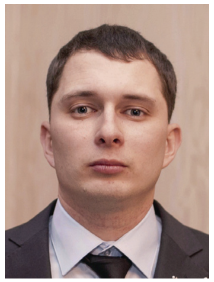
В монографии рассмотрены отдельные задачи теории интерполирования для функций скалярного аргумента, операторов, заданных в функциональных пространствах, а также функций матричного аргумента. Построены и исследованы интерполяционные многочлены Эрмита-Биркгофа относительно отдельных классов чебышевских систем функций, различной структуры интерполяционные формулы невысокого порядка для функций матричного аргумента, а также интерполяционные формулы для операторов, заданных в функциональных пространствах, содержащие произвольные входные данные и с произвольным числом узлов. Для специалистов и тех, кто интересуется теорией интерполирования функций и операторов, ее применением к решению прикладных задач, а также аспирантов, магистрантов и студентов университетов математических и физических специальностей.



Андрей Павлович Худяков. Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и технологий программирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина. Родился в 1985 году. Окончил БрГУ им. А.С. Пушкина, аспирантуру БГУ. Опубликовал около 40 научных работ по методам вычислительной математики.

978-3-659-61593-1

Некоторые задачи теории интерполирования

Худяков

Андрей Худяков

Некоторые задачи теории интерполирования

LAP LAMBERT Academic Publishing

Андрей Худяков

Некоторые задачи теории интерполирования

Андрей Худяков

Некоторые задачи теории интерполирования

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные
Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.
Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу http://dnb.d-nb.de.
Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:
LAP LAMBERT Academic Publishing
ist ein Imprint der / является торговой маркой
OmniScriptum GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия
Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /
Напечатано: см. последнюю страницу
ISBN: 978-3-659-61593-1

Zugl. / Утверд.: Minsk, BSU, Diss., 2014

Оглавление

Предисловие

В настоящее время теории интерполирования операторов посвящено большое число работ. Тем не менее, в этой области прикладного функционального анализа имеется большое число неисследованных задач, в том числе и в теории интерполирования функций матричных переменных. Кроме того, задаче обобщенного интерполирования типа Эрмита–Биркгофа, как в случае скалярных функций, так и функций матричного аргумента, уделялось крайне мало внимания. Ввиду общематематического и прикладного значения формул операторного интерполирования построение и исследование их является актуальной задачей.

Во второй главе книги рассмотрена обобщенная интерполяционная задача Эрмита–Биркгофа. Для скалярных фунций одной переменной построены новые интерполяционные тригонометрические многочлены, многочлены относительно двух видов рациональных функций, интерполяционные многочлены относительно экспоненциальной системы функций, а также интерполяционные формулы по произвольной чебышевской системе функций. Получены явные представления погрешностей и их оценки для построенных многочленов. Применение этих формул проиллюстрировано на примерах.

В третьей главе для функций от матриц на основе формул, полученных во второй главе, построены новые обобщенные матричные интерполяционные многочлены Эрмита–Биркгофа относительно систем тригонометрических, двух видов рациональных и экспоненциальных матричных функций. Для невысоких порядков формул найдены классы матричных многочленов, для которых данные интерполяционные формулы точны. Применение формул проиллюстрировано на примерах.

В четвертой главе рассмотрена задача интерполирования функций, заданных на множестве функциональных матриц. Построены новые матричные интерполяционные алгебраические многочлены первой и второй степеней, и определен класс матричных многочленов, для которых они точны. Получены также интерполяционные многочлены второй степени лагранжева и эрмитова типов относительно тригонометрических и экспоненциальных матричных функций с использованием дифференциалов Гато, и указаны виды инвариантных многочленов. Построен тригонометрический вариант формулы Лагранжа–Сильвестра, а также многочлены, в которые входят псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза.

Для операторов, заданных на множествах гладких функций, получены интерполяционные операторные многочлены, содержащие произвольные функции, показана их инвариантность для функциональных многочленов первой степени. Предложен способ построения на основе данного интерполяционного операторного многочлена фиксированной степени других интерполяционных многочленов такой же степени, но с большим числом узлов. В функциональных пространствах в качестве исходных интерполяционных многочленов берутся линейные.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю члену-корреспонденту НАН Беларуси Л.А. Яновичу, под чьим научным руководством была написана эта книга.

Введение

Интерполяция, как один из методов приближения функций, имеет важное теоретическое и прикладное значение во многих разделах математики. Интерполирование функций широко используется при построении приближенных и численных методов математического анализа, в том числе в задачах численного дифференцирования и интегрирования и при численном решении различных классов уравнений.

Несмотря на то, что этот раздел вычислительной математики имеет давнюю историю, в настоящее время интерполяционная задача Эрмита–Биркгофа исследована еще недостаточно. Это относится, в частности, к построению интерполяционных формул, интерполяционные условия для которых содержали бы требования совпадения в узлах не производных, как это имеет место в классической постановке, а значений некоторых дифференциальных и других видов операторов.

В работе построены новые обобщенные интерполяционные типа Эрмита–Биркгофа многочлены относительно тригонометрических, двух видов рациональных и экспоненциальных функций. Для построенных в книге формул получены явные представления для погрешностей приближений и их оценки. Применение полученных формул иллюстрируется на конкретных примерах.

Задача интерполирования функционалов и операторов включает в себя интерполирование функций как частный случай. В этой области приближенного анализа получены и исследованы интерполяционные методы аппроксимации функционалов и операторов, как в функциональных, так и в общих линейных пространствах. В последнее время также обращается значительное внимание на задачу построения интерполяционных методов приближения для функций матричных переменных. В работе получен ряд новых интерполяционных матричных многочленов для функций, заданных на множествах стационарных и функциональных матриц. Данные формулы были построены на основе полученных также в данной работе интерполяционных многочленов Эрмита–Биркгофа для случая скалярных функций. Эти результаты изложены во второй и третьей главах. Здесь же иллюстрируется применение этих формул на конкретных примерах.

При решении многих практических задач обычно используются интерполяционные формулы невысоких порядков. Это относится как к случаю интерполяции скалярных функций, так и к задаче операторного интерполирования. Поэтому возникает практическая необходимость в построении новых интерполяционных формул такого вида. Этой задаче посвящена четвертая глава книги. Для операторов, заданных на множестве гладких функциональных матриц, построены алгебраического типа интерполяционные операторные многочлены первой и второй степеней. Найдены классы матричных многочленов, относительно которых полученные формулы инвариантны. В этой же главе дается построение тригонометрического аналога интерполяционной формулы Лагранжа–Сильвестра, а также построены еще два вида интерполяционных формул тригонометрического типа, одна из которых относится к классу Эрмита–Биркгофа для дифференцируемого по Гато оператора, вторая – интерполяционная формула лагранжева типа, при построении которой использовались квадратные псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза. Для конкретных функций матричной переменной построены интерполяционные многочлены этих видов.

В пятой главе на пространстве гладких функций построены линейные специальной структуры операторные интерполяционные многочлены, которые содержат произвольные параметры и функции. Наличие в приближенных формулах произвольных параметров дает возможность при использовании их для решения конкретных задач выбрать эти параметры с целью улучшения характеристик численных алгоритмов. В этой же главе построен класс линейных интерполяционных операторных многочленов с произвольным числом узлов. Раньше аналогичные формулы строились только в случае двух узлов интерполирования. Формулы линейной интерполяции имеют обычно не очень сложный вид, а совпадение таких интерполяционных многочленов с аппроксимируемым оператором в большем числе узлов обеспечивает лучшую точность приближения.

В первой главе приводится общая формулировка задач операторного интерполирования, постановка задач, исследуемых в данной работе, аналитический обзор литературы по тематике работы, описание объекта и методов исследования.

ГЛАВА I
Аналитический обзор литературы. Объект и методы исследования

§1. Постановка задачи операторного интерполирования и основные этапы её развития

Пусть X, Y – векторные пространтсва и задан оператор $F: X \to Y$. В каждом линейном пространстве рассматриваются операторные многочлены n-ой степени $P_n: X \to Y$, которые в каждом конкретном пространстве имеют свою структуру, определяемую линейным оператором, отображающим пространство X в Y. Такие операторные многочлены используются в случае алгебраического интерполирования, т.е. интерполяционные многочлены в этом случае имеют структуру операторного многочлена P_n. Строятся также операторные интерполяционные многочлены, отличные от алгебраического типа. В этом случае структура интерполяционной формулы оговаривается заранее.

Пусть задана система узлов $\{x_k \in X\}_{k=0}^{m}$ и значения $\{F(x_k) \in Y\}_{k=0}^{m}$ оператора $F(x)$ в этих узлах. Задача *лагранжева* интерполирования состоит в построении оператора $P_n(x)$, совпадающего в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_m$ с интерполируемым оператором $F(x): P_n(x_k) = F(x_k)$ $(k = 0,1,\ldots,m)$.

Пусть известны значения оператора F в узлах интерполирования x_k, а также значения дифференциалов Гато $\delta^{\nu_k} F\left[x_k; h_{k\nu_k}, h_{k(\nu_k-1)}, \ldots, h_{k1}\right]$ соответственно порядка ν_k в точке x_k по направлениям $h_{k1}, h_{k2}, \ldots, h_{k\nu_k}$; $h_{k\nu_k} \in X$; $\nu_k = 0,1,2,\ldots,\alpha_k$; $k = 0,1,\ldots,m$, где α_k – некоторые целые фиксированные числа. Требуется найти оператор $P_n(x)$, для которого выполняются равенства

$$\delta^{\nu_k} P_n\left[x_k; h_{k\nu_k}, h_{k(\nu_k-1)}, \ldots, h_{k1}\right] = \delta^{\nu_k} F\left[x_k; h_{k\nu_k}, h_{k(\nu_k-1)}, \ldots, h_{k1}\right],$$

при $\nu_k = 0$ эти равенства имеют вид $P_n(x_k) = F(x_k)$. Такая интерполяционная задача называется *эрмитовой*.

В случае, когда некоторые порядки ν_k дифференциалов Гато отсутствуют, тогда данная задача называется *операторным интерполированием с пропусками порядков дифференциалов Гато* или *интерполированием Эрмита–Биркгофа*.

Если же вместо дифференциалов Гато берутся некоторые иные дифференциальные операторы, например, линейные комбинации дифференциалов Гато или операторы другой структуры, тогда соответствующее интерполирование называется *обобщенным*.

В работе рассматриваются задачи лагранжева и обобщенная Эрмита–Биркгофа типов, когда интерполируемый оператор задан на функциональных пространствах или на множествах постоянных и функциональных матриц.

Основанием для построения такого вида интерполяционных приближений операторов являются, в частности, аналоги теоремы Вейерштрасса и ее обобщения на случаи функционалов и операторов. Для непрерывного функционала, заданного на пространстве непрерывных функций, таким аналогом является теорема Фреше [1, с. 48; 2, с. 96]. Для нелинейных непрерывных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве обобщенная теорема Вейерштрасса доказана П. Прентер [3]. Позже В.И. Истратеску [4] и И.К. Даугавет [5] доказали эту теорему в сепарабельном банаховом вещественном пространстве. Кроме того, в [5] доказывается существование последовательности полиномиальных операторов на открытом множестве в сепарабельном банаховом пространстве, сходящейся поточечно на этом множестве к любому наперед заданному непрерывному оператору.

У. Портером [6] решена проблема существования интерполяционного многочлена специального вида с минимальной нормой для операторов, действующих из пространства суммирумых с квадратом функций в себя, удовлетворяющего соответствующим лагранжевым интерполяционным условиям. В случае разрешимости задачи приведен явный вид такого многочлена.

Теория операторного интерполирования систематически начала разрабатываться с середины прошлого столетия. Интерполяционные формулы ньютонова типа строятся, по аналогии как в случае скалярных функций, на основе операторов разделенных разностей. Такие операторы и их свойства построены и исследованы С. Ульмом [7, 8] и совместно с В. Поллем [9].

В работе [10] П.И. Соболевского и монографии [11] Л.А. Яновича построены интерполяционные формулы ньютонова типа для функционалов в произвольных банаховых и гильбертовых пространствах, содержащие функциональные разделенные разности первого и высших порядков. В этих же работах рассматривается приложение данного аппарата к вычислению континуальных интегралов по гауссовым мерам. Позже на основе разделенных разностей специальных видов были получены интерполяционные многочлены невысокой степени для функционалов, заданных на пространстве гладких функций [12–15].

Интерполяционные операторные многочлены ньютоновского типа, основанные на различных интегральных и тождественных преобразованиях функций одной и многих переменных, построены и исследованы М.В. Игнатенко и Л.А. Яновичем [16–19]. На основе интерполяционных формул для функций получены полиномы операторного интерполирования лагранжева и эрмитова типов относительно произвольных и некоторых конкретных чебышевских систем функций [20, 21]. Отдельные результаты обобщены на случай операторов, заданных на декартовом произведении функциональных и гильбертовых пространств [22, 23].

Довольно полная теория интерполирования операторов изложена в монографиях В.Л. Макарова, В.В. Хлобыстова, Л.А. Яновича [24, 25]. Здесь приводятся основы теории операторного интерполирования в абстрактных линейных, гильбертовых и функциональных пространствах. Определены необходимые и достаточные условия существования интерполяционных операторных многочленов лагранжева и эрмитова типов. Отметим, что данные условия накладываются на систему узлов и значения интерполируемого оператора в этих узлах. В случае разрешимости задачи, описаны множества этих полиномов, а также их подмножества, сохраняющие многочлены соответствующей степени. Доказаны некоторые теоремы о сходимости интерполяционных процессов, а также приведены оценки точности интерполирования рассмотренными многочленами. Также в этих работах строятся интерполяционные формулы типа Ньютона и Эрмита для операторов, заданных на пространствах функций одной переменной. Отдельные главы посвящены теории матричного интерполирования. Приводятся и строятся новые интерполяционные матричные многочлены для функций, заданных на множествах постоянных или непрерывных и непрерывно дифференцируемых функциональных матриц. В основном рассматриваются формулы линейной интерполяции. Здесь же дается и библиография основных работ по этой теме.

Исследования в области полиномиальной интерполяции нелинейных операторов продолжены в работах О.Ф. Кашпур [26–29]. Построены более простые условия разрешимости интерполяционной задачи, приведено описание всего множества интерполянтов и их подмножество, сохраняющее полиномы соответствующей степени. Решена проблема разрешимости и построения операторного полинома эрмитова типа с интерполяционными условиями, содержащими дифференциалы Гато высших порядков по произвольным направлениям. Получены оценки точности интерполирования полиномиальных операторов.

Построение и исследование интерполяционных формул в виде интегральных цепных дробей на континуальном множестве узлов дается в работах [30–32].

В настоящее время к проблеме операторного интерполирования проявлен повышенный интерес ввиду ее фундаментальности, общематематического значения и прикладной направленности. Она является одной из актуальных проблем современной вычислительной математики. Поэтому целесообразно проводить исследования в этой области прикладной математики.

§2. Описание объекта и методов исследования

Объектом исследования в данной работе являются нелинейные операторы, заданные на пространствах непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций, а также операторы, определенные на множествах постоянных и функциональных матриц, называемые обычно функциями матричного аргумента. Нелинейные операторы находят широкое применение в различных областях математики и ее приложениях, в таких, например, как интегральное и дифференциальное исчисление, функциональный анализ и др. На практике часто возникают ситуации, когда информация об исследуемом операторе недостаточна, т.е. известны только значения оператора на некотором конечном наборе элементов из его области определения, либо оператор имеет сложную или неудобную для применения структуру. Поэтому одной из важных задач прикладной математики является приближение нелинейных операторов. Одним из таких способов является интерполирование.

В данной работе при построении интерполяционных формул использовались следующие методы исследования:

– методы теории линейных и нелинейных операторов;

– методы теории интерполирования скалярных функций и операторов;

– приближенные методы математического анализа;

– приближенные методы функционального анализа;

– методы вычислительной математики;

– методы линейной алгебры;

– методы матричного анализа.

ГЛАВА II

Обобщённое интерполирование Эрмита–Биркгофа скалярных функций

Интерполяционная задача Эрмита–Биркгофа для случая функций состоит в построении многочленов, для которых выполнялись бы условия совпадения значений многочлена и его производных некоторых фиксированных порядков во всех или отдельных узлах с соответствующими значениями интерполируемой функции и её производных. Эта задача с пропусками порядков производных в отличие от задачи эрмитова типа не всегда разрешима [33–35].

В более общей постановке интерполяционной задачи Эрмита–Биркгофа условия совпадения в отдельных узлах производных заменяются на условия совпадения заданного дифференциального или некоторого другого вида оператора. В случае алгебраических многочленов интерполяционные формулы такого типа получены в [36, 37].

§1. Тригонометрическое интерполирование

Пусть имеется совокупность узлов $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{2n-1} < t_{2n} < 2\pi$. В этих узлах известны значения 2π-периодической функции $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Кроме этого, в одном из узлов t_j известно значение оператора $L_{2n+1}(f;t_j) \equiv L_{2n+1}f(t_j)$, где $L_{2n+1}f(t)$ – дифференциальный оператор вида

$$L_{2n+1}f(t) = (D^2 + n^2)\cdots(D^2 + 1^2)Df(t), \quad D = \frac{d}{dt}.$$

Задача состоит в построении тригонометрического полинома $T_{n+1}(t)$ порядка не выше $n+1$, для которого выполнялись бы условия

$$T_{n+1}(t_i) = f(t_i) \quad (i = \overline{0,2n}); \quad L_{2n+1}(T_{n+1};t_j) = L_{2n+1}(f;t_j). \tag{1.1}$$

Теорема 1.1. *Тригонометрический многочлен*

$$T_{n+1}(t) = H_n(t) + \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{\Omega_{n+1}(t)L_{2n+1}(f;t_j)}{\cos\frac{1}{2}\left((2n+1)t_j - \sum\limits_{k=0}^{2n} t_k\right)}, \tag{1.2}$$

где $H_n(t) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{2n}\frac{l_n(t)}{\sin\frac{1}{2}(t-t_k)l_n'(t_k)}f(t_k)$, $l_n(t) = \sin\frac{1}{2}(t-t_0)\sin\frac{1}{2}(t-t_1)\cdots\times$ $\times\sin\frac{1}{2}(t-t_{2n})$, $\Omega_{n+1}(t) = \cos\frac{1}{2}(t-t_j)l_n(t)$, $\cos\frac{1}{2}\left((2n+1)t_j - \sum\limits_{k=0}^{2n} t_k\right) \neq 0$, *степени не выше* $n+1$ *удовлетворяет условиям* (1.1).

Доказательство. Очевидно, что $H_n(t_i)=f(t_i)$ $(i=\overline{0,2n})$. Так как в произведение $\Omega_{n+1}(t)$ входят множители вида $\sin\frac{1}{2}(t-t_k)$, где $k=0,1,\ldots,2n$, то $\Omega_{n+1}(t_i)=0$ $(i=\overline{0,2n})$. Таким образом, первая группа условий (1.1) выполняется.

Многочлен $H_n(t)$ является тригонометрическим полиномом степени не выше n. И поскольку

$$L_{2n+1}\cos kt = L_{2n+1}\sin kt = 0 \quad (k=\overline{0,n}),$$

то в силу линейности оператора L_{2n+1} будем иметь $L_{2n+1}H_n(t)=0$.

Методом полной математической индукции покажем, что имеет место равенство

$$\prod_{k=0,\ k\neq j}^{2n}\sin\frac{1}{2}(t-t_k)=\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos\frac{1}{2}\left(2nt-\sum_{i=0,\ i\neq j}^{2n}t_i\right)+\widetilde{T}_{n-1}(t), \tag{1.3}$$

где $\widetilde{T}_{n-1}(t)$ – некоторый тригонометрический многочлен степени не выше $n-1$.

Не ограничивая общности рассуждений, для удобства будем считать, что $j=0$. Тогда при $n=1$ будем иметь

$$\sin\frac{1}{2}(t-t_1)\sin\frac{1}{2}(t-t_2)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2}(t_2-t_1)-\cos\frac{1}{2}(2t-t_1-t_2)\right)=$$

$$=\frac{(-1)^1}{2^{2\cdot 1-1}}\cos\frac{1}{2}(2t-t_1-t_2)+\widetilde{T}_0(t).$$

Предположим, что соотношение (1.3) верно при $n=m-1$, тогда при $n=m$ получим

$$\prod_{k=1}^{2m}\sin\frac{1}{2}(t-t_k)=\prod_{k=1}^{2m-2}\sin\frac{1}{2}(t-t_k)\sin\frac{1}{2}(t-t_{2m-1})\sin\frac{1}{2}(t-t_{2m})=$$

$$=\left(\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m-3}}\cos\frac{1}{2}\left(2(m-1)t-\sum_{i=1}^{2m-2}t_i\right)+\widetilde{T}_{m-2}(t)\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}(2t-t_{2m-1}-t_{2m})+\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}(t_{2m}-t_{2m-1})\right)=$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^{2m-2}}\cos\frac{1}{2}\left(2(m-1)t-\sum_{i=1}^{2m-2}t_i\right)\cos\frac{1}{2}(2t-t_{2m-1}-t_{2m})+\widetilde{T}_{m-1}(t)=$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}\left(\cos\frac{1}{2}\left(2mt-\sum_{i=1}^{2m}t_i\right)+\cos\frac{1}{2}\left(2(m-2)t-\sum_{i=1}^{2m-2}t_i+t_{2m-1}+t_{2m}\right)\right)=$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}\cos\frac{1}{2}\left(2mt-\sum_{i=1}^{2m}t_i\right)+\tilde{\tilde{T}}_{m-1}(t),$$

где $\tilde{\tilde{T}}_{m-1}(t)$ – соответствующий тригонометрический многочлен степени не выше $m-1$. Таким образом, показано, что равенство (1.3) справедливо для любого натурального *n*.

Используя соотношение (1.3), преобразуем далее функцию $\Omega_{n+1}(t)$.

$$\Omega_{n+1}(t)=\frac{1}{2}\sin(t-t_j)\prod_{k=0,\ k\neq j}^{2n}\sin\frac{1}{2}(t-t_k)=$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\left(-\sin\frac{1}{2}\left(t_j+\sum_{i=0}^{2n}t_i\right)\cos(n+1)t+\cos\frac{1}{2}\left(t_j+\sum_{i=0}^{2n}t_i\right)\sin(n+1)t\right)+\tilde{T}_n(t).$$

Так как $D\cos(n+1)t=-(n+1)\sin(n+1)t$ и при $k=1,2,\ldots,n$

$$(D^2+k^2)\sin(n+1)t=-[(n+1)^2-k^2]\sin(n+1)t,$$

то будем иметь, что $L_{2n+1}\cos(n+1)t=(-1)^{n+1}(2n+1)!\sin(n+1)t.$

Аналогично показываем, что поскольку $D\sin(n+1)t=(n+1)\cos(n+1)t$ и

$$(D^2+k^2)\cos(n+1)t=-[(n+1)^2-k^2]\cos(n+1)t,$$

то $L_{2n+1}\sin(n+1)t=(-1)^n(2n+1)!\cos(n+1)t.$

Кроме того, справедливо равенство $L_{2n+1}\tilde{T}_n(t)=0.$ Таким образом, получаем

$$L_{2n+1}\Omega_{n+1}(t)=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}}\left(\sin\frac{1}{2}\left(t_j+\sum_{i=0}^{2n}t_i\right)\sin(n+1)t+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{1}{2}\left(t_j+\sum_{i=0}^{2n}t_i\right)\cos(n+1)t\right)=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}}\cos\frac{1}{2}\left((2n+2)t-t_j-\sum_{i=0}^{2n}t_i\right). \qquad (1.4)$$

Окончательно, при подстановке узла t_j вместо *t* в формулу (1.4), с учетом предыдущих формул получим, что и вторая группа равенств (1.1) справедлива. Что и требовалось доказать.

Приведем явный вид тригонометрического полинома (1.2) для $n=1,2$.

1. Пусть в узлах $0=t_0<t_1<t_2<2\pi$ известны значения $f(t_i)$ функции $f(t)$. Кроме этого, в одном из узлов t_j известно значение оператора $L_3(f;t_j)$, где оператор $L_3f(t)=(D^2+1)Df(t)=f'''(t)+f'(t)$.

Тригонометрическим полиномом $T_2(t)$ второй степени, для которого выполнялись бы условия $T_2(t_i)=f(t_i)\quad(i=0,1,2);\quad L_3(T_2;t_j)=L_3(f;t_j)$, будет

$$T_2(t)=H_1(t)+\frac{4\Omega_2(t)L_3(f;t_j)}{3\cos\frac{1}{2}(3t_j-t_0-t_1-t_2)},$$

где

$$H_1(t)=\frac{\sin\frac{1}{2}(t-t_1)\sin\frac{1}{2}(t-t_2)}{\sin\frac{1}{2}(t_0-t_1)\sin\frac{1}{2}(t_0-t_2)}f(t_0)+\frac{\sin\frac{1}{2}(t-t_0)\sin\frac{1}{2}(t-t_2)}{\sin\frac{1}{2}(t_1-t_0)\sin\frac{1}{2}(t_1-t_2)}f(t_1)+$$

$$+\frac{\sin\frac{1}{2}(t-t_0)\sin\frac{1}{2}(t-t_1)}{\sin\frac{1}{2}(t_2-t_0)\sin\frac{1}{2}(t_2-t_1)}f(t_2),$$

$$\Omega_2(t)=\cos\frac{1}{2}(t-t_j)\sin\frac{1}{2}(t-t_0)\sin\frac{1}{2}(t-t_1)\sin\frac{1}{2}(t-t_2).$$

2. Пусть в узлах $0=t_0<t_1<t_2<t_3<t_4<2\pi$ известны значения $f(t_i)$ функции $f(t)$. А также в одном из узлов t_j известно значение оператора $L_5(f;t_j)$, имеющего вид

$$L_5f(t)=(D^2+4)(D^2+1)Df(t)=f^{(V)}(t)+5f'''(t)+4f'(t).$$

Полиномом $T_3(t)$ третьей степени, для которого выполняются условия $T_3(t_i)=f(t_i)\quad(i=\overline{0,4});\quad L_5(T_3;t_j)=L_5(f;t_j)$, является

$$T_3(t)=H_2(t)+\frac{4\Omega_3(t)L_5(f;t_j)}{15\cos\frac{1}{2}\left(5t_j-\sum_{k=0}^{4}t_k\right)},$$

где $H_2(t)=\sum_{k=0}^{4}\frac{l_2(t)}{2\sin\frac{1}{2}(t-t_k)l_2'(t_k)}f(t_k),\quad l_2(t)=\prod_{k=0}^{4}\sin\frac{1}{2}(t-t_k),$

$\Omega_3(t)=\cos\frac{1}{2}(t-t_j)\prod_{k=0}^{4}\sin\frac{1}{2}(t-t_k).$

Введем в рассмотрение тригонометрические многочлены вида:

$$C_n(t)=2^n(1-\cos t)^n\quad(n=0,1,2,\ldots);$$

$$S_n(t)=2^{n-1}\sin t(1-\cos t)^{n-1}=\frac{1}{2n}C_n'(t)\ (n=1,2,\ldots).$$

Определим дифференциальный оператор $L_{2n}(f;t)$ следующим образом:

$$L_{2n}(f;t) = (D^2+(n-1)^2)\cdots(D^2+2^2)(D^2+1^2)D^2 f(t) \equiv$$
$$\equiv D\big(L_{2n-1}(f;t)\big) \quad (n=1,2,3,\ldots),$$

где $D = \dfrac{d}{dt}$. Причем, будем считать, что $L_0(f;t) \equiv f(t)$.

Построим тригонометрический аналог формулы Тейлора.

Теорема 1.2. *Если функция* $f(t)$ *имеет на отрезке* $[0,2\pi]$ *абсолютно непрерывную производную порядка* $r-1$ $(r \ge 1)$, *то справедлив тригонометрический вариант формулы Тейлора вида*

$$f(t) = T_n(t) + R_{n+1}(t), \tag{1.5}$$

где при $r = 2n+1$

$$T_n(t) = f(a) + \frac{S_1(t-a)}{1!}L_1(f;a) + \frac{C_1(t-a)}{2!}L_2(f;a) +$$
$$+\ldots+ \frac{S_n(t-a)}{(2n-1)!}L_{2n-1}(f;a) + \frac{C_n(t-a)}{(2n)!}L_{2n}(f;a);$$

$$R_{n+1}(t) = \frac{1}{(2n)!}\int_a^t C_n(t-s)L_{2n+1}(f;s)ds,$$

а при $r = 2n$

$$T_n(t) = f(a) + \frac{S_1(t-a)}{1!}L_1(f;a) + \frac{C_1(t-a)}{2!}L_2(f;a) + \cdots + \frac{S_n(t-a)}{(2n-1)!}L_{2n-1}(f;a);$$

$$R_{n+1}(t) = \frac{1}{(2n-1)!}\int_a^t \left[S_n(t-s)L_{2n}(f;s) + \frac{n}{2}C_n(t-s)L_{2n-1}(f;s)\right]ds.$$

Доказательство. Докажем формулу методом математической индукции. При $r=1$ имеем

$$f(t) = T_0(t) + R_1(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)ds = f(t).$$

Далее, при $r=2$ имеем

$$f(t) = T_1(t) + R_2(t) = f(a) + \sin(t-a)f'(a) +$$
$$+\int_a^t \big[\sin(t-s)f''(s) + \big(1-\cos(t-s)\big)f'(s)\big]ds. \tag{1.6}$$

Вычислив по частям интеграл в (1.6), будем иметь

$$\int_a^t \left[\sin(t-s)f'''(s)+\left(1-\cos(t-s)\right)f'(s)\right]ds = -\sin(t-a)f'(a)+f(t)-f(a).$$

Подставляя данное выражение в (1.6), получим верное тождество. Таким образом, при $r=2$ формула (1.5) справедлива.

Пусть формула (1.5) верна для $r=m\geq 1$. Рассмотрим два случая: $m=2k+1$ и $m=2k$.

1) $m=2k+1$. Тогда по предположению справедлива формула:

$$f(t)=f(a)+\frac{S_1(t-a)}{1!}L_1(f;a)+\frac{C_1(t-a)}{2!}L_2(f;a)+\cdots+$$

$$+\frac{S_k(t-a)}{(2k-1)!}L_{2k-1}(f;a)+\frac{C_k(t-a)}{(2k)!}L_{2k}(f;a)+\frac{1}{(2k)!}\int_a^t C_k(t-s)L_{2k+1}(f;s)ds. \tag{1.7}$$

Докажем справедливость формулы (1.5) для $r=m+1=2k+2$. Разобьем интеграл в (1.7) на два

$$\frac{1}{(2k)!}\int_a^t C_k(t-s)L_{2k+1}(f;s)ds=$$

$$=\frac{1}{(2k)!}\int_a^t 2^k\left(1-\cos(t-s)\right)^k\left[\frac{k+1}{2k+1}\cos(t-s)+\frac{k}{2k+1}\right]L_{2k+1}(f;s)ds+$$

$$+\frac{1}{(2k)!}\int_a^t 2^k\left(1-\cos(t-s)\right)^k\left[\frac{k+1}{2k+1}\left(1-\cos(t-s)\right)\right]L_{2k+1}(f;s)ds,$$

а затем проинтегрируем первый из них по частям. Обозначим

$$u=L_{2k+1}(f;s);\quad dv=2^k\left(1-\cos(t-s)\right)^k\left[\frac{k+1}{2k+1}\cos(t-s)+\frac{k}{2k+1}\right]ds.$$

Продифференцировав по s левую и правую части выражения

$$\int 2^k\left(1-\cos(t-s)\right)^k\left[\frac{k+1}{2k+1}\cos(t-s)+\frac{k}{2k+1}\right]ds=$$

$$=-\frac{2^k\sin(t-s)\left(1-\cos(t-s)\right)^k}{2k+1}+c_k,\ c_k=const,\ k=0,1,2,...,$$

можно показать, что оно является тождеством. Тогда

$$du=L_{2k+2}(f;s)ds;\quad v=-\frac{2^k\sin(t-s)\left(1-\cos(t-s)\right)^k}{2k+1}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{(2k)!}\int_a^t C_k(t-s)L_{2k+1}(f;s)ds=\frac{S_{k+1}(t-a)}{(2k+1)!}L_{2k+1}(f;a)+$$

$$+\frac{1}{(2k+1)!}\int_a^t\left(S_{k+1}(t-s)L_{2k+2}(f;s)+\frac{k+1}{2}C_{k+1}(t-s)L_{2k+1}(f;s)\right)ds. \qquad (1.8)$$

Из (1.7) и (1.8) следует равенство (1.5) при $r=2k+2$.

2) Рассмотрим теперь случай, когда $m=2k$. Тогда также по предположению будет справедлива формула:

$$f(t)=f(a)+\frac{S_1(t-a)}{1!}L_1(f;a)+\frac{C_1(t-a)}{2!}L_2(f;a)+\cdots+\frac{S_k(t-a)}{(2k-1)!}L_{2k-1}(f;a)+$$

$$+\frac{1}{(2k-1)!}\int_a^t\left[S_k(t-s)\,L_{2k}(f;s)+\frac{k}{2}C_k(t-s)\,L_{2k-1}(f;s)\right]ds. \qquad (1.9)$$

Докажем справедливость формулы (1.5) для $r=m+1=2k+1$. Аналогично, разобьем интеграл в (1.9) на два

$$\frac{1}{(2k-1)!}\int_a^t\left[S_k(t-s)\,L_{2k}(f;s)+\frac{k}{2}C_k(t-s)\,L_{2k-1}(f;s)\right]ds=$$

$$=\frac{1}{(2k-1)!}\int_a^t 2^{k-1}\sin(t-s)\big(1-\cos(t-s)\big)^{k-1}L_{2k}(f;s)ds+$$

$$+\frac{1}{(2k-1)!}\int_a^t 2^{k-1}k\big(1-\cos(t-s)\big)^{k}L_{2k-1}(f;s)ds,$$

а затем проинтегрируем первый из них по частям. Имеем

$$u=L_{2k}(f;s);\quad dv=2^{k-1}\sin(t-s)\big(1-\cos(t-s)\big)^{k-1}ds;$$

$$du=DL_{2k}(f;s)ds;\quad v=-\frac{2^{k-1}}{k}\big(1-\cos(t-s)\big)^{k}.$$

Тогда

$$\frac{1}{(2k-1)!}\int_a^t\left[S_k(t-s)\,L_{2k}(f;s)+\frac{k}{2}C_k(t-s)\,L_{2k-1}(f;s)\right]ds=\frac{1}{(2k)!}C_k(t-a)\times$$

$$\times L_{2k}(f;a)+\frac{1}{(2k)!}\int_a^t\left[C_k(t-s)DL_{2k}(f;s)+k^2C_k(t-s)L_{2k-1}(f;s)\right]ds=$$

$$= \frac{1}{(2k)!} C_k(t-a) L_{2k}(f;a) + \frac{1}{(2k)!} \int_a^t C_k(t-s) L_{2k+1}(f;s)\, ds. \tag{1.10}$$

Аналогично, объединяя (1.9) и (1.10), получим равенство (1.5) при $r = 2k+1$. Таким образом, формула (1.5) верна для $r = m+1$. Следовательно, по методу математической индукции она справедлива для любого $r \in \mathbb{N}$. Теорема 1.2 доказана. Отметим, что другие виды формулы Тейлора рассмотрены в [38–40].

Замечание. Многочлен $H_n(t)$ из теоремы 1.1 можно представить в виде

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} f(t_k) \omega_{nk}(t), \tag{1.11}$$

где $\omega_{nk}(t)$ $\left(k = \overline{0, 2n}\right)$ – фундаментальные полиномы тригонометрического интерполирования: $\omega_{nk}(t) = \dfrac{l_n(t)}{2 \sin \frac{1}{2}(t - t_k) l_n'(t_k)}$, где $l_n(t)$ – тригонометрический многочлен, определенный в теореме 1.1.

Построим представление остаточного члена для формулы (1.2).

Теорема 1.3. *Если $f(t)$ имеет на $[0, 2\pi]$ абсолютно непрерывную производную порядка $2n$, то остаточный член формулы (1.2) имеет вид*

$$f(t) - T_{n+1}(t) = \frac{1}{(2n)!} \int_0^{2\pi} \left[K_n(t-s) - \sum_{k=0}^{2n} K_n(t_k - s) \omega_{nk}(t) \right] L_{2n+1}(f;s) ds -$$

$$- \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\Omega_{n+1}(t) L_{2n+1}(f;t_j)}{\cos \frac{1}{2}\left((2n+1) t_j - \sum_{k=0}^{2n} t_k \right)}, \tag{1.12}$$

где $K_n(u) = \begin{cases} 2^n (1 - \cos u)^n, & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$

Доказательство. По формуле (1.5) для $r = 2n+1$ и $a = 0$ имеем

$$f(t) = P_{2n}(t) + R_{2n+1}(t) = f(0) + \frac{S_1(t)}{1!} L_1(f;0) + \frac{C_1(t)}{2!} L_2(f;0) +$$

$$+ \cdots + \frac{S_n(t)}{(2n-1)!} L_{2n-1}(f;0) + \frac{C_n(t)}{(2n)!} L_{2n}(f;0) + \frac{1}{(2n)!} \int_0^t C_n(t-s) L_{2n+1}(f;s) ds.$$

В силу того, что функции $S_k(t)$ и $C_k(t)$ являются тригонометрическими многочленами степени k $(k=\overline{1,n})$, соответственно, по синусам и косинусам, будем иметь

$$f(t)=\widetilde{T}_n(t)+\frac{1}{(2n)!}\int\limits_0^{2\pi}K_n(t-s)L_{2n+1}(f;s)ds=\widetilde{T}_n(t)+R_{2n+1}(t), \tag{1.13}$$

где $\widetilde{T}_n(t)$ – некоторый тригонометрический многочлен степени не выше n.

Подставив (1.13) в (1.11), получим

$$H_n(t)=\sum_{k=0}^{2n}\widetilde{T}_n(t_k)\omega_{nk}(t)+\sum_{k=0}^{2n}R_{2n+1}(t_k)\omega_{nk}(t).$$

Как известно [38], формула (1.11) инвариантна относительно тригонометрических многочленов степени не выше n, поэтому будем иметь

$$H_n(t)=\widetilde{T}_n(t)+\sum_{k=0}^{2n}R_{2n+1}(t_k)\omega_{nk}(t).$$

Откуда

$$f(t)-H_n(t)=R_{2n+1}(t)-\sum_{k=0}^{2n}R_{2n+1}(t_k)\omega_{nk}(t). \tag{1.14}$$

Подставив в (1.14) интегральное представление для $R_{2n+1}(t)$, получим равенство

$$f(t)-H_n(t)=\frac{1}{(2n)!}\int\limits_0^{2\pi}\left[K_n(t-s)-\sum_{k=0}^{2n}K_n(t_k-s)\omega_{nk}(t)\right]L_{2n+1}(f;s)ds. \tag{1.15}$$

Из (1.15) и (1.2) окончательно получим представление остаточного члена для формулы (1.2) в виде (1.12). Теорема 1.3 доказана.

