопредставимости точного решения $x^* = A^s z,\ s > 0$, $\|z\| \le \rho$);

$$\sup_{0 \le \lambda \le M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le \gamma_0, \quad \gamma_0 = 1, \quad 0 < \alpha < \frac{2}{M}, \quad n > 0; \tag{4.6}$$

$$\sup_{0 \le \lambda \le M} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \to 0, \quad n \to \infty,\ 0 < \alpha < \frac{2}{M}. \tag{4.7}$$

Справедлива

Лемма 4.1. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $0 < \alpha < \dfrac{2}{M}$ *и выполнены условия* (4.6), (4.7). *Тогда* $\|G_{n\eta} \nu\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\eta \to 0$ $\forall \nu \in H$, *где* $G_{n\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$.

Доказательство

Имеем $\|G_{n\eta} v\| = \|(E - A_\eta g_n(A_\eta))v\| = \left\| \int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda v \right\| =$

$$= \left\| \int_0^M (1 - \alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda v \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon (1 - \alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda v \right\| + \left\| \int_\varepsilon^M (1 - \alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda v \right\|.$$

$\left\| \int_\varepsilon^M (1 - \alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda v \right\| \leq q^{kn}(\varepsilon) \left\| \int_\varepsilon^M dE_\lambda v \right\| \to 0,\ n \to \infty$, так как для $\lambda \in [\varepsilon, M]$ $|1 - \alpha\lambda| \leq q(\varepsilon) < 1$. $\left\| \int_0^\varepsilon (1 - \alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda v \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon dE_\lambda v \right\| = \|E_\varepsilon v\| \to 0, \varepsilon \to 0$ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, $\|G_{n\eta} \nu\| \to 0$ при $n \to \infty$, $\eta \to 0$. Лемма 4.1 доказана.

Условие сходимости для метода (4.3) дает

Теорема 4.1. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $0 < \alpha \leq \dfrac{5}{4M}$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ *и выполнены условия* (4.4), (4.6), (4.7). *Выберем параметр* $n = n(\delta, \eta)$ *в приближении* (4.3) *так, чтобы* $(\delta + \eta) n(\delta, \eta) \to 0$ *при* $n(\delta, \eta) \to \infty, \delta \to 0, \eta \to 0$. *Тогда* $x_{n(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0, \eta \to 0$.

Доказательство

Из (4.3^1) имеем $x_n = g_n(A_\eta) y_\delta$. Тогда

$$x_n - x^* = g_n(A_\eta) y_\delta - x^* = -G_{n\eta} x^* + G_{n\eta} x^* + g_n(A_\eta) y_\delta - x^* =$$

$$= -G_{n\eta} x^* + (E - A_\eta g_n(A_\eta)) x^* + g_n(A_\eta) y_\delta - x^* = -G_{n\eta} x^* + g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*).$$

Следовательно, $x_n - x^* = -G_{n\eta} x^* + g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)$.

Так как по условию (4.4) $\left\|g_n(A_\eta)\right\| \le \sup\limits_{0\le\lambda\le M} \left|g_n(\lambda)\right| \le \gamma n,$ то

$$\left\|y_\delta - A_\eta x^*\right\| \le \left\|y_\delta - y\right\| + \left\|y - A_\eta x^*\right\| = \left\|y_\delta - y\right\| + \left\|Ax^* - A_\eta x^*\right\| \le$$
$$\le \delta + \left\|A - A_\eta\right\| \left\|x^*\right\| \le \delta + \eta\left\|x^*\right\|.$$

Следовательно,

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|G_{n\eta}x^*\right\| + \left\|g_n(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \left\|G_{n\eta}x^*\right\| + \gamma n\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right).$$

Из леммы 4.1 следует, что $\left\|G_{n\eta}x^*\right\| \to 0$ при $n \to \infty$, $\eta \to 0$, а по условию теоремы 4.1 $n(\delta+\eta) \to 0$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$. Таким образом, $\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \to 0$, $\delta \to 0, \eta \to 0$. Теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.2. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\left\|A_\eta - A\right\| \le \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \le \eta_0)$, $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$, $y \in R(A)$, $\left\|y_\delta - y\right\| \le \delta$ *и выполнены условия* (4.4), (4.5). *Если точное решение истокопредставимо, т. е.* $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \le \rho$, *то справедлива оценка погрешности*

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_s n^{-s}\rho + \gamma n\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right),\ 0 < s < \infty.$$

Доказательство

Имеем, используя истокообразную представимость точного решения,

$$\left\|G_{n\eta}x^*\right\| = \left\|G_{n\eta}A^s z\right\| \le \left\|G_{n\eta}\left(A^s - A_\eta^s\right)z\right\| + \left\|G_{n\eta}A_\eta^s z\right\| \le \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_s n^{-s}\rho,$$

так как по лемме 1.1 [12, с. 91] $\left\|A_\eta^s - A^s\right\| \le c_s \eta^{\min(1,s)}$, $c_s = \mathrm{const}$, ($c_s \le 2$ для $0 < s \le 1$). Тогда

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_s n^{-s}\rho + \gamma n\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right),\ 0 < s < \infty. \tag{4.8}$$

Теорема 4.2 доказана.

Если минимизировать правую часть оценки (4.8) по n, то получим значение априорного момента останова:

$$n_{\text{опт}} = \left[\frac{s\gamma_s \rho}{\gamma\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)} \right]^{1/(s+1)} = d_s \rho^{1/(s+1)} \left[\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right]^{-1/(s+1)}, \text{ где}$$

$d_s = \left(\dfrac{s\gamma_s}{\gamma}\right)^{1/(s+1)}$. Отсюда $n_{\text{опт}} = s(k\alpha)^{-1} e^{-s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} \left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right)^{-1/(s+1)}$.

Подставим $n_{\text{опт}}$ в оценку (4.8), получим

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\|_{\text{опт}} \le \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \gamma_s \rho \left(d_s \rho^{1/(s+1)}\right)^{-s} \left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right)^{s/(s+1)} +$$

$$+ \gamma\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right) d_s \rho^{1/(s+1)} \left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right)^{-1/(s+1)} =$$

$$= \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right)^{s/(s+1)} \left(d_s^{-s} \gamma_s \rho^{1/(s+1)} + \gamma d_s \rho^{1/(s+1)}\right) =$$

$$= \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \rho^{1/(s+1)} c_s' \left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right)^{s/(s+1)},$$

где $c_s' = d_s^{-s} \gamma_s + \gamma d_s = \left(s^{1/(s+1)} + s^{-s/(s+1)}\right) \gamma^{s/(s+1)} \gamma_s^{1/(s+1)} = (1+s) e^{-s/(s+1)}$. Отсюда

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\|_{\text{опт}} \le c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + (1+s) e^{-s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} \left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right)^{s/(s+1)}.$$

Замечание 4.1. *Оптимальная оценка погрешности не зависит от* α, *но* $n_{\text{опт}}$ *зависит от* α. *Следовательно, для уменьшения объёма вычислительной работы следует брать* α *возможно большим из условия* $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$ *и таким, чтобы* $n_{\text{опт}}$ *было целым.*

4.1.3 Случай несамосопряжённых операторов

В случае несамосопряжённой задачи итерационный метод (4.3) примет вид

$$x_{n+1} = (E - \alpha A_\eta^* A_\eta)^k x_n + \left(A_\eta^* A_\eta\right)^{-1} \left[E - (E - \alpha A_\eta^* A_\eta)^k\right] A_\eta^* y_\delta, \; x_0 = 0, \; k \in N. \quad (4.9)$$

Его можно записать так

$$x_n = g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* y_\delta. \quad (4.10)$$

Из леммы 4.1 следует

Лемма 4.2. *Пусть* $A,\ A_\eta \in \mathcal{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\|^2 \le M$, $0 < \alpha < \dfrac{2}{M}$ *и выполнены условия* (4.6), (4.7). *Тогда*

$$\|K_{n\eta} v\| \to 0 \ \ \text{при} \ \ n \to \infty, \quad \eta \to 0, \ \ \forall v \in N(A)^{\perp} = \overline{R(A^*)}, \tag{4.11}$$

$$\|\tilde{K}_{n\eta} z\| \to 0 \ \ \text{при} \ \ n \to \infty, \quad \eta \to 0, \ \forall z \in N\left(A^*\right)^{\perp} = \overline{R(A)}, \tag{4.12}$$

где $K_{n\eta} = E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)$, $\tilde{K}_{n\eta} = E - A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)$.

Используем лемму 4.2 для доказательства следующей теоремы.

Теорема 4.3. *Пусть* $A,\ A_\eta \in \mathcal{L}(H, F)$, $\|A - A_\eta\| \le \eta$, $\|A_\eta\|^2 \le M$, $(0 < \eta \le \eta_0)$, $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$, $y \in R(A)$, $\|y_\delta - y\| \le \delta$ *и выполнены условия* (4.4), (4.6), (4.7). *Выберем параметр* $n = n(\delta, \eta)$ *так, чтобы*

$$(\delta + \eta)^2 n(\delta, \eta) \to 0 \ \ \text{при} \ \ n(\delta, \eta) \to \infty, \delta \to 0, \ \eta \to 0. \tag{4.13}$$

Тогда $x_{n(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

Доказательство

Для погрешности приближения $x_{n(\delta,\eta)}$ имеем

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* = -K_{n\eta} x^* + g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* \left(y_\delta - A_\eta x^*\right). \tag{4.14}$$

Здесь $\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^*\right\| = \left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)\left(A_\eta^* A_\eta\right)^{1/2}\right\| \le \gamma_* n^{1/2}$, где $\gamma_* = \sup\limits_{n>0}\left(n^{-1/2} \sup\limits_{0 \le \lambda \le M} \lambda^{1/2} |g_n(\lambda)|\right) \le \left(\dfrac{5}{4} k\alpha\right)^{1/2}$ (см. результаты подраздела 2.1.3). Поскольку

$$\left\|y_\delta - A_\eta x^*\right\| \le \|y_\delta - y\| + \left\|y - A_\eta x^*\right\| = \|y_\delta - y\| + \left\|Ax^* - A_\eta x^*\right\| \le \delta + \eta\left\|x^*\right\|,$$

то $\left\| g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2} n^{1/2}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)$. Поэтому

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|K_{n\eta}x^*\right\| + \left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le$$
$$\le \left\|K_{n\eta}(x^*)\right\| + \left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2} n^{1/2}\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right).$$

Покажем, что $\left\|K_{n\eta}x^*\right\| \to 0$ при $n \to \infty, \quad \eta \to 0$. Действительно,

$$\left\|K_{n\eta}x^*\right\| = \left\|(E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta))x^*\right\| = \left\|\int\limits_0^{\left\|A_\eta^* A_\eta\right\|}(1 - \lambda g_n(\lambda))\,dE_\lambda x^*\right\| =$$

$$= \left\|\int\limits_0^{\left\|A_\eta^* A_\eta\right\|}(1 - \alpha\lambda)^{kn}\,dE_\lambda x^*\right\| \le \left\|\int\limits_0^{\varepsilon}(1 - \alpha\lambda)^{kn}\,dE_\lambda x^*\right\| + \left\|\int\limits_\varepsilon^{\left\|A_\eta^* A_\eta\right\|}(1 - \alpha\lambda)^{kn}\,dE_\lambda x^*\right\|.$$

Тогда $\left\|\int\limits_\varepsilon^{\left\|A_\eta^* A_\eta\right\|}(1 - \alpha\lambda)^{kn}\,dE_\lambda x^*\right\| \le q^{kn}(\varepsilon)\left\|\int\limits_\varepsilon^{\left\|A_\eta^* A_\eta\right\|}dE_\lambda x^*\right\| \to 0,\ n \to \infty,$ так как

для $\lambda \in \left[\varepsilon, \left\|A_\eta^* A_\eta\right\|\right]$ $\quad |1 - \alpha\lambda| \le q(\varepsilon) < 1.$ $\quad \left\|\int\limits_0^{\varepsilon}(1 - \alpha\lambda)^{kn}\,dE_\lambda x^*\right\| \le \left\|\int\limits_0^{\varepsilon}dE_\lambda x^*\right\| =$

$= \left\|E_\varepsilon x^*\right\| \to 0, \varepsilon \to 0$ в силу свойств спектральной функции.

Из условия (4.13) $n(\delta + \eta)^2 \to 0$ при $n \to \infty, \quad \delta \to 0, \quad \eta \to 0$. Отсюда $\left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2} n^{1/2}\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right) \to 0, \quad n \to \infty, \quad \delta \to 0, \quad \eta \to 0.$ Таким образом, $\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \to 0,\ n \to \infty, \quad \delta \to 0, \quad \eta \to 0$. Теорема 4.3 доказана.

Справедлива

Теорема 4.4. *Пусть* $A,\ A_\eta \in \mathfrak{L}(H, F)$, $\left\|A - A_\eta\right\| \le \eta$, $\left\|A_\eta\right\|^2 \le M$, $(0 < \eta \le \eta_0)$, $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$, $y \in R(A)$, $\left\|y_\delta - y\right\| \le \delta$. *Если точное решение* *представимо в виде* $x^* = |A|^s z$, $s > 0$, $\|z\| \le \rho$, $|A| = (A^*A)^{1/2}$ *и выполнены условия* (4.4), (4.5), *то справедлива оценка погрешности*

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \gamma_0 c_s (1 + |\ln\eta|)\eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_{s/2} n^{-s/2}\rho + \left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2} n^{1/2}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right),$$

$$0 < s < \infty.$$

Доказательство

В случае истокообразно представимого точного решения $x^* = |A|^s z = (A^*A)^{s/2} z$ из (4.5) получим $\sup\limits_{0\le\lambda\le M} \lambda^{s/2}|1 - \lambda g_n(\lambda)| \le \gamma_{s/2} n^{-s/2}$, где $\gamma_{s/2} = \left(\dfrac{s}{2k\alpha e}\right)^{s/2}$. Тогда

$$\left\|K_{n\eta}|A_\eta|^s z\right\| = \left\||A_\eta|^s \left[E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)\right] z\right\| =$$

$$= \left\|\left(A_\eta^* A_\eta\right)^{s/2}\left[E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)\right] z\right\| \le \gamma_{s/2} n^{-s/2}\rho.$$

Отсюда $\left\|K_{n\eta}x^*\right\| = \left\|K_{n\eta}|A|^s z\right\| = \left\|K_{n\eta}\left(|A_\eta|^s - |A|^s\right)z\right\| + \left\|K_{n\eta}|A_\eta|^s z\right\| \le$ $\le \gamma_0 c_s (1 + |\ln\eta|)\eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_{s/2} n^{-s/2}\rho$, так как из [12, с. 92] имеем $\left||A_\eta|^s - |A|^s\right| \le c_s (1 + |\ln\eta|)\eta^{\min(1,s)}$, $c_s = \mathrm{const}$, ($c_s \le 2$ для $0 < s \le 1$). Из (4.14)

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|K_{n\eta}x^*\right\| + \gamma_* n^{1/2}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) = \left\|K_{n\eta}x^*\right\| +$$

$$+ \left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2} n^{1/2}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le \gamma_0 c_s (1 + |\ln\eta|)\eta^{\min(1,s)}\rho +$$

$$+ \gamma_{s/2} n^{-s/2}\rho + \left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2} n^{1/2}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right),\ 0 < s < \infty. \tag{4.15}$$

Теорема 4.4 доказана.

Минимизируя правую часть (4.15) по *n*, получим значение априорного момента останова: $n_{\text{опт}} = \left(\dfrac{s\gamma_{s/2}}{\gamma_*}\right)^{2/(s+1)} \rho^{2/(s+1)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{-2/(s+1)} =$

$$=\left(\frac{5}{4}\right)^{-1/(s+1)} s^{(2+s)/(s+1)}(2e)^{-s/(s+1)}(k\alpha)^{-1}\rho^{2/(s+1)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{-2/(s+1)}.$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (4.15), получим оптимальную оценку погрешности для метода итераций (4.9)

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|_{\text{опт}} \le \gamma_0 c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho+c_s''\rho^{1/(s+1)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)}, \ 0<s<\infty,$$

где $c_s''=\left(s^{1/(s+1)}+s^{-s/(s+1)}\right)\gamma_*^{s/(s+1)}\gamma_{s/2}^{1/(s+1)}=\left(\frac{5}{4s}\right)^{s/(2(s+1))}(s+1)(2e)^{-s/(2(s+1))}$.