Введем следующие обозначения:

$$B_k^{(n)}=\left|\sin\frac{t_k-t_0}{2}\cdots\sin\frac{t_k-t_{k-1}}{2}\sin\frac{t_k-t_{k+1}}{2}\cdots\sin\frac{t_k-t_{2n}}{2}\right|,\quad (k=\overline{0,2n});$$

$$B_n=\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{B_k^{(n)}},\quad C_{n+1}=\frac{\left|L_{2n+1}(f;t_j)\right|}{\left|\cos\frac{1}{2}\left((2n+1)t_j-\sum\limits_{k=0}^{2n}t_k\right)\right|},\quad M_{2n+1}=\max_{\theta\in[0,2\pi)}\left|L_{2n+1}(f;\theta)\right|.$$

Теорема 1.4. *Оценка погрешности формулы* (1.2) *имеет вид:*

$$\left|f(t)-T_{n+1}(t)\right|\le\frac{2^{2n+1}}{(2n)!}\left[\pi(1+B_n)M_{2n+1}+\frac{C_{n+1}}{2n+1}\right].$$

Доказательство. С учетом обозначений будут справедливы следующие неравенства

$$\left|K_n(u)\right| \le 2^{2n},\ u \in \mathbb{R};\quad \left|\omega_{nk}(t)\right| \le \frac{1}{B_k^{(n)}},\quad \left|\Omega_{n+1}(t)\right| \le 1,\ t \in [0;2\pi). \tag{1.16}$$

Из (1.12) и (1.16) следует

$$\left|f(t) - T_{n+1}(t)\right| \le \frac{2\pi}{(2n)!}\left(2^{2n} + \sum_{k=0}^{2n}\frac{2^{2n}}{B_k^{(n)}}\right)M_{2n+1} + \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}C_{n+1} =$$

$$= \frac{2^{2n+1}}{(2n)!}\left[\pi\left(1 + B_n\right)M_{2n+1} + \frac{C_{n+1}}{2n+1}\right].$$

Теорема 1.4 доказана.

Проиллюстрируем применение и точность формулы (2.2) на конкретном примере. При этом коэффициенты многочленов здесь и далее даются с точностью числа их значащих цифр.

Пример. Пусть $f(t) = e^{\sin t}$. Рассмотрим частные случаи формулы (1.2) при $n = 1, 2, 3,$ соответственно, с узлами $t_k^n = \dfrac{2\pi k}{2n+1}$, $t_j^n = t_n^n$ $\left(k = \overline{0, 2n};\ n = 1, 2, 3\right)$. Для каждого случая известны значения интерполируемой функции $f(t)$ и дифференциального оператора $L_{2n+1}f(t)$ в соответствующих узлах. Тогда преобразованные аналитические выражения многочленов $T_2(t)$, $T_3(t)$ и $T_4(t)$ принимают вид

$$T_2(t) = 1{,}266 + 1{,}362\sin t + 0{,}1369\cos t + 0{,}2326\sin 2t - 0{,}4029\cos 2t;$$

$$T_3(t) = 1{,}266 + 1{,}130\sin t + 0{,}005429\cos t + 0{,}0500\sin 2t -$$
$$- 0{,}2541\cos 2t + 0{,}005658\sin 3t - 0{,}01741\cos 3t;$$

$$T_4(t) = 1{,}2661 + 1{,}1303\sin t - 0{,}000044778\cos t - 0{,}00054292\sin 2t -$$
$$- 0{,}27150\cos 2t - 0{,}045880\sin 3t - 0{,}0012884\cos 3t -$$
$$- 0{,}0015435\sin 4t + 0{,}0067627\cos 4t.$$

В данном случае и в примерах далее даются приближенные значения коэффициентов интерполяционных многочленов с округлением точных значений до последних десятичных разрядов, приведенных в работе.

Точность приближения этой функции данными многочленами иллюстрируется на графике (рис. 1.1). Сплошной линией изображено значение функции $f(t)$, штриховой – $T_2(t)$, штрих-пунктирной – $T_3(t)$, пунктирной – $T_4(t)$.

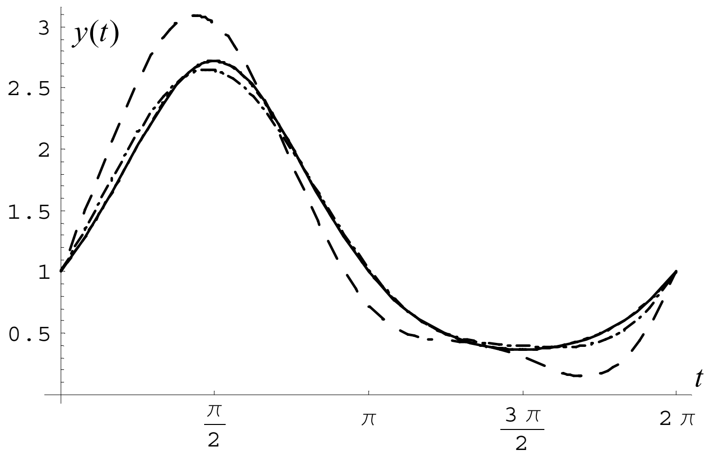


Рисунок 1.1.

Как видно из графика, интерполяционный многочлен $T_4(t)$ почти совпадает с интерполируемой функцией. Нормы невязок между функцией $f(t)$ и интерполяционными многочленами $T_{n+1}(t)$ $(n=1,2,3)$, найденные на основе соответствующих приближенных методов, равны

$$\|f(t)-T_2(t)\|_{C[0,2\pi]} = \max_{t\in[0,2\pi]}|f(t)-T_2(t)| = 0{,}5487;$$

$$\|f(t)-T_3(t)\|_{C[0,2\pi]} = 0{,}1148; \quad \|f(t)-T_4(t)\|_{C[0,2\pi]} = 0{,}004513.$$

Таким образом, с увеличением степени интерполяционного полинома вида (1.2) точность приближения в данном конкретном случае повышается.

§2. Интерполирование по системам рациональных функций

Пусть в узлах $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ известны значения $f(t_i)$ функции $f(t)$, $t\in\mathbb{R}$. Кроме этого, в одном из узлов t_j известно значение $\widehat{L}_{n+1}(f;t_j)$ дифференциального оператора вида

$$\widehat{L}_{n+1}f(t)=\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}[q_n(t)f(t)], \quad q_n(t)=(t+c_0)(t+c_1)\cdots(t+c_n),$$

а $0\le c_0<c_1<\ldots<c_n$ – некоторые неотрицательные действительные числа.

Другой вариант записи оператора таков [41]: $\widehat{L}_{n+1}f(t)=q_n(t)D_{n+1}f(t)$, где оператор D_{n+1} задается формулой

$$D_{n+1}f(t)=\left(\frac{d}{dt}+\sigma_n(t)\right)\left(\frac{d}{dt}+\sigma_{n-1}(t)\right)\cdots\left(\frac{d}{dt}+\sigma_0(t)\right)f(t),$$

$$\sigma_0(t)=\varphi_0(t),\quad \sigma_k(t)=k\varphi_k(t)+s_k(t),\quad s_k(t)=\sum_{i=0}^{k}\varphi_i(t)\quad (k=1,2,...,n+1),$$

а рациональные функции $\varphi_k(t)$ имеют вид

$$\varphi_k(t)=\frac{1}{t+c_k}\quad (t+c_k\neq 0,\quad k=0,1,...,n+1;\;\; t\in\mathbb{R}^+). \tag{2.1}$$

Ставится аналогичная задача: построить полином $\widetilde{L}_{n+1}(t)$ степени $n+1$ на базе рациональных функций (2.1), для которого выполнялись бы следующие условия:

$$\widetilde{L}_{n+1}(t_i)=f(t_i)\quad \left(i=\overline{0,n}\right);\qquad \widehat{L}_{n+1}\left(\widetilde{L}_{n+1};t_j\right)=\widehat{L}_{n+1}(f;t_j). \tag{2.2}$$

Положим $\omega_n(t)=(t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_n)$, $\delta_n=(t_0+c_{n+1})(t_1+c_{n+1})\cdots(t_n+c_{n+1})$.

Теорема 2.1. *Многочлен степени* $n+1$

$$\widetilde{L}_{n+1}(t)=L_n(t)+\frac{\omega_n(t)(t_j+c_{n+1})^{n+2}\widehat{L}_{n+1}(f;t_j)}{q_{n+1}(t)(n+1)!\delta_n}, \tag{2.3}$$

где

$$L_n(t)=\frac{1}{q_n(t)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_n(t)q_n(t_k)}{\omega_n'(t_k)(t-t_k)}f(t_k), \tag{2.4}$$

удовлетворяет условиям (2.2).

Доказательство. Действительно, нетрудно проверить, что выполняются условия $L_n(t_i)=f(t_i)$; $\omega_n(t_i)=0$ $(i=\overline{0,n})$. Из этого следует выполнение первой группы равенств (2.2).

Многочлен (2.4) можно представить в виде $L_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{t+c_k}$, где $a_0,a_1,\ldots,a_n$ – некоторые действительные числа. Применим далее оператор $\widehat{L}_{n+1}$ к базисным функциям $\varphi_k(t)$ $(k=\overline{0,n})$:

$$\widehat{L}_{n+1}\varphi_k(t)=\widehat{L}_{n+1}\left(\frac{1}{t+c_k}\right)=\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[\frac{q_n(t)}{t+c_k}\right]=\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[\frac{(t+c_0)(t+c_1)\cdots(t+c_n)}{t+c_k}\right]=$$

$$=\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[(t+c_0)(t+c_1)\cdots(t+c_{k-1})(t+c_{k+1})\cdots(t+c_n)\right]=\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[P_n^k(t)\right]=0,$$

где $P_n^k(t)$ – алгебраический многочлен степени *n*. Поэтому, применяя теперь оператор $\widehat{L}_{n+1}$ к полиному $L_n(t)$, получим, что

$$\widehat{L}_{n+1}L_n(t)=0. \tag{2.5}$$

Нетрудно показать, что выполняется следующее соотношение $\frac{\omega_n(t)}{t+c_{n+1}} = P_n(t) + \frac{(-1)^{n+1}\delta_n}{t+c_{n+1}}$, где $P_n(t)$ – алгебраический многочлен степени n. Тогда так как $P_n^{(n+1)}(t) \equiv 0$, то

$$\widehat{L}_{n+1}\left(\frac{\omega_n(t)}{q_{n+1}(t)}\right) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[\frac{\omega_n(t)}{t+c_{n+1}}\right] = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[\frac{(-1)^{n+1}\delta_n}{t+c_{n+1}}\right] = \frac{(n+1)!\delta_n}{(t+c_{n+1})^{n+2}},$$

и, следовательно,

$$\widehat{L}_{n+1}\left(\frac{\omega_n(t)(t_j+c_{n+1})^{n+2}\widehat{L}_{n+1}(f;t_j)}{q_{n+1}(t)(n+1)!\delta_n};t_j\right) = \widehat{L}_{n+1}(f;t_j). \tag{2.6}$$

Учитывая (2.5) и (2.6), получаем, что второе равенство в (2.2) имеет место. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим интерполяционный полином (2.3) для $n = 1, 2$.

1. Пусть заданы различные узлы t_0 и t_1, и в этих узлах известны значения $f(t_i)$ функции $f(t)$, а также значение оператора $\widehat{L}_2(f;t_j)$ в одном из узлов t_j, где $\widehat{L}_2 f(t) = (t+c_0)(t+c_1)f''(t) + 2(2t+c_0+c_1)f'(t) + 2f(t)$.

Полиномом $\widetilde{L}_2(t)$ второй степени относительно рациональных функций $\varphi_k(t) = \frac{1}{t+c_k}$ $(k = 0,1)$, для которого выполнялись бы условия

$$\widetilde{L}_2(t_i) = f(t_i) \quad (i = 0,1); \quad \widehat{L}_2\left(\widetilde{L}_2;t_j\right) = \widehat{L}_2(f;t_j),$$

будет

$$\widetilde{L}_2(t) = L_1(t) + \frac{\omega_1(t)(t_j+c_2)^3\widehat{L}_2(f;t_j)}{2q_2(t)(t_0+c_2)(t_1+c_2)},$$

где $$L_1(t) = \frac{q_1(t_0)}{q_1(t)}\frac{t-t_1}{t_0-t_1}f(t_0) + \frac{q_1(t_1)}{q_1(t)}\frac{t-t_0}{t_1-t_0}f(t_1), \qquad \omega_1(t) = (t-t_0)(t-t_1),$$
$q_1(t) = (t+c_0)(t+c_1)$, $q_2(t) = q_1(t)(t+c_2)$. При этом $q_2(t) \neq 0$ на полуоси $[0;\infty)$.

2. В случае трех узлов $t_0 < t_1 < t_2$ имеем

$$\widehat{L}_3 f(t) = (t+c_0)(t+c_1)(t+c_2)f'''(t) + 3\big((t+c_0)(t+c_1) + (t+c_0)(t+c_2) +$$
$$+ (t+c_1)(t+c_2)\big)f''(t) + 6(3t+c_0+c_1+c_2)f'(t) + 6f(t).$$

И соответственно

$$\widetilde{L}_3(t) = L_2(t) + \frac{\omega_2(t)(t_j+c_3)^4\widehat{L}_3(f;t_j)}{6q_3(t)(t_0+c_3)(t_1+c_3)(t_2+c_3)},$$

где $L_2(t)=\dfrac{1}{q_2(t)}\sum_{k=0}^{2}\dfrac{\omega_2(t)q_2(t_k)}{\omega_2'(t_k)(t-t_k)}f(t_k),\ \omega_2(t)=\omega_1(t)(t-t_2),\ q_3(t)=q_2(t)(t+c_3).$

Построим остаточный член для интерполяционного полинома (2.3).

Лемма 2.1. *Пусть* $(n+1)$*-непрерывно-дифференцируемая на отрезке* $[a,b]$ *функция* $f(t)$ *имеет на этом промежутке* $n+2$ *нулей. Тогда на отрезке* $[a,b]$ *найдется такая точка* ξ, *что функция* $\widehat{L}_{n+1}(f;t)$, *входящая в интерполяционную формулу* (2.3), *обращается в нуль в этой точке.*

Доказательство. Выберем произвольное $n\geq 0$. По условию леммы функция $f(t)$ дифференцируема $n+1$ раз на отрезке $[a,b]$ и имеет на этом промежутке $n+2$ нулей. Тогда очевидно, что функция $g_n(t)=q_n(t)f(t)$ также является дифференцируемой $n+1$ раз на отрезке $[a,b]$ и имеет на этом промежутке не менее $n+2$ нулей. По одному из следствий теоремы Ролля функция $g_n^{(n+1)}(t)$ обращается в нуль в некоторой точке ξ из отрезка $[a,b]$. Но $g_n^{(n+1)}(t)\equiv\widehat{L}_{n+1}(f;t)$. Поэтому, $\widehat{L}_{n+1}(f;\xi)=0$.

Теорема 2.2. *Если функция* $f(t)$ *дифференцируема* $n+1$ *раз на отрезке* $[a,b]$, *то остаточный член формулы* (2.3) *имеет вид*

$$R_{n+1}(t)=f(t)-\widetilde{L}_{n+1}(t)=\frac{\omega_n(t)}{q_n(t)(n+1)!}\left(\widehat{L}_{n+1}(f;\xi)-\frac{(t_j+c_{n+1})^{n+2}\widehat{L}_{n+1}(f;t_j)}{(t+c_{n+1})\delta_n}\right), \tag{2.7}$$

где $\xi\in[a;b]$.

Доказательство. Пусть t – фиксированная точка из $[a,b]$, не совпадающая ни с одним из узлов $t_0,t_1,\ldots,t_n$. Обозначим $K=\dfrac{\big(f(t)-L_n(t)\big)q_n(t)}{\omega_n(t)}$, и пусть $\psi(x)=f(x)-L_n(x)-K\dfrac{\omega_n(x)}{q_n(x)}$. Так как $\widehat{L}_{n+1}\left\{\dfrac{\omega_n(x)}{q_n(x)}\right\}=(n+1)!$, то имеем $\widehat{L}_{n+1}(\psi;x)=\widehat{L}_{n+1}(f;x)-K(n+1)!$ Очевидно, $\psi(t_0)=\psi(t_1)=\ldots=\psi(t_n)=0$, кроме того, $\psi(t)=0$. По лемме 2.1 функция $\widehat{L}_{n+1}(\psi;x)$ имеет один нуль (обозначим его ξ) на отрезке $[a,b]$: $\widehat{L}_{n+1}(\psi;\xi)=0$, откуда $K=\dfrac{\widehat{L}_{n+1}(f;\xi)}{(n+1)!}$, и следовательно

$$f(t)-L_n(t)=K\frac{\omega_n(t)}{q_n(t)}=\frac{\widehat{L}_{n+1}(f;\xi)\omega_n(t)}{q_n(t)(n+1)!}.$$

Тогда

$$R_{n+1}(t)=f(t)-\widetilde{L}_{n+1}(t)=\frac{\widehat{L}_{n+1}(f;\xi)\omega_n(t)}{q_n(t)(n+1)!}-\frac{\omega_n(t)(t_j+c_{n+1})^{n+2}\widehat{L}_{n+1}(f;t_j)}{q_{n+1}(t)(n+1)!\delta_n}=$$

$$= \frac{\omega_n(t)}{q_n(t)(n+1)!}\left(\widehat{L}_{n+1}(f;\xi) - \frac{(t_j + c_{n+1})^{n+2}\, \widehat{L}_{n+1}(f;t_j)}{(t + c_{n+1})\delta_n} \right).$$

Теорема 2.2 доказана.

Далее, получим оценку погрешности формулы (2.3). Введем обозначения: $B_n = (a+c_0)(a+c_1)\cdots(a+c_n)$, $M_{n+1} = \max\limits_{\theta\in[a,b]} \widehat{L}_{n+1}(f;\theta)$.

Теорема 2.3. *Оценка погрешности формулы* (2.3) *для любого* $t \in [a,b]$ *имеет вид:*

$$\left| f(t) - \widetilde{L}_{n+1}(t) \right| \le \frac{(b-a)^{n+1} M_{n+1}}{B_n\,(n+1)!}\left[1 + \frac{(t_j + c_{n+1})^{n+2}}{(a + c_{n+1})\delta_n} \right]. \tag{2.8}$$

Доказательство. Так как по построению формулы (2.3) предполагается, что $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$ и $0 < c_0 < c_1 < \dots < c_n$, то будет справедливо неравенство: $|q_n(t)| \ge B_n$, $t \in [a,b]$. Очевидно, что $|\omega_n(t)| \le (b-a)^{n+1}$, $t \in [a,b]$.

Учитывая данные оценки и равенство (2.7), получим (2.8). Теорема 2.3 доказана.

Пример 2.1. Пусть $f(t) = e^{\frac{1}{t+2}}$. Рассмотрим частные случаи формулы (2.3) при $n = 1,2,3,$ соответственно, с узлами $t_k^n = -1 + 2k/n$, $t_j^n = t^n_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$, где $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ – целая часть числа $\dfrac{n+1}{2}$ $\left(k = \overline{0,n};\ n = 1,2,3\right)$. Интерполяционные многочлены в данном случае примут вид

$$\widetilde{L}_2(t) = \frac{12{,}70}{t+2} - \frac{63{,}04}{t+3} + \frac{64{,}61}{t+4}, \quad \widetilde{L}_3(t) = \frac{2{,}685}{t+2} + \frac{19{,}01}{t+3} - \frac{92{,}82}{t+4} + \frac{85{,}87}{t+5},$$

$$\widetilde{L}_4(t) = \frac{7{,}8841}{t+2} - \frac{98{,}572}{t+3} + \frac{477{,}09}{t+4} - \frac{845{,}96}{t+5} + \frac{482{,}91}{t+6}.$$

Точность приближения функции $f(t)$ данными многочленами иллюстрируется на графике (рис. 2.1). Сплошная линия – график этой функции, штриховая – $\widetilde{L}_2(t)$, штрих-пунктирная – $\widetilde{L}_3(t)$, пунктирной – $\widetilde{L}_4(t)$.

Интерполяционные многочлены $\widetilde{L}_3(t)$ и $\widetilde{L}_4(t)$ достаточно точно описывают поведение функции $f(t)$ на отрезке $[-1,1]$. Нормы невязок между функцией $f(t)$ и интерполяционными многочленами $\widetilde{L}_2(t)$, $\widetilde{L}_3(t)$ и $\widetilde{L}_4(t)$, вычисленные такими же методами, как и ранее, равны

$$\left\| f(t) - \widetilde{L}_2(t) \right\|_{C[-1,1]} = \max_{t\in[-1,1]} \left| f(t) - \widetilde{L}_2(t) \right| = 0{,}236748;$$

$$\left\| f(t) - \widetilde{L}_3(t) \right\|_{C[-1,1]} = 0{,}0171394; \quad \left\| f(t) - \widetilde{L}_4(t) \right\|_{C[-1,1]} = 0{,}00101163.$$

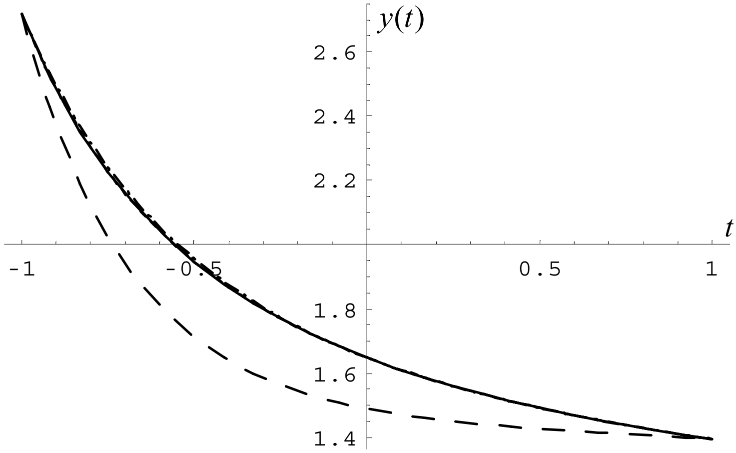


Рисунок 2.1.

В данном случае с увеличением степени интерполяционного полинома вида (2.3) точность приближения повышается более чем на один порядок.

Рассмотрим аналогичную задачу интерполирования и построим интерполяционный полином $\widetilde{L}_{n+1}(t)$ степени $n+1$, на базе рациональных функций вида

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{(t+c)^k} \quad (k = 0,1,\ldots,n+1;\ t \in \mathbb{R}^+,\ c > 0),$$

для которого выполнялись бы условия

$$\widetilde{L}_{n+1}(t_i) = f(t_i) \quad (i = \overline{0,n}); \quad \widehat{L}_{n+1}\left(\widetilde{L}_{n+1};t_j\right) = \widehat{L}_{n+1}(f;t_j), \tag{2.9}$$

где дифференциальный оператор $\widehat{L}_{n+1}$ задается формулой

$$\widehat{L}_{n+1}f(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}[(t+c)^n f(t)], \tag{2.10}$$

причем в развернутой форме оператор (2.10) имеет вид

$$\widehat{L}_{n+1}f(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{n!(n+1)!(t+c)^{i-1} f^{(i)}(t)}{(i-1)!(n+1-i)!i!}.$$

Теорема 2.4. *Многочлен степени* $n+1$

$$\widetilde{L}_{n+1}(t) = L_n(t) + \frac{\omega_n(t)(t_j+c)^{n+2}\,\widehat{L}_{n+1}(f;t_j)}{(t+c)^{n+1}(n+1)!c_n}, \tag{2.11}$$

где

$$L_n(t)=\frac{1}{(t+c)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_n(t)(t_k+c)^n}{(t-t_k)\omega_n'(t_k)}f(t_k),\quad c_n=(t_0+c)(t_1+c)\cdots(t_n+c),$$

удовлетворяет условиям (2.9).

Доказательство. Нетрудно проверить, что для $i=0,1,\ldots,n$ равенства $L_n(t_i)=f(t_i);\ \omega_n(t_i)=0$ являются верными, а из этого следует выполнение первой группы условий в (2.9).

Так как при $k=0,1,\ldots,n$

$$\widehat{L}_{n+1}\varphi_k(t)=\widehat{L}_{n+1}\left(\frac{1}{(t+c)^k}\right)=\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[(t+c)^{n-k}\right]=0, \tag{2.12}$$

то в силу возможности представления многочлена $L_n(t)$ в виде $L_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{(t+c)^k}$, где $a_0,a_1,\ldots,a_n$ – соответствующие действительные числа, будем иметь

$$\widehat{L}_{n+1}L_n(t)=0. \tag{2.13}$$

Используя разложение $\omega_n(t)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\omega_n^{(k)}(-c)}{k!}(t+c)^k$, а также равенства (2.12), получим

$$\widehat{L}_{n+1}\left(\frac{\omega_n(t)}{(t+c)^{n+1}}\right)=\widehat{L}_{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\omega_n^{(k)}(-c)}{k!(t+c)^{n-k+1}}\right)=\widehat{L}_{n+1}\left(\frac{\omega_n(-c)}{(t+c)^{n+1}}\right)=\omega_n(-c)\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[\frac{1}{t+c}\right]. \tag{2.14}$$

Так как $\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[\frac{1}{t+c}\right]=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(t+c)^{n+2}}$, а $\omega_n(-c)=(-1)^{n+1}c_n$, то учитывая (2.14), будем иметь $\widehat{L}_{n+1}\left(\frac{\omega_n(t)}{(t+c)^{n+1}}\right)=\frac{(n+1)!c_n}{(t+c)^{n+2}}$.

Окончательно получаем, что

$$\widehat{L}_{n+1}\left(\frac{\omega_n(t)(t_j+c)^{n+2}\widehat{L}_{n+1}(f;t_j)}{(t+c)^{n+1}(n+1)!c_n}\right)=\widehat{L}_{n+1}(f;t_j). \tag{2.15}$$

Из (2.13) и (2.15) следует выполнение второго условия в (2.9). Теорема 2.4 доказана.

Рассмотрим частные случаи интерполяционного полинома (2.11).

1. В случае двух узлов t_0 и t_1 оператор $\widehat{L}_2$ имеет вид $\widehat{L}_2 f(t)=(t+c)f''(t)+2f'(t)$.

Интерполяционным полиномом $\widetilde{L}_2(t)$ второй степени на базе рациональных функций вида $\varphi_k(t)=\dfrac{1}{(t+c)^k}$ $(k=0,1)$, для которого выполнялись бы следующие условия:

$$\widetilde{L}_2(t_i)=f(t_i)\quad (i=0,1);\quad \widehat{L}_2\left(\widetilde{L}_2;t_j\right)=\widehat{L}_2(f;t_j),$$

будет

$$\widetilde{L}_2(t)=L_1(t)+\frac{\omega_1(t)(t_j+c)^3\widehat{L}_2(f;t_j)}{2(t+c)^2(t_0+c)(t_1+c)},$$

где

$$L_1(t)=\frac{t_0+c}{t+c}\frac{t-t_1}{t_0-t_1}f(t_0)+\frac{t_1+c}{t+c}\frac{t-t_0}{t_1-t_0}f(t_1),\quad \omega_1(t)=(t-t_0)(t-t_1).$$

2. В квадратичном случае оператор $\widehat{L}_3$ имеет вид $\widehat{L}_3 f(t)=(t+c)^2 f'''(t)+$ $+6(t+c)f''(t)+6f'(t)$, а соответствующим интерполяционным многочленом будет

$$\widetilde{L}_3(t)=L_2(t)+\frac{\omega_2(t)(t_j+c)^4\widehat{L}_3(f;t_j)}{6(t+c)^3c_2},$$

где $L_2(t)=\dfrac{1}{(t+c)^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{2}\frac{\omega_2(t)(t_k+c)^2}{(t-t_k)\omega_2'(t_k)}f(t_k)$, $\quad\omega_2(t)=\omega_1(t)(t-t_2)$,
$c_2=(c+t_0)(c+t_1)(c+t_2)$.

Построим представление остаточного члена и оценку погрешности для полинома (2.11).

Лемма 2.2. *Пусть* $(n+1)$*-непрерывно-дифференцируемая на отрезке* $[a,b]$ *функция* $f(t)$ *имеет на этом промежутке* $n+2$ *нулей. Тогда на данном отрезке найдется такая точка* ξ, *в которой функция* $\widehat{L}_{n+1}(f;t)$, *определяемая формулой* (2.10), *обращается в нуль.*

Доказательство. Выберем произвольное $n\geq 0$. По условию леммы функция $f(t)$ дифференцируема $n+1$ раз на отрезке $[a,b]$ и имеет на этом промежутке $n+2$ нулей. Тогда очевидно, что функция $g_n(t)=(t+c)^n f(t)$ также является дифференцируемой $n+1$ раз на отрезке $[a,b]$ и имеет на этом промежутке не менее $n+2$ нулей. По следствию теоремы Ролля функция $g_n^{(n+1)}(t)$ обращается в нуль в некоторой точке ξ из отрезка $[a,b]$. Так как $g_n^{(n+1)}(t)\equiv\widehat{L}_{n+1}(f;t)$, то $\widehat{L}_{n+1}(f;\xi)=0$.

Теорема 2.5. *Если функция* $f(t)$ *дифференцируема* $n+2$ *раз на отрезке* $[a,b]$, *то остаточный член формулы* (2.11) *имеет вид*

$$R_{n+1}(t)=f(t)-\widehat{L}_{n+1}(t)=\frac{\omega_n(t)(\xi-t_j)}{(n+1)!(t+c)^{n+1}c_n}\frac{d}{dt}\left\{(t+c)^{n+2}\widehat{L}_{n+1}(f;t)\right\}\Big|_{t=\eta}, \quad (2.16)$$

где $\xi,\eta\in[a;b]$.

Доказательство. Пусть, как и ранее, $t\in[a,b]$, $t\neq t_k$ $(k=\overline{0,n})$. Обозначим $K=\frac{(f(t)-L_n(t))(t+c)^{n+1}}{\omega_n(t)}$, и пусть $\psi(x)=f(x)-L_n(x)-K\frac{\omega_n(x)}{(x+c)^{n+1}}$. Тогда из свойств оператора $\widehat{L}_{n+1}$ будем иметь

$$\widehat{L}_{n+1}(\psi;x)=\widehat{L}_{n+1}(f;x)-K\frac{(n+1)!c_n}{(x+c)^{n+2}}.$$

Далее, $\psi(t_0)=\psi(t_1)=\ldots=\psi(t_n)=\psi(t)=0$. По лемме 2.2 функция $\widehat{L}_{n+1}(\psi;x)$ имеет, по крайней мере, один нуль ξ на отрезке $[a,b]$: $\widehat{L}_{n+1}(\psi;\xi)=0$, откуда $K=\frac{\widehat{L}_{n+1}(f;\xi)(\xi+c)^{n+2}}{(n+1)!c_n}$, и следовательно

$$f(t)-L_n(t)=K\frac{\omega_n(t)}{(t+c)^{n+1}}=\frac{(\xi+c)^{n+2}\widehat{L}_{n+1}(f;\xi)\omega_n(t)}{(n+1)!(t+c)^{n+1}c_n}.$$

Тогда применяя для функции $\phi_n(t)=(t+c)^{n+2}\widehat{L}_{n+1}(f;t)$ теорему Лагранжа, получим

$$R_{n+1}(t)=f(t)-\widetilde{L}_{n+1}(t)=\frac{\omega_n(t)}{(n+1)!(t+c)^{n+1}c_n}\Big((\xi+c)^{n+2}\widehat{L}_{n+1}(f;\xi)-$$

$$-(t_j+c)^{n+2}\widehat{L}_{n+1}(f;t_j)\Big)=\frac{\omega_n(t)(\xi-t_j)}{(n+1)!(t+c)^{n+1}c_n}\frac{d}{dt}\left\{(t+c)^{n+2}\widehat{L}_{n+1}(f;t)\right\}\Big|_{t=\eta},$$

где η – некоторая точка отрезка $[a,b]$. Теорема 2.5 доказана.

Преобразуем правую часть равества (2.16):

$$R_{n+1}(t)=\frac{\omega_n(t)(\xi-t_j)(\eta+c)^{n+1}}{(n+1)!(t+c)^{n+1}c_n}\left[(n+2)\widehat{L}_{n+1}(f;\eta)+(\eta+c)\frac{d}{dt}\widehat{L}_{n+1}(f;t)\Big|_{t=\eta}\right]. \quad (2.17)$$

Введем обозначения: $M_{n+1}=\max\limits_{t\in[a,b]}\left|\widehat{L}_{n+1}f(t)\right|$, $B_{n+1}=\max\limits_{t\in[a,b]}\left|\frac{d}{dt}\widehat{L}_{n+1}(f;t)\right|$.

Теорема 2.6. *Оценка погрешности формулы* (2.11) *для любого* $t\in[a,b]$ *имеет вид:*

$$\left|f(t)-\widetilde{L}_{n+1}(t)\right|\le\frac{(b-a)^{n+2}(b+c)^{n+1}}{(n+1)!(a+c)^{n+1}c_n}\left[(n+2)M_{n+1}+(b+c)B_{n+1}\right]. \quad (2.18)$$

Доказательство. Как и ранее, будут справедливы неравенства: $|\omega_n(t)| \le (b-a)^{n+1}$, $t \in [a,b]$ и $|\xi - t_j| \le b-a$. Так как $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$ и $c > 0$, то справедливы также неравенства: $|\eta + c| \le b + c$, $|t+c| \ge a + c$, $\eta, t \in [a,b]$. Учитывая данные неравенства и (2.17), получим оценку (2.18).

Пример 2.2. Пусть $f(t) = \sqrt{\sin\left(e^{\frac{2}{2t+3}}\right)}$. Рассмотрим частные случаи формулы (2.11) при $n = 1,2,3,$ соответственно, с узлами $t_k^n = \dfrac{3k}{n}$, $t_j^n = t^n_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$, $\left(k = \overline{0,n};\ n = 1,2,3\right)$. Интерполяционные многочлены в данном случае примут вид

$$\widetilde{L}_2(t) = 0{,}9345 + \frac{0{,}4887}{2t+3} - \frac{1{,}198}{(2t+3)^2},$$

$$\widetilde{L}_3(t) = 0{,}9179 + \frac{0{,}55389}{2t+3} - \frac{0{,}046011}{(2t+3)^2} - \frac{3{,}5961}{(2t+3)^3},$$

$$\widetilde{L}_4(t) = 0{,}917904 + \frac{0{,}579678}{2t+3} - \frac{0{,}505933}{(2t+3)^2} - \frac{1{,}06641}{(2t+3)^3} - \frac{4{,}14388}{(2t+3)^4}.$$

Точность приближения интерполируемой функции данными многочленами иллюстрируется на графике (рис. 2.2). Сплошной линией изобразим интерполируемую функцию $f(t)$, штриховой – $\widetilde{L}_2(t)$, штрих-пунктирной – $\widetilde{L}_3(t)$, пунктирной – $\widetilde{L}_4(t)$.

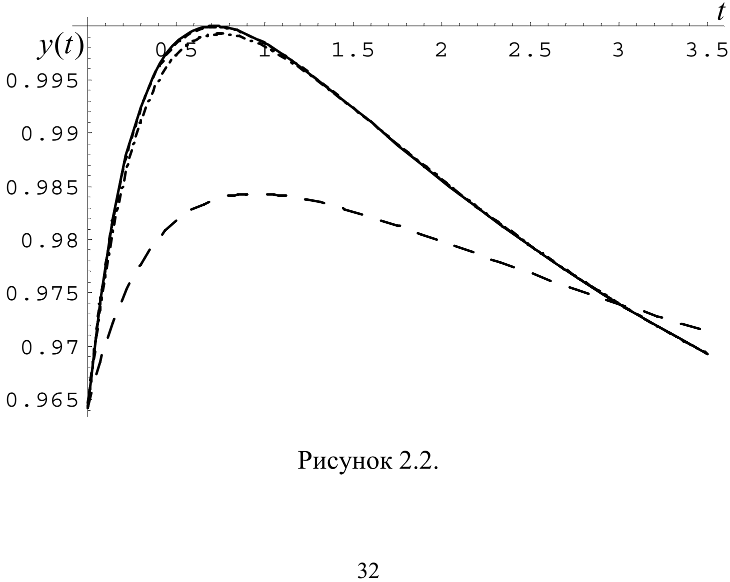


Рисунок 2.2.

Как и на предыдущих рисунках этого приложения, интерполяционные многочлены $\widetilde{L}_3(t)$ и $\widetilde{L}_4(t)$ практически совпадают с интерполируемой функцией. Нормы невязок между функцией $f(t)$ и интерполяционными многочленами равны

$$\left\| f(t)-\widetilde{L}_2(t) \right\|_{C[0,3]} = \max_{t\in[0,3]} \left| f(t)-\widetilde{L}_2(t) \right| = 0{,}01677;$$

$$\left\| f(t)-\widetilde{L}_3(t) \right\|_{C[0,3]} = 0{,}001432; \quad \left\| f(t)-\widetilde{L}_4(t) \right\|_{C[0,3]} = 0{,}0002544.$$

Таким образом, с увеличением порядка интерполяционного полинома вида (2.11) в данном конкретном случае точность приближения повышается почти на один порядок.

§3. Экспоненциальное интерполирование

Пусть имеется, как и раньше, совокупность узлов $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, а также заданы действительные числа $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n+1}$. В узлах известны значения $f(x_i)$ $(i=\overline{0,n})$ функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Кроме этого, в одном из узлов x_j известно значение оператора $D_{n+1}(f;x_j)$, где D_{n+1} является дифференциальным оператором вида

$$D_{n+1}f(x) = D(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_n)f(x),$$

где, как и раньше, $D = \dfrac{d}{dx}$.

Функцию $f(x)$ будем интерполировать с помощью обобщенных полиномов относительно экспоненциальных функций вида $\varphi_k(x) = e^{\lambda_k x}$ $(k=\overline{0,n+1})$. Построим многочлен $\widetilde{L}_{n+1}(x)$ степени $n+1$, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$\widetilde{L}_{n+1}(x_k) = f(x_k) \quad (k=\overline{0,n}); \quad D_{n+1}\left(\widetilde{L}_{n+1};x_j\right) = D_{n+1}(f;x_j). \tag{3.1}$$

Введем следующие функции $g_m(y_0, y_1, \ldots, y_m)$, заданные рекуррентными соотношениями

$$g_0(y_0) = -1, \quad g_1(y_0,y_1) = g_0(y_1)e^{\lambda_1 y_0} - g_0(y_0)e^{\lambda_1 y_1} = e^{\lambda_1 y_1} - e^{\lambda_1 y_0},$$

$$g_2(y_0,y_1,y_2) = -g_1(y_1,y_2)e^{\lambda_2 y_0} + g_1(y_0,y_2)e^{\lambda_2 y_1} - g_1(y_0,y_1)e^{\lambda_2 y_2},$$

$$g_3(y_0,y_1,y_2,y_3) = g_2(y_1,y_2,y_3)e^{\lambda_3 y_0} - g_2(y_0,y_2,y_3)e^{\lambda_3 y_1} +$$
$$+ g_2(y_0,y_1,y_3)e^{\lambda_3 y_2} - g_2(y_0,y_1,y_2)e^{\lambda_3 y_3}$$

и в общем случае

$$g_n(y_0, y_1, \ldots, y_n) = (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k g_{n-1}(y_0, \ldots y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n) e^{\lambda_n y_k} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Приведем две леммы, которые понадобятся в дальнейших рассуждениях.

Лемма 3.1. *При перестановке любых двух соседних аргументов* y_k, y_{k+1} *местами функция* $g_n(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ *меняет знак на противоположный:*

$$g_n(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, y_k, y_{k+2}, \ldots, y_n) = -g_n(y_0, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n).$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. При $n = 1$ имеет место равенство $g_1(y_1, y_0) = -g_1(y_0, y_1)$. Предположим, что при $n = m$ данное утверждение верно, т. е. для любого $0 \le k \le m - 1$

$$g_m(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, y_k, y_{k+2}, \ldots, y_m) = -g_m(y_0, y_1, \ldots, y_m).$$

Выберем произвольное $0 \le p \le m.$ Тогда при $n = m + 1$ получаем, что

$$g_{m+1}(y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}, y_{p+1}, y_p, y_{p+2}, \ldots, y_{m+1}) =$$

$$= (-1)^m \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k g_m(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_{p-1}, y_{p+1}, y_p, y_{p+2}, \ldots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_k} +$$

$$+ (-1)^{m+p} g_m(y_0, y_1, \ldots, y_p, y_{p+2}, \ldots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_{p+1}} +$$

$$+ (-1)^{m+p+1} g_m(y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}, y_{p+1}, \ldots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_p} +$$

$$+ (-1)^m \sum_{k=p+2}^{m+1} (-1)^k g_m(y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}, y_{p+1}, y_p, y_{p+2}, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_k} =$$

$$= -(-1)^m \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k g_m(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_k} -$$

$$- (-1)^{m+p} g_m(y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}, y_{p+1}, \ldots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_p} -$$

$$- (-1)^{m+p+1} g_m(y_0, y_1, \ldots, y_p, y_{p+2}, \ldots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_{p+1}} -$$

$$- (-1)^m \sum_{k=p+2}^{m+1} (-1)^k g_m(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_k} =$$

$$= -(-1)^m \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k g_m(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_k} = -g_{m+1}(y_0, y_1, \ldots, y_{m+1}). \tag{3.2}$$

Равенство (3.2) имеет место для $0 \le k \le m.$ Отсюда следует справедливость леммы 3.1.

Лемма 3.2. *Для любых вещественных чисел* $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ *и любых* i *и* n $(0 \le i \le n-1,\ n \ge 1)$ *справедливо равенство*

$$g_n(y_i, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) = 0.$$

Доказательство. Также как и в доказательстве предыдущей леммы применим метод математической индукции. При $n=1$ получим

$$g_1(y_0, y_0) = e^{\lambda_1 y_0} - e^{\lambda_1 y_0} = 0.$$

Предположим, что при $n=m$ утверждение верно, т. е. для любого $0 \le i \le m-1$

$$g_m(y_i, y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}) = 0.$$

Выберем произвольное $0 \le k \le m.$ Тогда при $n = m+1$ получим

$$g_{m+1}(y_k, y_0, y_1, \ldots, y_m) = (-1)^m g_m(y_0, y_1, \ldots, y_m) e^{\lambda_{m+1} y_k} +$$

$$+(-1)^m \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j g_m(y_k, y_0, y_1, \ldots, y_{j-2}, y_j, \ldots, y_m) e^{\lambda_{m+1} y_{j-1}} =$$

$$= (-1)^m \Big(g_m(y_0, y_1, \ldots, y_m) e^{\lambda_{m+1} y_k} + (-1)^{k+1} g_m(y_k, y_0, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_m) e^{\lambda_{m+1} y_k} \Big).$$

Последовательно меняя местами соседние аргументы, в силу леммы 3.1 будем иметь

$$g_m(y_k, y_0, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_m) = -g_m(y_0, y_k, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_m) =$$

$$= g_m(y_0, y_1, y_k, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_m) = \cdots = (-1)^k g_m(y_0, y_1, \ldots, y_m).$$

Таким образом,

$$g_{m+1}(y_k, y_0, y_1, \ldots, y_m) = (-1)^m \Big(1 + (-1)^{2k+1}\Big) g_m(y_0, y_1, \ldots, y_m) e^{\lambda_{m+1} y_k} = 0. \tag{3.3}$$

Равенство (3.3) справедливо для произвольного i, где $0 \le i \le m.$ Лемма 3.2 доказана.

Теорема 3.1. *Если* $\tilde{g}_n = g_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) \ne 0,$ *то интерполяционный многочлен Эрмита–Биркгофа*

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = L_n(x) + \frac{\Omega_n(x) e^{-\lambda_{n+1} x_j} D_{n+1}(f; x_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)}, \tag{3.4}$$

где

$$L_n(x) = \frac{1}{\tilde{g}_n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i g_n(x, x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) f(x_i),$$

$$\Omega_n(x) = \frac{(-1)^n}{\tilde{g}_n} g_{n+1}(x, x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

удовлетворяет условиям (3.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как по лемме 2.3 при $k = i$

$$g_n(x_k, x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (-1)^i g_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (-1)^i \tilde{g}_n,$$

а при $k \neq i$ по лемме 3.2 имеем $g_n(x_k, x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0,$ то $L_n(x_k) = f(x_k)$ при $k = 0, 1, \ldots, n.$ Аналогично, по лемме 3.2 при тех же значениях k, справедливы равенства $\Omega_n(x_k) = 0.$ Таким образом, выполняется первая группа условий (3.1).

Многочлен $\Omega_n(x)$ представим в виде $\Omega_n(x) = e^{\lambda_{n+1}x} + \Phi_n(x),$ где $\Phi_n(x),$ а также многочлен $L_n(x),$ являются конечными линейными комбинациями слагаемых вида $\alpha_k e^{\lambda_k x}$ $(k = 0, 1, \ldots, n),$ где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – некоторые действительные числа. Так как $D_{n+1}\left(e^{\lambda_k x}\right) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, n,$ то $D_{n+1}\Phi_n(x) = D_{n+1}L_n(x) = 0,$ и в силу того, что $D_{n+1}\left(e^{\lambda_{n+1}x}\right) = \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1} - \lambda_n)e^{\lambda_{n+1}x},$ будем иметь $D_{n+1}\left(\tilde{L}_{n+1}; x_j\right) = D_{n+1}(f; x_j),$ т. е. последнее равенство в (3.1) также выполняется. Теорема 3.1 доказана.

Рассмотрим линейный случай экспоненциального интерполирования. Пусть x_0 и x_1 – узлы интерполирования и в этих узлах известны значения $f(x_0), f(x_1)$ функции $f(x),$ а также в одном из узлов x_j известно значение оператора $D_2(f; x_j)$, где $D_2 f(x) = D(D - \lambda_1) f(x).$ Также пусть заданы действительные числа $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2.$ Тогда формула (3.4) при $n = 1$ примет вид

$$\tilde{L}_2(x) = L_1(x) + \frac{\Omega_1(x) e^{-\lambda_2 x_j} D_2(f; x_j)}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

где

$$L_1(x) = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_1}}{e^{\lambda_1 x_0} - e^{\lambda_1 x_1}} f(x_0) + \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_0}}{e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 x_0}} f(x_1),$$

$$\Omega_1(x) = e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_2 x_0} + \frac{(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_0})(e^{\lambda_2 x_0} - e^{\lambda_2 x_1})}{e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 x_0}}.$$

Заметим, что $\Omega_1(x_k) = 0$ при $k = 0, 1,$ а многочлен $L_1(x)$ может быть представлен в виде

$$L_1(x) = f(x_0) + \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_0}}{e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 x_0}} \left[f(x_1) - f(x_0)\right].$$

Отметим, что ряд интерполяционных формул других типов для функций, а также для операторов в общих линейных, гильбертовых и функциональных пространствах, получены в [24, 25].

Построим представление остаточного члена для полинома (3.4). Приведем обобщенную теорему Ролля [38]. Пусть $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ – некоторая чебышевская система функций. Рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$\widehat{L}_{n+1} f(x) \equiv (D - b_n) \cdots (D - b_0) f(x) \equiv (D - b_n) \widehat{L}_n f(x),$$

такой, что функции $\varphi_k(x)$ $\left(k = \overline{0, n}\right)$ являются решениями дифференциального уравнения $\widehat{L}_{n+1} f(x) = 0$, а любое другое решение этого уравнения может быть представлено как линейная комбинация функций $\varphi_k(x)$. Тогда если функции $b_0(x), b_1(x), \ldots, b_n(x)$ аналитические в интервале (a, b), и если $f(x)$ также аналитическая и обращается в нуль $n+2$ раз с учетом кратности, то $\widehat{L}_{n+1} f(x)$ обращается в нуль на этом интервале, по крайней мере, один раз.

Теорема 3.2. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема* $n+2$ *раз в интервале* (a, b), *то остаточный член* $R_{n+1}(x) = f(x) - \widetilde{L}_{n+1}(x)$ *формулы* (3.4) *имеет вид*

$$R_{n+1}(x) = \frac{\Omega_n(x)(\xi - x_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)} \frac{d}{dx} \left\{ e^{-\lambda_{n+1} x} D_{n+1}(f; x) \right\} \Big|_{x=\eta}, \qquad (3.5)$$

где $\xi, \eta \in [a; b]$.

Доказательство. Пусть, аналогично предыдущим рассуждениям, $x \in [a, b]$, $x \neq x_k$ $\left(k = \overline{0, n}\right)$. Обозначим $K = \dfrac{f(x) - L_n(x)}{\Omega_n(x)}$, и пусть $\psi(u) = f(u) -$ $- L_n(u) - K\Omega_n(u)$. Тогда будем иметь

$$D_{n+1}(\psi; u) = D_{n+1}(f; u) - K\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n) e^{\lambda_{n+1} u}.$$

Применим далее обобщенную теорему Ролля. Так как $\psi(x_0) = \psi(x_1) =$ $= \ldots = \psi(x_n) = \psi(x) = 0$, и в нашем случае $\varphi_k(x) = e^{\lambda_k x}$, $b_i(x) = \lambda_i$, $\widehat{L}_{n+1}(f; x) \equiv D_{n+1}(f; x)$, то функция $D_{n+1}(\psi; x)$ имеет, по крайней мере, один нуль ξ на отрезке $[a, b]$: $D_{n+1}(\psi; \xi) = 0$, откуда $K = \dfrac{e^{-\lambda_{n+1}\xi} D_{n+1}(f; \xi)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)}$, и следовательно,

$$f(x) - L_n(x) = K\Omega_n(x) = \frac{\Omega_n(x) e^{-\lambda_{n+1}\xi} D_{n+1}(f; \xi)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)}.$$

Окончательно имеем

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \widetilde{L}_{n+1}(x) =$$

$$= \frac{\Omega_n(x)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}\left(D_{n+1}(f;\xi)e^{-\lambda_{n+1}\xi} - D_{n+1}(f;x_j)e^{-\lambda_{n+1}x_j}\right) =$$

$$= \frac{\Omega_n(x)(\xi - x_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}\frac{d}{dx}\left\{D_{n+1}(f;x)e^{-\lambda_{n+1}x}\right\}\Big|_{x=\eta},$$

где $\xi,\eta \in [a;b]$. Теорема 3.2 доказана.

Преобразуем правую часть (3.5).

$$R_{n+1}(x) = \frac{\Omega_n(x)(\xi - x_j)e^{-\lambda_{n+1}\eta}}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}\left(\frac{d}{dx}D_{n+1}(f;x)\Big|_{x=\eta} - \lambda_{n+1}D_{n+1}(f;\eta)\right). \tag{3.6}$$

Введем обозначения: $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|D_{n+1}f(x)\right|$, $B_{n+1} = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|\frac{d}{dx}D_{n+1}f(x)\right|$, $C_n = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|\Omega_n(x)\right|$, $\gamma_{n+1} = \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$.

Теорема 3.3. *Оценка погрешности формулы* (3.4) *для любого* $x \in [a,b]$ *имеет вид:*

$$\left|f(x) - \widetilde{L}_{n+1}(x)\right| \le \frac{(b-a)C_n e^{-\lambda_{n+1}a}}{\gamma_{n+1}}\left[B_{n+1} + \lambda_{n+1}M_{n+1}\right]. \tag{3.7}$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что справедливы следующие неравенства: $\left|\xi - x_j\right| \le b - a$, $e^{-\lambda_{n+1}\eta} \le e^{-\lambda_{n+1}a}$, $\xi,\eta \in [a,b]$. Учитывая данные неравенства и (3.6), получим оценку (3.7).

Пример. Пусть $f(t) = \sin e^t$. Рассмотрим частные случаи формулы (3.4) при $n = 1,2,3,4$. Учитывая свойства функции $f(t)$, построим интерполяционные полиномы на неравномерных сетках. Для данного конкретного случая соответствующие системы узлов будут такими

1) $t_0^1 = 0{,}279$; $t_1^1 = 1{,}71$; $t_j^1 = t_1^1$;

2) $t_0^2 = 1{,}248$; $t_1^2 = 1{,}644$; $t_2^2 = 1{,}908$; $t_j^2 = t_0^2$;

3) $t_0^3 = 0{,}071$; $t_1^3 = 1{,}274$; $t_2^3 = 1{,}656$; $t_3^3 = 1{,}883$; $t_j^3 = t_2^3$;

4) $t_0^4 = 0{,}453$; $t_1^4 = 0{,}968$; $t_2^4 = 1{,}38$; $t_3^4 = 1{,}857$; $t_4^4 = 1{,}985$; $t_j^4 = t_3^4$.

Тогда интерполяционные многочлены примут вид

$$\widetilde{L}_2(t) = 1{,}350 - 0{,}2449e^{1{,}7t} + 0{,}004374e^{3{,}7t},$$

$$\widetilde{L}_3(t) = 1{,}079 - 0{,}2241e^{4{,}1t} + 0{,}199e^{4{,}3t} - 0{,}01476e^{4{,}9t},$$

$$\widetilde{L}_4(t) = -0{,}7893 + 1{,}914e^{0{,}8t} - 0{,}8199e^{3{,}2t} + 0{,}9813e^{3{,}7t} - 0{,}4588e^{3{,}9t},$$

$$\widetilde{L}_5(t) = 0{,}43185 + 1{,}3006e^{2{,}4t} - 1{,}4190e^{3{,}3t} +$$
$$+ 2{,}1562e^{4{,}2t} - 1{,}6309e^{4{,}3t} + 0{,}0017349e^{5{,}7t}.$$

Точность приближения функции $f(t)$ многочленами $\widetilde{L}_2(t)$, $\widetilde{L}_4(t)$ и $\widetilde{L}_5(t)$ изображается на графике (рис. 3.1). Сплошной линией изобразим интерполируемую функцию $f(t)$, штриховой – $\widetilde{L}_2(t)$, штрих-пунктирной – $\widetilde{L}_4(t)$, пунктирной – $\widetilde{L}_5(t)$.

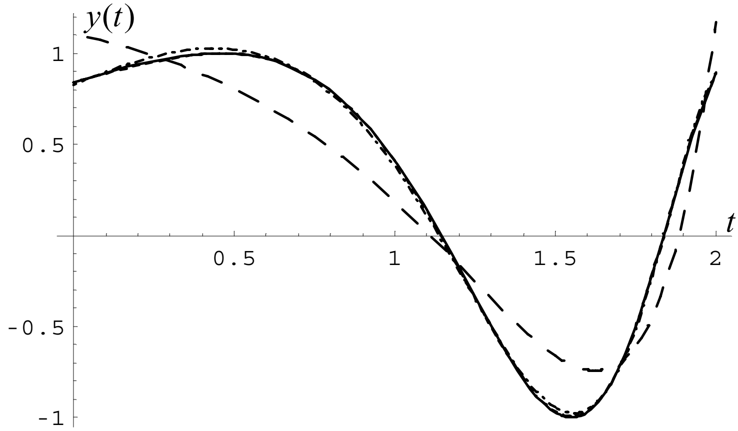


Рисунок 3.1.

Интерполяционные многочлены $\widetilde{L}_4(t)$ и $\widetilde{L}_5(t)$ более точно описывают поведение функции $f(t)$ на данном отрезке. Нормы невязок между функцией $f(t)$ и интерполяционными многочленами равны

$$\left\| f(t) - \widetilde{L}_2(t) \right\|_{C[0,2]} = \max_{t\in[0,2]} \left| f(t) - \widetilde{L}_2(t) \right| = 0{,}3133; \quad \left\| f(t) - \widetilde{L}_3(t) \right\|_{C[0,2]} = 0{,}2010;$$

$$\left\| f(t) - \widetilde{L}_4(t) \right\|_{C[0,2]} = 0{,}02887; \quad \left\| f(t) - \widetilde{L}_5(t) \right\|_{C[0,2]} = 0{,}005469.$$

С увеличением степени интерполяционного многочлена вида (3.4) в данном конкретном случае точность приближения повышается.

§4. Интерполирование по произвольной чебышевской системе функций

Пусть задана некоторая чебышевская система функций $\varphi_k(x) \in C^{n+1}(T)$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$, $x \in T \subseteq \mathbb{R}$, где $C^{n+1}(T)$ – пространство непрерывно дифференцируемых $n+1$ раз на отрезке T функций. Введем также функции $g_n(x_0,x_1,\ldots,x_n)$, $x_k\in T$ $(k=0,1,\ldots,n)$, заданные посредством определителей

$$g_n(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix}\varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \ldots & \varphi_0(x_n)\\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_1(x_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_n(x_0) & \varphi_n(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_n)\end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

Очевидно, что при перестановке любых двух аргументов местами функция (4.1) меняет знак на противоположный, а если хотя бы два аргумента этой функции имеют одинаковые значения, то $g_n(x_0,x_1,\ldots,x_n)=0$. Это следует из свойств определителя.

Пусть $\widetilde{g}_n=g_n(x_0,x_1,\ldots,x_n)\neq 0$. В [38] по произвольной чебышевской системе функций построен интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(x)=\frac{1}{\widetilde{g}_n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k g_n(x,x_0,x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)f(x_k), \tag{4.2}$$

удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$L_n(x_i)=f(x_i)\ \ (i=0,1,\ldots,n). \tag{4.3}$$

Пусть $f(x)\in C^{n+1}(T)$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$D_{n+1}f(x)=W_n^{-1}(x)\begin{vmatrix}\varphi_0(x) & \ldots & \varphi_n(x) & f(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \varphi_0^{(n)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n)}(x) & f^{(n)}(x)\\ \varphi_0^{(n+1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n+1)}(x) & f^{(n+1)}(x)\end{vmatrix}, \tag{4.4}$$

где $W_n(x)$ – вронскиан, построенный по системе функций $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$. Будем предполагать, что $W_n(x)\neq 0$ на *T*. Очевидно, что функции $\varphi_k(x)$ являются решениями дифференциального уравнения $D_{n+1}f(x)=0$, т.е.

$$D_{n+1}\varphi_k(x)=0,\quad k=0,1,\ldots,n. \tag{4.5}$$

Эквивалентное определение оператора (4.4) в [38] имеет вид

$$D_{n+1}f(x)=\big(D-b_n(x)\big)\big(D-b_{n-1}(x)\big)\cdots\big(D-b_0(x)\big)f(x)=$$

$$=\big(D-b_n(x)\big)D_nf(x),\ D=\frac{d}{dx}, \tag{4.6}$$

где $b_0(x)=\dfrac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}$, $b_k(x)=\dfrac{\big(D_k\varphi_k(x)\big)'}{D_k\varphi_k(x)}$ $(k=1,2,\ldots,n)$.

Используя свойства дифференцируемых функций, методом математической индукции при $k=0,1,\dots,n$ можно показать, что $b_k(x)\in C^{n-k}(T)$ и $D_{k+1}f(x)\in C^{n-k}(T)$.

Теорема 4.1. *Интерполяционный многочлен*

$$\widetilde{L}_{n+1}(x)=L_n(x)+\frac{\Omega_n(x)D_{n+1}(f;x_j)}{D_{n+1}(\varphi_{n+1};x_j)},\tag{4.7}$$

где $L_n(x)$ *определяется формулой* (4.2),

$$\Omega_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{\widetilde{g}_n}g_{n+1}(x,x_0,x_1,\dots,x_n),\quad D_{n+1}(\varphi_{n+1};x_j)\neq 0,$$

удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\widetilde{L}_{n+1}(x_i)=f(x_i)\ \ (i=0,1,\dots,n);\quad D_{n+1}(\widetilde{L}_{n+1};x_j)=D_{n+1}(f;x_j)\tag{4.8}$$

и инвариантен относительно многочленов вида

$$P_{n+1}(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_{n+1}\varphi_{n+1}(x),\tag{4.9}$$

где $c_0,c_1,\dots,c_{n+1}$ *– произвольные действительные числа.*

Доказательство. В силу свойств функции (4.1) имеем $g_{n+1}(x_i,x_0,x_1,\dots,x_n)=0$ при $i=0,1,\dots,n$, поэтому $\Omega_n(x_i)=0$. Учитывая также (4.3) получим, что первая часть интерполяционных условий (4.8) выполняется.

Раскладывая функции $g_n(x,x_0,x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n)$ $(k=0,1,\dots,n)$ и $g_{n+1}(x,x_0,x_1,\dots,x_n)$ по элементам первого столбца соответствующих определителей, нетрудно показать, что многочлен $\widetilde{L}_{n+1}(x)$ можно представить в виде

$$\widetilde{L}_{n+1}(x)=\frac{D_{n+1}(f;x_j)}{D_{n+1}(\varphi_{n+1};x_j)}\varphi_{n+1}(x)+\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x),$$

где $a_0,a_1,\dots,a_n$ – некоторые действительные числа.

Из (4.5) в силу линейности оператора $D_{n+1}f(x)$ будем иметь $D_{n+1}\widetilde{L}_{n+1}(x)=\dfrac{D_{n+1}(f;x_j)}{D_{n+1}(\varphi_{n+1};x_j)}D_{n+1}\varphi_{n+1}(x)$, откуда при $x=x_j$ следует выполнение последнего равенства в (4.8).

Докажем инвариантность формулы (4.7) относительно многочленов вида (4.9). Полином $L_n(x)$ можно представить в виде

$$L_n(x)=\frac{(-1)^n}{\widetilde{g}_n}\begin{vmatrix}\varphi_0(x) & \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_n(x) & \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n)\\ 0 & f(x_0) & \dots & f(x_n)\end{vmatrix}.$$

При $f(x)=\varphi_k(x)$ $(k=0,1,\ldots,n)$ будем иметь

$$L_n(\varphi_k;x)=\frac{(-1)^n}{\widetilde{g}_n}\begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_0(x_0) & \ldots & \varphi_0(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n(x) & \varphi_n(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_n) \\ 0 & \varphi_k(x_0) & \ldots & \varphi_k(x_n) \end{vmatrix}. \tag{4.10}$$

Раскладывая правую часть (4.10) по элементам первого столбца, получим

$$L_n(\varphi_k;x)=\frac{(-1)^n}{\widetilde{g}_n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \ldots & \varphi_0(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{i-1}(x_0) & \varphi_{i-1}(x_1) & \ldots & \varphi_{i-1}(x_n) \\ \varphi_{i+1}(x_0) & \varphi_{i+1}(x_1) & \ldots & \varphi_{i+1}(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n(x_0) & \varphi_n(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_n) \\ \varphi_k(x_0) & \varphi_k(x_1) & \ldots & \varphi_k(x_n) \end{vmatrix}\varphi_i(x). \tag{4.11}$$

При $i\neq k$ определители в (4.11) равны нулю, так как в каждом из них есть две одинаковых строки. В определителе при $i=k$ переместив последнюю строку таким образом, чтобы она оказалась между строками с номерами k и $k+1$, будем иметь

$$L_n(\varphi_k;x)=\frac{(-1)^{n+k}}{\widetilde{g}_n}(-1)^{n-k}\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \ldots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_1(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n(x_0) & \varphi_n(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}\varphi_k(x)=\varphi_k(x).$$

И так как $D_{n+1}\varphi_k(x)\equiv 0$ при $k=0,1,\ldots,n,$ получим, что

$$\widetilde{L}_{n+1}(\varphi_k;x)\equiv\varphi_k(x).$$

Если $f(x)=\varphi_{n+1}(x),$ то

$$\widetilde{L}_{n+1}(x)=L_n(x)+\Omega_n(x)=\frac{(-1)^n}{\widetilde{g}_n}\begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_0(x_0) & \ldots & \varphi_0(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n(x) & \varphi_n(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_n) \\ 0 & \varphi_{n+1}(x_0) & \ldots & \varphi_{n+1}(x_n) \end{vmatrix}+$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{\widetilde{g}_n}\begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_0(x_0) & \ldots & \varphi_0(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n(x) & \varphi_n(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_n) \\ \varphi_{n+1}(x) & \varphi_{n+1}(x_0) & \ldots & \varphi_{n+1}(x_n) \end{vmatrix}=$$

$$
= \frac{(-1)^n}{\tilde{g}_n} \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n(x) & \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) \\ -\varphi_{n+1}(x) & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^n}{\tilde{g}_n} (-1)^n \varphi_{n+1}(x) \tilde{g}_n = \varphi_{n+1}(x).
$$

В силу линейности оператора (4.4) и того, что значения функции $f(x)$ входят в (4.7) линейно, формула (4.7) точна для многочленов вида (4.9). Теорема 4.1 доказана.

Построим представление погрешности для формулы (4.7). Введем функцию

$$
\tilde{\Omega}_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{\tilde{g}_n D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_j)} \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n(x) & \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) & 0 \\ \varphi_{n+1}(x) & \varphi_{n+1}(x_0) & \dots & \varphi_{n+1}(x_n) & D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_j) \\ \varphi_{n+2}(x) & \varphi_{n+2}(x_0) & \dots & \varphi_{n+2}(x_n) & D_{n+2}(\varphi_{n+2}; x_j) \end{vmatrix}.
$$

Нетрудно заметить, что функция $\tilde{\Omega}_{n+1}(x)$ удовлетворяет условиям

$$
\tilde{\Omega}_{n+1}(x_i) = 0 \ \ (i = 0, 1, \dots, n); \quad D_{n+1}(\tilde{\Omega}_{n+1}; x_j) = 0.
$$

Дополним систему базисных функций функцией $\varphi_{n+2}(x)$ и доопределим оператор $D_{n+2} f(x)$ по формуле (4.6). Будем предполагать, что $\varphi_k(x) \in C^{n+2}(T)$, $k = 0, 1, \dots, n+2$. Тогда $b_k(x) \in C^{n-k+1}(T)$ и $D_{k+1} f(x) \in C^{n-k+1}(T)$.

Теорема 4.2. *Если функция $f(x)$ дифференцируема $n+2$ раз в интервале T, то остаточный член $R_{n+1}(x)$ формулы* (4.7) *имеет вид*

$$
R_{n+1}(x) = f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x) = \frac{D_{n+2}(f; \xi)}{D_{n+2}(\varphi_{n+2}; \xi)} \tilde{\Omega}_{n+1}(x),
$$

где $\xi \in T$.

Доказательство. Пусть $x \in T$, $x \neq x_k$ $(k = \overline{0, n})$. Обозначим $K = \dfrac{f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x)}{\tilde{\Omega}_{n+1}(x)}$ и рассмотрим функцию $\psi(t) = f(t) - \tilde{L}_{n+1}(t) - K\tilde{\Omega}_{n+1}(t)$, тогда

$$
D_{n+1}\psi(t) = D_{n+1} f(t) - D_{n+1}\tilde{L}_{n+1}(t) - K D_{n+1}\tilde{\Omega}_{n+1}(t).
$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что $\psi(t) \in C^{n+2}(T)$, а $D_{n+1}\psi(t) \in C^1(T)$. Так как $\psi(x_0) = \psi(x_1) = \ldots = \psi(x_n) = \psi(x) = 0$, то по обобщению теоремы Ролля [38] функция $D_{n+1}\psi(t)$ имеет, по крайней мере, один нуль

η в интервале T: $D_{n+1}(\psi;\eta)=0$. Нетрудно заметить, что $D_{n+1}\left(\tilde{\Omega}_{n+1};x_j\right)=0$. Учитывая, кроме этого, последнее интерполяционное условие в (4.8), будем иметь $D_{n+1}(\psi;x_j)=0$.

Функция $D_{n+1}\psi(t)$ на интервале T обращается в нуль, по крайней мере, два раза, с учетом кратности. Тогда по обобщению теоремы Ролля [38], функция $D_{n+2}\psi(t)$ обращается в нуль, по крайней мере, один раз: $D_{n+2}(\psi;\xi)=0$. Вычислим

$$D_{n+2}\psi(t)=D_{n+2}f(t)-D_{n+2}\tilde{L}_{n+1}(t)-KD_{n+2}\tilde{\Omega}_{n+1}(t)=D_{n+2}f(t)-KD_{n+2}\varphi_{n+2}(t).$$

Тогда $D_{n+2}f(\xi)-KD_{n+2}\varphi_{n+2}(\xi)=0$, откуда $K=\dfrac{D_{n+2}(f;\xi)}{D_{n+2}(\varphi_{n+2};\xi)}$. Следовательно

$$f(x)-\tilde{L}_{n+1}(x)=\frac{D_{n+2}(f;\xi)}{D_{n+2}(\varphi_{n+2};\xi)}\tilde{\Omega}_{n+1}(x),$$

где $\xi\in T$. Теорема 4.2 доказана.

Введем обозначения. Пусть

$$M_{n+2}=\max_{x\in T}\left|D_{n+2}f(x)\right|,\quad B_{n+2}=\min_{x\in T}\left|D_{n+2}\varphi_{n+2}(x)\right|,\quad C_{n+1}=\max_{x\in T}\left|\tilde{\Omega}_{n+1}(x)\right|.$$

Справедлива оценка погрешности

$$\left|f(x)-\tilde{L}_{n+1}(x)\right|\le\frac{M_{n+2}}{B_{n+2}}C_{n+1}.$$

Рассмотрим частный случай формулы (4.7) при $n=1$. Многочлен $\tilde{L}_2(x)$ в данном случае имеет вид

$$\tilde{L}_2(x)=L_1(x)+\frac{\Omega_1(x)D_2(f;x_j)}{D_2(\varphi_2;x_j)},\tag{4.12}$$

где

$$L_1(x)=\frac{\left(\varphi_0(x)\varphi_1(x_1)-\varphi_0(x_1)\varphi_1(x)\right)f(x_0)-\left(\varphi_0(x)\varphi_1(x_0)-\varphi_0(x_0)\varphi_1(x)\right)f(x_1)}{\varphi_0(x_0)\varphi_1(x_1)-\varphi_0(x_1)\varphi_1(x_0)},$$

$$\Omega_1(x)=\varphi_2(x)-$$

$$-\frac{\left(\varphi_0(x)\varphi_1(x_1)-\varphi_0(x_1)\varphi_1(x)\right)\varphi_2(x_0)-\left(\varphi_0(x)\varphi_1(x_0)-\varphi_0(x_0)\varphi_1(x)\right)\varphi_2(x_1)}{\varphi_0(x_0)\varphi_1(x_1)-\varphi_0(x_1)\varphi_1(x_0)},$$

а дифференциальный оператор $D_2f(x)$ задается формулой

$$D_2 f(x) = \frac{1}{\varphi_0(x)\varphi_1'(x) - \varphi_0'(x)\varphi_1(x)} \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & f(x) \\ \varphi_0'(x) & \varphi_1'(x) & f'(x) \\ \varphi_0''(x) & \varphi_1''(x) & f''(x) \end{vmatrix} =$$

$$= f''(x) - \frac{\left(\varphi_0(x)\varphi_1''(x) - \varphi_0''(x)\varphi_1(x)\right) f'(x) - \left(\varphi_0'(x)\varphi_1''(x) - \varphi_0''(x)\varphi_1'(x)\right) f(x)}{\varphi_0(x)\varphi_1'(x) - \varphi_0'(x)\varphi_1(x)}. \tag{4.13}$$

Нетрудно проверить, что для (4.12) выполняются интерполяционные условия $\widetilde{L}_2(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0,1)$; $D_2(\widetilde{L}_2; x_j) = D_2(f; x_j)$.

Получим выражение для оператора $D_2 f(x)$, используя формулу (4.6)

$$D_2 f(x) = \left(D - b_1(x)\right)\left(D - b_0(x)\right) f(x) = \left(D - b_1(x)\right)\left(f'(x) - b_0(x) f(x)\right) =$$

$$= f''(x) - \left(b_0(x) + b_1(x)\right) f'(x) + \left(b_0(x) b_1(x) - b_0'(x)\right) f(x). \tag{4.14}$$

Далее, так как

$$b_0(x) = \frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}, \quad b_1(x) = \frac{\left(D_1\varphi_1(x)\right)'}{D_1\varphi_1(x)} = \frac{\left(\varphi_1'(x) - b_0(x)\varphi_1(x)\right)'}{\varphi_1'(x) - b_0(x)\varphi_1(x)} =$$

$$= \frac{\varphi_1''(x)\varphi_0^2(x) - \varphi_0''(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x) + \varphi_0'(x)\varphi_0'(x)\varphi_1(x) - \varphi_0'(x)\varphi_1'(x)\varphi_0(x)}{\varphi_0(x)\left(\varphi_1'(x)\varphi_0(x) - \varphi_0'(x)\varphi_1(x)\right)},$$

то

$$b_0(x) + b_1(x) = \frac{\varphi_0(x)\varphi_1''(x) - \varphi_0''(x)\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)\varphi_1'(x) - \varphi_0'(x)\varphi_1(x)}, \tag{4.15}$$

$$b_0(x) b_1(x) - b_0'(x) = \frac{\varphi_0'(x)\varphi_1''(x) - \varphi_0''(x)\varphi_1'(x)}{\varphi_0(x)\varphi_1'(x) - \varphi_0'(x)\varphi_1(x)}. \tag{4.16}$$

Подставляя (4.15), (4.16) в (4.14), получим (4.13).

Рассмотрим частный случай формулы (4.7) при $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_{2k-1}(x) = \sin kx$, $\varphi_{2k}(x) = \cos kx$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Дифференциальный оператор (4.4) в этом случае задается равенством

$$D_{2n+1} f(x) = W_{2n}^{-1}(x) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x & \cdots & \sin nx & \cos nx & f(x) \\ 0 & \cos x & -\sin x & \cdots & n\cos nx & -n\sin nx & f'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^n \cos x & (-1)^{n-1} \sin x & & (-1)^n n^{2n+1} \cos nx & (-1)^{n-1} n^{2n+1} \sin nx & f^{(2n+1)}(x) \end{vmatrix}, \tag{4.17}$$

где

$$W_{2n}(x)=\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x & \cdots & \sin nx & \cos nx \\ 0 & \cos x & -\sin x & \cdots & n\cos nx & -n\sin nx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^n \sin x & (-1)^n \cos x & \cdots & (-1)^n n^{2n} \sin nx & (-1)^n n^{2n} \cos nx \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим оператор

$$D_{2n+1} f(x) = (D - ntgnx)(D + ntgnx)\cdots(D - tgx)(D + tgx)Df(x),\ D = \frac{d}{dx}, \tag{4.18}$$

заданный в форме (4.6). Здесь $b_0(x)=0$, $b_{2k-1}(x)=-ktgkx$, $b_{2k}(x)=ktgkx$, $k=1,2,\ldots,n.$ Далее так как

$$(D-ktgkx)(D+ktgkx)f(x)=f''(x)-k\,tgkx\,f'(x)+\left(k\,tgkx\,f(x)\right)'-k^2tg^2kx\,f(x)=$$
$$=f''(x)+k^2f(x)=(D^2+k^2)f(x),$$

то (4.18) можно записать в более простой форме

$$D_{2n+1} f(x) = (D^2+n^2)(D^2+(n-1)^2)\cdots(D^2+1^2)Df(x),\ D = \frac{d}{dx}. \tag{4.19}$$

Оператор (4.19) является перестановочным, поэтому нетрудно показать, что функции $1, \sin x, \cos x, \ldots, \sin nx, \cos nx$ являются решениями соответствующего дифференциального уравнения

$$D_{2n+1} f(x) = 0. \tag{4.20}$$

Очевидно, что эту же фундаментальную систему решений имеет уравнение (4.20), где оператор $D_{2n+1} f(x)$ определяется формулой (4.17). Так как оба линейных однородных дифференциальных уравнения имеют общую фундаментальную систему решений, то операторы (4.17) и (4.19) тождественны между собой.

Многочлен $L_{2n}(x)$ в данном случае принимает вид

$$L_{2n}(x)=H_n(x)=\frac{1}{\widetilde{g}_{2n}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \sin x & \sin x_0 & \cdots & \sin x_{2n} \\ \cos x & \cos x_0 & \cdots & \cos x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin nx & \sin nx_0 & \cdots & \sin nx_{2n} \\ \cos nx & \cos nx_0 & \cdots & \cos nx_{2n} \\ 0 & f(x_0) & \cdots & f(x_{2n}) \end{vmatrix}, \tag{4.21}$$

где

$$
\tilde{g}_{2n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \sin x_0 & \sin x_1 & \cdots & \sin x_{2n} \\ \cos x_0 & \cos x_1 & \cdots & \cos x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin nx_0 & \sin nx_1 & \cdots & \sin nx_{2n} \\ \cos nx_0 & \cos nx_1 & \cdots & \cos nx_{2n} \end{vmatrix}.
$$

В [25, с. 263] приводится тригонометрический интерполяционный многочлен

$$
H_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{k-1}}{2}\sin\frac{x-x_{k+1}}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{2n}}{2}}{\sin\frac{x_k-x_0}{2}\cdots\sin\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\sin\frac{x_k-x_{k+1}}{2}\cdots\sin\frac{x_k-x_{2n}}{2}} f(x_k), \quad (4.22)
$$

который совпадает с (4.21), так как оба многочлена удовлетворяют лагранжевым интерполяционным условиям и имеют степень не выше n [35, с. 18, 124].