Таким образом,

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|_{\text{опт}} \le c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho+$$
$$+\left(\frac{5}{4s}\right)^{s/(2(s+1))}(s+1)(2e)^{-s/(2(s+1))}\rho^{1/(s+1)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)}, \ 0<s<\infty.$$

4.2 Апостериорный выбор параметра регуляризации в явном методе решения некорректных задач с приближенным оператором

4.2.1 Случай самосопряженной задачи

Рассматривается уравнение $Ax = y$ из подраздела 4.1.1. Для его решения используется итерационный метод (4.3).

Докажем сходимость метода (4.3) в случае апостериорного выбора параметра регуляризации для решения уравнения $A_\eta x = y_\delta$, где оператор A_η и правая часть уравнения заданы приближённо: $\left\|A_\eta - A\right\| \le \eta$, $\left\|y - y_\delta\right\| \le \delta$. Подобные вопросы изучались в [12], но только для других методов. Считаем, что нуль не является собственным значением оператора A_η, но принадлежит его спектру. Предположим, что уравнение $A_\eta x = y_\delta$ имеет единственное решение.

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова итерационного процесса (4.3) условием

$$\left.\begin{aligned}&\left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)}-y_\delta\right\|>\varepsilon, (n<m),\\&\left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)}-y_\delta\right\|\le\varepsilon,\end{aligned}\right\}\ \varepsilon=b(\delta+\left\|x^*\right\|\eta),\, b>1. \qquad (4.16)$$

Предположим, что при начальном приближении $x_{0(\delta,\eta)}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|A_\eta x_{0(\delta,\eta)} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (4.16) к методу (4.3).

Пусть $H = F$, $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\sigma(A_\eta) \subseteq [0, M]$. Справедлива

Лемма 4.3. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta\| \leq M$, *и выполнено условие* (4.5) с $s_0 > 1$. *Тогда для* $G_{n\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$ *справедливо соотношение для* $\forall \upsilon \in \overline{R(A)}$:

$$n\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\| \to 0 \text{ при } n \to \infty, \ \eta \to 0. \tag{4.17}$$

Доказательство

Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза. Здесь $\|B_n\| = n\|A_\eta G_{n\eta}\|$ и по условию (4.5) нормы $\|B_n\|$ ограничены в совокупности

$$n\|A_\eta G_{n\eta}\| = n\|A_\eta\left(E - A_\eta g_n(A_\eta)\right)\| =$$
$$= n \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda|1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq n\gamma_1 n^{-1} = \gamma_1, (n > 0, \eta > 0).$$

Для элементов вида $\upsilon = A\omega$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, в силу (4.5) имеем

$$n\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\| = n\|A_\eta G_{n\eta}A\omega\| \leq n\|A_\eta G_{n\eta}(A - A_\eta)\omega\| +$$
$$+ n\|A_\eta G_{n\eta}A_\eta\omega\| \leq \left(\gamma_1\eta + n \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^2|1 - \lambda g_n(\lambda)|\right)\|\omega\| \leq$$
$$\leq \left(\gamma_1\eta + n\gamma_2 n^{-2}\right)\|\omega\| = \left(\gamma_1\eta + \gamma_2 n^{-1}\right)\|\omega\| \to 0, \ n \to \infty, \eta \to 0.$$

По теореме Банаха – Штейнгауза $n\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\| \to 0$ при $n \to \infty, \eta \to 0$. Лемма 4.3 доказана.

Лемма 4.4. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta\| \leq M$, *и выполнены условия* (4.5) *и* (4.7). *Если для некоторых*

$\upsilon_0 \in \overline{R(A)},\ n_p \le \bar{n} = const$ *и* $\eta_p \to 0$ *имеем* $A_{\eta_p} G_{n_p\eta_p} \upsilon_0 \to 0$ *при* $p \to \infty$, *то* $G_{n_p\eta_p} \upsilon_0 \to 0.$

Доказательство

В силу неравенства (4.6) последовательность $\upsilon_p = G_{n_p\eta_p} \upsilon_0$ ограничена, т. е. $\|\upsilon_p\| = \left\|G_{n_p\eta_p} \upsilon_0\right\| \le \gamma_0 \|\upsilon_0\|,\ p \in N = \{1, 2, \ldots\}.$ Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $\upsilon_p \dashrightarrow \upsilon, \left(p \in N' \subseteq N\right).$ Тогда $A_{\eta_p} \upsilon_p \dashrightarrow A_{\eta_p} \upsilon,\quad \left(p \in N'\right).$ По условию $\omega_p = A_{\eta_p} \upsilon_p \to 0,$ значит, $A_{\eta_p} \upsilon = 0.$ Но так как нуль не является собственным значением оператора A_{η_p}, то $\upsilon = 0$. Теперь

$$\|\upsilon_p\|^2 = \left(\upsilon_p, G_{n_p\eta_p} \upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \left(E - A_{\eta_p} g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\right)\upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \upsilon_0\right) -$$

$$-\left(A_{\eta_p} \upsilon_p, g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \upsilon_0\right) - \left(\omega_p, g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\upsilon_0\right) \to \left(\upsilon, \upsilon_0\right) = \left(0, \upsilon_0\right) = 0, \left(p \in N'\right),$$

так как $\omega_p \to 0,\ \left\|g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\right\| \le \gamma n_p \le \gamma \bar{n}.$ Итак, любая слабо сходящаяся подпоследовательность ограниченной последовательности υ_p стремится к нулю по норме. Отсюда следует, что и вся последовательность $\upsilon_p \to 0,\ p \to \infty$ по норме. Лемма 4.4 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 4.5. *Пусть* $H = F$, $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\| \le M, \left(0 < \eta \le \eta_0\right)$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ *и выполнены условия* (4.5), (4.6) *с* $s_0 > 1$. *Пусть параметр* $m(\delta, \eta)$ *выбран по правилу* (4.16). *Тогда* $(\delta + \eta) m(\delta, \eta) \to 0,\ x_{m(\delta, \eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0,\ \eta \to 0$.

Доказательство

Имеем $x_{n(\delta, \eta)} = g_n(A_\eta) y_\delta$, тогда

$$x_{n(\delta,\eta)}-x^*=-x^*+g_n(A_\eta)y_\delta=-G_{n\eta}x^*+G_{n\eta}x^*-$$
$$-x^*+g_n(A_\eta)y_\delta=-G_{n\eta}x^*+\left(E-A_\eta g_n\left(A_\eta\right)\right)x^*-$$
$$-x^*+g_n(A_\eta)y_\delta=-G_{n\eta}x^*+x^*-A_\eta g_n\left(A_\eta\right)x^*-$$
$$-x^*+g_n\left(A_\eta\right)y_\delta=-G_{n\eta}x^*+g_n\left(A_\eta\right)\left(y_\delta-A_\eta x^*\right).$$

Следовательно,

$$x_{n(\delta,\eta)}-x^*=-G_{n\eta}x^*+g_n(A_\eta)\left(y_\delta-A_\eta x^*\right). \tag{4.18}$$

Отсюда

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)}-A_\eta x^*=-A_\eta G_{n\eta}x^*+A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta-A_\eta g_n(A_\eta)A_\eta x^*;$$
$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)}=A_\eta x^*-A_\eta G_{n\eta}x^*+A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta-A_\eta g_n(A_\eta)A_\eta x^*;$$
$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)}-y_\delta=-A_\eta G_{n\eta}x^*-y_\delta+\left(E-A_\eta g_n(A_\eta)\right)A_\eta x^*+$$
$$+A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta=-A_\eta G_{n\eta}x^*+G_{n\eta}A_\eta x^*-\left(E-A_\eta g_n(A_\eta)\right)y_\delta=$$
$$=-A_\eta G_{n\eta}x^*+G_{n\eta}A_\eta x^*-G_{n\eta}y_\delta=-A_\eta G_{n\eta}x^*-G_{n\eta}\left(y_\delta-A_\eta x^*\right).$$

Итак,

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)}-y_\delta=-A_\eta G_{n\eta}x^*-G_{n\eta}\left(y_\delta-A_\eta x^*\right). \tag{4.19}$$

Из леммы 4.1 следует, что

$$\left\|G_{n\eta}x^*\right\|\to 0,\ n\to\infty,\ \eta\to 0. \tag{4.20}$$

Покажем, что

$$\left\|g_n(A_\eta)\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le\gamma n\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right). \tag{4.21}$$

По условию (4.4) $\left\|g_n\left(A_\eta\right)\right\|\le\sup\limits_{0\le\lambda\le M}\left|g_n(\lambda)\right|\le\gamma n,$ а $\left\|y_\delta-A_\eta x^*\right\|\le$ $\le\left\|y_\delta-y\right\|+\left\|y-A_\eta x^*\right\|=\left\|y_\delta-y\right\|+\left\|Ax^*-A_\eta x^*\right\|\le\delta+\left\|\left(A-A_\eta\right)x^*\right\|\le\delta+\left\|x^*\right\|\eta,$ поэтому $\left\|g_n(A_\eta)\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le\gamma n\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right).$

В силу леммы 4.3

$$\sigma_{n\eta} = n\left\|A_\eta G_{n\eta} x^*\right\| \to 0,\ n \to \infty,\ \eta \to 0. \qquad (4.22)$$

Применим правило останова (4.16), тогда $\left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| \le b\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right), b > 1$ и из (4.6) и (4.19) получим

$$\left\|A_\eta G_{m\eta} x^*\right\| \le (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right). \qquad (4.23)$$

Действительно, из (4.19)

$$\left\|A_\eta G_{m\eta} x^*\right\| \le \left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| + \left\|G_{m\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le$$
$$\le b\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) + \left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) = (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right).$$

Для $\forall n < m \quad \left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| > \varepsilon,$ потому

$$\left\|A_\eta G_{n\eta} x^*\right\| \ge \left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| - \left\|G_{n\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right).$$

Следовательно, для $\forall n < m$

$$\left\|A_\eta G_{n\eta} x^*\right\| \ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right). \qquad (4.24)$$

Из (4.24) и (4.22) при $n = m-1$ имеем $\frac{\sigma_{m-1,\eta}}{m-1} = \left\|A_\eta G_{m-1,\eta} x^*\right\| \ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)$ или $(m-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le$ $\le \frac{\sigma_{m-1,\eta}}{b-1} \to 0, \delta \to 0, \eta \to 0$ (так как из (4.22) $\sigma_{m\eta} \to 0, m \to \infty, \eta \to 0$). Если при этом $m(\delta,\eta) \to \infty$ при $\delta \to 0, \eta \to 0$, то, используя (4.18), (4.20) и (4.21), получим

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|G_{m\eta} x^*\right\| + \left\|g_m(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le$$
$$\le \left\|G_{m\eta} x^*\right\| + \gamma m(\delta,\eta)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \to 0,\ m \to \infty,\ \delta \to 0,\ \eta \to 0,$$

т. е. что $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$.

Если же для некоторых δ_n и η_n последовательность $m(\delta_n, \eta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n,\eta_n)} \to x^*, \delta_n \to 0, \eta_n \to 0.$ Действительно, из (4.23) выполняется

$$\left\|A_{\eta_n} G_{m\eta_n} x^*\right\| \le (b+1)\left(\delta_n + \left\|x^*\right\|\eta_n\right) \to 0,\ \delta_n \to 0,\ \eta_n \to 0.$$

Следовательно, имеем $A_{\eta_n} G_{m\eta_n} x^* \to 0, \delta_n \to 0, \eta_n \to 0$ и по лемме 4.4 получаем, что при $\delta_n \to 0, \eta_n \to 0$ выполняется $G_{m\eta_n} x^* \to 0$. Отсюда

$$\left\|x_{m(\delta_n,\eta_n)} - x^*\right\| \le \left\|G_{m\eta_n} x^*\right\| + \gamma m(\delta_n,\eta_n)\left(\delta_n + \left\|x^*\right\|\eta_n\right) \to 0,\ \delta_n \to 0, \eta_n \to 0.$$

Теорема 4.5 доказана.

Теорема 4.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.5. *Если* $x^* = A^s z,\ s > 0,\ \|z\| \le \rho,$ *то справедливы оценки*

$$m \le 1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\frac{\rho^{1/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_1\eta\rho\right]^{1/(s+1)}};$$

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho + \left[c_s\gamma_1\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)} +$$
$$+ k\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\frac{\rho^{1/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_1\eta\rho\right]^{1/(s+1)}}\right\}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right). \qquad (4.25)$$

Доказательство

Оценим заново $\left\|A_\eta G_{m-1,\eta} x^*\right\|$. В силу (4.5) и леммы 1.1 [12, с. 91]

$$\left\|A_\eta G_{m-1,\eta} x^*\right\| = \left\|A_\eta G_{m-1,\eta} A^s z\right\| \le \left\|A_\eta G_{m-1,\eta}\left(A^s - A_\eta^s\right)z\right\| +$$
$$+ \left\|A_\eta^{s+1} G_{m-1,\eta} z\right\| \le \left(\beta_{m-1,s}\eta + \gamma_{s+1}(m-1)^{-(s+1)}\right)\rho,$$

где $\beta_{m-1,s} = c_s \sup\limits_{0\le\lambda\le M} \lambda\left(1 - \lambda g_{m-1}(\lambda)\right) \le \left[k(m-1)\alpha e\right]^{-1} c_s = c_s\gamma_1(m-1)^{-1}$, $\beta_{m-1,s} \to 0,\ m \to \infty$. Здесь $c_s = \mathrm{const}$, ($c_s \le 2$ при $0 < s \le 1$). Сопоставляя это с (4.24), получим $(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le \left(\beta_{m-1,s}\eta + \gamma_{s+1}(m-1)^{-(s+1)}\right)\rho$. Отсюда $\gamma_{s+1}(m-1)^{-(s+1)}\rho \ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - \beta_{m-1,s}\eta\rho,$ тогда

$(m-1)^{(s+1)} \le \dfrac{\gamma_{s+1}\rho}{\left[(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\beta_{m-1,s}\eta\rho\right]}$, и, следовательно,

$$m \le 1+\frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\beta_{m-1,s}\eta\rho}\right]^{1/(s+1)}.$$

Поскольку $\beta_{m-1,s} = c_s\gamma_1\dfrac{1}{m-1} \le c_s\gamma_1$ (так как при $m>1$ $\dfrac{1}{m-1}\le 1$), то $(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\beta_{m-1,s}\eta\rho \ge (b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_1\eta\rho$, и, значит, получим следующую оценку для m: $m \le 1+\dfrac{s+1}{k\alpha e}\dfrac{\rho^{1/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_1\eta\rho\right]^{1/(s+1)}}$.

Из формул (4.18) и (4.21) имеем $\left\|G_{m\eta}x^*\right\| = \left\|G_{m\eta}A^s z\right\| \le \left\|G_{m\eta}\left(A^s - A_\eta^s\right)z\right\| + \left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|$. По лемме 1.1 [12, с. 91] $\left\|G_{m\eta}\left(A^s - A_\eta^s\right)z\right\| \le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho$, где $c_s = \mathrm{const}$, ($0 < c_s \le 2$ для $0 < s \le 1$), что даёт в оценку $\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\|$ вклад $O\left((\delta+\eta)^{s/(s+1)}\right)$ [12, с. 111]. Норму $\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|$ оценим с помощью неравенства моментов, леммы 1.1 [12, с. 91] и (4.23):

$$\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\| = \left\|A_\eta^s G_{m\eta} z\right\| = \left\|A_\eta^{s+1}G_{m\eta}z\right\|^{s/(s+1)}\left\|G_{m\eta}z\right\|^{1/(s+1)} \le$$
$$\le \left\|A_\eta G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|^{s/(s+1)}\left\|z\right\|^{1/(s+1)} \le \left(\left\|A_\eta G_{m\eta}\left(A_\eta^s - A^s\right)z\right\| +\right.$$
$$\left.+\left\|A_\eta G_{m\eta}A^s z\right\|\right)^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)} \le \left[\beta_{ms}\eta\rho + (b+1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}.$$

Тогда

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|G_{m\eta}x^*\right\| + \left\|g_m(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho + \left[\beta_{ms}\eta\rho + (b+1)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)} + \gamma m\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right) \le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho +$$
$$+\left[c_s\gamma_1\eta\rho + (b+1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)} +$$

$$+k\alpha\left\{1+\frac{s+1}{k\alpha e}\frac{\rho^{1/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_1\eta\rho)\right]^{1/(s+1)}}\right\}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right).$$

Теорема 4.6 доказана.

Замечание 4.2. *Порядок оценки* (4.25) *есть* $O\left((\delta+\eta)^{s/(s+1)}\right)$, *и, как следует из* [12], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 4.3. *Хотя формулировка теоремы* 4.6 *даётся с указанием степени истокопредставимости s и истокопредставляющего элемента z, на практике их значение не потребуются, так как они не содержатся в правиле останова по малости невязки* (4.16).

4.2.2 Случай несамосопряжённой задачи

В случае несамосопряжённой задачи итерационный метод (4.3) примет вид (4.9). Нетрудно показать, что метод (4.9) с правилом останова (4.16) сходится, и получить оценку для момента останова и оценку погрешности метода (4.9). Справедливы

Лемма 4.5. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\left\|A_\eta - A\right\| \le \eta$, $\left\|A_\eta\right\|^2 \le M$ *и выполнено условие* (4.5) *с* $s_0 > 1/2$. *Тогда* $n^{1/2}\left\|A_\eta K_{n\eta}v\right\| \to 0$ *при* $n\to\infty, \eta\to 0$, $\forall v\in\overline{R(A^*)}$, *где* $K_{n\eta} = E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)$. *Если* $s_0 > 1$, *то* $n\left\|A_\eta^* A_\eta K_{n\eta}v\right\| \to 0$ *при* $n\to\infty, \eta\to 0, \forall v\in\overline{R(A^*)}$.

Доказательство

Ограничимся доказательством случая $n^{1/(2k)}\left\|A_\eta K_{n\eta}v\right\| \to 0$, $n\to\infty, \eta\to 0$. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза. По условию (4.5) нормы операторов ограничены в совокупности [12, с. 109]

$$n^{1/2}\left\|A_\eta K_{n\eta}\right\| = n^{1/2}\left\|\left(A_\eta^* A_\eta\right)^{1/2} K_{n\eta}\right\| \le \gamma_{1/2}, \quad (n>0, \quad \eta>0).$$

Для элементов вида $v = A^* z$, образующих в $N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}$ плотное подмножество, в силу (4.5) имеем

$$n^{1/2}\|A_\eta K_{n\eta}v\| = n^{1/2}\|A_\eta K_{n\eta}A^* z\| \le n^{1/2}\|A_\eta K_{n\eta}\left(A^* - A_\eta^*\right)z\| + n^{1/2}\|A_\eta K_{n\eta}A_\eta^* z\| \le$$
$$\le \left(\gamma_{1/2}\eta + n^{1/2}\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda|1-\lambda g_n(\lambda)|\right)\|z\| \le$$
$$\le \left(\gamma_{1/2}\eta + n^{1/2}\gamma_1 n^{-1}\right)\|z\| = \left(\gamma_{1/2}\eta + \gamma_1 n^{-1/2}\right)\|z\| \to 0,$$

при $n\to\infty, \eta\to 0$. Мы учли, что $A_\eta K_{n\eta}A_\eta^* = A_\eta A_\eta^*\left(E - A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)\right)$ (см. лемму 3.1 [12, с. 34]). По теореме Банаха – Штейнгауза $n^{1/(2k)}\|A_\eta K_{n\eta}v\| \to 0$, $n\to\infty, \eta\to 0$. Лемма 4.5 доказана.

Лемма 4.6. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \le \eta, \|A_\eta\|^2 \le M$ *и выполнены условия* (4.5), (4.7). *Если для некоторого* $v_0 \in \overline{R(A^*)}$, $n_p \le \bar{n} = const$ *и* $\eta_p \to 0$ *имеем* $A_{\eta_p}K_{n_p\eta_p}v_0 \to 0$ *или* $A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}K_{n_p\eta_p}v_0 \to 0$ *при* $p\to\infty$, *то* $K_{n_p\eta_p}v_0 \to 0$.

Доказательство

Ограничимся доказательством случая $A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}K_{n_p\eta_p}v_0 \to 0$. В силу (4.6) последовательность $v_p = K_{n_p\eta_p}v_0$ ограничена, т. е. $\|v_p\| = \|K_{n_p\eta_p}v_0\| \le \le \gamma_0\|v_0\|$, $p \in N = \{1, 2, \ldots\}$. Поэтому из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $v_p \dashrightarrow v$, $(p \in N' \subseteq N)$. Тогда $A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}v_p \dashrightarrow A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}v$, $(p \in N')$. По условию $w_p = A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}v_p \to 0$, значит, $A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}v = 0$. Так как нуль не является собственным значением оператора A_{η_p}, то $v = 0$. Теперь

$$\|v_p\|^2 = \left(v_p,\ K_{n_p\eta_p}v_0\right) = \left(v_p, \left(E - A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}g_{n_p}\left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}\right)\right)v_0\right) =$$
$$= \left(v_p, v_0\right) - \left(v_p, A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}g_{n_p}\left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}\right)v_0\right) =$$
$$= \left(v_p, v_0\right) - \left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}v_p, g_{n_p}\left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}\right)v_0\right) =$$
$$= \left(v_p, v_0\right) - \left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}K_{n_p\eta_p}v_0,\ g_{n_p}\left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}\right)v_0\right) \to 0,$$

так как $w_p = A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}K_{n_p\eta_p}v_0 \to 0$, $\left\|g_{n_p}\left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}\right)\right\| \le \gamma n_p \le \gamma\bar{n}$.

Итак, любая слабо сходящаяся подпоследовательность ограниченной последовательности v_p стремится к нулю по норме. Отсюда следует, что и вся последовательность $v_p \to 0,\ p \to \infty$ по норме. Лемма 4.6 доказана.

Справедлива

Теорема 4.7. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\|^2 \le M$, $(0 < \eta \le \eta_0)$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, *и выполнены условия* (4.5), (4.6) *с* $s_0 > 1/2$, $\gamma_0 = 1$. *Пусть параметр* $m(\delta,\eta)$ *выбран по правилу* (4.16). *Тогда* $(\delta+\eta)^2 m(\delta,\eta) \to 0$, $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

Доказательство

Из (4.9) имеем $x_{n(\delta,\eta)} = g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* y_\delta$. Тогда

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* = g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^* y_\delta - x^* = -K_{n\eta}x^* + K_{n\eta}x^* + g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^* y_\delta - x^* =$$

$$= -K_{n\eta}x^* + \left(E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)\right)x^* - x^* + g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^* y_\delta =$$

$$= -K_{n\eta}x^* + x^* - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)x^* - x^* + g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^* y_\delta =$$

$$= -K_{n\eta}x^* + g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right).$$

Следовательно,

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* = -K_{n\eta}x^* + g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right). \qquad (4.26)$$

Отсюда

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - A_\eta x^* = -A_\eta K_{n\eta}x^* + A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^* y_\delta - A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^* A_\eta x;$$

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} = A_\eta x^* - A_\eta K_{n\eta}x^* + A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^* y_\delta - A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^* A_\eta x^*.$$

Следовательно,

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta = A_\eta x^* - y_\delta - A_\eta K_{n\eta}x^* + A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^* y_\delta -$$

$$- A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^* A_\eta x^* = -A_\eta K_{n\eta}x^* + \left[E - A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)\right]A_\eta x^* -$$

$$- \left[E - A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)\right]y_\delta = -A_\eta K_{n\eta}x^* + \tilde{K}_{n\eta}A_\eta x^* - \tilde{K}_{n\eta}y_\delta =$$

$$= -A_\eta K_{n\eta}x^* - \tilde{K}_{n\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right),$$

где $K_{n\eta}=E-A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)$, $\tilde{K}_{n\eta}=E-A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)$, (см. лемму 3.1 [12, с. 34]). Итак,

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)}-y_\delta=-A_\eta K_{n\eta}x^*-\tilde{K}_{n\eta}\left(y_\delta-A_\eta x^*\right). \tag{4.27}$$

Аналогично доказательству теоремы 4.3 можно показать, что

$$\left\|K_{n\eta}x^*\right\|\to 0,\, n\to\infty,\, \eta\to 0\,. \tag{4.28}$$

Докажем, что

$$\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le\gamma^* n^{1/2}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right), \tag{4.29}$$

где $\gamma^*=\sup\limits_{n>0}\left(n^{-1/2}\sup\limits_{0\le\lambda\le M}\lambda^{1/2}\left|g_n(\lambda)\right|\right)<\infty$. Действительно, $\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\right\|\le$ $\le\sup\limits_{0\le\lambda\le M}\left|\lambda^{1/2}g_n(\lambda)\right|=\gamma^* n^{1/2}$, где $\gamma^*\le\left(\dfrac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2}$ (см. подраздел 2.1.3). Отсюда $\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le\gamma^* n^{1/2}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)$, так как

$$\left\|y_\delta-A_\eta x^*\right\|\le\left\|y_\delta-y\right\|+\left\|y-A_\eta x^*\right\|=\left\|y_\delta-y\right\|+\left\|Ax^*-A_\eta x^*\right\|\le$$
$$\le\delta+\left\|\left(A-A_\eta\right)x^*\right\|\le\delta+\left\|x^*\right\|\eta.$$

В силу леммы 4.5

$$\sigma_{n\eta}=n^{1/2}\left\|A_\eta K_{n\eta}x^*\right\|\to 0,\, n\to\infty,\, \eta\to 0. \tag{4.30}$$

Из (4.16) и (4.27) получим при $n=m(\delta,\eta)$

$$\left\|A_\eta K_{m\eta}x^*\right\|\le\left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)}-y_\delta\right\|+\left\|\tilde{K}_{m\eta}\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le$$
$$\le b\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)+\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)=(b+1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right). \tag{4.31}$$

При $n<m(\delta,\eta)$ из (4.16) $\left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)}-y_\delta\right\|>b\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)$, поэтому

$$\left\|A_\eta K_{n\eta}x^*\right\| \ge \left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| - \left\|\tilde{K}_{n\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right). \qquad (4.32)$$

Из (4.30) и (4.32) получим при $n = m-1$ $(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le$ $\le \left\|A_\eta K_{m-1,\eta}x^*\right\| = \dfrac{\sigma_{m-1,\eta}}{(m-1)^{1/2}}$. Отсюда $(m-1)^{1/2}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le \dfrac{\sigma_{m-1,\eta}}{b-1} \to 0,\ \ \delta \to 0,$ $\eta \to 0$. Если при этом $m(\delta,\eta) \to 0$ при $\delta \to 0, \eta \to 0,$ то в силу (4.26), (4.28), (4.29) $\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|K_{m\eta}x^*\right\| + \left\|g_m\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \left\|K_{m\eta}x^*\right\| +$ $+ \gamma^* m^{1/2}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \to 0$, т. е. $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$.

Если же для некоторых δ_n и η_n последовательность $m(\delta_n, \eta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n,\eta_n)} \to x^*$, $\delta_n \to 0,\ \eta_n \to 0.$

Действительно, из (4.31) $\left\|A_\eta K_{n\eta}x^*\right\| \le (b+1)\left(\delta_n + \left\|x^*\right\|\eta_n\right) \to 0,$ $\delta_n \to 0,\ \ \eta_n \to 0.$ Тогда по лемме 4.6 будет $\left\|K_{n\eta}x^*\right\| \to 0, \delta_n \to 0, \eta_n \to 0.$ Отсюда

$$\left\|x_{m(\delta_n,\eta_n)} - x^*\right\| \le \left\|K_{n\eta}x^*\right\| + \gamma^* m^{1/2}(\delta_n,\eta_n)\left(\delta_n + \left\|x^*\right\|\eta_n\right) \to 0,$$
$$\delta_n \to 0, \eta_n \to 0.$$

Теорема 4.7 доказана.

Теорема 4.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.7. *Если* $x^* = |A|^s z,\ \ s > 0,\ \ \|z\| \le \rho,\ \ |A| = \left(A^* A\right)^{1/2}$, *то справедливы оценки*

$$m \le 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{2/(s+1)};$$

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le c_s\left(1 + |\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)} + \left[c_s\gamma_{1/2}\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)} +$$
$$+ \left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2}\left\{1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{2/(s+1)}\right\}^{1/2}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right). \qquad (4.33)$$

Доказательство

Пусть $x^* = |A|^s z,\ s>0,\ \|z\| \le \rho$. В силу (4.5) и леммы 1.2 [12, с. 93]

$$\left\|A_\eta K_{m-1,\eta} x^*\right\| = \left\|A_\eta K_{m-1,\eta} |A|^s z\right\| \le \left\|A_\eta K_{m-1,\eta}\left(|A|^s - |A_\eta|^s\right) z\right\| + \\ + \left\|A_\eta K_{m-1,\eta} |A_\eta|^s z\right\| \le \left(\xi_{m-1,s}\eta + \gamma_{(s+1)/2}(m-1)^{-(s+1)/2}\right)\rho, \qquad (4.34)$$

где

$\xi_{m-1,s} = c_s \sup\limits_{0\le\lambda\le M} \lambda^{1/2}\left(1-\lambda g_{m-1}(\lambda)\right) \le c_s\left[2k(m-1)\alpha e\right]^{-1/2} = c_s\gamma_{1/2}(m-1)^{-1/2}$, $\xi_{m-1,s} \to 0,\ m\to\infty.$ Сопоставляя это с (4.32), получим $(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le \left(\xi_{m-1,s}\eta + \gamma_{(s+1)/2}(m-1)^{-(s+1)/2}\right)\rho$, отсюда имеем $\gamma_{(s+1)/2}(m-1)^{-(s+1)/2}\rho \ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - \xi_{m-1,s}\rho\eta.$ Тогда $(m-1)^{(s+1)/2} \le \dfrac{\gamma_{(s+1)/2}\,\rho}{(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right) - \xi_{m-1,s}\eta\rho}$, и, следовательно,

$$m \le 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\xi_{m-1,s}\rho\eta}\right]^{2/(s+1)}.$$

Поскольку $\xi_{m-1,s} = c_s\gamma_{1/2}(m-1)^{-1/2} \le c_s\gamma_{1/2}$ (так как при $m>1$ $\left(\dfrac{1}{m-1}\right)^{1/2} \le 1$), то $(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right) - \xi_{m-1,s}\eta\rho \ge (b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_{1/2}\eta\rho$,

и, следовательно, $m \le 1 + \dfrac{s+1}{2k\alpha e}\left[\dfrac{\rho}{(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{2/(s+1)}$. Величина $m^{(s+1)/2}\left\|A_\eta K_{m\eta}|A_\eta|^s z\right\| \to 0$ при $m\to\infty$, $\eta\to 0$. Из (4.27) и (4.29) имеем $\left\|K_{m\eta}x^*\right\| = \left\|K_{m\eta}|A|^s z\right\| \le \left\|K_{m\eta}\left(|A|^s - |A_\eta|^s\right)z\right\| + \left\|K_{m\eta}|A_\eta|^s z\right\|$. По лем-ме 1.2 (см. [12, с. 93]) $\left\|K_{m\eta}\left(|A|^s - |A_\eta|^s\right)z\right\| \le c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\|z\|$, где $c_s = \mathrm{const}$, ($c_s \le 2$ при $0 < s \le 1$), что даёт вклад $O\left((\delta+\eta)^{s/(s+1)}\right)$ в оценку

$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\|$ [12, с. 111]. Член $\left\|K_{m\eta}\left|A_\eta\right|^s z\right\|$ оценим при помощи неравенства моментов, леммы 1.2 [12, с. 93] и неравенства (4.31):

$$\left\|K_{m\eta}\left|A_\eta\right|^s z\right\| = \left\|\left|A_\eta\right|^s K_{m\eta} z\right\| \le \left\|\left|A_\eta\right|^{s+1} K_{m\eta} z\right\|^{s/(s+1)} \left\|K_{m\eta} z\right\|^{1/(s+1)} \le$$

$$\le \left\|A_\eta K_{m\eta}\left|A_\eta\right|^s z\right\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \le \left[\left\|A_\eta K_{m\eta}\left(\left|A_\eta\right|^s - |A|^s\right)z\right\| + \left\|A_\eta K_{m\eta} x^*\right\|\right]^{s/(s+1)} \times$$

$$\times \rho^{1/(s+1)} \le \left[\xi_{ms}\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)}.$$

В итоге получим оценку

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|K_{m\eta} x^*\right\| + \left\|g_m\left(A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le c_s\left(1 + |\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)} +$$

$$+ \left[\xi_{ms}\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} + \gamma^* m^{1/2}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le c_s\left(1 + |\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)} +$$

$$+ \left[c_s\gamma_{1/2}\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} + \left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left\{1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{2/(s+1)}\right\}^{1/2} \left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right).$$

Теорема 4.8 доказана.