По определению

$$
\Omega_{2n}(x) = \frac{(-1)^{2n-1}}{\tilde{g}_{2n}} g_{2n+1}(x, x_0, x_1, \ldots, x_{2n}) =
$$

$$
= -\frac{1}{\tilde{g}_{2n}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \sin x & \sin x_0 & \cdots & \sin x_{2n} \\ \cos x & \cos x_0 & \cdots & \cos x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin nx & \sin nx_0 & \cdots & \sin nx_{2n} \\ \cos nx & \cos nx_0 & \cdots & \cos nx_{2n} \\ \sin(n+1)x & \sin(n+1)x_0 & \cdots & \sin(n+1)x_{2n} \end{vmatrix}. \quad (4.23)
$$

Тригонометрический многочлен (4.23) степени не выше $n+1$ имеет нулями точки $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$, следовательно он представим в виде

$$
\Omega_{2n}(x) = \left(\alpha \sin\frac{x}{2} + \beta\cos\frac{x}{2}\right) \prod_{k=0}^{2n} \sin\frac{x-x_k}{2}, \quad \alpha^2+\beta^2 \neq 0. \quad (4.24)
$$

Л е м м а 4.1. *Справедливо тригонометрическое тождество*

$$
\prod_{k=0}^{2n} \sin\frac{x-x_k}{2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sin\frac{1}{2}\big((2n+1)x - (x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\big) + \tilde{T}_{\frac{2n-1}{2}}(x), \quad (4.25)
$$

где $\widetilde{T}_{\frac{2n-1}{2}}(x)$ *– тригонометрический полином полуцелого порядка* $\frac{2n-1}{2}$.

Доказательство. Применим метод математической индукции. При $n=1$ имеем

$$\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_2}{2}=\frac{1}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\times$$

$$\times\left(\cos\frac{x_2-x_1}{2}-\cos\frac{1}{2}\left(2x-(x_1+x_2)\right)\right)=-\frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\left(3x-(x_0+x_1+x_2)\right)+T_{\frac{1}{2}}(x).$$

Предположим, что соотношение (4.25) верно при $n=m$ и покажем, что оно справедливо также и при $n=m+1$

$$\prod_{k=0}^{2m+2}\sin\frac{x-x_k}{2}=\left(\frac{(-1)^m}{2^{2m}}\sin\frac{1}{2}\left((2m+1)x-(x_0+x_1+\ldots+x_{2m})\right)+\widetilde{T}_{\frac{2m-1}{2}}(x)\right)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x_{2m+2}-x_{2m+1}}{2}-\cos\frac{1}{2}\left(2x-(x_{2m+1}+x_{2m+2})\right)\right)=$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m+2}}\left(\sin\frac{1}{2}\left((2m+3)x-(x_0+x_1+\ldots+x_{2m+2})\right)+\widetilde{T}_{\frac{2m+1}{2}}(x).\right.$$

Лемма 4.1 доказана.

Определим значения α и β в (4.24). Раскладывая (4.23) по элементам первого столбца можно показать, что $\Omega_{2n}(x)$ имеет вид

$$\Omega_{2n}(x)=0\cdot\cos(n+1)x+1\cdot\sin(n+1)x+\widetilde{T}_n(x), \tag{4.26}$$

где $\widetilde{T}_n(x)$ – некоторый тригонометрический многочлен степени не выше n. С учетом (4.24) – (4.26) будем иметь

$$0\cdot\cos(n+1)x+1\cdot\sin(n+1)x+\widetilde{T}_n(x)=$$

$$=\left(\alpha\sin\frac{x}{2}+\beta\cos\frac{x}{2}\right)\left(\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sin\frac{1}{2}\left((2n+1)x-(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\right)+\widetilde{T}_{\frac{2n-1}{2}}(x)\right)=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}\left(\left[\alpha\cos\frac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})+\beta\sin\frac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\right]\cos(n+1)x+\right.$$

$$\left.+\left[\alpha\sin\frac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})-\beta\cos\frac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\right]\sin(n+1)x\right)+\widetilde{T}_n(x). \tag{4.27}$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos(n+1)x$ и $\sin(n+1)x$ в левой и правой частях последнего равенства, получим систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}\left[\alpha\cos\dfrac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})+\beta\sin\dfrac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\right]=0, \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}\left[\alpha\sin\dfrac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})-\beta\cos\dfrac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\right]=1, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$\alpha=(-1)^{n+1}2^{2n+1}\sin\frac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n}),$$

$$\beta=(-1)^{n}2^{2n+1}\cos\frac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n}). \tag{4.28}$$

Подставляя (4.28) в (4.24) и проводя преобразования, получим

$$\Omega_{2n}(x)=(-1)^{n}2^{2n+1}\cos\frac{1}{2}\left(x+x_0+x_1+\ldots+x_{2n}\right)\prod_{k=0}^{2n}\sin\frac{x-x_k}{2}.$$

Вычислим далее выражение $D_{2n+1}(\varphi_{2n+1};x_j)$

$$D_{2n+1}\varphi_{2n+1}(x)=(D^2+n^2)(D^2+(n-1)^2)\cdots(D^2+1^2)D\sin(n+1)x.$$

Так как

$$D\sin(n+1)x=(n+1)\cos(n+1)x,$$

$$(D^2+k^2)\cos(n+1)x=-\left((n+1)^2-k^2\right)\cos(n+1),\ k=1,2,\ldots,n,$$

то

$$D_{2n+1}(\varphi_{2n+1};x_j)=D_{2n+1}\sin(n+1)x\Big|_{x=x_j}=(-1)^{n}(2n+1)!\cos(n+1)x_j. \tag{4.29}$$

Таким образом, многочлен (4.7) в данном случае имеет вид

$$\widetilde{L}_{2n+1}(x)=T_{n+1}(x)=H_n(x)+$$

$$+\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{D_{2n+1}(f;x_j)}{\cos(n+1)x_j}\cos\frac{1}{2}\left(x+x_0+x_1+\ldots+x_{2n}\right)\prod_{k=0}^{2n}\sin\frac{x-x_k}{2}, \tag{4.30}$$

где $H_n(x)$ определяется формулой (4.22). Для него выполняются интерполяционные условия

$$T_{n+1}(x_i)=f(x_i)\ \ (i=0,1,\ldots,2n);\quad D_{2n+1}(T_{n+1};x_j)=D_{2n+1}(f;x_j). \tag{4.31}$$

В параграфе 1 этой главы построен и исследован аналогичного типа тригонометрический интерполяционный многочлен Эрмита–Биркгофа

$$\overline{T}_{n+1}(x)=H_n(x)+\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\overline{\Omega}_{n+1}(x)}{\cos\frac{1}{2}\left((2n+2)x_j-x_0-\sum\limits_{k=0}^{2n}x_k\right)}D_{2n+1}(f;x_j), \quad (4.32)$$

где

$$H_n(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{l_n(x)}{\sin\frac{1}{2}(x-x_k)l_n'(x_k)}f(x_k), \qquad (4.33)$$

$$l_n(x)=\sin\frac{1}{2}(x-x_0)\sin\frac{1}{2}(x-x_1)\cdots\sin\frac{1}{2}(x-x_{2n}),$$

$$\overline{\Omega}_{n+1}(x)=\sin(x-x_0)\prod_{k=1}^{2n}\sin\frac{1}{2}(x-x_k),$$

удовлетворяющий условиям вида (4.31). Здесь дифференциальный оператор $D_{2n+1}f(x)$ также определяется формулой (4.19), а многочлен (4.33) тождественен (4.22) [35, с. 18, 125].

Интерполяционные полиномы (4.30) и (4.32) являются элементами параметрического семейства тригонометрических многочленов степени не выше $n+1$ вида

$$T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)=H_n(x)+\frac{\Omega_{2n}^{\alpha,\beta}(x)D_{2n+1}(f;x_j)}{D_{2n+1}(\Omega_{2n}^{\alpha,\beta};x_j)}, \qquad (4.34)$$

где $\Omega_{2n}^{\alpha,\beta}(x)$ задается соотношением (4.24), удовлетворяющих интерполяционным условиям (4.31). Многочлен (4.30) получается при значениях α и β, определенных равенствами (4.28), а полином (4.32) при

$$\tilde{\alpha}=2\sin\frac{x_0}{2},\ \tilde{\beta}=2\cos\frac{x_0}{2}.$$

Действительно, в данном случае $\Omega_{2n}^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(x)=\overline{\Omega}_{n+1}(x)$ имеет вид

$$\Omega_{2n}^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(x)=2\cos\frac{x-x_0}{2}\prod_{k=0}^{2n}\sin\frac{x-x_k}{2}=\left(2\sin\frac{x_0}{2}\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x_0}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\prod_{k=0}^{2n}\sin\frac{x-x_k}{2}.$$

Кроме того, используя лемму 4.1 можно показать, что

$$\Omega_{2n}^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(x)=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sin\left((n+1)x-\frac{1}{2}(2x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\right)+\widehat{T}_n(x), \qquad (4.35)$$

где $\widehat{T}_n(x)$ – тригонометрический многочлен степени не выше n.

Из (4.29) и (4.35) следует, что

$$D_{2n+1}\left(\Omega_{2n}^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}};x_j\right)=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}D_{2n+1}\sin\left((n+1)x-\frac{1}{2}\left(2x_0+x_1+\ldots+x_{2n}\right)\right)\Bigg|_{x=x_j}=$$

$$=\frac{(2n+1)!}{2^{2n}}\cos\frac{1}{2}\left((2n+2)x_j-\left(2x_0+x_1+\ldots+x_{2n}\right)\right). \tag{4.36}$$

Подставляя (4.36) в (4.34), получим формулу (4.32).

Вычислим значение оператора $D_{2n+1}(\Omega_{2n}^{\alpha,\beta};x_j)$ в случае произвольно заданных параметров α и β, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$. Аналогично (4.29) можно показать, что выполняется тождество

$$D_{2n+1}\cos(n+1)x=(-1)^{n+1}(2n+1)!\sin(n+1)x. \tag{4.37}$$

Представляя $\Omega_{2n}^{\alpha,\beta}(x)$ в виде правой части (4.27) и используя соотношения (4.29), (4.37), будем иметь

$$D_{2n+1}(\Omega_{2n}^{\alpha,\beta};x_j)=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}}\left(\alpha\sin\frac{1}{2}\left((2n+2)x-(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\right)+\right.$$

$$\left.+\beta\cos\frac{1}{2}\left((2n+2)x-(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\right)\right). \tag{4.38}$$

Подставляя (4.38) в (4.34) получим явное выражение для тригонометрического интерполяционного многочлена Эрмита–Биркгофа степени не выше $n+1$, удовлетворяющего условиям (4.31).

Рассмотрим еще один частный случай формулы (4.7) при $\varphi_k(x)=e^{\lambda_k x}$, $k=0,1,\ldots,n+1$, $0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_{n+1}$. Дифференциальный оператор имеет вид

$$D_{n+1}f(x)=(D-\lambda_n)\cdots(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)Df(x),\quad D=\frac{d}{dx}. \tag{4.39}$$

В данном случае

$$g_n(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{\lambda_1 x_0} & e^{\lambda_1 x_1} & \ldots & e^{\lambda_1 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_n x_0} & e^{\lambda_n x_1} & \ldots & e^{\lambda_n x_n} \end{vmatrix}.$$

Пусть $\tilde{g}_n=g_n(x_0,x_1,\ldots,x_n)\neq 0$. Так как

$$D_{n+1}\varphi_{n+1}(x)=(D-\lambda_n)\cdots(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)De^{\lambda_{n+1}x}=$$

$$=\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)e^{\lambda_{n+1}x},$$

то интерполяционный многочлен

$$\widetilde{L}_{n+1}(x) = L_n(x) + \frac{e^{-\lambda_{n+1} x_j}\Omega_n(x) D_{n+1}(f; x_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1} - \lambda_n)}, \tag{4.40}$$

где

$$L_n(x) = \frac{1}{\widetilde{g}_n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i g_n(x, x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) f(x_i),$$

$$\Omega_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{\widetilde{g}_n} g_{n+1}(x, x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

удовлетворяет условиям вида (4.8), где дифференциальный оператор $D_{n+1} f(x)$ определяется равенством (4.39).

Ряд других интерполяционных формул Эрмита–Биркгофа имеется в [24, 25, 34, 36, 37].

ГЛАВА III

Обобщённые интерполяционные формулы Эрмита–Биркгофа для функций от матриц

В теории интерполирования функций скалярных аргументов строятся интерполяционные многочлены различных видов относительно произвольных чебышевских систем функций и их многих частных случаев. Такого вида интерполяционные формулы также находят применение в ряде областей математики и ее приложениях.

В данной главе получены эрмитового типа тригонометрические интерполяционные матричные многочлены, а также интерполяционные многочлены относительно двух видов рациональных матричных функций и матричных экспонент. Данные формулы основаны на интерполяционных многочленах Эрмита–Биркгофа, рассмотренных в предыдущей главе.

§1. Тригонометрические интерполяционные матричные многочлены

В данном разделе будут рассмотрены интерполяционные тригонометрические матричные многочлены эрмитова типа. Такого вида формулы содержат кроме значений интерполируемой функции также и значения ее производных во всех или только в отдельных узлах интерполирования. При построении обобщенных вариантов этих формул требуется совпадение заданных в узлах значений дифференциальных операторов интерполяционного полинома и интерполируемой функции. Ряд таких формул для функций скалярного аргумента получен и исследован в [54, 55].

Рассмотрим матричный вариант формулы (1.2) из предыдущей главы. Пусть X – множество квадратных матриц, $F(z)$ – целая 2π-периодическая функция, $z \in \mathbb{C}$, также задана совокупность различных матричных узлов $A_k \in X$ $(k = 0,1,...,2n)$. В этих точках известны значения $F(A_k)$ функции $F(A)$, $A \in X$. Кроме этого, в одном из узлов A_j известно значение $L_{2n+1}(F; A_j) \equiv L_{2n+1}F(A_j)$ дифференциального матричного оператора вида

$$L_{2n+1}F(A) = (D^2 + n^2)\cdots(D^2 + 1^2)DF(z)\Big|_{z=A}, \ D = \frac{d}{dz}.$$

Причем, значение данного оператора, примененного к функции вида $B_1F(A)B_2$, где B_1 и B_2 – некоторые фиксированные матрицы из множества X, вычисляется по правилу

$$L_{2n+1}(B_1F(A)B_2; A) = B_1L_{2n+1}F(A)B_2.$$

Далее указан тригонометрический полином $T_{n+1}(A)$ степени $n+1$, для которого выполняются условия

$$T_{n+1}(A_i) = F(A_i) \quad (i=\overline{0,2n}); \quad L_{2n+1}(T_{n+1}; A_j) = L_{2n+1}(F; A_j). \tag{1.1}$$

Теорема 1.1. *Тригонометрический многочлен*

$$T_{n+1}(F;A) = H_n(A) + \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\Omega_{n+1}(A)\cos^{-1}\frac{1}{2}\left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k\right)L_{2n+1}(F;A_j), \tag{1.2}$$

где

$$H_n(A) = \sum_{k=0}^{2n}\Psi_k(A)\Psi_k^{-1}(A_k)F(A_k), \tag{1.3}$$

$$\Psi_k(A) = \sin\frac{A-A_0}{2}\cdots\sin\frac{A-A_{k-1}}{2}\sin\frac{A-A_{k+1}}{2}\cdots\sin\frac{A-A_{2n}}{2},$$

$$\Omega_{n+1}(A) = \cos\frac{A-A_j}{2}\prod_{k=0}^{2n}\sin\frac{A-A_k}{2},$$

матрицы $\sin\frac{A_k - A_\nu}{2}$ $(k \neq \nu)$ *и* $\cos\frac{1}{2}\left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k\right)$ *обратимы, удовлетворяет первой группе условий* (1.1). *Если матрицы* $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$ *попарно перестановочны, то многочлен* (1.2) *удовлетворяет также второму условию* (1.1).

Доказательство. Очевидно, что $H_n(A_i) = F(A_i)$ при $i = 0,1,\ldots,2n$. Так как в произведение $\Omega_{n+1}(A)$ входят множители вида $\sin\frac{A-A_i}{2}$ $(i=\overline{0,2n})$, то $\Omega_{n+1}(A_i) = 0$ для данных значений i. Таким образом, первая группа условий (1.1) выполняется.

В силу попарной перестановочности матриц $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$, матричные многочлены $\Psi_k(A)$ $(k = 0,1,\ldots,2n)$, а, следовательно, и многочлен $H_n(A)$ при $A = A_j$ будут представимы в виде

$$H_n(A) = B_0 + \sum_{k=1}^{n}\left((\cos kA)B_{2k-1} + (\sin kA)B_{2k}\right), \tag{1.4}$$

где $B_0, B_1, \ldots, B_{2n}$ – соответствующие фиксированные матрицы из множества X.

Поскольку

$$L_{2n+1}\cos kA = L_{2n+1}\sin kA = 0 \quad (k=\overline{0,n}),$$

то и $L_{2n+1}H_n(A) = 0$ при $A = A_j$.

При этих же условиях попарной коммутативности матриц $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$ методом математической индукции можно показать, что при $A = A_j$ выполняется равенство

$$\Omega_{n+1}(A) = \widetilde{T}_n(A) +$$

$$+\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\left(-\sin\frac{1}{2}\left(A_j + \sum_{k=0}^{2n} A_k\right)\cos(n+1)A + \cos\frac{1}{2}\left(A_j + \sum_{k=0}^{2n} A_k\right)\sin(n+1)A\right), \tag{1.5}$$

где $\widetilde{T}_n(A)$ – тригонометрический матричный многочлен степени не выше n вида (1.4). Далее так как

$$L_{2n+1}(\cos(n+1)A;\ A_j) = (-1)^{n+1}(2n+1)!\sin(n+1)A_j,$$

$$L_{2n+1}(\sin(n+1)A;\ A_j) = (-1)^n(2n+1)!\cos(n+1)A_j$$

и, кроме того, $L_{2n+1}\widetilde{T}_n(A) = 0,$ то

$$L_{2n+1}(\Omega_{n+1}; A_j) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}}\left(\sin\frac{1}{2}\left(A_j + \sum_{k=0}^{2n} A_k\right)\sin(n+1)A_j +\right.$$

$$\left.+\cos\frac{1}{2}\left(A_j + \sum_{k=0}^{2n} A_k\right)\cos(n+1)A_j\right) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}}\cos\frac{1}{2}\left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k\right).$$

Таким образом, получили, что второе равенство в (1.1) справедливо. Теорема 1.1 доказана.

Замечание. В данной теореме условие попарной перестановочности узлов можно заменить более слабым условием перестановочности матрицы A_j с каждым из узлов $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$, но тогда матрица $\cos\frac{1}{2}\left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k\right)$ в формуле (1.2) заменится более громоздким выражением, и доказательство теоремы значительно усложнится.

Пусть, как и ранее, X и Y – множества квадратных матриц, $F : X \to Y$ – матричная функция, дифференцируемая по Гато $2n+1$ раз в точке $A_j \in X$. Далее построим формулу, аналогичную (1.2), в которой оператор $L_{2n+1}F(A)$ будет задаваться посредством дифференциалов Гато от функции $F(A),\ A \in X$.

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{L}_1F(A) \equiv \widetilde{L}_1F(A; H_1) \equiv \widetilde{D}_{H_1}F(A) = \delta F[A; H_1], \quad \widetilde{L}_3F(A) \equiv \widetilde{L}_3F(A; H_3H_2H_1) =$$

$$= (\widetilde{D}^2_{H_3H_2} + H_3H_2)\widetilde{D}_{H_1}F(A) = \delta^3F[A; H_3H_2H_1] + H_3H_2\delta F[A; H_1],$$

где $\delta F[A;H_1]$ – первый дифференциал Гато от $F(A)$ в точке A по направлению $H_1 \in X$, а $\delta^3 F[A;H_3H_2H_1]$ – дифференциал Гато третьего порядка от $F(A)$ в той же точке по направлениям $H_1,H_2,H_3 \in X$. Обозначим $\psi_0(A)=I$, где I – единичная матрица, $\varphi_n(A)=\sin nA$, $\psi_n(A)=\cos nA$, $n \ge 1$. Тогда если матрицы A и H из множества X перестановочны, то для дифференциалов Гато функций $\varphi_n(A)$ и $\psi_n(A)$ по направлению H справедливы равенства $\delta\phi_n[A;H]=n\psi_n(A)H$; $\delta\psi_n[A;H]=-n\phi_n(A)H$. Легко убедиться, что если матрицы A,H_1,H_2,H_3 попарно перестановочны, то решением уравнения $\widetilde{L}_3F(A)=0$ являются функции $F(A)=\varphi_1(A)$ и $F(A)=\psi_1(A)$, а также любая матричная функция, не зависящая от A.

Аналогично рассмотрим дифференциально-матричный оператор общего вида

$$\widetilde{L}_{2n+1}F(A)=\widetilde{L}_{2n+1}F(A;H_{2n+1}H_{2n}\cdots H_1)=$$
$$=(\widetilde{D}^2_{H_{2n+1}H_{2n}}+n^2H_{2n+1}H_{2n})\cdots(\widetilde{D}^2_{H_5H_4}+2^2H_5H_4)(\widetilde{D}^2_{H_3H_2}+1^2H_3H_2)\widetilde{D}_{H_1}F(A), \tag{1.6}$$

где $(\widetilde{D}^2_{H_{2k+1}H_{2k}}+k^2H_{2k+1}H_{2k})F_k(A)=\delta^2F_k[A;H_{2k+1}H_{2k}]+k^2H_{2k+1}H_{2k}F_k(A)$, $(k=1,2,\ldots,n)$, а функции $F_k(A)$ являются результатом применения оператора $\widetilde{D}_{H_1}F(A)$ и $(k-1)$-кратного последовательного применения операторов, указанных в скобках выражения (1.6). Как и ранее, уравнение $\widetilde{L}_{2n+1}F(A)=0$ имеет решения $\psi_0(A)=I$, $\varphi_k(A)=\sin kA$ и $\psi_k(A)=\cos kA$ $(k=1,2,\ldots,n)$, при условии попарной перестановочности матриц $A,H_1,H_2,\ldots,H_{2n+1}\in X$.

Построим далее тригонометрический полином $\widetilde{T}_{n+1}(A)$ степени $n+1$, для которого выполнялись бы условия

$$\widetilde{T}_{n+1}(A_i)=F(A_i)\quad (i=\overline{0,2n});\quad \widetilde{L}_{2n+1}(\widetilde{T}_{n+1};A_j)=\widetilde{L}_{2n+1}(F;A_j). \tag{1.7}$$

Теорема 1.2. *Тригонометрический многочлен*

$$\widetilde{T}_{n+1}(F;A)=H_n(A)+\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\Omega_{n+1}(A)(H_{2n+1}H_{2n}\cdots H_1)^{-1}\times$$
$$\times\cos^{-1}\frac{1}{2}\left((2n+1)A_j-\sum_{k=0}^{2n}A_k\right)\widetilde{L}_{2n+1}(F;A_j), \tag{1.8}$$

где $H_n(A)$ *– матричный многочлен* (1.3) *с узлами интерполирования* A_k, *такими же, как и в предыдущей теореме, а матрицы* $\cos\frac{1}{2}\left((2n+1)A_j-\sum_{k=0}^{2n}A_k\right)$ *и* $H_{2n+1}H_{2n}\cdots H_1$ *обратимы, удовлетворяет первой группе условий* (1.7)*. Если уз-*

лы $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$ *и направления* $H_1, H_2, \ldots, H_{2n+1}$ *попарно перестановочны, то многочлен* (1.8) *удовлетворяет также второму условию* (1.7).

Доказательство. Из доказательства теоремы 1.1 и структуры многочлена (1.8) следует, что он удовлетворяет первой группе условий (1.7).

При условии попарной перестановочности матриц $A, A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$, многочлены $H_n(A)$ и $\Omega_{n+1}(A)$ можно представить в виде (1.4) и (1.5), соответственно. Далее, так как матрица A_j перестановочна с направлениями $H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$, то при $\nu = 0, 1, \ldots, n+1$ и $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\widetilde{D}_{H_1} \psi_\nu(A)\Big|_{A=A_j} = \delta\psi_\nu[A_j; H_1] = -\nu\varphi_\nu(A_j)H_1,$$

$$\widetilde{D}^2_{H_{2k+1}H_{2k}} \psi_\nu(A)\Big|_{A=A_j} = \delta^2\psi_\nu[A_j; H_{2k+1}H_{2k}] = -\nu^2\psi_\nu(A_j)H_{2k+1}H_{2k},$$

а при $\nu = 1, 2, \ldots, n+1$ и тех же значениях k

$$\widetilde{D}_{H_1} \varphi_\nu(A)\Big|_{A=A_j} = \delta\varphi_\nu[A_j; H_1] = \nu\psi_\nu(A_j)H_1,$$

$$\widetilde{D}^2_{H_{2k+1}H_{2k}} \varphi_\nu(A)\Big|_{A=A_j} = \delta^2\varphi_\nu[A_j; H_{2k+1}H_{2k}] = -\nu^2\varphi_\nu(A_j)H_{2k+1}H_{2k}.$$

Из данных равенств, с учетом попарной перестановочности матриц $A_j, H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$, следует, что $\widetilde{L}_{2n+1}(\psi_0; A_j) = \widetilde{L}_{2n+1}(\psi_k; A_j) = \widetilde{L}_{2n+1}(\varphi_k; A_j) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Таким образом, в силу попарной перестановочности интерполяционных узлов и направлений $H_1, H_2, \ldots, H_{2n+1}$, и ввиду представления (1.4), будем иметь $\widetilde{L}_{2n+1}(H_n; A_j) = 0$.

Так как при $k = 1, 2, \ldots, n$ имеют место равенства

$$(\widetilde{D}^2_{H_{2k+1}H_{2k}} + k^2 H_{2k+1}H_{2k})\psi_{n+1}(A)\Big|_{A=A_j} = \delta^2\psi_{n+1}\big[A_j; H_{2k+1}H_{2k}\big] +$$

$$+ k^2\psi_{n+1}(A_j)H_{2k+1}H_{2k} = -\big[(n+1)^2 - k^2\big]\, \psi_{n+1}(A_j)H_{2k+1}H_{2k},$$

$$(\widetilde{D}^2_{H_{2k+1}H_{2k}} + k^2 H_{2k+1}H_{2k})\psi_{n+1}(A)\Big|_{A=A_j} = \delta^2\varphi_{n+1}\big[A_j; H_{2k+1}H_{2k}\big] +$$

$$+ k^2\varphi_{n+1}(A_j)H_{2k+1}H_{2k} = -\big[(n+1)^2 - k^2\big]\, \varphi_{n+1}(A_j)H_{2k+1}H_{2k},$$

то будем соответственно иметь

$$\widetilde{L}_{2n+1}(\psi_{n+1}; A_j) = (-1)^{n+1}(2n+1)!\varphi_{n+1}(A_j)H_{2n+1}\cdots H_2H_1,$$

$$\widetilde{L}_{2n+1}(\varphi_{n+1}; A_j) = (-1)^{n}(2n+1)!\psi_{n+1}(A_j)H_{2n+1}\cdots H_2H_1.$$

Тогда, учитывая соотношение (1.5), получим

$$\widetilde{L}_{2n+1}(\Omega_{n+1};A_j)=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}}\left[\sin\frac{1}{2}\left(A_j+\sum_{k=0}^{2n}A_k\right)\sin(n+1)A_j+\cos\frac{1}{2}\left(A_j+\sum_{k=0}^{2n}A_k\right)\times\right.$$

$$\left.\times\cos(n+1)A_j\right]H_{2n+1}\cdots H_2H_1=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}}\cos\frac{1}{2}\left((2n+1)A_j-\sum_{k=0}^{2n}A_k\right)H_{2n+1}\cdots H_2H_1.$$

Таким образом, очевидно, что второе равенство в (1.7) справедливо. Теорема 1.2 доказана.

Следует отметить, что формула (1.2) является частным случаем многочлена (1.8), когда $F(z)$ является целой функцией и $H_1=H_2=\cdots=H_{2n+1}=I$.

Пример. Для функции $F(A)=e^{\sin A}$ построим многочлен $T_2(A)=T_2(F;A)$ второй степени вида (1.2) в случае узлов

$$A_0=\frac{\pi}{12}\begin{bmatrix}4 & 5\\ 6 & 3\end{bmatrix},\quad A_1=\frac{\pi}{72}\begin{bmatrix}65 & 85\\ 102 & 48\end{bmatrix},\quad A_2=\frac{\pi}{72}\begin{bmatrix}131 & 115\\ 138 & 108\end{bmatrix}.$$

Данная функция в узлах интерполирования принимает значения

$$F(A_0)=\begin{bmatrix}1{,}382 & 0{,}6462\\ 0{,}775 & 1{,}253\end{bmatrix},\quad F(A_1)=\begin{bmatrix}0{,}8740 & 0{,}4214\\ 0{,}5057 & 0{,}790\end{bmatrix},$$

$$F(A_2)=\begin{bmatrix}0{,}5441 & -0{,}1635\\ -0{,}1962 & 0{,}5768\end{bmatrix},$$

а значение дифференциального оператора $L_3F(A)$ в точке A_1 равно

$$L_3(F;A_1)=\begin{bmatrix}0{,}08495 & 0{,}1109\\ 0{,}1331 & 0{,}06277\end{bmatrix}.$$

Здесь и во всех примерах этой главы приводятся приближенные значения интерполируемой функции и соответствующих дифференциальных операторов с округлением их точных значений до последних разрядов, указанных в работе.

В этом случае интерполяционный многочлен $T_2(F;A)$ имеет вид

$$T_2(F;A)=H_1(A)+\Omega_2(A)B_3,$$

где

$$H_1(A)=\Psi_0(A)B_0+\Psi_1(A)B_1+\Psi_2(A)B_2,$$

$$\Psi_0(A)=\sin\frac{A-A_1}{2}\sin\frac{A-A_2}{2},\quad \Psi_1(A)=\sin\frac{A-A_0}{2}\sin\frac{A-A_2}{2},$$

$$\Psi_2(A)=\sin\frac{A-A_0}{2}\sin\frac{A-A_1}{2},\quad \Omega_2(A)=\cos\frac{A-A_1}{2}\prod_{k=0}^{2}\sin\frac{A-A_k}{2}.$$

Матрицы B_0, B_1, B_2, B_3 для данного конкретного случая будут такими

$$B_0 = \begin{bmatrix} -6{,}357 & 3{,}652 \\ 4{,}383 & -7{,}087 \end{bmatrix}, \quad B_1 = -\begin{bmatrix} 0{,}4121 & 1{,}315 \\ 1{,}578 & 0{,}1491 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 4{,}801 & -5{,}308 \\ -6{,}370 & 5{,}862 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0{,}06192 & 0{,}1993 \\ 0{,}2391 & 0{,}02206 \end{bmatrix}.$$

Фробениусовы нормы матриц погрешности приближения в средних точках $A_{01} = (A_0 + A_1)/2$ и $A_{12} = (A_1 + A_2)/2$ здесь принимают значения

$$\| F(A_{01}) - T_2(A_{01}) \|_2 = 0{,}03652, \quad \| F(A_{12}) - T_2(A_{12}) \|_2 = 0{,}03107.$$

Для той же функции построим многочлен $T_3(A) = T_3(F; A)$ третьей степени в случае узлов

$$A_0 = \frac{\pi}{15}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \frac{\pi}{45}\begin{bmatrix} 24 & 4 \\ 6 & 24 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{\pi}{45}\begin{bmatrix} 45 & 26 \\ 39 & 45 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \frac{\pi}{45}\begin{bmatrix} 54 & 28 \\ 42 & 54 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \frac{\pi}{45}\begin{bmatrix} 81 & 50 \\ 75 & 81 \end{bmatrix}.$$

Интерполируемая функция в узлах принимает значения

$$F(A_0) = \begin{bmatrix} 2{,}191 & 0{,}4304 \\ 0{,}6456 & 2{,}191 \end{bmatrix}, \quad F(A_1) = \begin{bmatrix} 2{,}554 & -0{,}07307 \\ -0{,}1096 & 2{,}554 \end{bmatrix},$$

$$F(A_2) = \begin{bmatrix} 1{,}333 & -0{,}7194 \\ -1{,}079 & 1{,}333 \end{bmatrix}, \quad F(A_3) = \begin{bmatrix} 1{,}778 & -0{,}7264 \\ -1{,}090 & 1{,}778 \end{bmatrix},$$

$$F(A_4) = \begin{bmatrix} 1{,}643 & -0{,}8381 \\ -1{,}257 & 1{,}643 \end{bmatrix},$$

а значение дифференциального оператора $L_5 F(A)$ в точке A_2 равно

$$L_5(F; A_2) = \begin{bmatrix} 4{,}717 & -1{,}457 \\ -2{,}186 & 4{,}717 \end{bmatrix}.$$

Интерполяционный многочлен $T_3(F; A)$ задается равенством

$$T_3(F; A) = H_2(A) + \Omega_3(A) B_5,$$

где $H_2(A) = \sum_{k=0}^{4} \Psi_k(A) B_k, \quad \Omega_3(A) = \cos\frac{A - A_2}{2} \prod_{k=0}^{4} \sin\frac{A - A_k}{2},$

$$\Psi_k(A) = \sin\frac{A - A_0}{2} \cdots \sin\frac{A - A_{k-1}}{2} \sin\frac{A - A_{k+1}}{2} \cdots \sin\frac{A - A_4}{2}, \quad (k = 0, 1, \ldots, 4).$$

Матрицы $B_0, B_1, \ldots, B_5$ в данном случае равны

$$B_0 = \begin{bmatrix} 56{,}94 & -62{,}59 \\ -93{,}88 & 56{,}94 \end{bmatrix}, \quad B_1 = 10\begin{bmatrix} 3375 & -2754 \\ -4131 & 3375 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -542{,}2 & 444{,}1 \\ 666{,}1 & -542{,}2 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = 100\begin{bmatrix} -3507 & 2863 \\ 4295 & -3507 \end{bmatrix}, \quad B_4 = 100\begin{bmatrix} 3174 & -2592 \\ -3888 & 3174 \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} 1{,}599 & -0{,}2864 \\ -0{,}4296 & 1{,}599 \end{bmatrix}.$$

Нормы матричных погрешностей приближения в средних точках $A_{k\,k+1} = (A_k + A_{k+1})/2 \quad (k = 0,1,2,3)$ для рассматриваемого случая равны

$$\| F(A_{01}) - T_3(A_{01}) \|_2 = 0{,}007354, \quad \| F(A_{12}) - T_3(A_{12}) \|_2 = 0{,}004345,$$

$$\| F(A_{23}) - T_3(A_{23}) \|_2 = 0{,}001873, \quad \| F(A_{34}) - T_3(A_{34}) \|_2 = 0{,}007293.$$

Погрешность приближения функции $F(A) = e^{\sin A}$ многочленом $T_3(A)$ в этих средних точках выше в сравнении с приближением многочленом $T_2(A)$.

§2. Интерполяционные формулы относительно рациональных функций первого типа

Рассмотрим сначала задачу квадратичного интерполирования. Пусть X и Y – множества квадратных матриц, $F: X \to Y$ – матричная функция, такая, что $\widetilde{F}(A) = Q_1(A)F(A)$, $A \in X$, где $Q_1(A) = (A + C_0)(A + C_1)$, а C_0, C_1 – заданные фиксированные матрицы из X, дважды дифференцируема по Гато на X; A_0 и A_1 – различные матричные узлы из множества X. В этих узлах известны значения $F(A_0)$ и $F(A_1)$ функции $F(A)$, а также в одном из узлов A_j – значение $D_2(F; A_j) \equiv D_2F(A_j)$ матричного дифференциального оператора вида

$$D_2F(A) \equiv D_2F(A; H_2H_1) = \delta^2\widetilde{F}[A; H_2H_1],$$

где $\delta^2\widetilde{F}[A; H_2H_1]$ – дифференциал Гато второго порядка функции $\widetilde{F}(A)$ в точке A по направлениям $H_1, H_2 \in X$. Введем в рассмотрение функции

$$\varphi_k(A) = (A + C_k)^{-1}, \; k = 0,1,2. \tag{2.1}$$

В случае попарной перестановочности множителей в $Q_1(A)$ и направлений H_1, H_2, функции $\varphi_0(A)$ и $\varphi_1(A)$ являются решениями уравнения $D_2F(A) = 0$.

Построим матричный полином $\widetilde{L}_2(A)$ второй степени относительно рациональных функций $\varphi_k(A)$ вида (2.1), для которого выполнялись бы условия

$$\widetilde{L}_2(A_i) = F(A_i), \; i = 0,1; \quad D_2(\widetilde{L}_2; A_j) = D_2(F; A_j). \tag{2.2}$$

Обозначим $\Omega_1(A) = (A - A_0)(A - A_1)$, $G_1 = (A_0 + C_2)(A_1 + C_2)$.

Теорема 2.1. *Многочлен*

$$\widetilde{L}_2(A)=L_1(A)+\frac{1}{2}\big((A+C_2)Q_1(A)\big)^{-1}\Omega_1(A)(H_2H_1G_1)^{-1}(A_j+C_2)^3D_2(F;A_j), \tag{2.3}$$

где

$$L_1(A)=Q_1^{-1}(A)\Big[(A-A_1)(A_0-A_1)^{-1}Q_1(A_0)F(A_0)+$$

$$+(A-A_0)(A_1-A_0)^{-1}Q_1(A_1)F(A_1)\Big],$$

матрицы $A+C_k$ $(k=0,1,2)$, $H_2H_1G_1$ *и* A_0-A_1 *обратимы, удовлетворяет первым двум условиям* (2.2). *Если матрицы* A_j+C_2, A_0+C_2, H_1 *и* H_2 *попарно перестановочны, то многочлен* (2.3) *удовлетворяет третьему условию в* (2.2).

Если, кроме того, A, A_0, A_1, C_0, C_1, C_2 *– множество попарно перестановочных матриц, а также матрицы* A_j+C_0 *и* A_j+C_1 *попарно перестановочны с матрицами* H_1, H_2, *то формула* (2.3) *инвариантна относительно многочленов вида*

$$\mathrm{P}_2(A)=\sum_{k=0}^{2}\varphi_k(A)B_k, \tag{2.4}$$

где B_k $(k=0,1,2)$ *– фиксированные матрицы из X.*

Доказательство. Так как $L_1(A_i)=F(A_i)$, а $\Omega_1(A_i)=0$ при $i=0,1$, то из этого следует выполнение первой группы равенств (2.2). Учитывая, что $L_1(A)=Q_1^{-1}(A)P_1(A)$, где $P_1(A)$ – матричный алгебраический многочлен первой степени, приходим к равенству

$$D_2L_1(A)=\delta^2P_1[A;H_2H_1]\equiv 0. \tag{2.5}$$

Введем обозначение $\Phi_1(A)=(A+C_2)^{-1}\Omega_1(A)$. Нетрудно показать, что выполняется соотношение

$$\Phi_1(A)=\widetilde{P}_1(A)+\varphi_2(A)G_1, \tag{2.6}$$

где $\widetilde{P}_1(A)=(A+C_2)^{-1}(A-A_0)(A+C_2)-A_1-C_2$.