Замечание 4.4. *Порядок оценки* (4.33) *есть* $O\left((\delta + \eta)^{s/(s+1)}\right)$, *и, как следует из* [12], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 4.5. *Знание порядка* $s > 0$ *и истокопредставляющего элемента* z, *используемое в теореме* 4.8, *на практике не потребуется. При останове по невязке автоматически делается нужное число итераций для получения оптимального по порядку решения.*

ГЛАВА 5

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРИБЛИЖЁННО ЗАДАННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В данной главе для неявного итерационного метода решения операторных уравнений первого рода исследуется априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации в исходной норме гильбертова пространства в случае самосопряженного и несамосопряженного операторов, в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Сформулированы и доказаны теоремы о достаточных условиях сходимости метода, получены оценки погрешности, даются рекомендации на выбор в методе параметра регуляризации.

5.1 Априорный выбор числа итераций в неявном методе решения линейных уравнений с приближенным оператором

5.1.1 Постановка задачи

Пусть H и F – гильбертовы пространства и $A \in \mathcal{L}(H,F)$, т. е. A – линейный непрерывный оператор, действующий из H в F. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением. Решается уравнение

$$Ax = y. \tag{5.1}$$

Задача отыскания элемента $x \in H$ по элементу $y \in F$ является некорректной, так как сколь угодно малые возмущения в правой части y могут вызывать сколь угодно большие возмущения решения.

Предположим, что точное решение $x^* \in H$ уравнения (5.1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью итерационного процесса

$$\left(E + \alpha A^k\right)x_{n+1} = \left(E - \alpha A^k\right)x_n + 2\alpha A^{k-1}y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N \tag{5.2}$$

(E – тождественный оператор).

Считаем, что оператор A и правая часть y уравнения (5.1) заданы приближённо, т. е. вместо y известно приближение y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, а вместо оператора A известен оператор A_η, $\|A - A_\eta\| \le \eta$. Предполагаем, что $0 \in Sp(A_\eta)$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$. Тогда метод (5.2) примет вид

$$\left(E + \alpha A_\eta^k\right)x_{n+1} = \left(E - \alpha A_\eta^k\right)x_n + 2\alpha A_\eta^{k-1}y_\delta, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \tag{5.3}$$

Случай приближенной правой части уравнения и точного оператора для рассматриваемого метода изучен в разделе 3.1. Там исследован априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации, изучен случай неединственного решения задачи, доказана сходимость метода в энергетической норме.

Докажем сходимость метода (5.3) в случае априорного выбора параметра регуляризации при решении уравнения $A_\eta x = y_\delta$ с приближенным оператором A_η и приближённой правой частью y_δ, получим априорные оценки погрешности. Подобные вопросы изучались в [12], но только для других методов.

5.1.2 Случай самосопряжённых неотрицательных операторов

Пусть $H = F,\ \ A = A^* \geq 0,\ \ A_\eta = A_\eta^* \geq 0,\ \ Sp(A_\eta) \subseteq [0, M],\ \ 0 < \eta \leq \eta_0$. Итерационный метод (4.3) запишем в виде:

$$x_n = g_n(A_\eta) y_\delta, \tag{5.3^1}$$

где $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \left(\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n\right]$. В разделе 3.1 при $\alpha > 0$ получены условия для функций $g_n(\lambda)$:

$$\sup_{0\leq\lambda\leq M} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n^{1/k},\ \gamma = 2k\alpha^{1/k},\ (n > 0), \tag{5.4}$$

$$\sup_{0\leq\lambda\leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_s n^{-s/k},\ (n > 0),\ 0 < s \leq s_0 < \infty,\ \gamma_s = \left(\frac{s}{k\alpha e}\right)^{s/k}, \tag{5.5}$$

(здесь s – степень истокопредставимости точного решения $x^* = A^s z$, $s > 0,\ \|z\| \leq \rho$);

$$\sup_{0\leq\lambda\leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_0,\ \gamma_0 = 1,\ (n > 0), \tag{5.6}$$

$$\sup_{0\leq\lambda\leq M} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \to 0,\ n \to \infty. \tag{5.7}$$

Справедлива

Лемма 5.1. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$ *и выполнены условия* (5.6), (5.7). *Тогда* $\|G_{n\eta} v\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\eta \to 0$ $\forall v \in H$, *где* $G_{n\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 4.1 из пункта 4.1.2. Условие сходимости для метода (5.3) дает

Теорема 5.1. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ *и выполнены условия* (5.4), (5.6), (5.7). *Выберем параметр* $n = n(\delta, \eta)$ *в приближении* (5.3) *так, чтобы* $(\delta + \eta) n^{1/k}(\delta, \eta) \to 0$ *при* $n(\delta, \eta) \to \infty$, $\delta \to 0$, $\eta \to 0$. *Тогда* $x_{n(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0, \eta \to 0$.

Доказательство

Из (5.3^1) имеем $x_n = g_n(A_\eta) y_\delta$. Тогда

$$x_n - x^* = g_n(A_\eta) y_\delta - x^* = -G_{n\eta} x^* + G_{n\eta} x^* + g_n(A_\eta) y_\delta - x^* =$$

$$= -G_{n\eta} x^* + (E - A_\eta g_n(A_\eta)) x^* + g_n(A_\eta) y_\delta - x^* = -G_{n\eta} x^* + g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*).$$

Следовательно, $x_n - x^* = -G_{n\eta} x^* + g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)$.

Так как по условию (5.4) $\|g_n(A_\eta)\| \leq \sup\limits_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n^{1/k}$, то

$$\|y_\delta - A_\eta x^*\| \leq \|y_\delta - y\| + \|y - A_\eta x^*\| = \|y_\delta - y\| + \|A x^* - A_\eta x^*\| \leq$$
$$\leq \delta + \|A - A_\eta\| \|x^*\| \leq \delta + \eta \|x^*\|.$$

Следовательно,

$$\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\| \leq \|G_{n\eta} x^*\| + \left\|g_n(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \leq \|G_{n\eta} x^*\| + \gamma n^{1/k}\left(\delta + \eta \|x^*\|\right).$$

Из леммы 5.1 следует, что $\|G_{n\eta} x^*\| \to 0$ при $n \to \infty$, $\eta \to 0$, а по условию теоремы 5.1 $n^{1/k}(\delta + \eta) \to 0$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$. Таким образом, $\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\| \to 0$, $\delta \to 0, \eta \to 0$. Теорема 5.1 доказана.

Теорема 5.2. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y_\delta - y\| \leq \delta$ *и выполнены условия* (5.4), (5.5). *Если точное решение истокопредставимо, т. е.* $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$, *то справедлива оценка погрешности*

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \gamma_s n^{-s/k} \rho + \gamma n^{1/k} \left(\delta + \eta \left\|x^*\right\|\right),\ 0 < s < \infty.$$

Доказательство

Имеем, используя истокообразную представимость точного решения,

$$\left\|G_{n\eta} x^*\right\| = \left\|G_{n\eta} A^s z\right\| \leq \left\|G_{n\eta}\left(A^s - A_\eta^s\right) z\right\| + \left\|G_{n\eta} A_\eta^s z\right\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \gamma_s n^{-s/k} \rho,$$

так как по лемме 1.1 [12, с. 91] $\left\|A_\eta^s - A^s\right\| \leq c_s \eta^{\min(1,s)}$, $c_s = \mathrm{const}$, ($c_s \leq 2$ для $0 < s \leq 1$). Тогда

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \gamma_s n^{-s/k} \rho + \gamma n^{1/k} \left(\delta + \eta \left\|x^*\right\|\right), 0 < s < \infty. \qquad (5.8)$$

Теорема 5.2 доказана.

Если минимизировать правую часть оценки (5.8) по n, то получим значение априорного момента останова:

$$n_{\text{опт}} = \left[\frac{s\gamma_s \rho}{\gamma\left(\delta + \left\|x^*\right\| \eta\right)}\right]^{k/(s+1)} = d_s \rho^{k/(s+1)} \left[\delta + \eta \left\|x^*\right\|\right]^{-k/(s+1)},$$

где $d_s = \left(\dfrac{s\gamma_s}{\gamma}\right)^{k/(s+1)}$. Отсюда

$$n_{\text{опт}} = 2^{-k/(s+1)} \left(\frac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)} e^{-s/(s+1)} \alpha^{-1} \rho^{k/(s+1)} \left(\delta + \left\|x^*\right\| \eta\right)^{-k/(s+1)}.$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в (5.8), получим

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|_{\text{опт}}\le\gamma_0c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+\gamma_s\,\rho\left[d_s\,\rho^{k/(s+1)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{-k/(s+1)}\right]^{-s/k}+$$

$$+\gamma\left[d_s\,\rho^{k/(s+1)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{-k/(s+1)}\right]^{1/k}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)=\gamma_0c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+$$

$$+\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}\left[\gamma_s\,d_s^{-s/k}+\gamma\,d_s^{1/k}\right]=$$

$$=\gamma_0c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+c_s'\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)},$$

где $c_s'=\gamma_s\,d_s^{-s/k}+\gamma\,d_s^{1/k}=\left(s^{1/(s+1)}+s^{-s/(s+1)}\right)\gamma^{s/(s+1)}\,\gamma_s^{1/(s+1)}=$ $=2^{s/(s+1)}\left(\dfrac{s}{k}\right)^{s(1-k)/(k(s+1))}(s+1)e^{-s/(k(s+1))}$. Отсюда $\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|_{\text{опт}}\le$ $\le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+2^{s/(s+1)}\left(\dfrac{s}{k}\right)^{s(1-k)/(k(s+1))}(s+1)e^{-s/(k(s+1))}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}$.

Замечание 5.1. *Оптимальная оценка погрешности не зависит от* α, *но* $n_{опт}$ *от* α *зависит. Так как на* α *нет ограничений сверху* ($\alpha>0$), *то можно* α *выбрать так, чтобы* $n_{опт}=1$. *Для этого достаточно взять* $\alpha_{опт}=2^{-k/(s+1)}\left(\dfrac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)}e^{-s/(s+1)}\rho^{k/(s+1)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{-k/(s+1)}$.

5.1.3 Случай несамосопряжённых операторов

В случае несамосопряжённой задачи итерационный метод (5.3) примет вид

$$\begin{gathered}\left(E+\alpha\left(A_\eta^*A_\eta\right)^k\right)x_{n+1}=\left(E-\alpha\left(A_\eta^*A_\eta\right)^k\right)x_n+\\+2\alpha\left(A_\eta^*A_\eta\right)^{k-1}A_\eta^*y_\delta,\quad x_0=0,\quad k\in N.\end{gathered}\tag{5.9}$$

Его можно записать так:

$$x_n=g_n(A_\eta^*A_\eta)A_\eta^*y_\delta.\tag{5.10}$$

Из леммы 5.1 следует

Лемма 5.2. *Пусть* A, $A_\eta\in\mathfrak{L}(H,F)$, $\left\|A_\eta-A\right\|\le\eta$, $\left\|A_\eta\right\|^2\le M$, $\alpha>0$ *и выполнены условия* (5.6), (5.7). *Тогда*

$$\left\|K_{n\eta}v\right\| \to 0 \ \ при \ \ n\to\infty, \quad \eta\to 0, \ \forall v\in N(A)^{\perp}=\overline{R(A^{*})}, \tag{5.11}$$

$$\left\|\tilde{K}_{n\eta}z\right\| \to 0 \ \ при \ \ n\to\infty, \quad \eta\to 0, \ \forall z\in N\left(A^{*}\right)^{\perp}=\overline{R(A)}, \tag{5.12}$$

где $K_{n\eta}=E-A_\eta^*A_\eta g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)$, $\tilde{K}_{n\eta}=E-A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)$.

Используем лемму 5.2 для доказательства следующей теоремы.

Теорема 5.3. *Пусть* $A,\ A_\eta \in \mathfrak{L}(H,F)$, $\left\|A-A_\eta\right\|\le\eta$, $\left\|A_\eta\right\|^2\le M$, $(0<\eta\le\eta_0)$, $\alpha>0$, $y\in R(A)$, $\left\|y_\delta-y\right\|\le\delta$ *и выполнены условия* (5.4), (5.6), (5.7). *Выберем параметр* $n=n(\delta,\eta)$ *так, чтобы*

$$n^{1/k}(\delta+\eta)^2\to 0 \ \ при \ \ n(\delta,\eta)\to\infty, \delta\to 0, \ \eta\to 0. \tag{5.13}$$

Тогда $x_{n(\delta,\eta)}\to x^*$ *при* $\delta\to 0,\ \eta\to 0$.

Доказательство

Для погрешности приближения $x_{n(\delta,\eta)}$ имеем

$$x_{n(\delta,\eta)}-x^*=-K_{n\eta}x^*+g_n(A_\eta^*A_\eta)A_\eta^*\left(y_\delta-A_\eta x^*\right). \tag{5.14}$$

Здесь $\left\|g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)A_\eta^*\right\|=\left\|g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)\left(A_\eta^*A_\eta\right)^{1/2}\right\|\le\gamma_* n^{1/(2k)}$, где $\gamma_*=\sup\limits_{n>0}\left(n^{-1/2}\sup\limits_{0\le\lambda\le M}\lambda^{1/2}\left|g_n(\lambda)\right|\right)\le 2k^{1/2}\alpha^{1/(2k)}$ (см. подраздел 3.1.3). Так как $\left\|y_\delta-A_\eta x^*\right\|\le\left\|y_\delta-y\right\|+\left\|y-A_\eta x^*\right\|=\left\|y_\delta-y\right\|+\left\|Ax^*-A_\eta x^*\right\|\le\delta+\eta\left\|x^*\right\|$, то $\left\|g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le 2k^{1/2}\alpha^{1/(2k)}n^{1/(2k)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|&\le\left\|K_{n\eta}x^*\right\|+\left\|g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le\\&\le\left\|K_{n\eta}(x^*)\right\|+2k^{1/2}\alpha^{1/(2k)}n^{1/(2k)}\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right).\end{aligned}$$

Покажем, что $\left\|K_{n\eta}x^*\right\|\to 0$ при $n\to\infty,\quad \eta\to 0$. Действительно,

$$\left\|K_{n\eta}x^*\right\| = \left\|(E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta))x^*\right\| = \left\|\int_0^{\|A_\eta^* A_\eta\|}(1-\lambda g_n(\lambda))\,dE_\lambda x^*\right\| =$$

$$= \left\|\int_0^{\|A_\eta^* A_\eta\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda x^*\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda x^*\right\| + \left\|\int_\varepsilon^{\|A_\eta^* A_\eta\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda x^*\right\|.$$

Тогда $\left\|\int_\varepsilon^{\|A_\eta^* A_\eta\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda x^*\right\| \le q^n(\varepsilon)\left\|\int_\varepsilon^{\|A_\eta^* A_\eta\|} dE_\lambda x^*\right\| \to 0,\ n\to\infty,$ так как для $\lambda \in \left[\varepsilon, \left\|A_\eta^* A_\eta\right\|\right]$ $\left|\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right| \le q(\varepsilon) < 1.$ $\left\|\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda x^*\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon} dE_\lambda x^*\right\| =$ $= \left\|E_\varepsilon x^*\right\| \to 0, \varepsilon \to 0$ в силу свойств спектральной функции.