Так как матрицы A_j+C_2, A_0+C_2, H_1 и H_2 попарно перестановочны, то, пользуясь определением дифференциала Гато второго порядка можно показать, что выполняется равенство $\delta^2\widetilde{P}_1[A_j;H_2H_1]=0$, с учетом которого и (2.6) будем иметь

$$D_2\left(\frac{1}{2}\big((A+C_2)Q_1(A)\big)^{-1}\Omega_1(A)(H_2H_1G_1)^{-1}(A_j+C_2)^3D_2(F;A_j);\ A_j\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\delta^2\Phi_1[A_j;H_2H_1](H_2H_1G_1)^{-1}(A_j+C_2)^3D_2(F;A_j)=$$

$$=\frac{1}{2}\delta^2\varphi_2[A_j;H_2H_1](H_2H_1)^{-1}(A_j+C_2)^3D_2(F;A_j). \qquad (2.7)$$

Вычислим дифференциал Гато второго порядка от функции $\varphi_2(A)=(A+C_2)^{-1}$. Так как матрицы A_j+C_2, H_1 и H_2 попарно перестановочны, то

$$\delta^2\varphi_2[A_j;H_2H_1]=2(A_j+C_2)^{-3}H_2H_1. \qquad (2.8)$$

Подставляя правую часть равенства (2.8) в (2.7), и учитывая (2.5), получим, что выполняется третье равенство в (2.2).

Докажем инвариантность формулы (2.3) относительно многочленов вида (2.4). Пусть $F(A)=\varphi_0(A)B_0$. Тогда в силу попарной перестановочности матриц A, A_0, A_1, C_0, C_1, справедлива цепочка равенств

$$L_1(A)=Q_1^{-1}(A)(A_0-A_1)^{-1}\left[(A-A_1)(A_0+C_1)-(A-A_0)(A_1+C_1)\right]\ B_0=$$

$$=Q_1^{-1}(A)(A_0-A_1)^{-1}(A+C_1)(A_0-A_1)B_0=(A+C_0)^{-1}B_0=\varphi_0(A)B_0.$$

Аналогично показывается, что при $F(A)=\varphi_1(A)B_1$ имеет место равенство $L_1(A)=\varphi_1(A)B_1$. Так как матрицы A_j+C_0, A_j+C_1, H_1, H_2 попарно перестановочны, то справедливы также равенства

$$D_2\big(\varphi_0(A)B_0;A_j\big)=D_2\big(\varphi_1(A)B_1;A_j\big)=0.$$

Следовательно, формула (2.3) инвариантна относительно рассмотренных выше функций.

Пусть $F(A)=\varphi_2(A)B_2$. Введем обозначение $\psi(A)=Q_1(A)\varphi_2(A)$. Тогда $D_2F(A)=\delta^2\psi[A;H_2H_1]B_2$. Нетрудно показать, что выпоняется матричное равенство

$$\psi(A)=\tilde{\tilde{\tilde{P}}}_1(A)+\varphi_2(A)(C_0-C_2)(C_1-C_2), \qquad (2.9)$$

где $\tilde{\tilde{\tilde{P}}}_1(A)=A+C_0+(A+C_2)(C_1-C_2)(A+C_2)^{-1}$. В силу попарной перестановочности матриц A_j+C_k $(k=0,1,2)$, H_1, H_2 имеет место равенство $\delta^2\tilde{\tilde{\tilde{P}}}_1[A_j;H_2H_1]=0$. Поэтому, учитывая (2.8) и (2.9), получим, что

$$D_2\big(\varphi_2(A)B_2;\ A_j\big)=\delta^2\varphi_2[A_j;H_2H_1](C_0-C_2)(C_1-C_2)B_2=$$

$$=2(A_j+C_2)^{-3}H_2H_1(C_0-C_2)(C_1-C_2)B_2.$$

Тогда, в силу попарной перестановочности соответсвующих матриц, получим

$$\frac{1}{2}\big((A+C_2)Q_1(A)\big)^{-1}\Omega_1(A)(H_2H_1G_1)^{-1}(A_j+C_2)^3D_2(F;A_j)=$$

$$=\big((A+C_2)Q_1(A)\big)^{-1}\Omega_1(A)G_1^{-1}(C_0-C_2)(C_1-C_2)B_2.$$

Таким образом,

$$\widetilde{L}_2(A)=Q_1^{-1}(A)(A_0-A_1)^{-1}(A_0+C_2)^{-1}(A_1+C_2)^{-1}(A+C_2)^{-1}\times$$

$$\times\big((A_1+C_2)(A+C_2)(A-A_1)(A_0+C_0)(A_0+C_1)-$$

$$-(A_0+C_2)(A+C_2)(A-A_0)(A_1+C_0)(A_1+C_1)+$$

$$+(A_0-A_1)(A-A_0)(A-A_1)(C_0-C_2)(C_1-C_2)\big)B_2=(A+C_2)^{-1}B_2=\varphi_2(A)B_2.$$

Следовательно, полином (2.3) инвариантен относительно многочленов вида (2.4).

Обобщим формулу (2.3) на произвольное число узлов $n\geq 1$. Пусть функция $\widetilde{F}(A)=Q_n(A)F(A),\quad A\in X,$ где $Q_n(A)=(A+C_0)(A+C_1)\cdots(A+C_n),$ а $C_0,C_1,\ldots,C_n$ – фиксированные матрицы из множества *X*, дифференцируема по Гато $n+1$ раз в точке $A_j\in X$. Получим аналогичную формулу для произвольного числа различных узлов $A_0,A_1,\ldots,A_n\in X$. В этих узлах известны значения $F(A_k)$ функции $F(A)$, а также в одном из узлов A_j известно значение дифференциального оператора вида $D_{n+1}F(A)=\delta^{n+1}\widetilde{F}[A;H_{n+1}H_n\cdots H_1],$ где $\delta^{n+1}\widetilde{F}[A;H_{n+1}H_n\cdots H_1]$ – дифференциал Гато порядка $n+1$ функции $\widetilde{F}(A)$ в точке *A* по направлениям $H_1,H_2,\ldots,H_{n+1}\in X$.

Построим полином $\widetilde{L}_{n+1}(A)$ степени $n+1$ относительно рациональных функций вида $\varphi_k(A)=(A+C_k)^{-1},\ k=0,1,\ldots,n+1,$ для которого выполнялись бы условия

$$\widetilde{L}_{n+1}(A_i)=F(A_i),\ i=0,1,\ldots,n;\quad D_{n+1}(\widetilde{L}_{n+1};A_j)=D_{n+1}(F;A_j).\tag{2.10}$$

Обозначим далее $\Omega_{n,k}(A)=(A-A_0)\cdots(A-A_{k-1})(A-A_{k+1})\cdots(A-A_n),$ $\Omega_n(A)=(A-A_0)(A-A_1)\cdots(A-A_n),\qquad G_n=(A_0+C_{n+1})(A_1+C_{n+1})\cdots(A_n+C_{n+1}),$ $\widetilde{H}_{n+1}=H_{n+1}H_n\cdots H_1$, где $H_1,H_2,\ldots,H_{n+1}$ – некоторые матрицы из множества *X*. Отметим, что функции $\varphi_k(A),\ k=0,1,\ldots,n,$ являются на множестве коммутативных матриц решениями уравнения $D_{n+1}F(A)=0$.

Т е о р е м а 2.2. *Матричный многочлен степени* $n+1$

$$\widetilde{L}_{n+1}(A)=L_n(A)+\frac{1}{(n+1)!}\big((A+C_{n+1})Q_n(A)\big)^{-1}\Omega_n(A)\times$$

$$\times\big(\widetilde{H}_{n+1}G_n\big)^{-1}(A_j+C_{n+1})^{n+2}D_{n+1}(F;A_j),\tag{2.11}$$

где

$$L_n(A)=Q_n^{-1}(A)\sum_{k=0}^{n}\Omega_{n,k}(A)\Omega_{n,k}^{-1}(A_k)Q_n(A_k)F(A_k),$$

$A+C_m$, A_k+C_m $(m=\overline{0,n+1};\ k=\overline{0,n})$, A_k-A_ν $(k\neq\nu;\ k,\nu=\overline{0,n})$, $\widetilde{H}_{n+1}$ *– обратимые матрицы, удовлетворяют первой группе условий* (2.10). *Если матрицы* $A_j+C_{n+1}, H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$ *попарно перестановочны, и с этой группой матриц попарно перестановочны каждая из матриц* A_k+C_{n+1} $(k=\overline{0,n-1})$, *то многочлен* (2.11) *удовлетворяет последнему условию в* (2.10).

Доказательство. Очевидно, что при $i=0,1,\ldots,n$ справедливы равенства $L_n(A_i)=F(A_i)$ и $\Omega_n(A_i)=0$. Из этого следует выполнение первой группы условий (2.10).

Так как $L_n(A)=Q_n^{-1}(A)P_n(A)$, где $P_n(A)$ – матричный алгебраический многочлен степени n, то очевидно, что

$$D_{n+1}L_n(A)=\delta^{n+1}P_n[A;\widetilde{H}_{n+1}]\equiv 0. \qquad (2.12)$$

Обозначим $C=C_{n+1}$ и введем функцию $\Phi_n(A)=(A+C)^{-1}\Omega_n(A)$. Тогда

$$D_{n+1}\left(\frac{1}{(n+1)!}\big((A+C_{n+1})Q_n(A)\big)^{-1}\Omega_n(A)\big(\widetilde{H}_{n+1}G_n\big)^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times(A_j+C_{n+1})^{n+2}D_{n+1}(F;A_j);\ A_j\right)=$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\delta^{n+1}\Phi_n[A_j;\widetilde{H}_{n+1}]\big(\widetilde{H}_{n+1}G_n\big)^{-1}(A_j+C_{n+1})^{n+2}D_{n+1}(F;A_j). \qquad (2.13)$$

Вычислим дифференциал Гато $\delta^{n+1}\Phi_n[A_j;\widetilde{H}_{n+1}]$. Нетрудно показать, что функция $\Phi_n(A)$ представима в виде

$$\Phi_n(A)=\widetilde{\Omega}_{n-1}(A)-\Phi_{n-1}(A)(A_n+C), \qquad (2.14)$$

где $\widetilde{\Omega}_{n-1}(A)=(A+C)^{-1}\Omega_{n-1}(A)(A+C)$. Последовательно применяя формулу (2.14) и принимая $\Omega_0(A)=A-A_0$, получим

$$\Phi_n(A)=\widetilde{\Omega}_{n-1}(A)-\widetilde{\Omega}_{n-2}(A)(A_n+C)+\widetilde{\Omega}_{n-3}(A)(A_{n-1}+C)(A_n+C)+\cdots+$$
$$+(-1)^{n-2}\widetilde{\Omega}_1(A)(A_3+C)\cdots(A_n+C)+(-1)^{n-1}\widetilde{\Omega}_0(A)(A_2+C)\cdots(A_n+C)+$$
$$+(-1)^n(A_1+C)\cdots(A_n+C)+(-1)^{n+1}(A+C)^{-1}(A_0+C)\cdots(A_n+C). \qquad (2.15)$$

Вычислим дифференциалы Гато $\delta^{n+1}\widetilde{\Omega}_k[A_j;\widetilde{H}_{n+1}]$ для $k=0,1,\ldots,n-1$. Используя определение дифференциала Гато первого порядка и проводя необходимые преобразования, получим

$$\delta\widetilde{\Omega}_k[A_j;H_1]=(A_j+C)^{-1}\delta\Omega_k[A_j;H_1](A_j+C)+$$
$$+(A_j+C)^{-1}\left(\Omega_k(A_j)H_1-(A_j+C)^{-1}H_1\Omega_k(A_j)(A_j+C)\right).$$

В силу попарной перестановочности соответствующих матриц

$$\Omega_k(A_j)H_1-(A_j+C)^{-1}H_1\Omega_k(A_j)(A_j+C)=0,$$

следовательно $\delta\widetilde{\Omega}_k[A_j;H_1]=(A_j+C)^{-1}\delta\Omega_k[A_j;H_1](A_j+C).$

Рассуждая аналогичным образом, будем иметь

$$\delta^{n+1}\widetilde{\Omega}_k[A_j;\widetilde{H}_{n+1}]=(A_j+C)^{-1}\delta^{n+1}\Omega_k[A_j;\widetilde{H}_{n+1}](A_j+C).$$

Функции $\Omega_k(A)$ являются матричными алгебраическими многочленами степени не выше $k+1\le n,$ поэтому $\delta^{n+1}\Omega_k[A_j;\widetilde{H}_{n+1}]=0,$ и соответственно

$$\delta^{n+1}\widetilde{\Omega}_k[A_j;\widetilde{H}_{n+1}]=0 \quad (k=0,1,\ldots,n-1). \tag{2.16}$$

Введем функцию $\varphi(A)=(A+C)^{-1},$ тогда из (2.15) и (2.16) следует

$$\delta^{n+1}\Phi_n[A_j;\widetilde{H}_{n+1}]=(-1)^{n+1}\delta^{n+1}\varphi[A_j;\widetilde{H}_{n+1}](A_0+C)\cdots(A_n+C). \tag{2.17}$$

Методом математической индукции покажем, что при $n\ge 0$ в условиях попарной перестановочности матриц $A_j+C,\,H_1,H_2,\ldots,H_{n+1}$ выполняется равенство

$$\delta^{n+1}\varphi[A_j;\widetilde{H}_{n+1}]=(-1)^{n+1}(n+1)!(A_j+C)^{-n-2}\,\widetilde{H}_{n+1}. \tag{2.18}$$

При $n=0$ будем иметь

$$\delta\varphi[A_j;H_1]=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left((A+\lambda H_1+C)^{-1}-(A+C)^{-1}\right)=$$
$$=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}(A+\lambda H_1+C)^{-1}(A+C)^{-1}\left(-\lambda H_1\right)=-(A+C)^{-2}H_1.$$

Предположим, что равенство (2.18) справедливо при $n=m.$ Проверим его истинность при $n=m+1.$

$$\delta^{m+2}\varphi[A_j;\widetilde{H}_{m+2}]=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left(\delta^{m+1}\varphi[A_j+\lambda H_{m+2};\widetilde{H}_{m+1}]-\delta^{m+1}\varphi[A_j;\widetilde{H}_{m+1}]\right)=$$
$$=(-1)^{m+1}(m+1)!\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}(A_j+\lambda H_{m+2}+C)^{-m-2}(A_j+C)^{-m-2}\times$$
$$\times\left((A_j+C)^{m+2}-(A_j+\lambda H_{m+2}+C)^{m+2}\right)\widetilde{H}_{m+1}.$$

Так как

$$(A_j+C)^{m+2}-(A_j+\lambda H_{m+2}+C)^{m+2}=-\lambda(m+2)(A_j+C)^{m+1}H_{m+2}-$$

$$-\lambda^2\frac{(m+1)(m+2)}{2}(A_j+C)^m H_{m+2}^2-\cdots-\lambda^{m+2}H_{m+2}^{m+2},$$

то $\delta^{m+2}\varphi[A_j;\widetilde{H}_{m+2}]=(-1)^{m+2}(m+2)!(A_j+C)^{-m-3}\widetilde{H}_{m+2}$, что совпадает с (2.18) при $n=m+1$. Таким образом, данное равенство верно для любого $n\geq 0$.

Из (2.17) и (2.18) при $C=C_{n+1}$, с учетом введенных ранее обозначений будем иметь

$$\delta^{n+1}\Phi_n[A_j;\widetilde{H}_{n+1}]=(n+1)!(A_j+C_{n+1})^{-n-2}\widetilde{H}_{n+1}G_n. \tag{2.19}$$

Подставляя (2.19) в (2.13) и учитывая (2.12), получим, что последнее условие в группе равенств (2.10) также выполняется.

Применение интерполяционных формул (2.3) и (2.11) проиллюстрируем на примере.

П р и м е р. Для функции $F(A)=e^{[A+B]^{-1}}$, где

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 0\\ 9 & 3 & 0\end{bmatrix},$$

построим многочлен $\widetilde{L}_2(A)=\widetilde{L}_2(F;A)$ второй степени вида (2.3) в случае узлов

$$A_0=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix},\quad A_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}.$$

Данная функция в узлах интерполирования принимает значения

$$F(A_0)=\begin{bmatrix}0{,}97445 & -0{,}031312 & 0{,}14146\\ 0{,}058849 & 1{,}2258 & -0{,}019709\\ 0{,}23973 & -0{,}011603 & 1{,}053\end{bmatrix},$$

$$F(A_1)=\begin{bmatrix}0{,}98402 & -0{,}033620 & 0{,}11345\\ 0 & 1{,}1536 & 0\\ 0{,}29173 & -0{,}0074206 & 0{,}95161\end{bmatrix},$$

а значение дифференциального оператора $D_2(F;A)$ в точке A_1 равно

$$D_2(F;A_1)=\begin{bmatrix}725{,}7 & -121{,}926 & -616{,}188\\ -63{,}9747 & 202{,}559 & 196{,}679\\ 533{,}736 & -55{,}9136 & -406{,}957\end{bmatrix}.$$

При этом соответствующий дифференциал Гато берется здесь по направлениям

$$H_1 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 16 & -35 & -17 \\ 18 & 34 & 8 \\ 16 & -18 & -8 \end{bmatrix}, \quad H_2 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 16 & -11 & -5 \\ 6 & 22 & 2 \\ 4 & -6 & 10 \end{bmatrix}.$$

В этом случае интерполяционный многочлен $\widetilde{L}_2(F;A)$ имеет вид

$$\widetilde{L}_2(F;A) = Q_1^{-1}(A)\left[AB_1 + B_0 + (A + C_2)^{-1}\Omega_1(A)B_2\right],$$

где

$$Q_1(A) = (A + C_0)(A + C_1), \quad \Omega_1(A) = (A - A_0)(A - A_1).$$

Матрицы $C_0, C_1, C_2, B_0, B_1, B_2$ для данного конкретного случая будут такими:

$$C_0 = -\begin{bmatrix} 69 & -33 & -29 \\ 4 & 73 & 27 \\ 54 & -4 & -12 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 11 & 1 & -3 \\ -4 & 7 & 5 \\ 10 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 21 & 18 & 2 \\ -16 & 5 & 6 \\ 12 & 16 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = -\begin{bmatrix} 495{,}40 & -373{,}51 & -185{,}56 \\ 105{,}63 & 735{,}13 & 242{,}49 \\ 431{,}61 & -61{,}787 & -79{,}483 \end{bmatrix}, \quad B_1 = -\begin{bmatrix} 55{,}921 & -26{,}235 & -14{,}274 \\ 3{,}4174 & 57{,}431 & 16{,}540 \\ 42{,}249 & -4{,}5570 & -1{,}2049 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 6{,}4244 & 16{,}851 & 8{,}9285 \\ -39{,}088 & -5{,}0879 & 23{,}82 \\ -8{,}3151 & 10{,}593 & 15{,}596 \end{bmatrix}.$$

Норма матрицы погрешности приближения в средней точке $A_{01} = (A_0 + A_1)/2$ здесь равна

$$\left\| F(A_{01}) - \widetilde{L}_2(A_{01}) \right\|_2 = 0{,}007913.$$

Введем в рассмотрение еще один узел $A_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 14 & -1 & -3 \\ -2 & 12 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ и для той же функции и узлов A_0, A_1 и A_2 построим многочлен вида (2.11) при $n = 2$.

Интерполируемая функция в точке A_2 принимает значение

$$F(A_2) = \begin{bmatrix} 1{,}0088 & -0{,}026966 & 0{,}067492 \\ -0{,}078419 & 1{,}0842 & 0{,}058065 \\ 0{,}41958 & 0{,}030348 & 0{,}76338 \end{bmatrix},$$

а значение оператора $D_3(F;A)$ в точке A_1 равно

$$D_3(F;A_1)=-\begin{bmatrix} 4472,9 & 3118,5 & 259,56 \\ -4194,7 & 2522,2 & 2629,3 \\ 2150,6 & 3203,9 & 1126,0 \end{bmatrix}.$$

Дифференциал Гато здесь берется по направлениям H_1, H_2, введенным ранее, а также по направлению $H_3=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -7 & -5 \\ 2 & 8 & 4 \\ 8 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

Тогда интерполяционный многочлен $\widetilde{L}_3(F;A)$ принимает вид

$$\widetilde{L}_3(F;A)=Q_2^{-1}(A)\left[\sum_{k=0}^{2}\Omega_{2,k}(A)\widetilde{B}_k+(A+C_3)^{-1}\Omega_2(A)\widetilde{B}_3\right],$$

где

$$Q_2(A)=Q_1(A)(A+C_2),\quad \Omega_{2,0}(A)=(A-A_1)(A-A_2),$$

$$\Omega_{2,1}(A)=(A-A_0)(A-A_2),\quad \Omega_{2,2}(A)=(A-A_0)(A-A_1),$$

$$\Omega_2(A)=\Omega_1(A)(A-A_2).$$

В данном случае матрицы C_0, C_1 и C_2 такие же, как и ранее, а $C_3,\widetilde{B}_0,\widetilde{B}_1,\widetilde{B}_2,\widetilde{B}_3$ равны

$$C_3=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -37 & -15 \\ 22 & 24 & 4 \\ 8 & -22 & -10 \end{bmatrix},\quad \widetilde{B}_0=-\begin{bmatrix} 558,75 & -9,1199 & -88,776 \\ -82,241 & 542,65 & 233,56 \\ 468,92 & 198,30 & -85,482 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{B}_1=\begin{bmatrix} 1174,2 & -69,568 & -188,90 \\ -172,28 & 1125,6 & 455,19 \\ 944,22 & 346,04 & -124,76 \end{bmatrix},\quad \widetilde{B}_2=-\begin{bmatrix} 638,3 & -111,84 & -118,64 \\ -62,828 & 642,91 & 237,91 \\ 501,39 & 125,61 & -48,099 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{B}_3=-\begin{bmatrix} 1,7030 & -20,849 & -11,879 \\ 10,917 & 7,2236 & 0,81103 \\ 5,5897 & -13,611 & -10,129 \end{bmatrix}.$$

Нормы погрешностей приближения в средних точках A_{01}, A_{02} и A_{12} $\left(A_{kj}=(A_k+A_j)/2;\ k=0,1;\ j=1,2\right)$ в данном случае принимают значения

$$\|\, F(A_{01})-\widetilde{L}_3(A_{01})\,\|_2=0{,}001290,\quad \|\, F(A_{02})-\widetilde{L}_3(A_{02})\,\|_2=0{,}001161,$$

$$\|\, F(A_{12})-\widetilde{L}_3(A_{12})\,\|_2=0{,}00161418.$$

Анализируя численные значения норм погрешностей, видим, что функция $F(A)$ интерполируется многочленом $\widetilde{L}_3(A)$ точнее, чем многочленом $\widetilde{L}_2(A)$.

§3. Интерполяционные формулы относительно рациональных функций второго типа

Пусть X и Y – множества квадратных матриц. Рассмотрим сначала случай квадратичного интерполирования. Как и ранее, A_0 и A_1 – различные матричные узлы из множества X. Кроме значений $F(A_0)$ и $F(A_1)$ матричной функции $F: X \to Y$ в одном из узлов A_j известно значение дифференциального оператора вида $D_2 F(A) = \delta^2 \widetilde{F}[A; H_2 H_1]$, где $\delta^2 \widetilde{F}[A; H_2 H_1]$ – дифференциал Гато второго порядка функции $\widetilde{F}(A) = (A+C)F(A)$ в точке $A \in X$ по направлениям $H_1, H_2 \in X$, а C – некоторая заданная фиксированная матрица из X. При этом будем предполагать, что функция $\widetilde{F}(A)$ дважды дифференцируема по Гато в точке A_j.

Построим матричный полином $\widetilde{L}_2(A)$ второй степени относительно рациональных функций $\varphi_k(A)$ вида $\varphi_0(A) = I$, $\varphi_k(A) = (A+C)^{-k}$, $k = 1,2$, где I – единичная матрица, который удовлетворял бы интерполяционным условиям

$$\widetilde{L}_2(A_i) = F(A_i),\ i = 0,1;\quad D_2(\widetilde{L}_2; A_j) = D_2(F; A_j). \tag{3.1}$$

Функции $\varphi_0(A)$ и $\varphi_1(A)$ являются решениями уравнения $D_2 F(A) = 0$. Введем обозначения. Как и ранее, $\Omega_1(A) = (A - A_0)(A - A_1)$, а $V_1 = (A_0 + C)(A_1 + C)$.

Теорема 3.1. *Матричный многочлен*

$$\widetilde{L}_2(A) = L_1(A) + \frac{1}{2}(A+C)^{-2}\Omega_1(A)(H_2 H_1 V_1)^{-1}(A_j + C)^3 D_2(F; A_j), \tag{3.2}$$

где

$$L_1(A) = (A+C)^{-1}\Big[(A - A_1)(A_0 - A_1)^{-1}(A_0 + C)F(A_0) +$$
$$+ (A - A_0)(A_1 - A_0)^{-1}(A_1 + C)F(A_1)\Big],$$

матрицы $A + C, V_1$, $A_0 - A_1$, H_1 *и* H_2 *обратимы, удовлетворяет первым двум условиям* (3.1). *Если матрицы* $A_j + C$, $A_0 + C$, H_1 *и* H_2 *попарно перестановочны, то многочлен* (3.2) *удовлетворяет третьему условию в* (3.1).

Если, кроме перечисленных условий, матрицы A, A_0, A_1 *и* C *являются множеством попарно перестановочных матриц, то интерполяционная формула* (3.2) *инвариантна относительно многочленов вида*

$$\mathrm{P}_2(A) = \sum_{k=0}^{2} \varphi_k(A) B_k, \tag{3.3}$$

где B_0, B_1 *и* B_2 *– некоторые фиксированные матрицы из множества* X.

Доказательство. Так как $L_1(A_i)=F(A_i)$, а $\Omega_1(A_i)=0$ при $i=0,1$, то из этого следует выполнение первой группы равенств (3.1).

Имеет место равенство $L_1(A)=(A+C)^{-1}P_1(A)$, где $P_1(A)$ – алгебраический матричный многочлен первой степени, поэтому

$$D_2L_1(A)=\delta^2 P_1[A;H_2H_1]\equiv 0. \qquad (3.4)$$

Как и раньше введем функцию $\Phi_1(A)=(A+C)^{-1}\Omega_1(A)$. Тогда

$$D_2\left(\frac{1}{2}(A+C)^{-2}\Omega_1(A)(H_2H_1V_1)^{-1}(A_j+C)^3D_2(F;A_j);\ A_j\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\delta^2\Phi_1[A_j;H_2H_1](H_2H_1V_1)^{-1}(A_j+C)^3D_2(F;A_j). \qquad (3.5)$$

Используя доказательство теоремы 2.1 из предыдущего параграфа, и проводя аналогичные рассуждения, нетрудно показать, что при условии попарной перестановочности матриц $A_j+C,\ A_0+C,\ H_1$ и H_2 имеет место равенство

$$\delta^2\Phi_1[A_j;H_2H_1]=2(A_j+C)^{-3}H_2H_1V_1. \qquad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.5) и учитывая (3.4), получим, что и третье условие в (3.1) выполняется.

Инвариантность формулы (3.2) относительно многочленов вида (3.3), с учетом попарной перестановочности указанных в теореме матриц, легко проверяется непосредственной подстановкой этого многочлена в формулу (3.2). При $F(A)=\varphi_0(A)B_0\equiv B_0$ получаем

$$L_1(A)=(A+C)^{-1}\big((A-A_1)(A_0+C)-(A-A_0)(A_1+C)\big)(A_0-A_1)^{-1}B_0=B_0. \qquad (3.7)$$

Если же $F(A)=\varphi_1(A)B_1\equiv(A+C)^{-1}B_1$, то будем иметь

$$L_1(A)=(A+C)^{-1}(A-A_1-A+A_0)(A_0-A_1)^{-1}B_1=(A+C)^{-1}B_1. \qquad (3.8)$$

Далее,

$$D_2B_0=\delta^2\widetilde{P}_1[A;H_2H_1]\equiv 0;\quad D_2\widetilde{\varphi}_1(A)=\delta^2P_0[A;H_2H_1]\equiv 0, \qquad (3.9)$$

где $\widetilde{P}_1(A)=(A+C)B_0$, $\widetilde{\varphi}_1(A)=(A+C)^{-1}B_1$, $P_0(A)=B_1$. Следовательно, в силу (3.7) – (3.9) формула (3.2) точна для рассмотренных выше функций.

Для $F(A)=(A+C)^{-2}B_2$ будем иметь $D_2(F;A_j)=\delta^2\varphi_1[A_j;H_2H_1]B_2$. Вычисляя дифференциал Гато второго порядка функции $\varphi_1(A)$ и учитывая попарную перестановочность матриц $A_j+C,\ H_1$ и H_2, получим

$$D_2(F;A_j)=2(A_j+C)^{-3}H_2H_1B_2.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}(A+C)^{-2}\Omega_1(A)(H_2H_1V_1)^{-1}(A_j+C)^3 D_2(F;A_j)=(A+C)^{-2}\Omega_1(A)V_1^{-1}B_2.$$

Таким образом, после проведения необходимых преобразований, получим

$$L_2(A)=(A+C)^{-2}(A_0-A_1)^{-1}(A_0+C)^{-1}(A_1+C)^{-1}\big((A+C)(A_1+C)(A-A_1)-$$

$$-(A+C)(A_0+C)(A-A_0)+(A_0-A_1)(A-A_0)(A-A_1)\big)B_2=(A+C)^{-2}\times$$

$$\times(A_0-A_1)^{-1}(A_0+C)^{-1}(A_1+C)^{-1}(A_0-A_1)(A_0+C)(A_1+C)B_2=(A+C)^{-2}B_2.$$

Следовательно, формула (3.2) инвариантна относительно многочленов вида (3.3).

Обобщим данную формулу на произвольное число узлов $A_0, A_1, \ldots, A_n$ из множества *X*. Как и ранее, в этих узлах известны значения $F(A_k)$ функции $F(A)$, и в одном из узлов A_j, в котором функция $\widetilde{F}(A)=(A+C)^n F(A)$ дифференцируема по Гато $n+1$ раз, известно значение $D_{n+1}(F;A_j)\equiv D_{n+1}F(A_j)$ дифференциального оператора вида

$$D_{n+1}F(A)=\delta^{n+1}\widetilde{F}[A;H_{n+1}H_n\cdots H_1],$$

где $\delta^{n+1}\widetilde{F}[A;H_{n+1}H_n\cdots H_1]$ – дифференциал Гато порядка $n+1$ функции $\widetilde{F}(A)$ в точке *A* по направлениям $H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}\in X$, а *C* – заданная фиксированная матрица из *X*. Построим полином $\widetilde{L}_{n+1}(A)$ степени $n+1$ относительно рациональных функций вида $\varphi_0(A)=I$, $\varphi_k(A)=(A+C)^{-k}$, $k=1,2,\ldots,n+1$, для которого выполнялись бы условия

$$\widetilde{L}_{n+1}(A_i)=F(A_i),\ i=0,1,\ldots,n;\quad D_{n+1}(\widetilde{L}_{n+1};A_j)=D_{n+1}(F;A_j). \qquad (3.10)$$

Введем обозначения. Пусть $\Omega_n(A)$ и $\Omega_{n,k}(A)$ такие же, как и в теореме 2.2, матричные алгебраические многочлены, $V_n=(A_0+C)(A_1+C)\cdots(A_n+C)$, $\widetilde{H}_{n+1}=H_{n+1}H_n\cdots H_1$, где $H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$ – некоторые матрицы из множества *X*. Здесь функции $\varphi_k(A)$, $k=0,1,\ldots,n$, являются решениями матричного уравнения $D_{n+1}F(A)=0$.

Теорема 3.2. *Матричный многочлен степени* $n+1$

$$\widetilde{L}_{n+1}(A)=L_n(A)+\frac{1}{(n+1)!}(A+C)^{-n-1}\Omega_n(A)(\widetilde{H}_{n+1}V_n)^{-1}(A_j+C)^{n+2}D_{n+1}(F;A_j), \qquad (3.11)$$

где

$$L_n(A)=(A+C)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\Omega_{n,k}(A)\Omega_{n,k}^{-1}(A_k)(A_k+C)^n F(A_k), \tag{3.12}$$

V_n, $\widetilde{H}_{n+1}$, A_k-A_ν $(k\neq\nu;\ k,\nu=0,1,\ldots,n)$ – *обратимые матрицы, удовлетворяют первой группе условий* (3.10). *Если матрицы* $A_j+C, H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$ *попарно перестановочны, и с этой группой матриц перестановочны каждая из матриц* A_k+C $(k=\overline{0,n-1})$, *то полином* (3.11) *удовлетворяет последнему условию в* (3.10).

Доказательство. Так как $L_n(A_i)=F(A_i)$, а $\Omega_n(A_i)=0$ при $i=0,1,\ldots,n$, то из этого следует выполнение первой группы равенств (3.10).

Многочлен (3.12) можно представить в виде $L_n(A)=(A+C)^{-n}P_n(A)$, где $P_n(A)$ – матричный алгебраический многочлен степени n, поэтому будем иметь

$$D_{n+1}L_n(A)=\delta^{n+1}P_n[A;\widetilde{H}_{n+1}]\equiv 0. \tag{3.13}$$

Кроме того, используя введенную в доказательстве теоремы 2.2 функцию $\Phi_n(A)=(A+C)^{-1}\Omega_n(A)$ и равенство

$$\delta^{n+1}\Phi_n[A_j;\widetilde{H}_{n+1}]=(n+1)!(A_j+C)^{-n-2}\widetilde{H}_{n+1}V_n,$$

аналогичное соотношению (3.8), будем иметь

$$D_{n+1}\left(\frac{1}{(n+1)!}(A+C)^{-n-1}\Omega_n(A)\left(\widetilde{H}_{n+1}V_n\right)^{-1}(A_j+C)^{n+2}D_{n+1}(F;A_j);\ A_j\right)=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\delta^{n+1}\Phi_n[A_j;\widetilde{H}_{n+1}]\left(\widetilde{H}_{n+1}V_n\right)^{-1}(A_j+C)^{n+2}D_{n+1}(F;A_j)=D_{n+1}(F;A_j). \tag{3.14}$$

Таким образом, из (3.13) и (3.14) следует, что последнее равенство в (3.10) также имеет место.

Пример. Для функции $F(A)=\sqrt{\sin e^{[A+B]^{-1}}}$, где матрица B равна

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 8\\ -4 & 14 & -1\\ 11 & 4 & 0\end{bmatrix},$$

построим многочлен $\widetilde{L}_2(A)=\widetilde{L}_2(F;A)$ второй степени вида (3.2) в случае узлов A_0 и A_1 таких же, как и в примере предыдущего параграфа.

Функция $F(A)$ в узлах интерполирования принимает значения

$$F(A_0)=\begin{bmatrix} 0{,}91066 & -0{,}0042742 & 0{,}031007 \\ 0{,}0040023 & 0{,}93701 & 0{,}0045366 \\ 0{,}035952 & -0{,}00026234 & 0{,}91948 \end{bmatrix},$$

$$F(A_1)=\begin{bmatrix} 0{,}91170 & -0{,}0046495 & 0{,}026488 \\ 0{,}0014095 & 0{,}93436 & 0{,}0042792 \\ 0{,}040615 & 0{,}00040612 & 0{,}90851 \end{bmatrix},$$

а значение дифференциального оператора $D_2(F;A)$ в точке A_1 равно

$$D_2(F;A_1)=\begin{bmatrix} -0{,}40128 & -0{,}31341 & 0{,}20251 \\ 0{,}10702 & -0{,}079220 & -0{,}14892 \\ 0{,}32231 & 0{,}024774 & -0{,}46975 \end{bmatrix}.$$

Дифференциал Гато берется здесь по направлениям

$$H_1=-\begin{bmatrix} 7 & -16 & -8 \\ 8 & 15 & 4 \\ 8 & -8 & -5 \end{bmatrix},\quad H_2=-\begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

В этом случае интерполяционный многочлен $\widetilde{L}_2(F;A)$ имеет вид

$$\widetilde{L}_2(F;A)=(A+C)^{-1}\left[AB_1+B_0+(A+C)^{-1}\Omega_1(A)B_2\right],$$

где $\Omega_1(A)=(A-A_0)(A-A_1)$.

Матрицы C, B_0, B_1, B_2 для данного конкретного случая будут такими:

$$C=\begin{bmatrix} 20 & 0 & -2 \\ -2 & 18 & 3 \\ 6 & 2 & 11 \end{bmatrix},\quad B_0=\begin{bmatrix} 17{,}882 & -0{,}22099 & -0{,}91828 \\ -1{,}2315 & 17{,}030 & 2{,}1347 \\ 4{,}8194 & 1{,}4107 & 11{,}872 \end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix} 1{,}1000 & 0{,}066859 & -0{,}27826 \\ -0{,}31508 & 0{,}79786 & 0{,}46407 \\ 0{,}82456 & 0{,}29854 & -0{,}34239 \end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix} 1{,}8620 & 0{,}88910 & -1{,}8107 \\ -3{,}0506 & -1{,}4869 & 2{,}9481 \\ 7{,}7861 & 3{,}8099 & -7{,}4973 \end{bmatrix}.$$

Норма матрицы погрешности приближения в средней точке $A_{01}=(A_0+A_1)/2$ здесь равна

$$\left\| F(A_{01})-\widetilde{L}_2(A_{01}) \right\|_2 = 0{,}00042190.$$

Для той же функции и узлов A_0, A_1, A_2, таких же, как и в предыдущем примере, построим многочлен вида (3.11) при $n=2$.

Интерполируемая функция в точке A_2 принимает значение

$$F(A_2)=\begin{bmatrix} 0{,}913825 & -0{,}00460836 & 0{,}019896 \\ -0{,}00334553 & 0{,}930424 & 0{,}00620528 \\ 0{,}0502308 & 0{,}00296634 & 0{,}890257 \end{bmatrix},$$

а значение оператора $D_3(F;A)$ в точке A_1 равно

$$D_3(F;A_1)=\begin{bmatrix} -0{,}637742 & 0{,}968022 & 3{,}99871 \\ 1{,}33131 & -0{,}577211 & -0{,}932392 \\ -1{,}71621 & -1{,}2953 & 3{,}18724 \end{bmatrix}.$$

Дифференциал Гато здесь берется по направлениям H_1, H_2, введенным ранее, а также по направлению H_3 из примера предыдущего параграфа.

Тогда интерполяционный многочлен $\widetilde{L}_3(F;A)$ принимает вид

$$\widetilde{L}_3(F;A)=(A+C)^{-2}\left[\sum_{k=0}^{2}\Omega_{2,k}(A)\widetilde{B}_k+(A+C)^{-1}\Omega_2(A)\widetilde{B}_3\right],$$

где

$$\Omega_{2,0}(A)=(A-A_1)(A-A_2),\ \ \Omega_{2,1}(A)=(A-A_0)(A-A_2),$$

$$\Omega_{2,2}(A)=(A-A_0)(A-A_1),\ \ \Omega_2(A)=\Omega_1(A)(A-A_2).$$

В данном случае матрица C такая же, как и ранее, а $\widetilde{B}_0,\widetilde{B}_1,\widetilde{B}_2,\widetilde{B}_3$ равны

$$\widetilde{B}_0=\begin{bmatrix} -1449{,}0 & -628{,}08 & 1896{,}8 \\ 2427{,}7 & 1045{,}9 & -3147{,}1 \\ -6107{,}3 & -2595{,}8 & 7948{,}5 \end{bmatrix},\ \ \widetilde{B}_1=\begin{bmatrix} 2178{,}6 & 949{,}31 & -2855{,}8 \\ -3661{,}8 & -1585{,}6 & 4738{,}7 \\ 9208{,}8 & 3917{,}7 & -11975 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{B}_2=\begin{bmatrix} -728{,}12 & -320{,}91 & 959{,}42 \\ 1233{,}2 & 540{,}10 & -1592{,}4 \\ -3099{,}3 & -1320{,}5 & 4029{,}1 \end{bmatrix},\ \ \widetilde{B}_3=\begin{bmatrix} 1{,}0037 & 1{,}1436 & -0{,}19196 \\ -1{,}6578 & -1{,}9106 & 0{,}29908 \\ 4{,}1764 & 4{,}8124 & -0{,}79755 \end{bmatrix}.$$

Нормы погрешностей приближения в средних точках A_{01}, A_{02} и A_{12} $\left(A_{kj}=(A_k+A_j)/2;\ k=0,1;\ j=1,2\right)$ в данном случае принимают значения

$$\left\| F(A_{01})-\widetilde{L}_3(A_{01}) \right\|_2=3{,}4239\times10^{-5},\ \ \left\| F(A_{02})-\widetilde{L}_3(A_{02}) \right\|_2=4{,}2130\times10^{-5},$$

$$\left\| F(A_{12})-\widetilde{L}_3(A_{12}) \right\|_2=6{,}4290\times10^{-5}.$$

Таким образом, многочлен $\widetilde{L}_3(A)$ интерполирует функцию $F(A)$ в среднем на один порядок точнее, чем многочлен $\widetilde{L}_2(A)$.

§4. Интерполяционные матричные многочлены экспоненциального типа

Рассмотрим сначала интерполяционную формулу Эрмита–Биркгофа первого порядка, построенную на основе экспоненциальных матричных функций вида $\varphi_k(A)=e^{\lambda_k A}$ $(k=0,1,2)$, $A=A(t)\in X$, $t\in X$, где $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2$ – заданные действительные числа, а X – множество квадратных матриц.

Пусть $F(z)$, $z\in\mathbb{C}$ – целая функция, $A_k=A_k(t)\in X$ $(k=0,1)$ – матричные узлы интерполирования, в которых известны значения $F(A_k)$ функции $F(A)$ и в одном из узлов – значение $D_2(F;A_j)$ дифференциального оператора вида

$$D_2F(A)=(D-\lambda_1)DF(z)\big|_{z=A},\ D=\frac{d}{dz}. \tag{4.1}$$

Для функции вида $B_1F(A)B_2$, где B_1 и B_2 – некоторые фиксированные матрицы из множества X, значение оператора (4.1) вычисляется по формуле

$$D_2(B_1F(A)B_2;A)=B_1D_2F(A)B_2.$$

Теорема 4.1. *Если матрица* $[e^{\lambda_1A_0}-e^{\lambda_1A_1}]$ *обратима, то для интерполяционного многочлена*

$$\widetilde{L}_2(A)=L_1(A)+\frac{\Omega_1(A)e^{-\lambda_2A_j}D_2(F;A_j)}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}, \tag{4.2}$$

где

$$L_1(A)=[e^{\lambda_1A}-e^{\lambda_1A_1}][e^{\lambda_1A_0}-e^{\lambda_1A_1}]^{-1}F(A_0)+$$
$$+[e^{\lambda_1A}-e^{\lambda_1A_0}][e^{\lambda_1A_1}-e^{\lambda_1A_0}]^{-1}F(A_1), \tag{4.3}$$
$$\Omega_1(A)=e^{\lambda_2A}-e^{\lambda_2A_0}+[e^{\lambda_1A}-e^{\lambda_1A_0}][e^{\lambda_1A_1}-e^{\lambda_1A_0}]^{-1}[e^{\lambda_2A_0}-e^{\lambda_2A_1}],$$

выполняются условия $\widetilde{L}_2(A_k)=F(A_k)$ $(k=0,1)$; $D_2(\widetilde{L}_2;A_j)=D_2(F;A_j)$, *где* $j=0$ *или* $j=1$.

Если же матрицы A_0 *и* A_1 *перестановочны, то формула* (4.2) *точна для многочленов вида*

$$P_2(A)=B+e^{\lambda_1A}C+e^{\lambda_2A}G, \tag{4.4}$$

где B, C, G *– любые фиксированные матрицы из X.*

Доказательство. Действительно, совпадение полинома $\widetilde{L}_2(A)$ и интерполируемой функции $F(A)$ в узлах A_0 и A_1 следует из того, что $L_1(A_k)=F(A_k)$ и $\Omega_1(A_k)=0$ при $k=0,1$. Так как $D_2(e^{\lambda_kA})\equiv0$ $(k=0,1)$, а $D_2(e^{\lambda_2A})=\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)e^{\lambda_2A}$, то получим, что $D_2(\widetilde{L}_2;A_j)=D_2(F;A_j)$.

Докажем инвариантность формулы (4.2) относительно многочленов вида (4.4). Так как для $F(A)=B$ и $F(A)=e^{\lambda_1 A}C$, при условии перестановочности матриц A_0 и A_1, выполняются тождества $L_1(A)\equiv F(A)$ и $D_2F(A)\equiv 0$, то для этих функций $\widetilde{L}_2(A)\equiv F(A)$. Далее, в силу того, что $D_2F(A)=\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)e^{\lambda_2 A}G$ для функции $F(A)=e^{\lambda_2 A}G$, то, учитывая перестановочность узлов, после несложных вычислений приходим к соотношению

$$\widetilde{L}_2(A)=\left(e^{\lambda_1 A}[e^{\lambda_2 A_0}-e^{\lambda_2 A_1}]+[e^{\lambda_1 A_0+\lambda_2 A_1}-e^{\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_0}]\right)\times$$
$$\times[e^{\lambda_1 A_0}-e^{\lambda_1 A_1}]^{-1}G+\Omega_1(A)G=e^{\lambda_2 A}G\equiv F(A).$$

Таким образом, формула (4.2) точна для многочленов вида (4.4). Теорема 4.1 доказана.

Рассмотрим далее обобщенный вариант аналогичной задачи интерполирования для случая трех узлов и матричных многочленов относительно системы функций $\varphi_k(A)=e^{\lambda_k A}$ $(k=0,1,2,3)$, $A=A(t)\in X$, $t\in\mathbb{C}$, где $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<$ $<\lambda_3$, а X – множество квадратных матриц.

Пусть, как и ранее, $F(z)$, $z\in\mathbb{C}$ – целая функция, $A_k=A_k(t)\in X$ $(k=0,1,2)$ – матричные узлы интерполирования, в которых известны значения $F(A_k)$ функции $F(A)$, определенной на множестве X, и в одном из них – значение $D_3(F;A_j)$ дифференциального оператора вида

$$D_3F(A)=(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)DF(z)\big|_{z=A},\ D=\frac{d}{dz},$$

причем $D_3(C_1F(A)C_2)=C_1D_3F(A)C_2$, где C_1 и C_2 – некоторые фиксированные матрицы из X.

Введем функции $G_k(B_0,\ldots,B_k)$ от матричных переменных $B_0,\ldots,B_k\in X$ $(k=1,2,3)$, определяемые равенствами

$$G_1(B_0,B_1)=e^{\lambda_1 B_1}-e^{\lambda_1 B_0};$$
$$G_2(B_0,B_1,B_2)=-G_1(B_1,B_2)e^{\lambda_2 B_0}+G_1(B_0,B_2)e^{\lambda_2 B_1}-G_1(B_0,B_1)e^{\lambda_2 B_2};$$
$$G_3(B_0,B_1,B_2,B_3)=G_2(B_1,B_2,B_3)e^{\lambda_3 B_0}-G_2(B_0,B_2,B_3)e^{\lambda_3 B_1}+$$
$$+G_2(B_0,B_1,B_3)e^{\lambda_3 B_2}-G_2(B_0,B_1,B_2)e^{\lambda_3 B_3}. \tag{4.5}$$

Т е о р е м а 4.2. *Если матрица $G=G_2(A_0,A_1,A_2)$ обратима, то интерполяционный многочлен Эрмита-Биркгофа*

$$\widetilde{L}_3(A)=L_2(A)+\frac{\Omega_2(A)e^{-\lambda_3 A_j}D_3(F;A_j)}{\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}, \tag{4.6}$$

где $L_2(A)=G^{-1}\big(G_2(A,A_1,A_2)F(A_0)-G_2(A,A_0,A_2)F(A_1)+G_2(A,A_0,A_1)F(A_2)\big),$ $\Omega_2(A)=G^{-1}G_3(A,A_0,A_1,A_2)$, *удовлетворяет условиям*

$$\widetilde{L}_3(A_k)=F(A_k)\ \ (k=0,1,2);\quad D_3(\widetilde{L}_3;A_j)=D_3(F;A_j).$$

Если матрицы A, A_0, A_1 *и* A_2 *попарно перестановочны, то формула* (4.6) *точна для многочленов вида*

$$P_3(A)=C_0+e^{\lambda_1 A}C_1+e^{\lambda_2 A}C_2+e^{\lambda_3 A}C_3, \tag{4.7}$$

где C_0, C_1, C_2, C_3 *– произвольные фиксированные матрицы из множества X.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что при $i=0,1,2$ выполняются соотношения $G_2(A_i,A_1,A_2)=\delta_{i0}G,\ G_2(A_i,A_0,A_2)=-\delta_{i1}G,\ G_2(A_i,A_0,A_1)=\delta_{i2}G,$ где δ_{ij} – символ Кронекера. Отсюда следует, что $L_2(A_k)=F(A_k)$ и $\Omega_2(A_k)=0$ при $k=0,1,2$. Следовательно в узлах A_0, A_1 и A_2 многочлен $\widetilde{L}_3(A)$ совпадает с функцией $F(A)$.

Многочлены $L_2(A)$ и $\Omega_2(A)$ можно представить в виде

$$L_2(A)=B_0+G^{-1}e^{\lambda_1 A}B_1+\sum_{k=0}^{2}B_{k+2}e^{\lambda_2 A}F(A_k),$$

$$\Omega_2(A)=e^{\lambda_3 A}+\widetilde{B}_0+G^{-1}e^{\lambda_1 A}\widetilde{B}_1+\sum_{k=1}^{3}\widetilde{B}_{2k}e^{\lambda_2 A}\widetilde{B}_{2k+1},$$

где B_k, $\widetilde{B}_\nu$ $(k=0,1,\ldots,4;\ \nu=0,1,\ldots,7)$ – некоторые фиксированные матрицы из множества *X*. Поэтому, так как $D_3(e^{\lambda_k A})\equiv 0$ при $k=1,2,$ то $D_3L_2(A)\equiv 0$ и $D_3\Omega_2(A)=D_3(e^{\lambda_3 A})=\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)e^{\lambda_3 A},$ откуда следует, что $D_3(\widetilde{L}_3;A_j)=D_3(F;A_j)$.

Используя рекуррентные соотношения (4.5), покажем, что формула (4.6) точна для многочленов вида (4.7). Для функции $F(A)=C_0$ будем иметь

$$L_2(A)=L_2(C_0;A)=G^{-1}\big(G_2(A,A_1,A_2)-G_2(A,A_0,A_2)+G_2(A,A_0,A_1)\big)C_0=G^{-1}\times$$
$$\times\Big(\big(-G_1(A_1,A_2)+G_1(A_0,A_2)-G_1(A_0,A_1)\big)e^{\lambda_2 A}-\big(G_1(A,A_2)-G_1(A,A_1)\big)e^{\lambda_2 A_0}+$$
$$+\big(G_1(A,A_2)-G_1(A,A_0)\big)e^{\lambda_2 A_1}-\big(G_1(A,A_1)-G_1(A,A_0)\big)e^{\lambda_2 A_2}\Big)C_0=G^{-1}\times$$
$$\times\Big(-G_1(A_1,A_2)e^{\lambda_2 A_0}+G_1(A_0,A_2)e^{\lambda_2 A_1}-G_1(A_0,A_1)e^{\lambda_2 A_2}\Big)C_0=G^{-1}GC_0=C_0.$$

В то же время при $F(A)=e^{\lambda_k A}C_k$ $(k=1,2,3)$ справедливы равенства

$$L_2(A)=L_2(e^{\lambda_k A}C_k;A)=G^{-1}\Big(e^{\lambda_1 A_1}e^{\lambda_2 A}e^{\lambda_k A_0}-e^{\lambda_1 A_2}e^{\lambda_2 A}e^{\lambda_k A_0}+e^{\lambda_1 A_2}e^{\lambda_2 A_1}e^{\lambda_k A_0}-$$
$$-e^{\lambda_1 A}e^{\lambda_2 A_1}e^{\lambda_k A_0}+e^{\lambda_1 A}e^{\lambda_2 A_2}e^{\lambda_k A_0}-e^{\lambda_1 A_1}e^{\lambda_2 A_2}e^{\lambda_k A_0}-e^{\lambda_1 A_0}e^{\lambda_2 A}e^{\lambda_k A_1}+$$

$$+e^{\lambda_1 A_2}e^{\lambda_2 A}e^{\lambda_k A_1}-e^{\lambda_1 A_2}e^{\lambda_2 A_0}e^{\lambda_k A_1}+e^{\lambda_1 A}e^{\lambda_2 A_0}e^{\lambda_k A_1}-e^{\lambda_1 A}e^{\lambda_2 A_2}e^{\lambda_k A_1}+$$
$$+e^{\lambda_1 A_0}e^{\lambda_2 A_2}e^{\lambda_k A_1}+e^{\lambda_1 A_0}e^{\lambda_2 A}e^{\lambda_k A_2}-e^{\lambda_1 A_1}e^{\lambda_2 A}e^{\lambda_k A_2}+e^{\lambda_1 A_1}e^{\lambda_2 A_0}e^{\lambda_k A_2}-$$
$$-e^{\lambda_1 A}e^{\lambda_2 A_0}e^{\lambda_k A_2}+e^{\lambda_1 A}e^{\lambda_2 A_1}e^{\lambda_k A_2}-e^{\lambda_1 A_0}e^{\lambda_2 A_1}e^{\lambda_k A_2}\Big)C_k.$$

Тогда, учитывая попарную перестановочность матриц A, A_0, A_1 и A_2, при $k=1,2$ получим

$$L_2(e^{\lambda_k A}C_k;A)=G^{-1}\Big(-\Big(e^{\lambda_1 A_2}-e^{\lambda_1 A_1}\Big)e^{\lambda_2 A_0}+\Big(e^{\lambda_1 A_2}-e^{\lambda_1 A_0}\Big)e^{\lambda_2 A_1}-$$
$$-\Big(e^{\lambda_1 A_1}-e^{\lambda_1 A_0}\Big)e^{\lambda_2 A_2}\Big)e^{\lambda_k A}C_k=G^{-1}Ge^{\lambda_k A}C_k=e^{\lambda_k A}C_k.$$

Далее, так как $D_3\Big(e^{\lambda_k A}C_k\Big)=D_3\Big(e^{\lambda_k A}\Big)C_k=\lambda_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)e^{\lambda_k A}C_k$, то $D_3\Big(e^{\lambda_k A}C_k\Big)\equiv 0$ при $k=0,1,2$, а

$$D_3\Big(e^{\lambda_3 A}C_3\Big)=\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)e^{\lambda_3 A}C_3. \tag{4.8}$$

Следовательно для функции $F(A)=C_0+e^{\lambda_1 A}C_1+e^{\lambda_2 A}C_2$ выполняется тождество $\widetilde{L}_3(A)\equiv F(A)$. Используя последнее равенство в (4.5) и формулу (4.8), для $F(A)=e^{\lambda_3 A}C_3$ будем иметь

$$\widetilde{L}_3(A)=L_2(A)+\Omega_2(A)=G^{-1}\Big(G_2(A,A_1,A_2)e^{\lambda_3 A_0}-G_2(A,A_0,A_2)e^{\lambda_3 A_1}+$$
$$+G_2(A,A_0,A_1)e^{\lambda_3 A_2}+G_2(A_0,A_1,A_2)e^{\lambda_3 A}-G_2(A,A_1,A_2)e^{\lambda_3 A_0}+$$
$$+G_2(A,A_0,A_2)e^{\lambda_3 A_1}-G_2(A,A_0,A_1)e^{\lambda_3 A_2}\Big)C_3=G^{-1}Ge^{\lambda_3 A}C_3=e^{\lambda_3 A}C_3.$$

Таким образом, формула (4.6) точна для многочленов вида (4.7). Теорема 4.2 доказана.

Рассмотрим далее на множестве квадратных матриц X аналогичный вариант интерполяционной задачи для случая произвольного числа узлов $A_0,A_1,\dots,A_n\in X$ и матричных многочленов относительно системы функций $\varphi_k(A)=e^{\lambda_k A}$, $A\in X$ $(k=0,1,\dots,n+1)$, где $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}$ – заданные действительные числа, удовлетворяющие условию $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_{n+1}$.

В данном случае в качестве оператора $D_{n+1}F(A)$ берется матрично-дифференциальный оператор

$$D_{n+1}F(A)=(D-\lambda_n)\cdots(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)DF(z)\big|_{z=A},\ D=\frac{d}{dz}. \tag{4.9}$$

При этом значение оператора (4.9) для матричной функции $\Phi(A)$ вида $\Phi(A)=C_1F(A)C_2$, где C_1 и C_2 – некоторые фиксированные матрицы, а $F(z)$, $z\in\mathbb{C}$ – целая функция, вычисляется по правилу $D_{n+1}\Phi(A)=C_1D_{n+1}F(A)C_2$.

Ранее мы рассмотрели матричные функции $G_k(B_0,\dots,B_k)$ $(k=1,2,3)$, задаваемые равенствами (4.5). Доопределим данные функции в общем случае при $k=n$ по формуле

$$G_n(B_0,B_1,\dots,B_n)=$$
$$=(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k G_{n-1}(B_0,\dots,B_{k-1},B_{k+1},\dots,B_n)e^{\lambda_n B_k} \quad (n=1,2,\dots). \qquad (4.10)$$

При этом будем считать, что $G_0(B_k)=-I$ $(k=0,1,\dots,n)$, где I – единичная матрица.

Приведем две леммы, которые будут использованы при доказательстве теоремы.

Лемма 4.1. *При перестановке любых двух соседних аргументов* B_k, B_{k+1} *местами функция* $G_n(B_0,B_1,\dots,B_n)$ *меняет знак на противоположный:*

$$G_n(B_0,B_1,\dots,B_{k-1},B_{k+1},B_k,B_{k+2},\dots,B_n)=-G_n(B_0,B_1,\dots,B_k,B_{k+1},\dots,B_n).$$

Лемма 4.2. *Для любых матриц* $B_0,B_1,\dots,B_{n-1}$ *из множества X и любых i и n* $(0\le i\le n-1,\ n\ge 1)$ *справедливо равенство*

$$G_n(B_i,B_0,B_1,\dots,B_{n-1})=0.$$

Доказательства данных лемм полностью повторяют доказательства лемм 3.1 и 3.2 из предыдущей главы, если в них заменить скалярные переменные $y_0,y_1,\dots,y_n$ матрицами $B_0,B_1,\dots,B_n$ и вместо скалярных функций $g_n(y_0,y_1,\dots,y_n)$ рассматривать матричные функции $G_n(B_0,B_1,\dots,B_n)$.

Теорема 4.3. *Если матрица* $\widetilde{G}_n=G_n(A_0,A_1,\dots,A_n)$ *обратима, то матричный многочлен*

$$\widetilde{L}_{n+1}(A)=L_n(A)+\frac{\Omega_n(A)e^{-\lambda_{n+1}A_j}D_{n+1}(F;A_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}, \qquad (4.11)$$

где

$$L_n(A)=\widetilde{G}_n^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i G_n(A,A_0,A_1,\dots,A_{i-1},A_{i+1},\dots,A_n)F(A_i), \qquad (4.12)$$

$$\Omega_n(A)=(-1)^n\widetilde{G}_n^{-1}G_{n+1}(A,A_0,A_1,\dots,A_n), \qquad (4.13)$$

удовлетворяет условиям

$$\widetilde{L}_{n+1}(A_k)=F(A_k) \quad (k=0,1,\dots,n); \quad D_{n+1}\big(\widetilde{L}_{n+1};A_j\big)=D_{n+1}\big(F;A_j\big). \qquad (4.14)$$

Доказательство. Так как по лемме 4.1 при $k=i$

$$G_n(A_k,A_0,\dots,A_{i-1},A_{i+1},\dots,A_n)=(-1)^i G_n(A_0,A_1,\dots,A_n)=(-1)^i G_n,$$

а при $k \neq i$ по лемме 4.2 имеем $G_n(A_k, A_0, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n) = 0$, то $L_n(A_k) = F(A_k)$ при $k = 0, 1, \ldots, n.$ Аналогично, по лемме 4.2 при тех же значениях k справедливы равенства $\Omega_n(A_k) = 0.$ Таким образом, выполняется первая группа условий (4.14).

Многочлен $L_n(A)$ можно представить в виде

$$L_n(A) = B_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m_k} B_{k,\nu} e^{\lambda_k A} C_{k,\nu}, \tag{4.15}$$

где m_k – соответствующие натуральные числа, а B_0, $B_{k,\nu}$, $C_{k,\nu}$ – некоторые фиксированные матрицы из множества X. Из (4.10) и (4.13) следует, что $\Omega_n(A) = e^{\lambda_{n+1} A} + \Phi_n(A)$, где функция $\Phi_n(A)$ имеет представление вида (4.15).

Так как $D_{n+1}\left(e^{\lambda_k A}\right) \equiv 0$ при $k = 0, 1, \ldots, n,$ то $D_{n+1} L_n(A) \equiv D_{n+1} \Phi_n(A) \equiv 0.$ Поэтому в силу того, что $D_{n+1}\left(e^{\lambda_{n+1} A}\right) = \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n) e^{\lambda_{n+1} A}$, учитывая структуру многочлена (4.11), получим, что $D_{n+1}\left(\widetilde{L}_{n+1}; A_j\right) = D_{n+1}(F; A_j)$, т. е. последнее условие в (4.14) также выполняется. Теорема 4.3 доказана.

Построим формулу, аналогичную (4.11), в которой оператор $D_{n+1} F(A)$ будет задаваться посредством дифференциалов Гато от функции $F(A)$, $A \in X$, дифференцируемой по Гато $n+1$ раз в узле $A_j \in X$. Рассмотрим матрично-дифференциальный оператор вида

$$\begin{aligned} &\widetilde{D}_{n+1} F(A) \equiv \widetilde{D}_{n+1} F(A; H_{n+1} H_n \cdots H_1) = \\ &= \left(D_{H_{n+1}} - \lambda_n H_{n+1}\right) \cdots \left(D_{H_3} - \lambda_2 H_3\right)\left(D_{H_2} - \lambda_1 H_2\right) D_{H_1} F(A), \end{aligned} \tag{4.16}$$

где $D_{H_k} F(A) = \delta F[A; H_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ – первый дифференциал Гато от $F(A)$ в точке A по направлению $H_k \in X$. Легко убедиться, что на множестве перестановочных матриц решением уравнения $\widetilde{D}_{n+1} F(A) = 0$ являются функции $\varphi_k(A) = e^{\lambda_k A}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, а также любая фиксированная матрица из множества X.

Теорема 4.4. *Если матрицы* $\widetilde{G}_n = G_n(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *и* $H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$ *обратимы, то матричный многочлен*

$$\widetilde{L}_{n+1}(A) = L_n(A) + \frac{\Omega_n(A)\left(H_{n+1} H_n \cdots H_1\right)^{-1} e^{-\lambda_{n+1} A_j} \widetilde{D}_{n+1}(F; A_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)}, \tag{4.17}$$

где $L_n(A)$ *и* $\Omega_n(A)$ *определяются по формулам* (4.12) *и* (4.13) *соответственно, совпадает в узлах* A_0, $A_1, \ldots,$ A_n *с функцией* $F(A)$. *Если матрица* A_j *и направления* $H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$ *попарно перестановочны, то многочлен* (4.17) *удовлетворят также условию*

$$\tilde{D}_{n+1}\left(\tilde{L}_{n+1}; A_j\right) = \tilde{D}_{n+1}\left(F; A_j\right). \qquad (4.18)$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 4.3 следует, что $L_n(A_k) = F(A_k)$ и $\Omega_n(A_k) = 0$ при $k = 0,1,\ldots,n.$ Тогда учитывая структуру многочлена (4.17), получим, что в узлах $A_0, A_1,\ldots, A_n$ он совпадает с интерполируемой функцией $F(A)$.

Так как матрица A_j перестановочна с направлениями $H_1, H_2,\ldots, H_{n+1}$, то

$$D_{H_k}\varphi_\nu(A)\Big|_{A=A_j} = \delta\varphi_\nu[A_j; H_k] = \lambda_\nu e^{\lambda_\nu A_j} H_k \quad (k,\nu = 1,2,\ldots,n+1), \qquad (4.19)$$

где $\varphi_\nu(A) = e^{\lambda_\nu A}$, откуда при условии попарной перестановочности указанных в теореме матриц следует, что

$$\tilde{D}_{n+1}\left(\varphi_\nu; A_j\right) = \lambda_\nu(\lambda_\nu - \lambda_1)\cdots(\lambda_\nu - \lambda_n)e^{\lambda_\nu A_j} H_{n+1}H_n\cdots H_1. \qquad (4.20)$$

Таким образом, $\tilde{D}_{n+1}\left(\varphi_\nu; A_j\right) = 0$ при $\nu = 1,2,\ldots,n$ и

$$\tilde{D}_{n+1}\left(\varphi_{n+1}; A_j\right) = \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1} - \lambda_n)e^{\lambda_{n+1}A_j} H_{n+1}H_n\cdots H_1.$$

Поэтому в силу указанных в доказательстве теоремы 4.3 представлений многочленов $L_n(A)$ и $\Omega_n(A)$ в виде линейных комбинаций матричных экспонент и учитывая структуру многочлена (4.17), получим равенство (4.18). Теорема 4.4 доказана.

Приведем частные случаи формулы (4.17) при $n = 1,2.$ В случае двух узлов A_0 и A_1 матричный многочлен (4.17) примет вид

$$\tilde{L}_2(A) = L_1(A) + \frac{\Omega_1(A)\left(H_2H_1\right)^{-1} e^{-\lambda_2 A_j}\tilde{D}_2(F; A_j)}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

где полиномы $L_1(A)$ и $\Omega_1(A)$ определяются по формулам (4.3), а оператор $\tilde{D}_2 F(A) = \delta^2 F[A; H_2H_1] - \lambda_1 H_2 \delta F[A; H_1]$. При этом, он удовлетворяет интерполяционным условиям $\tilde{L}_2(A_k) = F(A_k)$ $(k = 0,1)$; $\tilde{D}_2\left(\tilde{L}_2; A_j\right) = \tilde{D}_2\left(F; A_j\right)$.

В случае трех узлов A_0, A_1 и A_2 интерполяционный многочлен, удовлетворяющий условиям $\tilde{L}_3(A_k) = F(A_k)$ $(k = 0,1,2)$; $\tilde{D}_3\left(\tilde{L}_3; A_j\right) = \tilde{D}_3\left(F; A_j\right)$, определяется формулой

$$\tilde{L}_3(A) = L_2(A) + \frac{\Omega_2(A)\left(H_3H_2H_1\right)^{-1} e^{-\lambda_3 A_j}\tilde{D}_3(F; A_j)}{\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)},$$

где развернутые выражения функций $L_2(A)$ и $\Omega_2(A)$ имеют вид

$$L_2(A) = \left[\left(e^{\lambda_1 A_1} - e^{\lambda_1 A_2}\right)e^{\lambda_2 A_0} + \left(e^{\lambda_1 A_2} - e^{\lambda_1 A_0}\right)e^{\lambda_2 A_1} + \left(e^{\lambda_1 A_0} - e^{\lambda_1 A_1}\right)e^{\lambda_2 A_2}\right]^{-1} \times$$

$$\times\Big[\Big(\big(e^{\lambda_1 A_1}-e^{\lambda_1 A_2}\big)e^{\lambda_2 A}+\big(e^{\lambda_1 A_2}-e^{\lambda_1 A}\big)e^{\lambda_2 A_1}+\big(e^{\lambda_1 A}-e^{\lambda_1 A_1}\big)e^{\lambda_2 A_2}\Big)F(A_0)+$$

$$+\Big(\big(e^{\lambda_1 A_2}-e^{\lambda_1 A_0}\big)e^{\lambda_2 A}+\big(e^{\lambda_1 A}-e^{\lambda_1 A_2}\big)e^{\lambda_2 A_0}+\big(e^{\lambda_1 A_0}-e^{\lambda_1 A}\big)e^{\lambda_2 A_2}\Big)F(A_1)+$$

$$+\Big(\big(e^{\lambda_1 A_0}-e^{\lambda_1 A_1}\big)e^{\lambda_2 A}+\big(e^{\lambda_1 A_1}-e^{\lambda_1 A}\big)e^{\lambda_2 A_0}+\big(e^{\lambda_1 A}-e^{\lambda_1 A_0}\big)e^{\lambda_2 A_1}\Big)F(A_2)\Big],$$

$$\Omega_2(A)=e^{\lambda_3 A}+\Big[\big(e^{\lambda_1 A_1}-e^{\lambda_1 A_2}\big)e^{\lambda_2 A_0}+\big(e^{\lambda_1 A_2}-e^{\lambda_1 A_0}\big)e^{\lambda_2 A_1}+\big(e^{\lambda_1 A_0}-e^{\lambda_1 A_1}\big)e^{\lambda_2 A_2}\Big]^{-1}\times$$

$$\times\Big[\Big(\big(e^{\lambda_1 A_2}-e^{\lambda_1 A_1}\big)e^{\lambda_2 A}+\big(e^{\lambda_1 A}-e^{\lambda_1 A_2}\big)e^{\lambda_2 A_1}+\big(e^{\lambda_1 A_1}-e^{\lambda_1 A}\big)e^{\lambda_2 A_2}\Big)e^{\lambda_3 A_0}+$$

$$+\Big(\big(e^{\lambda_1 A_0}-e^{\lambda_1 A_2}\big)e^{\lambda_2 A}+\big(e^{\lambda_1 A_2}-e^{\lambda_1 A}\big)e^{\lambda_2 A_0}+\big(e^{\lambda_1 A}-e^{\lambda_1 A_0}\big)e^{\lambda_2 A_2}\Big)e^{\lambda_3 A_1}+$$

$$+\Big(\big(e^{\lambda_1 A_1}-e^{\lambda_1 A_0}\big)e^{\lambda_2 A}+\big(e^{\lambda_1 A}-e^{\lambda_1 A_1}\big)e^{\lambda_2 A_0}+\big(e^{\lambda_1 A_0}-e^{\lambda_1 A}\big)e^{\lambda_2 A_1}\Big)e^{\lambda_3 A_2}\Big].$$

Здесь значение оператора $\widetilde{D}_3(F;A_j)$ вычисляется по правилу

$$\widetilde{D}_3(F;A_j)=\delta^3F[A;H_3H_2H_1]-\lambda_2H_3\delta^2F[A;H_2H_1]-$$

$$-\lambda_1H_2\delta^2F[A;H_3H_1]+\lambda_1\lambda_2H_3H_2\delta F[A;H_1],$$

где $\delta^kF[A;H_k\cdots H_1]$ $(k=1,2,3)$ – дифференциалы Гато k-ого порядка в точке A по направлениям $H_1,\ldots,H_k$. Хотя такая запись $L_2(A)$ и $\Omega_2(A)$ несколько громоздка, но она имеет наглядный вид и удобна для применения.

Рассмотрим далее формулу Эрмита–Биркгофа для случая, когда в качестве базисных выбираются функции вида $\varphi_k(A)=e^{kA}$ $(k=0,1,\ldots,n+1)$. Пусть X – множество квадратных матриц, $A_k\in X$ $(k=0,1,\ldots,n)$ – совокупность матричных интерполяционных узлов, в которых известны значения $F(A_k)$ функции $F(A)$ и в одной из точек A_j, в которой $F(A)$ дифференцируема $n+1$ раз, – значение $\widehat{D}_{n+1}(F;A_j)$ дифференциального оператора вида

$$\widehat{D}_{n+1}F(A)\equiv\widehat{D}_{n+1}F(A;H_{n+1}H_n\cdots H_1)=$$

$$\big(D_{H_{n+1}}-nH_{n+1}\big)\cdots\big(D_{H_3}-2H_3\big)\big(D_{H_2}-H_2\big)D_{H_1}F(A),$$

где запись $D_{H_k}F(A)=\delta F[A;H_k]$ $(k=1,2,\ldots,n+1)$ имеет тот же смысл, что и в формуле (4.16).

Теорема 4.5. *Если матрицы* $\big(e^{A_k}-e^{A_\nu}\big)$ $(k\neq\nu,\ k,\nu=0,1,\ldots,n)$ *и* $H_1,H_2,\ldots,H_{n+1}$ *обратимы, то экспоненциально-матричный многочлен*

$$\widetilde{L}_{n+1}(A)=L_n(A)+\frac{\Omega_n(A)\big(H_{n+1}H_n\cdots H_1\big)^{-1}e^{-(n+1)A_j}\widehat{D}_{n+1}(F;A_j)}{(n+1)!},\qquad(4.21)$$

где

$$L_n(A)=\sum_{k=0}^{n}\Phi_{n,k}^{-1}(A_k)\Phi_{n,k}(A)F(A_k),$$

$$\Phi_{n,k}(A)=\left(e^A-e^{A_0}\right)\cdots\left(e^A-e^{A_{k-1}}\right)\left(e^A-e^{A_{k+1}}\right)\cdots\left(e^A-e^{A_n}\right),$$

$$\Omega_n(A)=\left(e^A-e^{A_0}\right)\left(e^A-e^{A_1}\right)\cdots\left(e^A-e^{A_n}\right),$$

удовлетворяет условиям

$$\widetilde{L}_{n+1}(A_k)=F(A_k)\ \ (k=0,1,\dots,n). \tag{4.22}$$

Если матрицы A_j *и* $H_1,H_2,\dots,H_{n+1}$ *попарно перестановочны и с этой группой матриц перестановочен каждый из узлов* $A_0,A_1,\dots,A_n$, *то для многочлена* (4.21) *выполняется также условие*

$$\widehat{D}_{n+1}\left(\widetilde{L}_{n+1};A_j\right)=\widehat{D}_{n+1}\left(F;A_j\right). \tag{4.23}$$

Доказательство. Так как $\Phi_{n,k}(A_\nu)=0$ при $(\nu\neq k)$ и $\Omega_n(A_\nu)=0$ $(k,\nu=0,1,\dots,n)$, то условия (4.22) выполняются. Далее, многочлен (4.21), при условии перестановочности матрицы A с каждой из матриц $A_0,A_1,\dots,A_n$, можно представить в виде

$$\widetilde{L}_{n+1}(A)=B_0+\sum_{k=1}^{n}e^{kA}B_k+\frac{e^{(n+1)A}\left(H_{n+1}H_n\cdots H_1\right)^{-1}e^{-(n+1)A_j}\widehat{D}_{n+1}(F;A_j)}{(n+1)!},$$

где B_k $(k=0,1,\dots,n)$ – соответствующие фиксированные матрицы из множества X. Поэтому в силу перестановочности матриц $A_j,H_1,H_2,\dots,H_{n+1}$ с каждым из узлов $A_0,A_1,\dots,A_n$, будет справедливо равенство

$$\widehat{D}_{n+1}\left(\widetilde{L}_{n+1};A_j\right)=\widehat{D}_{n+1}\left(B_0;A_j\right)+\sum_{k=1}^{n}\widehat{D}_{n+1}\left(\varphi_k;A_j\right)B_k+$$
$$+\frac{\widehat{D}_{n+1}\left(\varphi_{n+1};A_j\right)\left(H_{n+1}H_n\cdots H_1\right)^{-1}e^{-(n+1)A_j}\widehat{D}_{n+1}(F;A_j)}{(n+1)!}.$$

Используя равенства (4.19) и (4.20) при $\lambda_\nu=\nu$, а также условие попарной перестановочности матриц A_j и $H_1,H_2,\dots,H_{n+1}$, получим

$$\widehat{D}_{n+1}\left(\varphi_k;A_j\right)=0\ \ (k=1,2,\dots,n);\quad \widehat{D}_{n+1}\left(\varphi_{n+1};A_j\right)=(n+1)!e^{(n+1)A_j}H_{n+1}H_n\cdots H_1,$$

откуда следует справедливость равенства (4.23). Теорема 4.5 доказана.

ГЛАВА IV

Алгебраические и тригонометрические интерполяционные многочлены для функций матричного аргумента

В теории интерполяции функций матричных переменных наиболее полно рассмотрена задача алгебраического интерполирования. Построены интерполяционные алгебраические матричные многочлены разных структур: лагранжева, ньютонова, эрмитова, Эрмита–Биркгофа и других типов.

Некоторые из таких формул для функций одной матричной переменной получены и исследованы в монографии [25], а также в статьях [42–47]. Наряду с интерполяцией функций на множествах матриц с обычно принятым умножением, рассмотрена задача интерполяции на множествах матриц с другими правилами умножения: йорданово и кронекерово умножение, умножение по Адамару и по Фробениусу [44, 47].

В статье [48] на множествах стационарных и функциональных матриц построены интерполяционные многочлены для функций многих матричных переменных. Задаче интерполирования функционалов от многих переменных посвящена работа [49]. Многие вопросы теории интерполирования операторов изложены в монографии [25].

В теории интерполирования функций скалярных аргументов построены интерполяционные многочлены относительно произвольных чебышевских систем функций и их частных случаев: тригонометрических, экспоненциальных, дробно-рациональных и других классов систем. Такого вида интерполяционные формулы также как и формулы алгебраического типа, находят применение в ряде областей математики и ее приложениях.

При решении многих практических задач обычно используются интерполяционные формулы невысоких порядков. Это относится как к случаю интерполяции скалярных функций, так и к задаче операторного интерполирования, и вызвано в значительной степени тем, что при увеличении порядка интерполяционных формул, значительно усложняется их общий вид, что приводит соответственно к более сложной структуре получаемых на их основе алгоритмов. Наряду с построением интерполяционных формул операторного интерполирования невысоких порядков является актуальным исследование данной задачи и для случая формул высших порядков.