Из условия (5.13) $n^{1/k}(\delta+\eta)^2 \to 0$ при $n\to\infty,\quad \delta\to 0,\quad \eta\to 0$. Отсюда $2k^{1/2}\alpha^{1/(2k)}n^{1/(2k)}\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right)\to 0,\ n\to\infty,\quad \delta\to 0,\quad \eta\to 0$. Таким образом, $\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \to 0,\ n\to\infty,\quad \delta\to 0,\quad \eta\to 0$. Теорема 5.3 доказана.

Справедлива

Теорема 5.4. *Пусть* $A,\ A_\eta \in \mathfrak{L}(H,F),\quad \left\|A - A_\eta\right\| \le \eta,\quad \left\|A_\eta\right\|^2 \le M$, $(0<\eta\le\eta_0)$, $\alpha>0$, $y\in R(A)$, $\left\|y_\delta - y\right\| \le \delta$. *Если точное решение представимо в виде* $x^* = |A|^s z$, $s>0$, $\|z\|\le\rho$, $|A| = \left(A^*A\right)^{1/2}$ *и выполнены условия* (5.4), (5.5), *то справедлива оценка погрешности*

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \gamma_0 c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_{s/2}n^{-s/(2k)}\rho + \gamma_* n^{1/(2k)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right),$$
$$0<s<\infty.$$

Доказательство

В случае истокообразно представимого точного решения $x^* = |A|^s z = \left(A^*A\right)^{s/2} z$ из (5.5) получим $\sup\limits_{0\le\lambda\le M} \lambda^{s/2}\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right| \le \gamma_{s/2}n^{-s/(2k)}$, где $\gamma_{s/2} = \left(\frac{s}{2k\alpha e}\right)^{s/(2k)}$. Тогда

$$\left\|K_{n\eta}|A_\eta|^s z\right\| = \left\||A_\eta|^s\left[E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)\right]z\right\| =$$

$$= \left\|\left(A_\eta^* A_\eta\right)^{s/2}\left[E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)\right]z\right\| \le \gamma_{s/2} n^{-s/(2k)}\rho.$$

Отсюда

$$\left\|K_{n\eta}x^*\right\| = \left\|K_{n\eta}|A|^s z\right\| = \left\|K_{n\eta}\left(|A_\eta|^s - |A|^s\right)z\right\| + \left\|K_{n\eta}|A_\eta|^s z\right\| \le$$

$$\le \gamma_0 c_s\left(1 + |\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_{s/2} n^{-s/(2k)}\rho,$$

так как из [12, с. 93] имеем $\left||A_\eta|^s - |A|^s\right| \le c_s\left(1 + |\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}$, $c_s = \mathrm{const}$, ($c_s \le 2$ для $0 < s \le 1$). Из (5.14)

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|K_{n\eta}x^*\right\| + \gamma_* n^{1/(2k)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) =$$

$$= \left\|K_{n\eta}x^*\right\| + 2k^{1/2}\alpha^{1/(2k)} n^{1/(2k)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le$$

$$\le \gamma_0 c_s\left(1 + |\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_{s/2} n^{-s/(2k)}\rho +$$

$$+ 2k^{1/2}\alpha^{1/(2k)} n^{1/(2k)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right),\ 0 < s < \infty. \tag{5.15}$$

Теорема 5.4 доказана.

Минимизируя правую часть (5.15) по n, получим значение априорного момента останова:

$$n_{\text{опт}} = \left(\frac{s\gamma_{s/2}}{\gamma_*}\right)^{2k/(s+1)} \rho^{2k/(s+1)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{-2k/(s+1)} =$$

$$= \left(\frac{s}{2}\right)^{(2k+s)/(s+1)} k^{-(s+k)/(s+1)} e^{-s/(s+1)}\, \alpha^{-1}\rho^{2k/(s+1)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{-2k/(s+1)}.$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (5.15), получим оптимальную оценку погрешности для метода итераций (5.9)

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\|_{\text{опт}} \le \gamma_0\, c_s\left(1 + |\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho + c_s''\,\rho^{1/(s+1)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)},\ \ 0 < s < \infty,$$

где $c_s'' = \left(s^{1/(s+1)} + s^{-s/(s+1)}\right)\gamma_*^{s/(s+1)}\gamma_{s/2}^{1/(s+1)} = \left(\dfrac{s}{2}\right)^{s(1-2k)/(2k(s+1))} \times$ $\times k^{s(k-1)/(2k(s+1))}(s+1)e^{-s/(2k(s+1))}$. Таким образом,

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\|_{\text{опт}} \le c_s\left(1 + |\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho + \left(\frac{s}{2}\right)^{s(1-2k)/(2k(s+1))} \times$$
$$\times k^{s(k-1)/(2k(s+1))}(s+1)e^{-s/(2k(s+1))}\rho^{1/(s+1)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)},\ \ 0 < s < \infty.$$

5.2 Апостериорный выбор числа итераций в неявном методе решения линейных уравнений с приближенным оператором

5.2.1 Случай самосопряженной задачи

Рассматривается уравнение $Ax = y$ из подраздела 5.1.1. Для его решения используется итерационный метод (5.3).

Докажем сходимость метода (5.3) в случае апостериорного выбора параметра регуляризации для решения уравнения $A_\eta x = y_\delta$, где оператор A_η и правая часть уравнения заданы приближённо: $\left\|A_\eta - A\right\| \le \eta$, $\left\|y - y_\delta\right\| \le \delta$. Подобные вопросы изучались в [12], но только для других методов. Считаем, что нуль не является собственным значением операто-ра A_η, но принадлежит его спектру. Предположим, что уравнение $A_\eta x = y_\delta$ имеет единственное решение.

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова итерационного процесса (5.3) условием

$$\left.\begin{aligned}&\left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| > \varepsilon,\ (n < m),\\ &\left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| \le \varepsilon,\end{aligned}\right\}\ \varepsilon = b(\delta + \left\|x^*\right\|\eta),\ b > 1. \tag{5.16}$$

Предположим, что при начальном приближении $x_{0(\delta,\eta)}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\left\|A_\eta x_{0(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (5.16) к методу (5.3).

Пусть $H = F$, $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\sigma(A_\eta) \subseteq [0, M]$. Справедлива

Лемма 5.3. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta\| \leq M$, $\alpha > 0$ *и выполнено условие* (4.5) с $s_0 > 1$. *Тогда для* $G_{n\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$ *справедливо соотношение для* $\forall \upsilon \in \overline{R(A)}$:

$$n^{1/k}\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\| \to 0 \text{ при } n \to \infty,\ \eta \to 0. \tag{5.17}$$

Доказательство

Воспользуемся также теоремой Банаха - Штейнгауза. Здесь $\|B_n\| = n^{1/k}\|A_\eta G_{n\eta}\|$ и по условию (5.5) нормы $\|B_n\|$ ограничены в совокупности

$$n^{1/k}\|A_\eta G_{n\eta}\| = n^{1/k}\left\|A_\eta\left(E - A_\eta g_n(A_\eta)\right)\right\| \leq$$
$$\leq n^{1/k} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda|1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq n^{1/k}\gamma_1 n^{-1/k} = \gamma_1,\ (n > 0,\ \eta > 0).$$

Для элементов вида $\upsilon = A\omega$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, в силу (5.5) имеем

$$n^{1/k}\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\| = n^{1/k}\|A_\eta G_{n\eta}A\omega\| \leq n^{1/k}\|A_\eta G_{n\eta}(A - A_\eta)\omega\| +$$
$$+ n^{1/k}\|A_\eta G_{n\eta}A_\eta\omega\| \leq \left(\gamma_1\eta + n^{1/k}\sup_{0 \leq \lambda \leq M}\lambda^2|1 - \lambda g_n(\lambda)|\right)\|\omega\| \leq$$
$$\leq \left(\gamma_1\eta + n^{1/k}\gamma_2 n^{-2/k}\right)\|\omega\| = \left(\gamma_1\eta + \gamma_2 n^{-1/k}\right)\|\omega\| \to 0 \text{ при } n \to \infty, \eta \to 0.$$

По теореме Банаха - Штейнгауза $n^{1/k}\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\| \to 0$ при $n \to \infty, \eta \to 0$. Лемма 5.3 доказана.

Лемма 5.4. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta\| \leq M$, $\alpha > 0$ *и выполнены условия* (5.5) *и* (5.7). *Если для некоторых* $\upsilon_0 \in \overline{R(A)}$, $n_p \leq \bar{n} = const$ *и* $\eta_p \to 0$ *имеем* $A_{\eta_p} G_{n_p \eta_p} \upsilon_0 \to 0$ *при* $p \to \infty$, *то* $G_{n_p \eta_p} \upsilon_0 \to 0.$

Доказательство

В силу неравенства (5.6) последовательность $\upsilon_p = G_{n_p \eta_p} \upsilon_0$ ограничена, т. е. $\|\upsilon_p\| = \left\|G_{n_p \eta_p} \upsilon_0\right\| \leq \gamma_0 \|\upsilon_0\|$, $p \in N = \{1, 2, \ldots\}$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $\upsilon_p \rightharpoonup \upsilon, \left(p \in N' \subseteq N\right)$. Тогда $A_{\eta_p} \upsilon_p \rightharpoonup A_{\eta_p} \upsilon$, $\quad (p \in N')$. По условию $\omega_p = A_{\eta_p} \upsilon_p \to 0$, значит, $A_{\eta_p} \upsilon = 0$. Но так как нуль не является собственным значением оператора A_{η_p}, то $\upsilon = 0$. Теперь

$$\|\upsilon_p\|^2 = \left(\upsilon_p, G_{n_p \eta_p} \upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \left(E - A_{\eta_p} g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\right)\upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \upsilon_0\right) -$$

$$- \left(A_{\eta_p} \upsilon_p, g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \upsilon_0\right) - \left(\omega_p, g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\upsilon_0\right) \to \left(\upsilon, \upsilon_0\right) = \left(0, \upsilon_0\right) = 0, \left(p \in N'\right),$$

так как $\omega_p \to 0$, $\left\|g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\right\| \leq \gamma n_p^{1/k} \leq \gamma \bar{n}^{1/k}$. Итак, любая слабо сходящаяся подпоследовательность ограниченной последовательности υ_p стремится к нулю по норме. Отсюда следует, что и вся последовательность $\upsilon_p \to 0$, $p \to \infty$ по норме. Лемма 5.4 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 5.5. *Пусть* $H = F$, $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta\| \leq M$, $\left(0 < \eta \leq \eta_0\right)$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, $\alpha > 0$ *и выполнены условия* (5.5), (5.6) *с* $s_0 > 1$. *Пусть параметр* $m(\delta, \eta)$ *выбран по правилу* (5.16). *Тогда* $(\delta + \eta) m(\delta, \eta) \to 0$, $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

Доказательство

Имеем $x_{n(\delta,\eta)} = g_n(A_\eta) y_\delta$, тогда

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* = -x^* + g_n(A_\eta)y_\delta = -G_{n\eta}x^* + G_{n\eta}x^* -$$
$$-x^* + g_n(A_\eta)y_\delta = -G_{n\eta}x^* + \left(E - A_\eta g_n\left(A_\eta\right)\right)x^* -$$
$$-x^* + g_n(A_\eta)y_\delta = -G_{n\eta}x^* + x^* - A_\eta g_n\left(A_\eta\right)x^* -$$
$$-x^* + g_n\left(A_\eta\right)y_\delta = -G_{n\eta}x^* + g_n\left(A_\eta\right)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right).$$

Следовательно,

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* = -G_{n\eta}x^* + g_n(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right). \tag{5.18}$$

Отсюда

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - A_\eta x^* = -A_\eta G_{n\eta}x^* + A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta - A_\eta g_n(A_\eta)A_\eta x^*;$$
$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} = A_\eta x^* - A_\eta G_{n\eta}x^* + A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta - A_\eta g_n(A_\eta)A_\eta x^*;$$
$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta = -A_\eta G_{n\eta}x^* - y_\delta + \left(E - A_\eta g_n(A_\eta)\right)A_\eta x^* +$$
$$+ A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta = -A_\eta G_{n\eta}x^* + G_{n\eta}A_\eta x^* - \left(E - A_\eta g_n(A_\eta)\right)y_\delta =$$
$$= -A_\eta G_{n\eta}x^* + G_{n\eta}A_\eta x^* - G_{n\eta}y_\delta = -A_\eta G_{n\eta}x^* - G_{n\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right).$$

Итак,

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta = -A_\eta G_{n\eta}x^* - G_{n\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right). \tag{5.19}$$

Из леммы 5.1 следует, что

$$\left\|G_{n\eta}x^*\right\| \to 0,\ n \to \infty,\ \eta \to 0. \tag{5.20}$$

Покажем, что

$$\left\|g_n(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \gamma n^{1/k}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right). \tag{5.21}$$

По условию (5.4) $\left\|g_n\left(A_\eta\right)\right\| \le \sup\limits_{0\le\lambda\le M}\left|g_n(\lambda)\right| \le \gamma n^{1/k}$, а $\left\|y_\delta - A_\eta x^*\right\| \le$ $\le \left\|y_\delta - y\right\| + \left\|y - A_\eta x^*\right\| = \left\|y_\delta - y\right\| + \left\|Ax^* - A_\eta x^*\right\| \le \delta + \left\|\left(A - A_\eta\right)x^*\right\| \le \delta + \left\|x^*\right\|\eta$, поэтому $\left\|g_n(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \gamma n^{1/k}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)$.

В силу леммы 5.3

$$\sigma_{n\eta} = n^{1/k}\left\|A_\eta G_{n\eta}x^*\right\| \to 0,\ n\to\infty,\ \eta\to 0. \tag{5.22}$$

Применим правило останова (5.16), тогда $\left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| \le b\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right),\ b>1$ и из (5.6) и (5.19) получим

$$\left\|A_\eta G_{m\eta}x^*\right\| \le (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right). \tag{5.23}$$

Действительно, из (5.19)

$$\left\|A_\eta G_{m\eta}x^*\right\| \le \left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| + \left\|G_{m\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le$$
$$\le b\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) + \left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) = (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right).$$

Для $\forall n<m \quad \left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| > \varepsilon,$ потому

$$\left\|A_\eta G_{n\eta}x^*\right\| \ge \left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| - \left\|G_{n\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right).$$

Следовательно, для $\forall n<m$

$$\left\|A_\eta G_{n\eta}x^*\right\| \ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right). \tag{5.24}$$

Из (5.22) и (5.24) при $n=m-1$ $\dfrac{\sigma_{m-1,\eta}}{(m-1)^{1/k}} = \left\|A_\eta G_{m-1,\eta}x^*\right\| \ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)$ или $(m-1)^{1/k}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le$ $\le \dfrac{\sigma_{m-1,\eta}}{b-1} \to 0,\ \delta\to 0,\ \eta\to 0$ (так как из (5.22) $\sigma_{m\eta}\to 0,\ m\to\infty,\ \eta\to 0$). Если при этом $m(\delta,\eta)\to\infty$ при $\delta\to 0,\ \eta\to 0$, то, используя (5.18), (5.20) и (5.21), получим

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|G_{m\eta}x^*\right\| + \left\|g_m(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le$$
$$\le \left\|G_{m\eta}x^*\right\| + \gamma m^{1/k}(\delta,\eta)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \to 0,\ m\to\infty,\ \delta\to 0,\ \eta\to 0,$$

т. е. что $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$.

Если же для некоторых δ_n и η_n последовательность $m(\delta_n,\eta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n,\eta_n)} \to x^*$, $\delta_n \to 0, \eta_n \to 0$. Действительно, из (5.23) выполняется

$$\left\|A_{\eta_n} G_{m\eta_n} x^*\right\| \le (b+1)\left(\delta_n + \left\|x^*\right\|\eta_n\right) \to 0,\ \delta_n \to 0,\ \eta_n \to 0.$$

Следовательно, имеем $A_{\eta_n} G_{m\eta_n} x^* \to 0, \delta_n \to 0, \eta_n \to 0$ и по лемме 5.4 получаем, что при $\delta_n \to 0, \eta_n \to 0$ выполняется $G_{m\eta_n} x^* \to 0$. Отсюда

$$\left\|x_{m(\delta_n,\eta_n)} - x^*\right\| \le \left\|G_{m\eta_n} x^*\right\| + \gamma m^{1/k}(\delta_n,\eta_n)\left(\delta_n + \left\|x^*\right\|\eta_n\right) \to 0,\ \delta_n \to 0, \eta_n \to 0 .$$

Теорема 5.5 доказана.

Теорема 5.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.5. *Если* $x^* = A^s z,\ s > 0,\ \|z\| \le \rho,$ *то справедливы следующие оценки* $m \le 1 + \dfrac{s+1}{k\alpha e} \dfrac{\rho^{k/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_1\eta\rho\right]^{k/(s+1)}},$

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le c_s \eta^{\min(1,s)}\rho + \left[c_s\gamma_1\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} +$$

$$+ 2k\alpha^{1/k}\left\{1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\frac{\rho^{k/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_1\eta\rho)\right]^{k/(s+1)}}\right\}^{1/k}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right). \qquad (5.25)$$

Доказательство

Оценим заново $\left\|A_\eta G_{m-1,\eta} x^*\right\|$. В силу (5.5) и леммы 1.1 [12, с. 91]

$$\left\|A_\eta G_{m-1,\eta} x^*\right\| = \left\|A_\eta G_{m-1,\eta} A^s z\right\| \le \left\|A_\eta G_{m-1,\eta}\left(A^s - A_\eta^s\right) z\right\| +$$
$$+ \left\|A_\eta^{s+1} G_{m-1,\eta} z\right\| \le \left(\beta_{m-1,s}\eta + \gamma_{s+1}(m-1)^{-(s+1)/k}\right)\rho,$$

где

$$\beta_{m-1,s} = c_s \sup_{0\le\lambda\le M} \lambda\bigl(1-\lambda g_{m-1}(\lambda)\bigr) \le \bigl[k(m-1)\alpha e\bigr]^{-1/k} c_s =$$
$$= c_s\gamma_1(m-1)^{-1/k}, \quad \beta_{m-1,s}\to 0, \quad m\to\infty.$$

Здесь $c_s = \text{const}$, ($c_s \le 2$ при $0<s\le 1$). Сопоставляя это с (5.24), получим $(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\le\left(\beta_{m-1,s}\eta+\gamma_{s+1}(m-1)^{-(s+1)/k}\right)\rho$. Отсюда имеем $\gamma_{s+1}(m-1)^{-(s+1)/k}\rho \ge (b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\beta_{m-1,s}\eta\rho$, тогда $(m-1)^{(s+1)/k}\le$

$$\le \frac{\gamma_{s+1}\rho}{\left[(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\beta_{m-1,s}\eta\rho\right]}, \text{ и } m\le 1+\frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\beta_{m-1,s}\eta\rho}\right]^{\frac{k}{s+1}}.$$

Поскольку $\beta_{m-1,s} = c_s\gamma_1\dfrac{1}{(m-1)^{1/k}}\le c_s\gamma_1$ (так как при $m>1$ $\dfrac{1}{(m-1)^{1/k}}\le 1$), то $(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\beta_{m-1,s}\eta\rho\ge(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_1\eta\rho$, и, значит, получим следующую оценку для m:

$$m\le 1+\frac{s+1}{k\alpha e}\frac{\rho^{k/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_1\eta\rho\right]^{k/(s+1)}}.$$

Из формул (5.18) и (5.21) имеем $\left\|G_{m\eta}x^*\right\| = \left\|G_{m\eta}A^s z\right\|\le\left\|G_{m\eta}\left(A^s-A_\eta^s\right)z\right\|+\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|$. По лемме 1.1 [12, с. 91] $\left\|G_{m\eta}\left(A^s-A_\eta^s\right)z\right\|\le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho$, где $c_s=\text{const}$, ($0<c_s\le 2$ для $0<s\le 1$), что даёт в оценку $\left\|x_{m(\delta,\eta)}-x^*\right\|$ вклад $O\left((\delta+\eta)^{s/(s+1)}\right)$ [12, с. 111]. Норму $\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|$ оценим с помощью неравенства моментов, леммы 1.1 [12, с. 91] и (5.23):

$$\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\| = \left\|A_\eta^s G_{m\eta}z\right\| = \left\|A_\eta^{s+1}G_{m\eta}z\right\|^{s/(s+1)}\left\|G_{m\eta}z\right\|^{1/(s+1)}\le$$
$$\le\left\|A_\eta G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|^{s/(s+1)}\left\|z\right\|^{1/(s+1)}\le\Bigl(\left\|A_\eta G_{m\eta}\left(A_\eta^s-A^s\right)z\right\|+$$
$$+\left\|A_\eta G_{m\eta}A^s z\right\|\Bigr)^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}\le\left[\beta_{ms}\eta\rho+(b+1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}.$$

Тогда

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|G_{m\eta}x^*\right\| + \left\|g_m(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho + \left[\beta_{ms}\eta\rho + (b+1)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)} + \gamma m^{1/k}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho +$$

$$+\left[c_s\gamma_1\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)} +$$

$$+2k\alpha^{1/k}\left\{1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\frac{\rho^{k/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_1\eta\rho)\right]^{k/(s+1)}}\right\}^{1/k}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right).$$

Теорема 5.6 доказана.

Замечание 5.2. *Порядок оценки* (5.25) *есть* $O\left((\delta+\eta)^{s/(s+1)}\right)$, *и, как следует из* [12], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 5.3. *Хотя формулировка теоремы* 5.6 *даётся с указанием степени истокопредставимости s и истокопредставляющего элемента z, на практике их значение не потребуются, так как они не содержатся в правиле останова* (5.16). *Знание истокопредставимости необходимо только для получения оценок в теореме* 5.6.

5.2.2 Случай несамосопряжённой задачи

В случае несамосопряжённой задачи итерационный метод (5.3) примет вид (5.9). Нетрудно показать, что метод (5.9) с правилом останова (5.16) сходится, и получить оценку для момента останова и оценку погрешности метода (5.9). Справедливы

Лемма 5.5. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\left\|A_\eta - A\right\| \le \eta$, $\left\|A_\eta\right\|^2 \le M$, $\alpha > 0$ *и выполнено условие* (5.5) *с* $s_0 > 1/2$. *Тогда* $n^{1/(2k)}\left\|A_\eta K_{n\eta}v\right\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\eta \to 0$, $\forall v \in \overline{R(A^*)}$, *где* $K_{n\eta} = E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)$. *Если* $s_0 > 1$, *то* $n^{1/k}\left\|A_\eta^* A_\eta K_{n\eta}v\right\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\eta \to 0, \forall v \in \overline{R(A^*)}$.

Доказательство

Ограничимся доказательством случая $n^{1/(2k)}\left\|A_\eta K_{n\eta}v\right\| \to 0$, $n \to \infty$, $\eta \to 0$. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [43, с. 151]. По условию (5.5) нормы операторов ограничены в совокупности [12, с. 109]

$$n^{1/(2k)}\left\|A_\eta K_{n\eta}\right\| = n^{1/(2k)}\left\|\left(A_\eta^* A_\eta\right)^{1/2} K_{n\eta}\right\| \le \gamma_{1/2}, \quad (n>0, \quad \eta>0).$$

Для элементов вида $v = A^* z$, образующих в $N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}$ плотное подмножество, в силу (5.5) имеем

$$n^{1/(2k)}\left\|A_\eta K_{n\eta} v\right\| = n^{1/(2k)}\left\|A_\eta K_{n\eta} A^* z\right\| \le n^{1/(2k)}\left\|A_\eta K_{n\eta}\left(A^* - A_\eta^*\right)z\right\| +$$
$$+ n^{1/(2k)}\left\|A_\eta K_{n\eta} A_\eta^* z\right\| \le \left(\gamma_{1/2}\eta + n^{1/(2k)} \sup_{0\le\lambda\le M} \lambda\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\right)\|z\| \le$$
$$\le \left(\gamma_{1/2}\eta + n^{1/(2k)}\gamma_1 n^{-1/k}\right)\|z\| = \left(\gamma_{1/2}\eta + \gamma_1 n^{-1/(2k)}\right)\|z\| \to 0,$$

при $n\to\infty, \eta\to 0$. Мы учли, что $A_\eta K_{n\eta} A_\eta^* = A_\eta A_\eta^*\left(E - A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)\right)$ (см. лемму 3.1 [12, с. 34]). По теореме Банаха – Штейнгауза $n^{1/(2k)}\left\|A_\eta K_{n\eta} v\right\| \to 0$, $n\to\infty, \eta\to 0$. Лемма 5.5 доказана.

Лемма 5.6. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\left\|A_\eta - A\right\| \le \eta, \left\|A_\eta\right\|^2 \le M$, $\alpha > 0$ *и выполнены условия* (5.5), (5.7). *Если для некоторого* $v_0 \in \overline{R(A^*)}$, $n_p \le \bar{n} = const$ *и* $\eta_p \to 0$ *имеем* $A_{\eta_p} K_{n_p\eta_p} v_0 \to 0$ *или* $A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} K_{n_p\eta_p} v_0 \to 0$ *при* $p\to\infty$, *то* $K_{n_p\eta_p} v_0 \to 0$.

Доказательство

Ограничимся доказательством случая $A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} K_{n_p\eta_p} v_0 \to 0$. В силу (5.6) последовательность $v_p = K_{n_p\eta_p} v_0$ ограничена, т. е. $\left\|v_p\right\| = \left\|K_{n_p\eta_p} v_0\right\| \le \gamma_0\left\|v_0\right\|, \quad p \in N = \{1, 2, \ldots\}$. Поэтому из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $v_p \dashrightarrow v, \quad (p \in N' \subseteq N)$. Тогда $A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} v_p \dashrightarrow A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} v, \quad (p \in N')$. По условию $w_p = A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} v_p \to 0$, значит, $A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} v = 0$. Так как нуль не является собственным значением оператора A_{η_p}, то $v = 0$. Теперь

$$\left\|v_p\right\|^2 = \left(v_p,\ K_{n_p\eta_p} v_0\right) = \left(v_p, \left(E - A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} g_{n_p}\left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}\right)\right)v_0\right) =$$
$$= \left(v_p, v_0\right) - \left(v_p, A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} g_{n_p}\left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}\right)v_0\right) =$$

$$=\left(v_p, v_0\right)-\left(A^*_{\eta_p} A_{\eta_p} v_p, g_{n_p}\left(A^*_{\eta_p} A_{\eta_p}\right) v_0\right)=$$

$$=\left(v_p, v_0\right)-\left(A^*_{\eta_p} A_{\eta_p} K_{n_p \eta_p} v_0,\ g_{n_p}\left(A^*_{\eta_p} A_{\eta_p}\right) v_0\right) \to 0,$$

так как $w_p = A^*_{\eta_p} A_{\eta_p} K_{n_p \eta_p} v_0 \to 0,\quad \left\| g_{n_p}\left(A^*_{\eta_p} A_{\eta_p}\right)\right\| \le \gamma n^{1/k}{}_p \le \gamma \bar{n}^{1/k}$.

Итак, любая слабо сходящаяся подпоследовательность ограниченной последовательности v_p стремится к нулю по норме. Отсюда следует, что и вся последовательность $v_p \to 0,\ p \to \infty$ по норме. Лемма 5.6 доказана.

Справедлива

Теорема 5.7. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\|^2 \le M$, $(0 < \eta \le \eta_0)$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\alpha > 0$ *и выполнены условия* (5.5), (5.6) *с* $s_0 > 1/2$, $\gamma_0 = 1$. *Пусть параметр* $m(\delta, \eta)$ *выбран по правилу* (5.16). *Тогда* $(\delta + \eta)^2 m(\delta, \eta) \to 0,\ x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

Доказательство

Из (5.9) имеем $x_{n(\delta,\eta)} = g_n\left(A^*_\eta A_\eta\right) A^*_\eta y_\delta$. Тогда

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* = g_n\left(A^*_\eta A_\eta\right) A^*_\eta y_\delta - x^* = -K_{n\eta} x^* + K_{n\eta} x^* + g_n\left(A^*_\eta A_\eta\right) A^*_\eta y_\delta - x^* =$$

$$= -K_{n\eta} x^* + \left(E - A^*_\eta A_\eta g_n\left(A^*_\eta A_\eta\right)\right) x^* - x^* + g_n\left(A^*_\eta A_\eta\right) A^*_\eta y_\delta =$$

$$= -K_{n\eta} x^* + x^* - A^*_\eta A_\eta g_n\left(A^*_\eta A_\eta\right) x^* - x^* + g_n\left(A^*_\eta A_\eta\right) A^*_\eta y_\delta =$$

$$= -K_{n\eta} x^* + g_n\left(A^*_\eta A_\eta\right) A^*_\eta\left(y_\delta - A_\eta x^*\right).$$

Следовательно,

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* = -K_{n\eta} x^* + g_n\left(A^*_\eta A_\eta\right) A^*_\eta\left(y_\delta - A_\eta x^*\right). \tag{5.26}$$

Отсюда

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - A_\eta x^* = -A_\eta K_{n\eta} x^* + A_\eta g_n\left(A^*_\eta A_\eta\right) A^*_\eta y_\delta - A_\eta g_n\left(A^*_\eta A_\eta\right) A^*_\eta A_\eta x;$$

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} = A_\eta x^* - A_\eta K_{n\eta} x^* + A_\eta g_n\left(A^*_\eta A_\eta\right) A^*_\eta y_\delta - A_\eta g_n\left(A^*_\eta A_\eta\right) A^*_\eta A_\eta x^*.$$

Следовательно,

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta = A_\eta x^* - y_\delta - A_\eta K_{n\eta} x^* + A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* y_\delta -$$
$$- A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* A_\eta x^* = -A_\eta K_{n\eta} x^* + \left[E - A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)\right] A_\eta x^* -$$
$$- \left[E - A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)\right] y_\delta = -A_\eta K_{n\eta} x^* + \tilde{K}_{n\eta} A_\eta x^* - \tilde{K}_{n\eta} y_\delta =$$
$$= -A_\eta K_{n\eta} x^* - \tilde{K}_{n\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right),$$

где $K_{n\eta} = E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)$, $\tilde{K}_{n\eta} = E - A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)$ (см. лемму 3.1 [12, с. 34]). Итак,

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta = -A_\eta K_{n\eta} x^* - \tilde{K}_{n\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right). \tag{5.27}$$

Аналогично доказательству теоремы 5.3 можно показать, что

$$\left\|K_{n\eta} x^*\right\| \to 0,\, n \to \infty,\, \eta \to 0\,. \tag{5.28}$$