§1. Алгебраическое интерполирование

Рассмотрим пространство $C^m[T]$ квадратных матриц $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$, для которых производная $A^{(m)}(t)=\left[a_{ij}^{(m)}(t)\right]$ порядка m непрерывна на отрезке $[a, b]$ и матричный многочлен первой степени вида

$$\mathrm{P}_1(A)=B+\sum_{j=0}^{n}A(t_j)C_j+\sum_{k=0}^{m}\int_T A^{(k)}(s)P_k(t,s)ds, \qquad (1.1)$$

где $t_0, t_1, ..., t_n$ – фиксированные точки отрезка $T=[a,b]\subset\mathbb{R}$, $B=B(t)$, $C_j=C_j(t)$ $(j=\overline{0,n})$, $P_k(t,s)$ $(k=\overline{0,m})$ – заданные матрицы той же размерности, что и матрица $A(t)$.

Пусть $F(A)$ – заданная на $C^m[T]$ функция матричного аргумента A. Имеет место следующая

Теорема 1.1. *Для формулы*

$$L_1(A)=F(A_0)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i)-A_0(t_i)][A_1(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}[F(\sigma_{1i})-F(A_0)]+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot));H_i(\cdot)]d\tau, \qquad (1.2)$$

где $A_0=A_0(t)$, $A_1=A_1(t)$ *– узлы интерполирования,*

$$\sigma_{1i}(t)=A_0(t)+A_1(t_i)-A_0(t_i), \qquad (1.3)$$

$$H_i(t)=A(t)-A_0(t)-A(t_i)+A_0(t_i), \qquad (1.4)$$

выполняются условия

$$L_1(A_i)=F(A_i) \ \ (i=0,1), \qquad (1.5)$$

и она точна для матричных многочленов вида (1.1).

Доказательство. Покажем, что матричный многочлен (1.2) удовлетворяет интерполяционным условиям (1.5). Равенство $L_1(A_0)=F(A_0)$ имеет место, так как второе и третье слагаемые в правой части (1.2) обращаются в нуль. Так как $L_1(A)$ при $A=A_1$ принимает вид

$$L_1(A_1)=F(A_0)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[F(\sigma_{1i})-F(A_0)]+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot));A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)]d\tau,$$

то учитывая, что $\delta F[x+\tau h;h]=\frac{d}{d\tau}F[x+\tau h]$, получим

$$L_1(A_1)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}F(\sigma_{1i})+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1\frac{d}{d\tau}F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot))]d\tau=F(A_1).$$

Докажем инвариантность формулы (1.2) относительно многочленов вида (1.1). Проведем доказательство для каждой из трех групп слагаемых в (1.1).

Очевидно, что $L_1(A) = F(A)$ для $F(A) = B$.

Пусть $F(A) = \sum_{j=0}^{n} A(t_j) C_j$. Так как $F(\sigma_{1i}) - F(A_0) = [A_1(t_i) - A_0(t_i)] \sum_{j=0}^{n} C_j$, а

$$\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] = \sum_{j=0}^{n} \bigl(A(t_j) - A_0(t_j) - A(t_i) + A_0(t_i)\bigr) C_j,$$

то после несложных вычислений получим

$$L_1(A) = \sum_{j=0}^{n} A_0(t_j) C_j + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} [A(t_i) - A_0(t_i)] \sum_{j=0}^{n} C_j +$$

$$+ \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \bigl(A(t_j) - A_0(t_j) - A(t_i) + A_0(t_i)\bigr) C_j = \sum_{j=0}^{n} A(t_j) C_j \equiv F(A).$$

Пусть $F(A) = \sum_{k=0}^{m} \int_T A^{(k)}(s) P_k(t,s) ds$. Так как для $k \geq 1$ $\sigma_{1i}^{(k)}(s) = A_0^{(k)}(s)$, а $H_i^{(k)}(s) = A^{(k)}(s) - A_0^{(k)}(s)$, то будем иметь

$$F(\sigma_{1i}) - F(A_0) = [A_1(t_i) - A_0(t_i)] \int_T P_0(t,s) ds,$$

$$\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \int_T \bigl(A^{(k)}(s) - A_0^{(k)}(s)\bigr) P_k(t,s) ds - [A(t_i) - A_0(t_i)] \int_T P_0(t,s) ds.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (1.2) после некоторых преобразований будем иметь $L_1(A) = \sum_{k=0}^{m} \int_T A^{(k)}(s) P_k(t,s) ds \equiv F(A)$.

В силу линейного вхождения в формулу (1.2) функции $F(A)$, данная формула точна также для многочленов вида (1.1). Теорема 1.1 доказана.

Случай данной формулы при $n = 0$ рассмотрен в [25].

В частности, если узлы интерполирования A_i имеют вид $A_i = H + \alpha_i I$, где $H = H(t)$ – фиксированная матрица, $\alpha_i = \alpha_i(t)$ $(i = 0,1)$ – заданные числовые функции, причем $\alpha_0(t_i) \neq \alpha_1(t_i)$ $(i = \overline{0,n})$, I – единичная матрица, то формула (1.2) примет вид

$$L_1(A) = F(A_0) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{A(t_i) - A_0(t_i)}{\alpha_1(t_i) - \alpha_0(t_i)} [F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_{0}^{1}\delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau\big(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\big);H_i(\cdot)]d\tau,$$

где

$$\sigma_{1i}(t)=A_0(t)+\big(\alpha_1(t_i)-\alpha_0(t_i)\big)I=H(t)+\big(\alpha_0(t)+\alpha_1(t_i)-\alpha_0(t_i)\big)I,$$
$$H_i(t)=A(t)-A(t_i)-H(t)+H(t_i)-\big(\alpha_0(t)-\alpha_0(t_i)\big)I.$$

Построим аналогичную формулу второго порядка. Рассмотрим матричные многочлены первой и второй степени вида

$$\widetilde{\mathrm{P}}_1(A)=B+\sum_{j_1,j_2=0}^{n}C_{j_1j_2}\big[A(t_{j_1})-A(t_{j_2})\big]D_{j_1j_2}+$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\int_{T^2}P_k(t,s_1,s_2)\Big[A^{(k)}(s_1)-A^{(k)}(s_2)\Big]Q_k(t,s_1,s_2)ds_1ds_2; \qquad (1.6)$$

$$\widetilde{\mathrm{P}}_2(A)=\widetilde{\mathrm{P}}_1(A)+\sum_{j=0}^{n}C_{3,j}\big[A(t_{j_1})-A(t_{j_2})\big]C_{4,j}\big[A(t_{j_3})-A(t_{j_4})\big]C_{5,j}+$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\int_{T^4}P_{k,3}(t,s)\Big[A^{(k)}(s_1)-A^{(k)}(s_2)\Big]P_{k,4}(t,s)\Big[A^{(k)}(s_3)-A^{(k)}(s_4)\Big]P_{k,5}(t,s)ds, \qquad (1.7)$$

где $t_0, t_1,..., t_n$ – те же фиксированные точки отрезка $T=[a,b]\subset\mathbb{R}$, $B=B(t)$, $C_{j_1j_2}=C_{j_1j_2}(t)$, $D_{j_1j_2}=D_{j_1j_2}(t)$, $C_{i,j}=C_{i,j}(t)$ $(i=3,4,5)$, $\big(j,j_1,j_2,j_3,j_4=\overline{0,n}\big)$ – заданные фиксированные матрицы, $P_k(t,s_1,s_2)$, $Q_k(t,s_1,s_2)$, $P_{k,i}(t,s)$ $(i=3,4,5)$, $\big(k=\overline{0,m}\big)$ – также заданные матрицы той же размерности, что и $A(t)$, а $s=(s_1,s_2,s_3,s_4)$, $ds=ds_1ds_2ds_3ds_4$.

Заметим, что формула (1.2) инвариантна также относительно многочленов вида (1.6). Действительно, очевидно, что $\sigma_{1i}(t_{j_1})-\sigma_{1i}(t_{j_2})=A_0(t_{j_1})-A_0(t_{j_2})$ и $\sigma_{1i}^{(k)}(s_1)-\sigma_{1i}^{(k)}(s_2)=A_0^{(k)}(s_1)-A_0^{(k)}(s_2)$, поэтому для

$$F(A)=\sum_{j_1,j_2=0}^{n}C_{j_1j_2}\big[A(t_{j_1})-A(t_{j_2})\big]D_{j_1j_2} \qquad (1.8)$$

и

$$F(A)=\sum_{k=0}^{m}\int_{T^2}P_k(t,s_1,s_2)\Big[A^{(k)}(s_1)-A^{(k)}(s_2)\Big]Q_k(t,s_1,s_2)ds_1ds_2 \qquad (1.9)$$

при $i=0,1,\ldots,n$ справедливы равенства $F(\sigma_{1i})-F(A_0)=0$.

Для функций (1.8), (1.9) и любых матриц $A(t)$ и $H(t)$ из пространства $C^m[T]$ по определению дифференциала Гато справедливы, соответственно, равенства

$$\delta F[A(\cdot);H(\cdot)] = \sum_{j_1,j_2=0}^{n} C_{j_1j_2}\left[H(t_{j_1}) - H(t_{j_2})\right]D_{j_1j_2}, \tag{1.10}$$

$$\delta F[A(\cdot);H(\cdot)] = \sum_{k=0}^{m} \int_{T^2} P_k(t,s_1,s_2)\left[H^{(k)}(s_1) - H^{(k)}(s_2)\right]Q_k(t,s_1,s_2)ds_1ds_2. \tag{1.11}$$

Из (1.10) и (1.11) при $A(t) = \sigma_{1i}(t) + \tau\left(A_1(t) - \sigma_{1i}(t)\right)$ и $H(t) = H_i(t)$ для функций (1.8), (1.9) будем иметь

$$\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau\left(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)\right);H_i(\cdot)] = F(A) - F(A_0).$$

Следовательно, $L_1(A) \equiv F(A)$ при $F(A) = \widetilde{\mathrm{P}}_1(A)$, т.е. формула (1.2) точна также и для многочленов первой степени вида (1.6).

Пусть $F(A)$ – функция от матриц, где $A \in C^m[a,b]$. Введем следующие обозначения

$$l_{21}(A) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i) - A_1(t_i)][A(t_i) - A_0(t_i)][A_2(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} \times$$

$$\times\left([A_1(t_i) - A_2(t_i)]^{-1}\left[F(\sigma_{1i}^{21}) - F(A_2)\right] + [A_0(t_i) - A_1(t_i)]^{-1}\left[F(\sigma_{1i}^{01}) - F(A_0)\right]\right),$$

$$l_{22}(A) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1\int_0^1 \tau\delta^2 F\left[\sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau\left(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot)\right) + \right.$$

$$\left. + \tau s\left(A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot)\right); H_{i1}(\cdot)H_{i0}(\cdot)\right]d\tau ds, \tag{1.12}$$

где $\sigma_{1i}^{01}(t) = \sigma_{1i}(t)$, $\sigma_{1i}^{12}(t) = A_1(t) + A_2(t_i) - A_1(t_i)$, $\sigma_{1i}^{21}(t) = A_2(t) + A_1(t_i) - A_2(t_i)$, $H_{i0}(t) = H_i(t)$, $H_{i1}(t) = A(t) - A_1(t) - A(t_i) + A_1(t_i)$, а функции $\sigma_{1i}(t)$ и $H_i(t)$, как и раньше, задаются формулами (1.3), (1.4). Имеет место

Теорема 1.2. *Если существуют матрицы* $[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_2(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_1(t_i) - A_2(t_i)]^{-1}$ $\left(i = \overline{0,n}\right)$, *то для формулы*

$$L_2(A) = L_1(A) + l_{21}(A) + l_{22}(A), \tag{1.13}$$

где $A_i = A_i(t)$ $(i = \overline{0,2})$ *– узлы интерполирования,* $L_1(A)$ *– многочлен, определенный формулой* (1.2)*, выполняются условия*

$$L_2(A_i) = F(A_i) \ \ (i = \overline{0,2}), \tag{1.14}$$

и она инвариантна относительно матричных многочленов вида (1.7).

Доказательство. Так как $l_{21}(A_0)=l_{21}(A_1)=0$, $H_{i0}(t)=0$ при $A=A_0$, $H_{i1}(t)=0$ при $A=A_1$, то с учетом (1.5) имеем, что $L_2(A_i)=F(A_i)$ $(i=0,1)$. Проверим далее выполнение условия $L_2(A_2)=F(A_2)$. Введем обозначения

$$l_{11}(A)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i)-A_0(t_i)][A_1(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}[F(\sigma_{1i})-F(A_0)],$$

$$l_{12}(A)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot));H_i(\cdot)]d\tau. \tag{1.15}$$

Справедливо равенство

$$l_{11}(A_2)+l_{21}(A_2)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\Big([A_2(t_i)-A_1(t_i)+A_1(t_i)-A_0(t_i)][A_1(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}\times$$

$$\times[F(\sigma_{1i})-F(A_0)]-F(\sigma_{1i}^{21})+F(A_2)+[A_2(t_i)-A_0(t_i)+A_0(t_i)-A_1(t_i)]\times$$

$$\times[A_0(t_i)-A_1(t_i)]^{-1}[F(\sigma_{1i})-F(A_0)]\Big)=F(A_2)-F(A_0)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left[F(\sigma_{1i}^{01})-F(\sigma_{1i}^{21})\right].$$

При $A=A_2$ направления $H_{i0}(t)$ и $H_{i1}(t)$ примут вид $H_{i0}(t)=A_2(t)-\sigma_{1i}^{02}(t)$, $H_{i1}(t)=A_2(t)-\sigma_{1i}^{12}(t)$, где $\sigma_{1i}^{02}(t)=A_0(t)+A_2(t_i)-A_0(t_i)$, поэтому, используя формулу $\delta F[\tilde{A}+s\tau\tilde{H};\tilde{H}]=\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial}{\partial s}F[\tilde{A}+s\tau\tilde{H}]$ при $\tilde{A}=\sigma_{1i}^{01}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}^{01}(\cdot)\right)$ и $\tilde{H}=A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{12}(\cdot)$, будем иметь

$$l_{22}(A_2)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1\int_0^1\frac{\partial}{\partial s}\delta F\Big[\sigma_{1i}^{01}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}^{01}(\cdot)\right)+\tau s\left(A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{12}(\cdot)\right);\ A_2(\cdot)-$$

$$-\sigma_{1i}^{02}(\cdot)\Big]d\tau ds=-l_{12}(A_2)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1\delta F\left[\sigma_{1i}^{01}(\cdot)+\tau\left(A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{02}(\cdot)\right);A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{02}(\cdot)\right]d\tau.$$

Аналогично, пользуясь соотношением $\delta F[\tilde{A}+\tau\tilde{H};\tilde{H}]=\dfrac{d}{d\tau}F[\tilde{A}+\tau\tilde{H}]$ при $\tilde{A}=\sigma_{1i}^{01}(\cdot)$ и $\tilde{H}=A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{02}(\cdot)$, получим

$$l_{22}(A_2)=-l_{12}(A_2)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left[F(\sigma_{1i}^{21})-F(\sigma_{1i}^{01})\right].$$

Тогда $L_2(A_2)=F(A_0)+l_{11}(A_2)+l_{12}(A_2)+l_{21}(A_2)+l_{22}(A_2)=F(A_2)$.

Таким образом, интерполяционные условия (1.14) выполняются.

Покажем, что формула (1.13) точна для многочленов вида (1.7). Пусть $F(A)=\tilde{\mathrm{P}}_1(A)$. Тогда, как показано было раньше, $L_1(A)\equiv\tilde{\mathrm{P}}_1(A)$. Так как

$\sigma_{1i}^{01}(t_{j_1})-\sigma_{1i}^{01}(t_{j_2})=A_0(t_{j_1})-A_0(t_{j_2})$ и $\left.\frac{d^k}{dt^k}\left\{\sigma_{1i}^{01}(t)\right\}\right|_{t=s_1}-\left.\frac{d^k}{dt^k}\left\{\sigma_{1i}^{01}(t)\right\}\right|_{t=s_2}=$ $=A_0^{(k)}(s_1)-A_0^{(k)}(s_2)$, то $F(\sigma_{1i}^{01})-F(A_0)=0$ для $F(A)=\widetilde{\mathrm{P}}_1(A)$. Аналогично можно показать, что $F(\sigma_{1i}^{21})-F(A_2)=0$. Следовательно, $l_{21}(A)=0$.

Для любых квадратных функциональных матриц $\widetilde{A},\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2$ соответствующего порядка и любой матричной функции $F(A)$, дважды дифференцируемой по Гато в точке $\widetilde{A}$, выполняется соотношение

$$\delta^2F[\widetilde{A};\widetilde{H}_2\widetilde{H}_1]=\lim_{\lambda_1,\lambda_2\to 0}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\Big(F[\widetilde{A}+\lambda_1\widetilde{H}_1+\lambda_2\widetilde{H}_2]-$$

$$-F[\widetilde{A}+\lambda_1\widetilde{H}_1]-F[\widetilde{A}+\lambda_2\widetilde{H}_2]+F[\widetilde{A}]\Big). \qquad (1.16)$$

Тогда из (1.16) при $F(A)=\widetilde{\mathrm{P}}_1(A)$ после несложных преобразований будем иметь $\delta^2\widetilde{\mathrm{P}}_1[\widetilde{A};\widetilde{H}_2\widetilde{H}_1]\equiv 0$. Таким образом, $l_{22}(A)=0$, и значит $L_2(A)\equiv\widetilde{\mathrm{P}}_1(A)=F(A)$.

Введем в рассмотрение функцию двух матричных переменных

$$\Phi(A,B)=\sum_{j=0}^{n}C_{3,j}\left[A(t_{j_1})-A(t_{j_2})\right]C_{4,j}\left[B(t_{j_3})-B(t_{j_4})\right]C_{5,j}.$$

Очевидно, что функция $\Phi(A,B)$ обладает свойствами

$$\Phi(A+B,D)=\Phi(A,D)+\Phi(B,D),\;\; \Phi(A,B+D)=\Phi(A,B)+\Phi(A,D),$$

$$\Phi(\lambda A,B)=\Phi(A,\lambda B)=\lambda\Phi(A,B),\;\; A,B,D\in C^m[a,b],\; \lambda\in\mathbb{R}. \qquad (1.17)$$

Пусть $F(A)=\Phi(A,A)$, что совпадает со вторым слагаемым в (1.7). В силу того, что $\sigma_{1i}^{01}(t_{j_k})-\sigma_{1i}^{01}(t_{j_{k+1}})=A_0(t_{j_k})-A_0(t_{j_{k+1}})$ $(k=1,3)$, для этой функции справедливо равенство $F(\sigma_{1i}^{01})-F(A_0)=0$. Аналогично показывается, что $F(\sigma_{1i}^{21})-F(A_2)=0$. Таким образом, учитывая, что $\sigma_{1i}^{01}(t)=\sigma_{1i}(t)$, будем иметь

$$l_{11}(A)=l_{21}(A)=0. \qquad (1.18)$$

Используя определение дифференциала Гато первого порядка и свойства (1.17) функции $\Phi(A,B)$, которыми, в частности, обладает и $F(A)=\Phi(A,A)$, получим

$$\delta F[\widetilde{A};\widetilde{H}]=\Phi(\widetilde{A},\widetilde{H})+\Phi(\widetilde{H},\widetilde{A}). \qquad (1.19)$$

Нетрудно показать, что выполняются равенства

$$\Phi\big(\sigma_{1i}(\cdot),H_i(\cdot)\big)=\Phi\big(A_0(\cdot),A(\cdot)-A_0(\cdot)\big);\;\; \Phi\big(H_i(\cdot),\sigma_{1i}(\cdot)\big)=\Phi\big(A(\cdot)-A_0(\cdot),A_0(\cdot)\big);$$

$$\Phi\big(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot),H_i(\cdot)\big)=\Phi\big(A_1(\cdot)-A_0(\cdot),A(\cdot)-A_0(\cdot)\big); \qquad (1.20)$$

$$\Phi\big(H_i(\cdot), A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\big)=\Phi\big(A(\cdot)-A_0(\cdot), A_1(\cdot)-A_0(\cdot)\big).$$

Тогда из (1.19) при $\widetilde{A}=\sigma_{1i}(\cdot)+\tau\big(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\big)$, $\widetilde{H}=H_i(\cdot)$ и (1.20), учитывая свойства (1.17), будем иметь

$$\begin{aligned}\delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau\big(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\big); H_i(\cdot)]=\Phi\big(\sigma_{1i}(\cdot), H_i(\cdot)\big)+\Phi\big(H_i(\cdot),\sigma_{1i}(\cdot)\big)+\\+\tau\big[\Phi\big(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot), H_i(\cdot)\big)+\Phi\big(H_i(\cdot), A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\big)\big]=\\=\Phi\big(A_0(\cdot), A(\cdot)-A_0(\cdot)\big)+\Phi\big(A(\cdot)-A_0(\cdot), A_0(\cdot)\big)+\\+\tau\big[\Phi\big(A_1(\cdot)-A_0(\cdot), A(\cdot)-A_0(\cdot)\big)+\Phi\big(A(\cdot)-A_0(\cdot), A_1(\cdot)-A_0(\cdot)\big)\big].\end{aligned}$$

Таким образом, вычисляя интеграл в (1.15) и проводя преобразования, получим

$$\begin{aligned}l_{12}(A)=\frac{1}{2}\big(\Phi(A_0,A)-2\Phi(A_0,A_0)+\Phi(A_1,A)-\\-\Phi(A_1,A_0)+\Phi(A,A_0)+\Phi(A,A_1)-\Phi(A_0,A_1)\big).\end{aligned}\qquad(1.21)$$

При $F(A)=\Phi(A,A)$ равенство (1.16) принимает вид

$$\delta^2 F[\widetilde{A};\widetilde{H}_2\widetilde{H}_1]=\Phi(\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2)+\Phi(\widetilde{H}_2,\widetilde{H}_1).$$

В частности, при $\widetilde{A}=\sigma_{1i}^{01}(\cdot)+\tau\big(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}^{01}(\cdot)\big)+\tau s\big(A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{12}(\cdot)\big)$, $\widetilde{H}_1=H_{i0}(\cdot)$ и $\widetilde{H}_2=H_{i1}(\cdot)$ будем иметь

$$\begin{aligned}\delta^2 F\big[\sigma_{1i}^{01}(\cdot)+\tau\big(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}^{01}(\cdot)\big)+\tau s\big(A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{12}(\cdot)\big); H_{i1}(\cdot)H_{i0}(\cdot)\big]=\Phi\big(H_{i0}(\cdot), H_{i1}(\cdot)\big)+\\+\Phi\big(H_{i1}(\cdot), H_{i0}(\cdot)\big)=\Phi\big(A(\cdot)-A_0(\cdot), A(\cdot)-A_1(\cdot)\big)+\Phi\big(A(\cdot)-A_1(\cdot), A(\cdot)-A_0(\cdot)\big).\end{aligned}$$

Аналогично предыдущему, вычисляя интеграл в (1.12), после преобразований будем иметь

$$\begin{aligned}l_{22}(A)=\frac{1}{2}\big(2\Phi(A,A)-\Phi(A_0,A)-\Phi(A,A_1)+\\+\Phi(A_0,A_1)-\Phi(A_1,A)-\Phi(A,A_0)+\Phi(A_1,A_0)\big).\end{aligned}\qquad(1.22)$$

Так как $L_1(A)=F(A_0)+l_{11}(A)+l_{12}(A)$, то из равенств (1.13), (1.18), (1.21), (1.22) следует, что

$$L_2(A)=F(A_0)+\Phi(A,A)-\Phi(A_0,A_0)=F(A).\qquad(1.23)$$

Переобозначим функцию $\Phi(A,B)$ следующим образом

$$\begin{aligned}\Phi(A,B)=\sum_{k=0}^{m}\int_{T^4}P_{k,3}(t,s)\big[A^{(k)}(s_1)-A^{(k)}(s_2)\big]\times\\\times P_{k,4}(t,s)\big[B^{(k)}(s_3)-B^{(k)}(s_4)\big]P_{k,5}(t,s)ds.\end{aligned}$$

Пусть $F(A)=\Phi(A,A)$, что совпадает с третьим слагаемым в (1.7). Аналогично предыдущим рассуждениям можно показать, что $F(\sigma_{1i}^{01})-F(A_0)=$ $=F(\sigma_{1i}^{21})-F(A_2)=0$, следовательно $l_{11}(A)=l_{21}(A)=0$. Очевидно, что переобозначенная функция $\Phi(A,B)$ также удовлетворяет свойствам (1.17) и соотношениям вида (1.20), поэтому для $F(A)=\Phi(A,A)$ выполняются равенства (1.19), (1.21), (1.22), и следовательно (1.23). Таким образом, формула (1.13) точна для многочленов вида (1.7). Теорема 1.2 доказана.

Пример. Рассмотрим интерполяционную формулу (1.2) в случае узлов

$$A_0(t)=\begin{bmatrix} t & t^2 \\ t^2 & t^3 \end{bmatrix}, \quad A_1(t)=\begin{bmatrix} -t^3+\alpha & t^2+\beta \\ t^2+\gamma & -t+\delta \end{bmatrix}$$

для функции $F(A)=e^{A(t)}$, заданной на множестве матриц вида $A(t)=\theta A_0(t)+(1-\theta)A_1(t)$, $\theta\in\mathbb{R}$. Здесь $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ – произвольные числа.

Нетрудно заметить, что при $A(t)=\theta A_0(t)+(1-\theta)A_1(t)$ матрицы $\sigma_{1i}(t)+\tau\big(A_1(t)-\sigma_{1i}(t)\big)$ и $H_i(t)$ являются перестановочными, поэтому для $F(A)=e^{A(t)}$ справедливы равенства

$$\delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau\big(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\big);H_i(\cdot)]=H_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)+\tau\left(A_1(t)-\sigma_{1i}(t)\right)}.$$

Кроме того, так как матрицы $A_1(t)-\sigma_{1i}(t)=\left(t_i+t_i^3-t-t^3\right)I$, где I – единичная матрица второго порядка, являются скалярными, то имеют место соотношения

$$e^{\sigma_{1i}(t)+\tau\left(A_1(t)-\sigma_{1i}(t)\right)}=e^{(t_i+t_i^3-t-t^3)\tau}e^{\sigma_{1i}(t)}.$$

Следовательно

$$\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau\big(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\big);H_i(\cdot)]d\tau=\int_0^1 e^{(t_i+t_i^3-t-t^3)\tau}d\tau\, H_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)}=$$

$$=\frac{1-e^{t_i+t_i^3-t-t^3}}{t+t^3-t_i-t_i^3}\big(A(t)-A(t_i)+A_0(t_i)-A_0(t)\big)e^{\sigma_{1i}(t)}.$$

Тогда, сделав замену $\alpha_i(t)=\dfrac{1-e^{t_i+t_i^3-t-t^3}}{t+t^3-t_i-t_i^3}$, будем иметь

$$L_1(A)=e^{A_0(t)}+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left[A(t_i)-A_0(t_i)\right]\left[A_1(t_i)-A_0(t_i)\right]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)}-e^{A_0(t)}\right]+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(t)\big(A(t)-A(t_i)+A_0(t_i)-A_0(t)\big)e^{\sigma_{1i}(t)}=$$

$$= A(t)B(t) + \sum_{i=0}^{n} A(t_i)B_i(t) + C(t), \qquad (1.24)$$

где

$$B(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(t)\, e^{\sigma_{1i}(t)},$$

$$B_i(t) = \frac{1}{n+1}\Big([A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\Big[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\Big] - \alpha_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)}\Big),$$

$$C(t) = e^{A_0(t)} - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_0(t_i)[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\Big[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\Big] +$$

$$+ \alpha_i(t)\big(A_0(t) - A_0(t_i)\big)e^{\sigma_{1i}(t)}\Big).$$

Проверим выполнение интерполяционных условий для формулы (1.24). При $A = A_0(t)$ получим

$$L_1(A_0) = A_0(t)B(t) + \sum_{i=0}^{n} A_0(t_i)B_i(t) + C(t) = e^{A_0(t)} = F(A_0),$$

а при $A = A_1(t)$ будем иметь

$$L_1(A_1) = A_1(t)B(t) + \sum_{i=0}^{n} A_1(t_i)B_i(t) + C(t) =$$

$$= e^{A_0(t)} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\Big(\alpha_i(t)[A_1(t) - A_0(t) + A_0(t_i) - A_1(t_i)]e^{\sigma_{1i}(t)} +$$

$$+[A_1(t_i) - A_0(t_i)][A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\Big[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\Big]\Big).$$

Далее, так как

$$\alpha_i(t)[A_1(t) - A_0(t) + A_0(t_i) - A_1(t_i)] = \Big(e^{t_i + t_i^3 - t - t^3} - 1\Big)I = e^{A_1(t) - \sigma_{1i}(t)} - I,$$

то

$$L_1(A_1) = e^{A_0(t)} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\Big[e^{A_1(t)} - e^{\sigma_{1i}(t)} + e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\Big] = e^{A_1(t)} = F(A_1).$$

Таким образом, интерполяционные условия выполняются.

§2. Тригонометрический вариант формулы Лагранжа–Сильвестра

Известна и широко используется в матричном исчислении [50] формула Лагранжа–Сильвестра, позволяющая аналитическую функцию от матриц $f(A)$ представить в виде алгебраического полинома от матрицы A. В случае, когда характеристические числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A различны, эта формула имеет вид

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(A-\lambda_0 I)\cdots(A-\lambda_{k-1}I)(A-\lambda_{k+1}I)\cdots(A-\lambda_n I)}{(\lambda_k-\lambda_0)\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\cdots(\lambda_k-\lambda_n)} f(\lambda_k),$$

I – единичная матрица.

Построим тригонометрический аналог данной формулы для 2π-периодических целых функций. Рассмотрим случай стационарных матриц.

Теорема 2.1. *Для целой 2π-периодической функции $F(z)$ и матрицы A с различными собственными значениями $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, для которых $\cos\lambda_k \neq \cos\lambda_\nu$ при $k \neq \nu$, имеет место равенство*

$$F(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\cos A - \cos\lambda_0 I)\cdots(\cos A - \cos\lambda_{k-1}I)(\cos A - \cos\lambda_{k+1}I)\cdots}{(\cos\lambda_k - \cos\lambda_0)\cdots(\cos\lambda_k - \cos\lambda_{k-1})(\cos\lambda_k - \cos\lambda_{k+1})\cdots} \times$$

$$\times \frac{\cdots(\cos A - \cos\lambda_n I)}{\cdots(\cos\lambda_k - \cos\lambda_n)} \left(\frac{F(\lambda_k) + F(-\lambda_k)}{2} I + \frac{F(\lambda_k) - F(-\lambda_k)}{2\sin\lambda_k} \sin A \right), \qquad (2.1)$$

где I – единичная матрица.

Доказательство. Пусть $F(z)$ – целая 2π-периодическая функция $F(z+2\pi) = F(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Ряд Фурье

$$F(z) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kz + \beta_k \sin kz),$$

для таких функций сходится равномерно в любой ограниченной замкнутой области полосы $0 \le \operatorname{Re} z \le 2\pi$ комплексной плоскости. Так как $\cos kz$ и $\sin kz$ выражаются через $\cos^\nu z$ $(\nu = 1,2,\ldots,k)$ и $\sin z$ по формулам вида

$$\cos kz = \sum_{\nu=0}^{k} a_{k\nu} \cos^\nu z, \quad \sin kz = \sin z \sum_{\nu=0}^{k-1} b_{k\nu} \cos^\nu z,$$

где $a_{k\nu}, b_{k\nu}$ – соответствующие числа, то $F(z)$ может задаваться также в виде ряда

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos^k z + \sin z \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos^k z = F_1(z) + \sin z\, F_2(z).$$

Функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ после замены $\cos z = \xi$ сводятся к аналитическим в круге $|\xi| \le r$ $(0 < r < \infty)$ функциям относительно переменной ξ. Если $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – различные собственные значения матрицы A, тогда матрица $\cos A$ будет иметь собственные значения $\cos\lambda_k$ $(k = 0,1,\ldots,n)$, и используя далее для функций $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ известную формулу Лагранжа–Сильвестра (см. [50] стр. 108) будем иметь

$$F_1(A)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\cos A-\cos\lambda_0 I)\cdots(\cos A-\cos\lambda_{k-1}I)}{(\cos\lambda_k-\cos\lambda_0)\cdots(\cos\lambda_k-\cos\lambda_{k-1})}\times$$

$$\times\frac{(\cos A-\cos\lambda_{k+1}I)\cdots(\cos A-\cos\lambda_n I)}{(\cos\lambda_k-\cos\lambda_{k+1})\cdots(\cos\lambda_k-\cos\lambda_n)}F_1(\lambda_k). \tag{2.2}$$

$$F_2(A)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\cos A-\cos\lambda_0 I)\cdots(\cos A-\cos\lambda_{k-1}I)}{(\cos\lambda_k-\cos\lambda_0)\cdots(\cos\lambda_k-\cos\lambda_{k-1})}\times$$

$$\times\frac{(\cos A-\cos\lambda_{k+1}I)\cdots(\cos A-\cos\lambda_n I)}{(\cos\lambda_k-\cos\lambda_{k+1})\cdots(\cos\lambda_k-\cos\lambda_n)}F_2(\lambda_k). \tag{2.3}$$

Тогда с учетом соотношений $F_1(z)=\dfrac{F(z)+F(-z)}{2}$, $F_2(z)=\dfrac{F(z)-F(-z)}{2\sin z}$ и равенств (2.2) и (2.3), получим формулу (2.1). Теорема 2.1 доказана.

Таким образом, для любой 2π-периодической целой функции $F(z)$ матрица $F(A)$ совпадает с тригонометрическим матричным многочленом $T_{n+1}(A)$ степени $n+1$, который имеет вид

$$T_{n+1}(A)=\tilde{a}_0 I+\sum_{k=1}^{n}(\tilde{a}_k\cos kA+\tilde{b}_k\sin kA)+\tilde{b}_{n+1}\sin(n+1)A.$$

Формула (2.1) является одним из тригонометрических аналогов классической интерполяционной формулы Лагранжа–Сильвестра.

Для случая матриц второго порядка, т.е. при $n=1$ формула (2.1) примет вид

$$F(A)=\frac{\cos A-\cos\lambda_1 I}{\cos\lambda_0-\cos\lambda_1}\left(\frac{F(\lambda_0)+F(-\lambda_0)}{2}I+\frac{F(\lambda_0)-F(-\lambda_0)}{2\sin\lambda_0}\sin A\right)+$$

$$+\frac{\cos A-\cos\lambda_0 I}{\cos\lambda_1-\cos\lambda_0}\left(\frac{F(\lambda_1)+F(-\lambda_1)}{2}I+\frac{F(\lambda_1)-F(-\lambda_1)}{2\sin\lambda_1}\sin A\right). \tag{2.4}$$

П р и м е р. Пусть задана матрица $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$, λ_0,λ_1 $(\lambda_0\neq\lambda_1)$ – ее собственные значения. Вычислим матрицы $F(A)=e^{\cos A}$ и $F(A)=e^{\sin A}$.

По формуле (2.4) имеем для $F(A)=e^{\cos A}$

$$e^{\cos A}=\frac{e^{\cos\lambda_0}-e^{\cos\lambda_1}}{\cos\lambda_0-\cos\lambda_1}\cos A+\frac{e^{\cos\lambda_1}\cos\lambda_0-e^{\cos\lambda_0}\cos\lambda_1}{\cos\lambda_0-\cos\lambda_1}I. \tag{2.5}$$

Аналогично для функции $F(A)=e^{\sin A}$ получим

$$e^{\sin A}=\left(\frac{e^{\sin\lambda_0}-e^{-\sin\lambda_0}}{4\sin\lambda_0(\cos\lambda_0-\cos\lambda_1)}+\frac{e^{\sin\lambda_1}-e^{-\sin\lambda_1}}{4\sin\lambda_1(\cos\lambda_1-\cos\lambda_0)}\right)\sin 2A+$$

$$+\frac{e^{\sin\lambda_0}+e^{-\sin\lambda_0}-e^{\sin\lambda_1}-e^{-\sin\lambda_1}}{2(\cos\lambda_0-\cos\lambda_1)}\cos A-$$

$$-\left(\frac{\cos\lambda_1(e^{\sin\lambda_0}-e^{-\sin\lambda_0})}{2\sin\lambda_0(\cos\lambda_0-\cos\lambda_1)}+\frac{\cos\lambda_0(e^{\sin\lambda_1}-e^{-\sin\lambda_1})}{2\sin\lambda_1(\cos\lambda_1-\cos\lambda_0)}\right)\sin A+$$

$$+\frac{\cos\lambda_0(e^{\sin\lambda_1}+e^{-\sin\lambda_1})-\cos\lambda_1(e^{\sin\lambda_0}+e^{-\sin\lambda_0})}{2(\cos\lambda_0-\cos\lambda_1)}I. \tag{2.6}$$

В частности, для матрицы $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ имеем $\lambda_0=0,\ \lambda_1=1.$ По формуле (2.5) для функции $F(A)=e^{\cos A}$ получим

$$e^{\cos A}=\frac{e-e^{\cos 1}}{1-\cos 1}\cos A+\frac{e^{\cos 1}-e\cos 1}{1-\cos 1}I. \tag{2.7}$$

Используя непосредственное разложение функций $\cos z$ и $\sin z$ в ряд, можно показать, что для данной матрицы

$$\cos A=I-(1-\cos 1)A,\quad \sin A=A\sin 1. \tag{2.8}$$

Подставив формулу (2.8) для $\cos A$ в (2.7), получим

$$e^{\cos A}=e\cdot I+(e^{\cos 1}-e)A.$$

Аналогично, используя равенства (2.6) и (2.8), а также соотношение

$$\frac{e^{\sin\lambda_0}-e^{-\sin\lambda_0}}{\sin\lambda_0}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{e^{\sin\lambda}-e^{-\sin\lambda}}{\sin\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\cos\lambda\left(e^{\sin\lambda}+e^{-\sin\lambda}\right)}{\cos\lambda}=2,$$

для функции $F(A)=e^{\sin A}$ будем иметь

$$e^{\sin A}=\frac{2\sin 1-e^{\sin 1}+e^{-\sin 1}}{4\sin 1(1-\cos 1)}\sin 2A+\frac{2-e^{\sin 1}-e^{-\sin 1}}{2(1-\cos 1)}\cos A-$$

$$-\frac{\sin 2-e^{\sin 1}+e^{-\sin 1}}{2\sin 1(1-\cos 1)}\sin A+\frac{e^{\sin 1}+e^{-\sin 1}-2\cos 1}{2(1-\cos 1)}I=$$

$$=\left(\frac{e^{\sin 1}-e^{-\sin 1}}{2}-\sin 1\right)A^2+\left(\sin 1-1+\frac{e^{\sin 1}+e^{-\sin 1}}{2}\right)A+I.$$

Так как $A^2=A,$ то окончательно в этом случае придем к равенству

$$e^{\sin A}=\left(e^{\sin 1}-1\right)A+I.$$

§3. Формула тригонометрического интерполирования, содержащая дифференциалы Гато интерполируемой функции

Приведем тригонометрического вида формулу, содержащую дифференциал Гато первого порядка интерполируемой функции.