Докажем, что

$$\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* \left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \gamma^* n^{1/(2k)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right), \tag{5.29}$$

где $\gamma^* = \sup\limits_{n>0}\left(n^{-1/(2k)} \sup\limits_{0\le\lambda\le M} \lambda^{1/2}\left|g_n(\lambda)\right|\right) < \infty$. Действительно, $\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^*\right\| \le$ $\le \sup\limits_{0\le\lambda\le M}\left|\lambda^{1/2} g_n(\lambda)\right| = \gamma^* n^{1/(2k)}$, где $\gamma^* \le 2k^{1/2}\alpha^{1/(2k)}$ (см. подраздел 3.1.3). Отсюда $\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* \left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \gamma^* n^{1/(2k)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)$, так как

$$\left\|y_\delta - A_\eta x^*\right\| \le \left\|y_\delta - y\right\| + \left\|y - A_\eta x^*\right\| = \left\|y_\delta - y\right\| +$$
$$+ \left\|A x^* - A_\eta x^*\right\| \le \delta + \left\|\left(A - A_\eta\right) x^*\right\| \le \delta + \left\|x^*\right\|\eta.$$

В силу леммы 5.5

$$\sigma_{n\eta} = n^{1/(2k)}\left\|A_\eta K_{n\eta} x^*\right\| \to 0,\, n \to \infty,\, \eta \to 0. \tag{5.30}$$

Из (5.16) и (5.27) получим при $n = m(\delta,\eta)$

$$\left\|A_\eta K_{m\eta}x^*\right\| \le \left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| + \left\|\tilde{K}_{m\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le$$

$$\le b\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) + \left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) = (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right). \qquad (5.31)$$

При $n < m(\delta,\eta)$ из (5.16) $\left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| > b\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)$, поэтому

$$\left\|A_\eta K_{n\eta}x^*\right\| \ge \left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| - \left\|\tilde{K}_{n\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right). \qquad (5.32)$$

Из (5.30) и (5.32) получим при $n = m-1$ $(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le$ $\le \left\|A_\eta K_{m-1,\eta}x^*\right\| = \dfrac{\sigma_{m-1,\eta}}{(m-1)^{1/(2k)}}$. Отсюда

$$(m-1)^{1/(2k)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le \frac{\sigma_{m-1,\eta}}{b-1} \to 0, \quad \delta \to 0, \ \eta \to 0.$$

Если при этом $m(\delta,\eta) \to 0$ при $\delta \to 0, \eta \to 0,$ то в силу (5.26), (5.28), (5.29)

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|K_{m\eta}x^*\right\| + \left\|g_m\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \left\|K_{m\eta}x^*\right\| +$$
$$+ \gamma^* m^{1/(2k)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \to 0,$$

т. е. $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$.

Если же для некоторых δ_n и η_n последовательность $m(\delta_n,\eta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n,\eta_n)} \to x^*$, $\delta_n \to 0$, $\eta_n \to 0$.

Действительно, из (5.31) $\left\|A_\eta K_{n\eta}x^*\right\| \le (b+1)\left(\delta_n + \left\|x^*\right\|\eta_n\right) \to 0,$ $\delta_n \to 0,$ $\eta_n \to 0.$ Тогда по лемме 5.6 будет $\left\|K_{n\eta}x^*\right\| \to 0, \delta_n \to 0, \eta_n \to 0.$ Отсюда $\left\|x_{m(\delta_n,\eta_n)} - x^*\right\| \le \left\|K_{n\eta}x^*\right\| + \gamma^* m^{1/(2k)}(\delta_n,\eta_n)\left(\delta_n + \left\|x^*\right\|\eta_n\right) \to 0, \delta_n \to 0,$ $\eta_n \to 0.$ Теорема 5.7 доказана.

Теорема 5.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.7. *Если* $x^* = |A|^s z,$ $s > 0,$ $\|z\| \le \rho,$ $|A| = \left(A^*A\right)^{1/2}$, *то справедливы оценки*

$$m \le 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{(2k)/(s+1)};$$

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)}-x^*\right\|\le c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}+\left[c_s\gamma_{1/2}\eta\rho+(b+1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}+$$

$$+2k^{1/2}\alpha^{1/(2k)}\left\{1+\frac{s+1}{2k\alpha e}\times\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{(2k)/(s+1)}\right\}^{1/(2k)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right).$$

(5.33)

Доказательство

Пусть $x^*=|A|^s z,\ s>0,\ \|z\|\le\rho$. В силу (5.5) и леммы 1.2 [12, с. 93]

$$\left\|A_\eta K_{m-1,\eta}x^*\right\|=\left\|A_\eta K_{m-1,\eta}|A|^s z\right\|\le\left\|A_\eta K_{m-1,\eta}\left(|A|^s-\left|A_\eta\right|^s\right)z\right\|+$$

$$+\left\|A_\eta K_{m-1,\eta}\left|A_\eta\right|^s z\right\|\le\left(\xi_{m-1,s}\eta+\gamma_{(s+1)/2}(m-1)^{-(s+1)/(2k)}\right)\rho,\qquad(5.34)$$

где

$$\xi_{m-1,s}=c_s\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^{1/2}\left(1-\lambda g_{m-1}(\lambda)\right)\le c_s\left[2k(m-1)\alpha e\right]^{-1/(2k)}=$$

$$=c_s\gamma_{1/2}(m-1)^{-1/(2k)},\ \ \xi_{m-1,s}\to0,\ m\to\infty.$$

Сопоставляя это с неравенством (5.32), получим $(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\le\left(\xi_{m-1,s}\eta+\gamma_{(s+1)/2}(m-1)^{-(s+1)/(2k)}\right)\rho$, отсюда имеем $\gamma_{(s+1)/2}(m-1)^{-(s+1)/(2k)}\rho\ge(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\xi_{m-1,s}\rho\eta$. Тогда $(m-1)^{(s+1)/(2k)}\le\dfrac{\gamma_{(s+1)/2}\,\rho}{(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\xi_{m-1,s}\eta\rho}$, и, следовательно,

$$m\le1+\frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\xi_{m-1,s}\rho\eta}\right]^{(2k)/(s+1)}.$$

Поскольку $\xi_{m-1,s}=c_s\gamma_{1/2}(m-1)^{-1/(2k)}\le c_s\gamma_{1/2}$ (так как при $m>1$ $\left(\dfrac{1}{m-1}\right)^{1/(2k)}\le1$), то $(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\xi_{m-1,s}\eta\rho\ge(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_{1/2}\eta\rho$, и поэтому $m\le1+\dfrac{s+1}{2k\alpha e}\left[\dfrac{\rho}{(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{(2k)/(s+1)}$. Величина

$m^{(s+1)/(2k)}\left\|A_\eta K_{m\eta}|A_\eta|^s z\right\|\to 0$ при $m\to\infty,\quad \eta\to 0$. Из (5.27) и (5.29) имеем $\left\|K_{m\eta}x^*\right\|=\left\|K_{m\eta}|A|^s z\right\|\le\left\|K_{m\eta}\left(|A|^s-|A_\eta|^s\right)z\right\|+\left\|K_{m\eta}|A_\eta|^s z\right\|$. По лемме 1.2 (см. [12, с. 93]) $\left\|K_{m\eta}\left(|A|^s-|A_\eta|^s\right)z\right\|\le c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\|z\|$, где $c_s=\text{const}$, ($c_s\le 2$ при $0<s\le 1$), что даёт вклад $O\left((\delta+\eta)^{s/(s+1)}\right)$ в оценку $\left\|x_{m(\delta,\eta)}-x^*\right\|$ [12, с. 111]. Член $\left\|K_{m\eta}|A_\eta|^s z\right\|$ оценим при помощи неравенства моментов, леммы 1.2 [12, с. 93] и неравенства (5.31):

$$\left\|K_{m\eta}|A_\eta|^s z\right\|=\left\||A_\eta|^s K_{m\eta}z\right\|\le\left\||A_\eta|^{s+1}K_{m\eta}z\right\|^{s/(s+1)}\left\|K_{m\eta}z\right\|^{1/(s+1)}\le$$

$$\le\left\|A_\eta K_{m\eta}|A_\eta|^s z\right\|^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}\le\left[\left\|A_\eta K_{m\eta}\left(|A_\eta|^s-|A|^s\right)z\right\|+\left\|A_\eta K_{m\eta}x^*\right\|\right]^{s/(s+1)}\times$$

$$\times\rho^{1/(s+1)}\le\left[\xi_{ms}\eta\rho+(b+1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}.$$

В итоге получим оценку

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)}-x^*\right\|\le\left\|K_{m\eta}x^*\right\|+\left\|g_m(A_\eta)A_\eta^*\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}+$$

$$+\left[\xi_{ms}\eta\rho+(b+1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}+\gamma^*m^{1/(2k)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\le c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}+$$

$$+\left[c_s\gamma_{1/2}\eta\rho+(b+1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}+2k^{1/2}\alpha^{1/(2k)}\times$$

$$\times\left\{1+\frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{(2k)/(s+1)}\right\}^{1/(2k)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right).$$

Теорема 5.8 доказана.

Замечание 5.4. *Порядок оценки* (4.33) *есть* $O\left((\delta+\eta)^{s/(s+1)}\right)$, *и, как следует из* [12], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 5.5. *Знание порядка* $s>0$ *и истокопредставляющего элемента z, используемое в теореме* 5.8, *на практике не потребуется. При останове по невязке автоматически делается нужное число итераций для получения оптимального по порядку решения.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев, Б.А. Расчёты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике / Б.А. Андреев // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. наук. – 1947. – № 1. – С. 79–92.

2. Антохин, Ю.Т. О некоторых задачах аналитической теории уравнений I-го рода / Ю.Т. Антохин // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 2. – С. 226–240.

3. Антохин, Ю.Т. О некоторых некорректных задачах теории уравнений с частными производными / Ю.Т. Антохин // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 2. – С. 241–250.

4. Апарцин, А.С. К построению сходящихся итерационных процессов в гильбертовом пространстве / А.С. Апарцин // Тр. по приклад. математике и кибернетике / Сиб. энергет. ин-т, СО АН СССР. – Иркутск, 1972. – С. 7–14.

5. Бакушинский, А.Б. Один общий приём построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А.Б. Бакушинский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – Т. 7, № 3. – С. 672–677.

6. Бакушинский, А.Б. О решении некоторых интегральных уравнений I рода методом последовательных приближений / А.Б. Бакушинский, В.Н. Страхов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1968. – Т. 8, № 1. – С. 181–185.

7. Бакушинский, А.Б. Оптимальные и квазиоптимальные методы решения линейных задач, порождённые регуляризующими алгоритмами / А.Б. Бакушинский // Изв. вузов. Математика. – 1978. – № 11. – С. 6–10.

8. Бакушинский, А.Б. Итеративные методы решения некорректных задач / А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. – М. : Наука, 1989. – 127 с.

9. Вайникко, Г.М. Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректных задач / Г.М. Вайникко // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 3. – С. 84–92.

10. Вайникко, Г.М. Принцип невязки для класса регуляризационных методов для самосопряжённых задач / Г.М. Вайникко // Численное решение краевых задач и интегральных уравнений : тез. докл. науч. конф., Тарту, 21–23 окт. 1981 г. / Тартус. ун-т. – Тарту, 1981. – С. 73–75.

11. Вайникко, Г.М. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах / Г.М. Вайникко. – Тарту : Изд-во Тартус. ун-та, 1982. – 110 с.

12. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.

13. Васин, В.В. Итерационные методы решения некорректных задач с априорной информацией в гильбертовых пространствах / В.В. Васин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1988. – Т. 28, № 7. – С. 971–980.

14. Верлань, А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев : Навук. думка, 1986. – 543 с.

15. Голузин, Г.М. Обобщение формулы Карлемана и приложение её к аналитическому приложению функций / Г.М. Голузин, В.И. Крылов // Мат. сб. – 1933. – № 40. – С. 144–149.

16. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.

17. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.

18. Емелин, И.В. Спурт-метод построения последовательных приближений / И.В. Емелин, М.А. Красносельский, Н.П. Панских // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 219, № 3. – С. 535–538.

19. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

20. Емелин, И.В. К теории некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.

21. Иванов, В.К. О некорректно поставленных задачах / В.К. Иванов // Мат. сб. – 1963. – Т. 61 (103), № 2. – С. 211–223.

22. Иванов, В.К. О приближённом решении операторных уравнений первого рода / В.К. Иванов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1966. – Т. 6, № 6. – С. 1089–1094.

23. Иванов, В.К. Теория приближённых методов и её применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В.К. Иванов. – Киев : Навук. думка, 1968. – 287 с.

24. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и её приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М. : Наука, 1978. – 206 с.

25. Канторович, Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.

26. Кожух, И.Г. Сходимость в гильбертовом пространстве неявного метода итераций решения уравнений I рода / И.Г. Кожух, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 1999. – № 6. – С. 22–26.

27. Кожух, И.Г. К вопросу о регуляризации некорректно поставленных задач / И.Г. Кожух, В.Ф. Савчук // Mathematica system in teaching and research : тр. междунар. семинара, Седльце, 28–30 янв. 1999 г. / University of Sedlce, Poland. – Брест, 1999. – С. 20–23.

28. Константинова, Я. В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. – 1973. – № 1. – С. 9–15.

29. Константинова, Я.В. Градиентный метод с переменным шагом для уравнений I-го рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1974. – № 2. – С. 45–49.

30. Константинова, Я.В. Метод итераций неявного типа для уравнений I-ого рода и его сравнение с явным методом / Я.В. Константинова // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. – 1979. – № 1. – С. 63–65.

31. Красносельский, М.А. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 456 с.

32. Крылов, В.И. Вычислительные методы высшей математики : учеб. пособие : в 2 т. / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – Минск : Выш. шк., 1972. – Т. 1. – 584 с.

33. Крылов, В.И. Вычислительные методы высшей математики : учеб. пособие : в 2 т. / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – Минск : Выш. шк., 1975. – Т. 2. – 672 с.

34. Крянев, А.С. Итерационный метод решения некорректных задач / А.С. Крянев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1974. – Т. 14, № 1. – С. 25–35.

35. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.

36. Лисковец, О.А. Об одном итеративном методе решения уравнений I-го рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // Вопр. приклад. математики : сб. науч. ст. / СО АН СССР. – Иркутск, 1975. – С. 159–166.

37. Лисковец, О.А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I-го рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // IV респ. конф. математиков Белоруссии : тез. докл. науч. конф., Минск, 3–4 июня 1975 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск, 1975. – С. 14.

38. Лисковец, О.А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I-го рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 2. – С. 19–23.

39. Лисковец, О.А. Метод простых итераций с попеременно чередующимся шагом для уравнений I-го рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // Докл. АН БССР. – 1977. – Т. 21, № 1. – С. 9–12.

40. Лисковец, О.А. Вариационные методы решения неустойчивых задач / О.А. Лисковец. – Минск : Наука и техника, 1981. – 342 с.

41. Лисковец, О.А. Теория и методы решений некорректных задач / О.А. Лисковец // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1982. – Т. 20. – С. 116–178.

42. Лисковец, О.А. Правило останова итераций в неявных итеративных методах для уравнений I рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1991. – № 2. – С. 3–8.

43. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

44. Малкин, И.Г. Определение толщины однородного притягивающего слоя / И.Г. Малкин // Тр. Ин-та им. Стеклова. – М., 1932. – Т. 2, вып. 4. – С. 17–26.

45. Маловичко, А.К. Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиразведки / А.К. Маловичко. – М. : Гостоптехиздат, 1956. – 160 с.

46. Матысик, О.В. Априорные оценки погрешности в итерационном методе решения операторных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук, И.А. Голубцов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2006. – № 2 (26). – С. 20–26.

47. Матысик, О.В. Двухшаговая итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Еругинские чтения – XI : тез. докл. Междунар. мат. конф., Гомель, 23–25 мая 2006 г. / Гомел. гос. ун-т. – Гомель, 2006. – С. 32–33.

48. Матысик, О.В. Об одной двухшаговой итерационной процедуре решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Весн. Гродз. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2006. – № 2 (41). – С. 16–21.

49. Матысик, О.В. Априорные оценки погрешностей итерационной процедуры решения некорректных задач в энергетической норме гильбертова пространства / О.В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2007. – № 1 (28). – С. 7–13.

50. Матысик, О.В. Априорный выбор числа итераций в неявном итерационном методе решения линейных операторных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вучоныя зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А.С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брэст, 2007. – Т. 3, ч. 2. – С. 16–23.

51. Матысик, О.В. Об априорном выборе момента останова в итерационном методе решения линейных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2007. – № 2 (29). – С. 8–14.

52. Матысик, О.В. Об одной неявной итерационной процедуре решения некорректных задач в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Гродз. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2007. – № 3 (57). – С. 44–51.

53. Матысик, О.В. Об апостериорном выборе числа итераций в неявной итерационной процедуре для решения уравнений I рода / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2008. – № 2 (31). – С. 11–18.

54. Матысик, О.В. Об одной итерационной процедуре для решения некорректных задач / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вучоныя зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А.С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брэст, 2008. – Т. 4, ч. 2. – С. 5–12.

55. Матысик, О.В. Об одном двухшаговом итерационном методе решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Докл. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 5. – С. 5–10.

56. Матысик, О.В. Сходимость в гильбертовом пространстве метода простой итерации с попеременно чередующимся шагом решения операторных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Докл. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 1. – С. 33–37.

57. Матысик, О.В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявной итерационной процедуры решения линейных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2008. – № 1 (30). – С. 15–21.

58. Матысик, О.В. Сходимость итерационного метода с переменным шагом решения некорректных задач в энергетической норме гильбертова пространства / О.В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2008. – № 1 (30). – С. 8–14.

59. Матысик, О.В. Итерационная процедура неявного типа решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 39–44.

60. Матысик, О.В. Об одном методе итераций с переменным шагом решения некорректных задач в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вучоныя зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А.С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брэст, 2009. – Т. 5, ч. 2. – С. 15–26.

61. Матысик, О.В. Правило останова по невязке в неявной итерационной процедуре для линейных операторных уравнений I рода / О.В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2009. – № 2 (33). – С. 19–25.

62. Матысик, О.В. Сходимость в банаховом пространстве метода итераций решения некорректных задач / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Гродз. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2009. – № 2 (82). – С. 40–44.

63. Матысик, О.В. О сходимости неявного итерационного метода решения некорректных задач с правилом останова по соседним приближениям / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 112–117.

64. Матысик, О.В. Итерационный метод неявного типа решения некорректных задач в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Гродз. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2011. – № 1 (107). – С. 36–42.

65. Матысик, О.В. Неявная итерационная процедура и её применение для решения модельной некорректной задачи в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик, В.И. Басин // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 83–92.

66. Матысик, О.В. О приближенном решении операторных уравнений I рода / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 1. – С. 93–101.

67. Матысик, О.В. Априорный выбор параметра регуляризации в итерационном методе явного типа решения линейных уравнений с приближенным оператором / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Гродз. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2012. – № 1 (126). – С. 24–31.

68. Матысик, О.В. Априорный выбор параметра регуляризации в явном методе итераций решения некорректных задач с приближенным оператором / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 10–15.

69. Матысик, О.В. Итерационный метод неявного типа решения операторных уравнений первого рода в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 6. – С. 28–33.

70. Матысик, О.В. Метод итераций неявного типа решения некорректных задач с апостериорным выбором параметра регуляризации / О.В. Матысик // Перспективные направления развития региональной экономики : материалы III межвуз. науч.-практ. конф. студентов, магистрантов, аспирантов, преподавателей, Брест, 24 мая 2012 г. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2012. – С. 164–165.

71. Матысик, О.В. О регуляризации некорректных задач с приближенным оператором явным методом итераций / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вучоныя зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А.С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брэст, 2012. – Вып. 8, ч. 2. – С. 7–13.

72. Матысик, О.В. О решении методом последовательных приближений линейных уравнений с несамосопряженными операторами / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2012. – № 2. – С. 96–103.

73. Матысик, О.В. Правило останова в итерационных процедурах решения операторных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 89–94.

74. Матысик, О.В. Апостериорный выбор параметра регуляризации в методе итераций решения линейных уравнений с приближенным оператором / О.В. Матысик // Весн. Гродз. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2013. – № 1 (148). – С. 44–53.

75. Матысик, О.В. Апостериорный выбор параметра регуляризации в методе итераций явного типа решения линейных уравнений с приближенным оператором / О.В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 11–16.

76. Матысик, О.В. Апостериорный выбор числа итераций в неявном методе решения линейных уравнений с приближенно заданным оператором / О.В. Матысик // Весн. Гродз. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2013. – № 3 (159). – С. 12–22.

77. Матысик, О.В. О регуляризации некорректных задач с несамосопряженным приближенно заданным оператором / О.В. Матысик // Научният потенциал на света – 2013 : материали за IX междунар. науч.-практ. конф., София (Болгария), 17–25 септемеври 2013 / Бял ГРАД-БГ. – София, 2013. – Т. 18. – С. 45–48.

78. Матысик, О.В. Регуляризация некорректных задач с приближенным оператором при помощи неявного метода с априорным выбором числа итераций / О.В. Матысик // Весн. Гродз. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2013. – № 2 (151). – С. 25–29.

79. Матысик, О.В. Итеративная регуляризация некорректных задач в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Aktualne problemy nowoczesnych nauk : Materiały IX międzynarodowej naukowi-praktycznej konferencji, Przemyśl (Polska), 7–15 czerwca 2013 r. / Nauka i studia. – Przemyśl, 2013. – Vol. 29. – S. 14–16.

80. Матысик, О.В. Итерационный метод неявного типа решения некорректных задач с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Еругинские чтения – XV : тез. докл. Междунар. мат. конф., Гродно, 23–25 мая 2013 г. / Гродн. гос. ун-т. – Гродно, 2013. – Ч. 2. – С. 40–41.

81. Матысик, О.В. Метод итераций неявного типа для решения линейных уравнений с неограниченным оператором / О.В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 77–83.

82. Матысик, О.В. Об апостериорном выборе параметра регуляризации в явном методе итераций решения некорректных задач с приближенным оператором / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вучоныя зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А.С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брэст, 2013. – Вып. 9, Ч. 2. – С. 7–15.

83. Матысик, О.В. О приближенном решении линейных уравнений с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 2. – С. 87–92.

84. Матысик, О.В. Регуляризация некорректных задач в банаховом пространстве при помощи итерационного процесса / О.В. Матысик // Молодая наука Волыни: приоритеты и перспективы исследований : материалы VII Междунар. науч.-практ. конф., Луцк (Украина), 14–15 мая 2013 г. / Восточноевроп. нац. ун-т им. Л. Украинки. – Луцк, 2013. – Т. 1. – С. 161–162.

85. Мацкевич, А.А. Сходимость итерационного метода решения операторных уравнений в энергетической норме / А.А. Мацкевич, О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2006. – № 2 (26). – С. 16–19.

86. Морозов, В.А. О выборе параметра при решении функциональных уравнений методом регуляризации / В.А. Морозов // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 6. – С. 1225–1228.

87. Морозов, В.А. О регуляризующих семействах операторов / В.А. Морозов // Вычисл. методы и программирование : сб. работ / Вычисл. центр Моск. ун-та. – М., 1967. – Вып. 3. – С. 63–95.

88. Морозов, В.А. Линейные и нелинейные некорректные задачи / В.А. Морозов // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1973. – Т. 11. – С. 129–178.

89. Морозов, В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В.А. Морозов. – М. : Изд-во МГУ, 1974. – 320 с.

90. Оганесян, С.М. Регуляризующий итерационный процесс, основанный на параметрическом функционале А.Н. Тихонова / С.М. Оганесян, В.Ч. Старостенко // Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 238, № 2. – С. 277–280.

91. Савчук, В.Ф. Некоторые итеративные методы решения уравнений I рода / В.Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 5. – С. 23–27.

92. Савчук, В.Ф. Сходимость в энергетической норме неявного метода решения уравнений I рода / В.Ф. Савчук // II респ. конф. молодых ученых ИФМ Лит. ССР : тез. докл. науч. конф., Вильнюс, 15–17 апр. 1976 г. / ИФМ Лит. ССР. – Вильнюс, 1976. – С. 53–54.

93. Савчук, В.Ф. Сходимость одного метода решений линейных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1981. – № 4. – С. 53–58.

94. Савчук, В.Ф. Правило останова по невязке для метода простых итераций с попеременно чередующимся шагом / В.Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1986. – № 6. – С. 109–111.

95. Савчук, В.Ф. Оценки погрешностей в неявном итеративном методе решения уравнений I рода / В.Ф. Савчук ; Брест. педин-т. – Брест, 1986. – 11 с. – Деп. в ВИНИТИ № 5960-В87 // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 1. – С. 89.

96. Савчук, В.Ф. Правило останова по соседним приближениям в итеративных методах решения линейных уравнений / В.Ф. Савчук ; Брест. педин-т. – Брест, 1990. – 16 с. – Деп. в ВИНИТИ № 2430-В90 // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 87.

97. Савчук, В.Ф. Регуляризация линейных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1993. – № 3. – С. 110–112.

98. Савчук, В.Ф. Выбор правила останова в неявной итерационной схеме решения линейного уравнения I рода / В.Ф. Савчук ; Брест. педин-т. – Брест, 1994. – 6 с. – Деп. в ВИНИТИ № 199442-Д94 // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 5. – С. 87.

99. Савчук, В.Ф. Апостериорный выбор числа итераций в неявном итеративном методе решения линейных уравнений / В.Ф. Савчук / Брест. педин-т. – Брест, 1997. – 14 с. – Деп. в ВИНИТИ № 358–В97 // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 4. – С. 87.

100. Савчук, В.Ф. Сходимость в гильбертовом пространстве неявного метода итераций решения уравнений I рода / В.Ф. Савчук. И.Г. Кожух // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 1998. – № 6. – С. 22–26.

101. Савчук, В.Ф. О применении итеративных методов к решению обратных задач теории потенциала / В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 1999. – № 2. – С. 30–36.

102. Савчук, В.Ф. Неявный метод решения некорректных задач в случае приближённо заданного оператора / В.Ф. Савчук // Дифференц. уравнения и системы компьютерной алгебры : тр. междунар. мат. конф., Брест, 19–22 сент. 2000 г. / Брест. гос. ун-т ; редкол.: Н.И. Юрчук [и др.]. – Брест, 2001. – С. 116–120.

103. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений при помощи градиентного метода с переменным шагом / В.Ф. Савчук // Вучоныя зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А.С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брэст, 2005. – Т. 1, ч. 2. – С. 19–29.

104. Савчук, В.Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.

105. Савчук, В.Ф. Об итерационных процедурах решения некорректных задач / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Вучоныя зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А.С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брэст, 2006. – Т. 2, ч. 2. – С. 5–19.

106. Савчук, В.Ф. Априорные оценки погрешности в неявном методе итераций решения некорректных задач / В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2007. – № 1 (28). – С. 22–26.

107. Савчук, В.Ф. Сходимость в гильбертовом пространстве неявного итерационного метода решения операторных уравнений / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 4. – С. 7–12.

108. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик. – Брест : БрГУ им. А.С. Пушкина, 2008. – 196 с.

109. Савчук, В.Ф. Итерационный метод явного типа решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2010. –Т. 54, № 5. – С. 24–29.

110. Савчук, В.Ф. Об одном итерационном методе решения некорректных задач с самосопряженными операторами / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 93–98.

111. Савчук, В.Ф. Правило останова по невязке в итерационной процедуре решения операторных уравнений / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Еругинские чтения – XV : тез. докл. Междунар. мат. конф., Гродно, 23–25 мая 2013 г. / Гродн. гос. ун-т. – Гродно, 2013. – Ч. 2. – С. 46.

112. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.

113. Сарв, Л.Э. О решении нелинейных некорректных задач α-методами / Л.Э. Сарв // Численное решение краевых задач и интегральных уравнений : тез. докл. науч. конф., Тарту, 21–23 окт. 1981 г. / Тартус. ун-т. – Тарту, 1981. – С. 73–75.

114. Соловьёв, О.А. Об аналитическом продолжении потенциальных полей с помощью итерационных процессов / О.А. Соловьёв // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1967. – № 4. – С. 92–93.

115. Страхов, В.Н. О решении некорректных задач магнито- и гравиметрии, представляемых интегральными уравнениями типа свёртки / В.Н. Страхов // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1967. – № 4. – С. 36–54.

116. Страхов, В.Н. Некоторые применения функционально-аналитических методов в математической теории интерпретации гравита-

ционных и магнитных аномалий : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.07 / В.Н. Страхов. – М., 1972. – 78 с.

117. Страхов, В.Н. К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации / В.Н. Страхов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1973. – Т. 13, № 6. – С. 1602–1606.

118. Тихонов, А.Н. Об устойчивости обратных задач / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.

119. Тихонов, А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.

120. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.

121. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа : в 2 т. / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1968. – Т. 1. – 440 с.

122. Фридман, В.М. О сходимости методов типа наискорейшего спуска / В.М. Фридман // Успехи мат. наук. – 1962. – Т. 17, вып. 3. – С. 201–204.

123. Хромова, Г.В. К вопросу о приближённом решении интегральных уравнений I рода / Г.М. Хромова // Дифференц. уравнения и вычисл. математика / Сарат. ун-т. – 1975. – Вып. 2. – С. 93–103.

124. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166–176.

125. Carleman, T. Les fonctions quasi analitiques / T. Carleman. – Paris, 1926.

126. Gilyazov, S.F. Regularization of ill-posed problems by iteration methods / S.F. Gilyazov, N.L. Gol’dman. – Dordrecht ets. : Kluwer Acad. Publ., 2000. – 340 p.

127. Groetsch, G.W. Sequential regularisation of ill-posed problems involving unbounded operations / G.W. Groetsch // Commentationes mathematicae universitatis Carolinae. Cincinnati. – 1977. – Vol. 18, № 3. – P. 489–498.

128. Hadamard, J. Sur les problemes aux derivees partielies et leur signification physique / J. Hadamard // Bull. Univ. Princeton. – 1902. – Vol. 13. – P. 49–52.

129. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Hermann. Paris, 1932.

130. Lipfert, W. Iterative Losung der linearen Gleichung $Ax = y$ unter Verwendung einer Noherung fur inversen Operator von A / W. Lipfert // Viss. Z. techn. Univ. Dresden. – 1970. – Vol. 19. – P. 399–404.

131. Phillips, D.L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind / D.L. Phillips // J. Accoc. Comput. Mach. – 1962. – Vol. 9, № 1. – P. 84–97.

132. Vogel, C.R. Computational methods for inverse problems / C.R. Vogel. – Philadelphia : SIAM, 2002. – 183 p.

Матысик Олег Викторович родился 20 декабря 1976 года в г. п. Б. Берестовица Гродненской области. Закончил математический факультет БрГУ им. А.С. Пушкина в 1999 году. В 2005 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «*Итеративные методы решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве*» по специальности 01.01.07 – вычислительная математика в Институте математики НАН Беларуси.

С 2006 года по август 2013 года – заведующий кафедрой алгебры и геометрии, а с сентября 2013 года по настоящее время – заведующий кафедрой прикладной математики и технологий программирования БрГУ имени А.С. Пушкина.

Занимается разработкой и исследованием свойств итерационных методов решения некорректно поставленных задач, описываемых линейными операторными уравнениями. Имеет более 200 публикаций научного и учебно-методического характера, в том числе 3 монографии (2 – в соавторстве).