Теорема 3.1. *Пусть* $A_k = A_k(t)$ $(k=0,1,2)$ *– узлы интерполирования, причем существуют матрицы* $[\cos(A_0 - A_2) - \cos(A_1 - A_2)]^{-1}$, $\sin^{-1}\dfrac{2A_2 - A_0 - A_1}{2}$, *для любого* $t \in T \subset \mathbb{R}$. *Тогда для тригонометрического матричного многочлена*

$$L_2(A) = F(A_0) + \int_0^1 \delta F[A_0 + \tau(A_1 - A_0); l_{10}(A)(A_1 - A_0)]d\tau + \delta F[A_2; l_{11}(A)], \tag{3.1}$$

где

$$l_{10}(A) = [\cos(A_0 - A_2) - \cos(A_1 - A_2)]^{-1}[\cos(A_0 - A_2) - \cos(A - A_2)],$$

$$l_{11}(A) = \sin^{-1}\frac{2A_2 - A_0 - A_1}{2}\left[\cos\frac{A_1 - A_0}{2} - \cos\frac{2A - A_0 - A_1}{2}\right],$$

выполняются интерполяционные условия

$$L_2(A_i) = F(A_i) \ (i = 0,1); \quad \delta L_2[A_2; H] = \delta F[A_2; H], \tag{3.2}$$

причем третье равенство имеет место при условии, что матрицы $2A_2 - A_0 - A_1$ *и* H *перестановочны.*

Если матрицы A, A_0, A_1 *и* A_2 *попарно перестановочны, то формула* (3.1) *инвариантна относительно многочленов вида*

$$\mathrm{P}_1(A) = C_0(s) + \int_T C_1(s,t)\cos A(t) D_1(s,t)dt + \int_T C_2(s,t)\sin A(t) D_2(s,t)dt, \tag{3.3}$$

где $C_0(s)$, $C_1(s,t)$, $C_2(s,t)$, $D_1(s,t)$, $D_2(s,t)$ $(s \in \mathbb{R}^m,\ t \in T \subset \mathbb{R})$ *– заданные матрицы.*

Доказательство. Так как $l_{10}(A_0) = l_{11}(A_0) = 0$, то $L_2(A_0) = F(A_0)$. В силу того, что $l_{10}(A_1) = I$, а $l_{11}(A_1) = 0$, выполняется равенство

$$L_2(A_1) = F(A_0) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} F[A_0 + \tau(A_1 - A_0)]d\tau = F(A_1).$$

Проверим выполнение последнего условия в (3.2). Дифференциал Гато многочлена (3.1) в точке $A = A(t)$ по направлению H имеет вид

$$\delta L_2[A; H] = \int_0^1 \delta F[A_0 + \tau(A_1 - A_0); \delta l_{10}[A; H](A_1 - A_0)]d\tau + \delta F[A_2; \delta l_{11}[A; H]].$$

Действительно в этом случае, при условии перестановочности матриц $A-A_2$, $2A-A_0-A_1$ и H, справедливы соотношения

$$\delta l_{10}[A;H]=\left[\cos(A_0-A_2)-\cos(A_1-A_2)\right]^{-1}\sin(A-A_2)H,$$

$$\delta l_{11}[A;H]=\sin^{-1}\frac{2A_2-A_0-A_1}{2}\sin\frac{2A-A_0-A_1}{2}H.$$

Отсюда следует, что $\delta L_2[A_2;H]=\delta F[A_2;H]$, т.е. второе условие в (3.2) также имеет место.

Покажем, что формула (3.1) точна для многочлена вида (3.3). Пусть $F(A)=C_0(s)$. Очевидно, что в этом случае $L_2(F;A)\equiv C_0(s)=F(A)$. Вычислим при $F(A)=\cos A(t)$ второе слагаемое в равенстве (3.1). Так как

$$\delta F\left[A_0+\tau(A_1-A_0);l_{10}(A)(A_1-A_0)\right]=-\sin\left(A_0+\tau(A_1-A_0)\right)l_{10}(A)(A_1-A_0),$$

то в силу перестановочности матриц A_0 и $\tau(A_1-A_0)$ оно примет вид

$$\int_0^1\delta F\left[A_0+\tau(A_1-A_0);l_{10}(A)(A_1-A_0)\right]d\tau=$$

$$=-\left[\sin A_0\int_0^1\cos\left(\tau(A_1-A_0)\right)d\tau+\cos A_0\int_0^1\sin\left(\tau(A_1-A_0)\right)d\tau\right](A_1-A_0)l_{10}(A)=$$

$$=\left[\cos A_0\left(\cos(A_1-A_0)-I\right)-\sin A_0\sin(A_1-A_0)\right]l_{10}(A)=\left[\cos A_1-\cos A_0\right]l_{10}(A).$$

Так как $\delta F\left[A_2;l_{11}(A)\right]=-\sin A_2 l_{11}(A)$, то имеем

$$L_2(F;A)=\cos A_0+\left[\cos A_1-\cos A_0\right]l_{10}(A)-\sin A_2 l_{11}(A).$$

В силу попарной перестановочности интерполяционных узлов и матрицы A, функции $l_{10}(A)$ и $l_{11}(A)$ можно представить в виде

$$l_{10}(A)=\sin^{-1}\frac{2A_2-A_0-A_1}{2}\sin^{-1}\frac{A_0-A_1}{2}\sin\frac{A+A_0-2A_2}{2}\sin\frac{A-A_0}{2};\quad(3.4)$$

$$l_{11}(A)=2\sin^{-1}\frac{2A_2-A_0-A_1}{2}\sin\frac{A-A_0}{2}\sin\frac{A-A_1}{2}.\quad(3.5)$$

Поэтому, так как $\cos A_1-\cos A_0=2\sin\frac{A_0-A_1}{2}\sin\frac{A_0+A_1}{2}$, то

$$L_2(F;A)=\cos A_0+2\sin^{-1}\frac{2A_2-A_0-A_1}{2}\sin\frac{A-A_0}{2}\times$$

$$\times\left(\sin\frac{A+A_0-2A_2}{2}\sin\frac{A_0+A_1}{2}-\sin\frac{A-A_1}{2}\sin A_2\right)=\cos A_0+$$

$$+\sin^{-1}\frac{2A_2-A_0-A_1}{2}\sin\frac{A-A_0}{2}\left(\cos\frac{A-A_1+2A_2}{2}-\cos\frac{A+2A_0+A_1-2A_2}{2}\right)=$$

$$=\cos A_0-2\sin\frac{A-A_0}{2}\sin\frac{A+A_0}{2}=\cos A=F(A).$$

Аналогично для функции $F(A)=\sin A(t),$ поскольку

$$\delta F\left[A_0+\tau(A_1-A_0);l_{10}(A)(A_1-A_0)\right]=\cos\left(A_0+\tau(A_1-A_0)\right)l_{10}(A)(A_1-A_0),$$

то

$$\int_0^1\delta F\left[A_0+\tau(A_1-A_0);l_{10}(A)(A_1-A_0)\right]d\tau=\left[\sin A_1-\sin A_0\right]l_{10}(A).$$

И в силу того, что $\delta F\left[A_2;l_{11}(A)\right]=\cos A_2 l_{11}(A),$ будем иметь

$$L_2(F;A)=\sin A_0+\left[\sin A_1-\sin A_0\right]l_{10}(A)+\cos A_2 l_{11}(A).$$

Используя соотношения (3.4), (3.5) и тождество для перестановочных матриц A_0 и A_1

$$\sin A_1-\sin A_0=2\sin\frac{A_1-A_0}{2}\cos\frac{A_0+A_1}{2},$$

имеем

$$L_2(F;A)=\sin A_0+2\sin^{-1}\frac{2A_2-A_0-A_1}{2}\sin\frac{A-A_0}{2}\times$$

$$\times\left(-\sin\frac{A+A_0-2A_2}{2}\cos\frac{A_0+A_1}{2}+\sin\frac{A-A_1}{2}\cos A_2\right)=\sin A_0+$$

$$+\sin^{-1}\frac{2A_2-A_0-A_1}{2}\sin\frac{A-A_0}{2}\left(\sin\frac{A-A_1+2A_2}{2}-\sin\frac{A+2A_0+A_1-2A_2}{2}\right)=$$

$$=\sin A_0+2\sin\frac{A-A_0}{2}\cos\frac{A+A_0}{2}=\sin A=F(A).$$

Учитывая структуру многочлена (3.3), окончательно получим, что $L_2\left(\mathrm{P}_1;A\right)\equiv\mathrm{P}_1(A).$ Теорема 3.1 доказана.

§4. Тригонометрические интерполяционные формулы другого вида

Рассмотрим далее некоторые другие формулы тригонометрического интерполирования. На множествах квадратных матриц одна из известных формул матричного тригонометрического интерполирования вида

$$T_n(A)=\sum_{k=0}^{2n}\Psi_k(A)\Psi_k^{-1}(A_k)F(A_k),$$

где

$$\Psi_k(A) = \sin\frac{A-A_0}{2}\cdots\sin\frac{A-A_{k-1}}{2}\sin\frac{A-A_{k+1}}{2}\cdots\sin\frac{A-A_{2n}}{2},$$

существует, если матрицы $\sin\dfrac{A_\nu - A_k}{2}$ $(\nu \neq k)$ обратимы.

Построим интерполяционные матричные многочлены, когда существование обратных матриц $\sin^{-1}\dfrac{A_\nu - A_k}{2}$ не требуется. Пусть S_{lr} и S_{rl} есть $l\times r-$ и $r\times l-$матрицы $(r \geq l)$ следующих структур:

$$S_{lr} = \left[I_l \mid O_{l,r-l}\right] \text{ и } S_{rl} = \begin{bmatrix} I_l \\ O_{r-l,l} \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

где I_l – единичная матрица размера l, а $O_{l,r-l}$ и $O_{r-l,l}$ – нулевые матрицы указанных размеров. Очевидно, что $S_{lr}S_{rl} = I_l$.

Пусть $\widetilde{\Psi}_k(A) = \Psi_k(A)\Psi_k^+(A_k)$, где $\Psi_k^+(A_k)$ – псевдообратная матрица Мура–Пенроуза для матрицы $\Psi_k(A_k)$, которая, как известно, всегда существует и единственна [50] для любых матриц, а r_k и l_k – ранги матриц $\widetilde{\Psi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ соответственно $(k = 0,1,...,2n)$.

Т е о р е м а 4.1. *Пусть* $\widetilde{\Psi}_k(A_k) = B_kC_k$ *и* $F(A_k) = M_kN_k$ *– скелетные разложения матриц* $\widetilde{\Psi}_k(A_k)$ *и* $F(A_k)$ $(k = 0,1,\ldots,2n)$. *Тогда для матричного многочлена*

$$T_n(A) = \sum_{k=0}^{2n} F(A_k)N_k^+S_{l_kr_k}B_k^+\widetilde{\Psi}_k(A)C_k^+S_{r_kl_k}M_k^+F(A_k), \tag{4.2}$$

при условии, что $l_k \leq r_k$ $(k = 0,1,\ldots,2n)$, *выполняются интерполяционные условия*

$$T_n(A_\nu) = F(A_\nu) \ (\nu = 0,1,\ldots,2n). \tag{4.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $\widetilde{\Psi}_k(A_\nu) = \delta_{k\nu}\widetilde{\Psi}_k(A_k) = \delta_{k\nu}B_\nu C_\nu$, где $\delta_{k\nu}$ – символ Кронекера. При $A = A_\nu$ из равенства (4.2) следует, что

$$T_n(A_\nu) = F(A_\nu)N_\nu^+S_{l_\nu r_\nu}B_\nu^+B_\nu C_\nu C_\nu^+S_{r_\nu l_\nu}M_\nu^+F(A_\nu).$$

Из скелетного разложения матрицы $\widetilde{\Psi}_\nu(A_\nu)$ следует, что $B_\nu^+B_\nu = C_\nu C_\nu^+ = I_{r_\nu}$. Так как $S_{l_\nu r_\nu}S_{r_\nu l_\nu} = I_{l_\nu}$, а $N_\nu^+M_\nu^+ = F^+(A_\nu)$, то окончательно имеем $T_n(A_\nu) = F(A_\nu)F^+(A_\nu)F(A_\nu) = F(A_\nu)$. Теорема 4.1 доказана.

Для наглядности приведем линейный случай $(n=1)$ формулы (4.2). Для матричного многочлена

$$T_1(A)=\sum_{k=0}^{2} F(A_k)N_k^+ S_{l_k r_k} B_k^+ \widetilde{\Psi}_k(A) C_k^+ S_{r_k l_k} M_k^+ F(A_k), \tag{4.4}$$

где

$$\widetilde{\Psi}_0(A)=\Psi_0(A)\Psi_0^+(A_0)=\sin\frac{A-A_1}{2}\sin\frac{A-A_2}{2}\left[\sin\frac{A_0-A_1}{2}\sin\frac{A_0-A_2}{2}\right]^+,$$

$$\widetilde{\Psi}_1(A)=\Psi_1(A)\Psi_1^+(A_1)=\sin\frac{A-A_0}{2}\sin\frac{A-A_2}{2}\left[\sin\frac{A_1-A_0}{2}\sin\frac{A_1-A_2}{2}\right]^+,$$

$$\widetilde{\Psi}_2(A)=\Psi_2(A)\Psi_2^+(A_2)=\sin\frac{A-A_0}{2}\sin\frac{A-A_1}{2}\left[\sin\frac{A_2-A_0}{2}\sin\frac{A_2-A_1}{2}\right]^+,$$

$\widetilde{\Psi}_k(A_k)=B_kC_k$ и $F(A_k)=M_kN_k$ – скелетные разложения матриц $\widetilde{\Psi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ $(k=0,1,2)$, а матрицы $S_{l_k r_k}$ и $S_{r_k l_k}$ имеют структуру вида (4.1), при $l_k \le r_k$ $(k=0,1,2)$, выполняются интерполяционные условия

$$T_n(A_\nu)=F(A_\nu)\ \ (\nu=0,1,2).$$

Пример. Для матричной функции $F(A)=e^{\sin A}-e^{\sqrt{3}/2}I$, где I – единичная матрица второго порядка, и узлов

$$A_0=\frac{\pi}{12}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ \ A_1=\frac{\pi}{48}\begin{bmatrix}16 & 0\\ -3 & 28\end{bmatrix},\ \ A_2=\frac{\pi}{12}\begin{bmatrix}51 & 0\\ 10 & 11\end{bmatrix}$$

построим интерполяционный многочлен вида (4.4). Здесь $F(A)$ выбрана таким образом, чтобы выполнялись ограничения, накладываемые на ранги $l_k \le r_k$ $(k=0,1,2)$. В узлах функция $F(A)$ принимает значения

$$F(A_0)=\frac{\alpha_1-1}{4}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -4\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0{,}344 & -1{,}377\end{bmatrix},$$

$$F(A_1)=\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -4\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}0 & 0\\ -0{,}0624 & 0{,}250\end{bmatrix},$$

$$F(A_2)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4(\alpha_2-\alpha_1) & 0\\ \alpha_2-\alpha_4 & 4(\alpha_4-\alpha_1)\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}-0{,}349 & 0\\ 0{,}183 & -1{,}082\end{bmatrix},$$

где $\alpha_1=e^{\sqrt{3}/2}$, $\alpha_2=e^{1/\sqrt{2}}$, $\alpha_3=e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$, $\alpha_4=e^{\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$.

Матрицы $\sin\dfrac{A_0-A_1}{2}=\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{7\pi}{24}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -4\end{bmatrix}$, $F(A_0)$ и $F(A_1)$ не имеют обратных, поэтому будем строить их скелетные разложения и использовать аппарат псевдообратных матриц Мура–Пенроуза. В нашем случае

$$\widetilde{\Psi}_0(A_0)=\widetilde{\Psi}_1(A_1)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \widetilde{\Psi}_2(A_2)=I.$$

Скелетные разложения данных матриц, а также значений $F(A_k)$ имеют, соответственно, вид $\widetilde{\Psi}_k(A_k)=B_kC_k$ и $F(A_k)=M_kN_k$ $(k=0,1,2)$, где $C_j=B_j^T=$ $=M_j^T=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$ при $j=0,1,$ $B_2=C_2=M_2=I,$ матрицы N_0, N_1 совпадают со вторыми строками матриц $F(A_0)$ и $F(A_1)$, а $N_2=F(A_2)$. При этом, псевдообратные матрицы B_k^+, C_k^+, M_k^+ равны, соответственно, транспонированным матрицам B_k^T, C_k^T, M_k^T $(k=0,1,2)$, а

$$N_0^+=\frac{4}{17(\alpha_1-1)}\begin{bmatrix}1\\ -4\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}0{,}171\\ -0{,}683\end{bmatrix},\quad N_1^+=\frac{4}{17(\alpha_1-\alpha_3)}\begin{bmatrix}1\\ -4\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}-0{,}942\\ 3{,}768\end{bmatrix},$$

$$N_2^+=\frac{1}{4(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4)}\begin{bmatrix}4(\alpha_4-\alpha_1) & 0\\ \alpha_4-\alpha_2 & 4(\alpha_2-\alpha_1)\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}-2{,}863 & 0\\ -0{,}485 & -0{,}924\end{bmatrix}.$$

Как видно, ранги матриц $\widetilde{\Psi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ принимают значения

$$r_0=r_1=l_0=l_1=1,\ r_2=l_2=2.$$

Тогда $S_{l_jr_j}=S_{r_jl_j}=S_{11}=1$ при $j=0,1,$ а $S_{l_2r_2}=S_{r_2l_2}=S_{22}=I.$

Таким образом, в нашем случае многочлен (4.4) имеет вид

$$T_1(A)=\sum_{k=0}^{2}G_k\Psi_k(A)H_k, \tag{4.5}$$

где

$$G_0=G_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ G_2=I,\ H_0=\begin{bmatrix}-0{,}103 & 0{,}412\\ 0{,}412 & -1{,}648\end{bmatrix},$$

$$H_1=\begin{bmatrix}-0{,}037 & 0{,}148\\ 0{,}148 & -0{,}593\end{bmatrix},\ H_2=\begin{bmatrix}-20{,}504 & 0\\ -4{,}5803 & -2{,}183\end{bmatrix}.$$

В узлах A_0, A_1 и A_2 функции $\Psi_k(A)$ принимают значения

$$\Psi_0(A_0)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -0{,}197 & 0{,}787\end{bmatrix},\quad \Psi_1(A_1)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0{,}0992 & -0{,}397\end{bmatrix},$$

$$\Psi_2(A_2)=\begin{bmatrix}0{,}017 & 0\\ -0{,}120 & 0{,}496\end{bmatrix},\quad \Psi_k(A_i)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ (k\neq i,\ k,i=0,1,2).$$

Нетрудно проверить, что в данных узлах выполняются интерполяционные условия (4.3).

Нормы невязок в средних точках A_{01}, A_{02} и A_{12} $\left(A_{kj} = (A_k + A_j)/2\right.$ $\left.(k = 0,1;\ j = 1,2)\right)$ равны

$$\| F(A_{01}) - T_1(A_{01}) \|_2 = 0{,}187, \ \| F(A_{02}) - T_1(A_{02}) \|_2 = 0{,}082,$$

$$\| F(A_{12}) - T_1(A_{12}) \|_2 = 0{,}123.$$

Как видим, многочлен (4.5) достаточно хорошо приближает функцию $F(A)$.

§5. Интерполяционные многочлены, построенные по системам матричных экспонент

Построим формулу, аналогичную (4.2) из предыдущего параграфа, в которой в качестве базисных функций будут выбираться матричные экспоненты. В теории матричного интерполирования известна формула вида

$$L_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k(A)\Phi_k^{-1}(A_k)F(A_k),$$

где $\Phi_k(A) = (e^A - e^{A_0})\cdots(e^A - e^{A_{k-1}})(e^A - e^{A_{k+1}})\cdots(e^A - e^{A_n})$.

Пусть, как и ранее, S_{lr} и S_{rl} – прямоугольные матрицы, имеющие структуру вида (4.1). Положим $\tilde{\Phi}_k(A) = \Phi_k(A)\Phi_k^+(A_k)$, где $\Phi_k^+(A_k)$ – псевдообратная матрица Мура–Пенроуза для матрицы $\Phi_k(A_k)$, а r_k и l_k – ранги матриц $\tilde{\Phi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ соответственно.

Теорема 5.1. *Пусть* $\tilde{\Phi}_k(A_k) = B_k C_k$ *и* $F(A_k) = M_k N_k$ *– скелетные разложения матриц* $\tilde{\Phi}_k(A_k)$ *и* $F(A_k)$ $(k = 0,1,\ldots,n)$. *Тогда для матричного многочлена*

$$L_n(A) = \sum_{k=0}^{n} F(A_k)N_k^+ S_{l_k r_k} B_k^+ \tilde{\Phi}_k(A) C_k^+ S_{r_k l_k} M_k^+ F(A_k),$$

при условии, что $l_k \le r_k$ $(k = 0,1,\ldots,n)$, *выполняются условия*

$$L_n(A_\nu) = F(A_\nu) \ \ (\nu = 0,1,\ldots,n).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1.

Рассмотрим далее формулу, содержащую дифференциалы Гато первого порядка интерполируемой функции.

Теорема 5.2. *Пусть* $A_k = A_k(t)$ $(k = 0,1,2)$ *– узлы интерполирования, причем существуют матрицы* $\left[2e^{A_1+A_2} - e^{2A_1} - 2e^{A_0+A_2} + e^{2A_0}\right]^{-1}$, $\left[2e^{2A_2} - e^{A_1+A_2} - e^{A_0+A_2}\right]^{-1}$ *для любого* $t \in T \subset R$. *Тогда матричный многочлен*

$$L_2(A) = F(A_0) + \int_0^1 \delta F\left[A_0 + \tau(A_1 - A_0); l_{10}(A)(A_1 - A_0)\right] d\tau + \delta F\left[A_2; l_{11}(A)\right], \tag{5.1}$$

где

$$l_{10}(A) = \left[2e^{A_1 + A_2} - e^{2A_1} - 2e^{A_0 + A_2} + e^{2A_0}\right]^{-1}\left[2e^{A + A_2} - e^{2A} - 2e^{A_0 + A_2} + e^{2A_0}\right],$$

$$l_{11}(A) = \left[2e^{2A_2} - e^{A_1 + A_2} - e^{A_0 + A_2}\right]^{-1}\left[e^{2A} - e^{A + A_0} - e^{A + A_1} + e^{A_0 + A_1}\right],$$

удовлетворяет интерполяционным равенствам

$$L_2(A_i) = F(A_i) \ \ (i = 0,1); \quad \delta L_2[A_2; H] = \delta F[A_2; H], \tag{5.2}$$

при условии, что узлы A_0, A_1 *и* A_2 *перестановочны с матрицей H.*

Если матрицы A, A_k $(k = 0,1,2)$ *попарно перестановочны, то формула* (5.1) *инвариантна относительно многочленов вида*

$$\mathrm{P}_2(A) = C_0(s) + \int_T C_1(s,t) e^{A(t)} D_1(s,t) dt + \int_T C_2(s,t) e^{2A(t)} D_2(s,t) dt, \tag{5.3}$$

где $C_0(s)$, $C_k(s,t)$, $D_k(s,t)$ $(k = 1,2;\ s \in \mathbb{R}^m,\ t \in T \subset \mathbb{R})$ *– заданные матрицы.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1. В силу того, что $l_{10}(A_0) = l_{11}(A_0) = l_{11}(A_1) = 0$, $l_{10}(A_1) = I$, будут выполняться также условия $L_2(A_0) = F(A_0)$, $L_2(A_1) = F(A_1)$.

Далее, дифференциал Гато полинома (5.1) в точке $A = A(t)$ по направлению H имеет вид

$$\delta L_2[A; H] = \int_0^1 \delta F\left[A_0 + \tau(A_1 - A_0); \delta l_{10}[A; H](A_1 - A_0)\right] d\tau + \delta F\left[A_2; \delta l_{11}[A; H]\right],$$

где, при условии перестановочности матриц A, A_0, A_1 и A_2 с матрицей H, имеют место равенства

$$\delta l_{10}[A; H] = \left[2e^{A_1 + A_2} - e^{2A_1} - 2e^{A_0 + A_2} + e^{2A_0}\right]^{-1}\left[2e^{A + A_2} - 2e^{2A}\right] H,$$

$$\delta l_{11}[A; H] = \left[2e^{2A_2} - e^{A_1 + A_2} - e^{A_0 + A_2}\right]^{-1}\left[2e^{2A} - e^{A + A_0} - e^{A + A_1}\right] H.$$

Отсюда следует, что $\delta L_2[A_2; H] = \delta F[A_2; H]$. Таким образом, интерполяционные условия (5.2) выполняются.

Покажем теперь, что формула (5.1) инвариантна относительно многочленов вида (5.3). При $F(A) = C_0(s)$ это очевидно. Вычислим для $F(A) = e^{A(t)}$ второе слагаемое в равенстве (5.1). Поскольку

$$\delta F\left[A_0 + \tau(A_1 - A_0); l_{10}(A)(A_1 - A_0)\right] = e^{A_0 + \tau(A_1 - A_0)} l_{10}(A)(A_1 - A_0),$$

то в силу перестановочности матриц A_0 и $\tau(A_1-A_0)$ оно примет вид

$$\int_0^1 \delta F\left[A_0+\tau(A_1-A_0);l_{10}(A)(A_1-A_0)\right]d\tau = e^{A_0}\int_0^1 e^{\tau(A_1-A_0)}d\tau\, l_{10}(A)(A_1-A_0)=$$

$$=e^{A_0}\left(e^{A_1-A_0}-I\right)l_{10}(A)=[e^{A_1}-e^{A_0}]l_{10}(A).$$

И так как $\delta F\left[A_2;l_{11}(A)\right]=e^{A_2}l_{11}(A)$, то будем иметь

$$L_2(F;A)=e^{A_0}+[e^{A_1}-e^{A_0}]l_{10}(A)+e^{A_2}l_{11}(A). \tag{5.4}$$

Матрицы $l_{10}(A)$ и $l_{11}(A)$ можно записать в виде

$$l_{10}(A)=\left[e^{A_1}-e^{A_0}\right]^{-1}\left[2e^{A_2}-e^{A_1}-e^{A_0}\right]^{-1}\left[e^{A}-e^{A_0}\right]\left[2e^{A_2}-e^{A}-e^{A_0}\right], \tag{5.5}$$

$$l_{11}(A)=e^{-A_2}\left[2e^{A_2}-e^{A_1}-e^{A_0}\right]^{-1}\left[e^{A}-e^{A_0}\right]\left[e^{A}-e^{A_1}\right]. \tag{5.6}$$

Тогда из (5.4) – (5.6) следует, что

$$L_2(F;A)=e^{A_0}+\left[2e^{A_2}-e^{A_1}-e^{A_0}\right]^{-1}\left[e^{A}-e^{A_0}\right]\left[2e^{A_2}-e^{A}-e^{A_0}+e^{A}-e^{A_1}\right]=$$

$$=e^{A_0}+e^{A}-e^{A_0}=e^{A}=F(A).$$

Аналогично для функции $F(A)=e^{2A(t)}$ справедлив ряд равенств

$$\delta F\left[A_0+\tau(A_1-A_0);l_{10}(A)(A_1-A_0)\right]=2e^{2\left(A_0+\tau(A_1-A_0)\right)}l_{10}(A)(A_1-A_0),$$

$$\int_0^1 \delta F\left[A_0+\tau(A_1-A_0);l_{10}(A)(A_1-A_0)\right]d\tau=[e^{2A_1}-e^{2A_0}]l_{10}(A),$$

$$\delta F\left[A_2;l_{11}(A)\right]=2e^{2A_2}l_{11}(A).$$

Тогда, учитывая соотношения (5.5) и (5.6), будем иметь

$$L_2(F;A)=e^{2A_0}+[e^{2A_1}-e^{2A_0}]l_{10}(A)+2e^{2A_2}l_{11}(A)=e^{2A_0}+$$

$$+\left[2e^{A_2}-e^{A_1}-e^{A_0}\right]^{-1}\left[e^{A}-e^{A_0}\right]\left([2e^{A_2}-e^{A}-e^{A_0}][e^{A_1}+e^{A_0}]+2[e^{A}-e^{A_1}]e^{A_2}\right)=$$

$$=e^{2A_0}+\left[2e^{A_2}-e^{A_1}-e^{A_0}\right]^{-1}\left[e^{A}-e^{A_0}\right]\left[e^{A}+e^{A_0}\right]\left[2e^{A_2}-e^{A_1}-e^{A_0}\right]=$$

$$=e^{2A_0}+e^{2A}-e^{2A_0}=e^{2A}=F(A).$$

Рассматривая структуру полинома (5.3), окончательно получим, что $L_2\left(\mathrm{P}_2;A\right)\equiv \mathrm{P}_2(A)$. Теорема 5.2 доказана.

Приведем еще одну формулу второго порядка, основанную на использовании фундаментальных интерполяционных многочленов экспоненциального типа и содержащую значения дифференциалов Гато первого порядка.

Т е о р е м а 5.3. *Пусть* $A_k = A_k(t)$ $(k = 0,1,2)$ *– узлы интерполирования, причем существуют матрицы* $\left[e^{2A_1} - e^{A_0+A_1} - e^{A_1+A_2} + e^{A_0+A_2}\right]^{-1}$, $\left[e^{2A_2} - e^{A_0+A_2} - e^{A_1+A_2} + e^{A_0+A_1}\right]^{-1}$ *для любого* $t \in T \subset \mathbb{R}$. *Тогда матричный многочлен*

$$L_2(A) = F(A_0) + \int_0^1 \delta F\left[A_0 + \tau(A_1 - A_0);\, l_{10}(A)(A_1 - A_0)\right]d\tau +$$

$$+ \int_0^1 \delta F\left[A_0 + \tau(A_2 - A_0);\, l_{11}(A)(A_2 - A_0)\right]d\tau, \tag{5.7}$$

где

$$l_{10}(A) = \left[e^{2A_1} - e^{A_0+A_1} - e^{A_1+A_2} + e^{A_0+A_2}\right]^{-1}\left[e^{2A} - e^{A+A_0} - e^{A+A_2} + e^{A_0+A_2}\right],$$

$$l_{11}(A) = \left[e^{2A_2} - e^{A_0+A_2} - e^{A_1+A_2} + e^{A_0+A_1}\right]^{-1}\left[e^{2A} - e^{A+A_0} - e^{A+A_1} + e^{A_0+A_1}\right],$$

удовлетворяет интерполяционным условиям

$$L_2(A_i) = F(A_i) \;\; (i = 0,1,2). \tag{5.8}$$

Если матрица A и узлы A_0, A_1, A_2 *попарно перестановочны, то формула* (5.7) *инвариантна относительно многочленов вида*

$$P_2(A) = C_0(s) + \int_T C_1(s,t)e^{A(t)}D_1(s,t)dt + \int_T C_2(s,t)e^{2A(t)}D_2(s,t)dt, \tag{5.9}$$

где $C_0(s)$, $C_1(s,t)$, $C_2(s,t)$, $D_1(s,t)$, $D_2(s,t)$ $(s \in \mathbb{R}^m,\ t \in T \subset \mathbb{R})$ *– заданные матрицы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия (5.8) имеют место, так как $l_{10}(A_0) = l_{10}(A_2) = = l_{11}(A_0) = l_{11}(A_1) = 0$, а $l_{10}(A_1) = l_{11}(A_2) = I$.

Далее покажем инвариантность формулы (5.7) относительно многочленов вида (5.9). Как и раньше, инвариантность для $F(A) = C_0(s)$ очевидна. Вычислим для $F(A) = e^{A(t)}$ второе слагаемое в равенстве (5.7). Поскольку

$$\delta F\left[A_0 + \tau(A_1 - A_0);\, l_{10}(A)(A_1 - A_0)\right] = e^{A_0 + \tau(A_1 - A_0)} l_{10}(A)(A_1 - A_0),$$

то в силу перестановочности матриц A_0 и $\tau(A_1 - A_0)$ оно примет вид

$$\int_0^1 \delta F\left[A_0 + \tau(A_1 - A_0);\, l_{10}(A)(A_1 - A_0)\right]d\tau = \left(e^{A_1} - e^{A_0}\right)l_{10}(A).$$

Так же можно показать, что

$$\int_0^1 \delta F\left[A_0+\tau(A_2-A_0);\, l_{11}(A)(A_2-A_0)\right]d\tau=\left(e^{A_2}-e^{A_0}\right)l_{11}(A).$$

Следовательно,

$$L_2(F;A)=e^{A_0}+\left(e^{A_1}-e^{A_0}\right)l_{10}(A)+\left(e^{A_2}-e^{A_0}\right)l_{11}(A)=e^{A}=F(A).$$

Функции $l_{10}(A)$ и $l_{11}(A)$ можно представить в виде

$$l_{10}(A)=\left[e^{A_1}-e^{A_0}\right]^{-1}\left[e^{A_1}-e^{A_2}\right]^{-1}\left[e^{A}-e^{A_0}\right]\left[e^{A}-e^{A_2}\right], \tag{5.10}$$

$$l_{11}(A)=\left[e^{A_2}-e^{A_0}\right]^{-1}\left[e^{A_2}-e^{A_1}\right]^{-1}\left[e^{A}-e^{A_0}\right]\left[e^{A}-e^{A_1}\right], \tag{5.11}$$

тогда

$$L_2(F;A)=e^{A_0}+\left[e^{A_1}-e^{A_2}\right]^{-1}\left[e^{A}-e^{A_0}\right]\left(e^{A}-e^{A_2}-e^{A}+e^{A_1}\right)=$$
$$=e^{A_0}+e^{A}-e^{A_0}=F(A).$$

Для функции $F(A)=e^{2A}$ будут справедливы равенства

$$\int_0^1 \delta F\left[A_0+\tau(A_1-A_0);\, l_{10}(A)(A_1-A_0)\right]d\tau=\left(e^{2A_1}-e^{2A_0}\right)l_{10}(A), \tag{5.12}$$

$$\int_0^1 \delta F\left[A_0+\tau(A_2-A_0);\, l_{11}(A)(A_2-A_0)\right]d\tau=\left(e^{2A_2}-e^{2A_0}\right)l_{11}(A). \tag{5.13}$$

Учитывая далее равенства (5.10) – (5.13) будем иметь

$$L_2(F;A)=e^{2A_0}+\left(e^{2A_1}-e^{2A_0}\right)l_{10}(A)+\left(e^{2A_2}-e^{2A_0}\right)l_{11}(A)=e^{2A_0}+$$
$$+\left[e^{A_1}-e^{A_2}\right]^{-1}\left[e^{A}-e^{A_0}\right]\left([e^{A_1}+e^{A_0}][e^{A}-e^{A_2}]-[e^{A_2}+e^{A_0}][e^{A}-e^{A_1}]\right)=$$
$$=e^{2A_0}+\left[e^{A_1}-e^{A_2}\right]^{-1}\left[e^{A}-e^{A_0}\right]\left[e^{A}+e^{A_0}\right]\left[e^{A_1}-e^{A_2}\right]=$$
$$=e^{2A_0}+e^{2A}-e^{2A_0}=e^{2A}=F(A).$$

Итак, окончательно получаем, что $L_2\left(\mathrm{P}_2;A\right)=\mathrm{P}_2(A)$.

Ряд других интерполяционных формул для функций от матриц получен также в работах [45, 47, 48].

ГЛАВА V

Формулы линейной операторной интерполяции с произвольными входными данными

Построение интерполяционных операторных многочленов первой степени по аналогии со случаем скалярных функций основано обычно на использовании двух узлов интерполирования [24, 25]. Однако для приложений важно, чтобы при приближенной замене нелинейного оператора линейным оператором интерполяционного типа совпадения значений этих операторов было по возможности в наибольшем числе различных точек. Это позволяет увеличивать точность приближения, что является одной из важнейших прикладных задач теории аппроксимации.

Другой класс интерполяционных формул также весьма полезных при решении практических задач являются формулы, содержащие произвольные числовые величины или произвольные функции. Наличие в приближенных формулах произвольных параметров, позволяет в каждом конкретном случае выбрать их с целью улучшения отдельных свойств численных алгоритмов, построенных на основе этого вида формул.

§1. Интерполяционные формулы, содержащие произвольные функции

Рассмотрим сначала случай, когда интерполируемый оператор зависит от одной функциональной переменной. Пусть $C^{(n)}(T)$ – пространство непрерывно дифференцируемых n раз на $T \subset \mathbb{R}$ функций $x(t)$ и оператор $F(x): C^{(n)}(T) \to Y$, где Y также некоторое функциональное пространство.

Введем обозначение

$$S_{nm}(h) = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \frac{h^{(k)}(t_i)}{x_1^{(k)}(t_i) - x_0^{(k)}(t_i)},$$

где $t_0, t_1, \dots, t_m$ – некоторые фиксированные точки отрезка T; $x_0(t)$, $x_1(t)$, $h(t) \in C^{(n)}(T)$. Заметим, что сумма $S_{nm}(h)$ не зависит от переменной t.

Линейный по переменной h оператор $F[x_0, x_1]h$ на $C^{(n)}(T)$ вида

$$F[x_0, x_1]h = \left[F(x_1) - F(x_0)\right] S_{nm}(h) + \int_0^1 \delta F[g(\cdot,\tau); h(\cdot) - (x_1(\cdot) - x_0(\cdot)) S_{nm}(h)]\, d\tau, \tag{1.1}$$

где $g(t,\tau)$ – произвольная заданная на $T \times [0,1]$ функция такая, что указанный выше интеграл существует, а $\delta F[x; h]$ – дифференциал Гато оператора F в точке

x по любому направлению h, является, что несложно проверяется, операторной разделенной разностью для $F(x)$ с узлами x_0 и x_1.

Обозначим через $\mathrm{P}_1(x)$ операторный многочлен на $C^{(n)}(T)$ первой степени вида

$$\mathrm{P}_1(x) = c_0(t) + \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} c_{kj}(t)x^{(k)}(t_j) + \sum_{\nu=0}^{n}\int_T p_\nu(t,s)x^{(\nu)}(s)ds, \tag{1.2}$$

где $p_\nu(t,s)$ – функции, для которых соответствующие интегралы в данном равенстве существуют, $c_0(t)$ и $c_{kj}(t)$ – произвольные функции $(t,s\in T)$.

Теорема 1.1. *Операторный многочлен*

$$L_1(x) = F(x_0) + F[x_0,x_1](x-x_0), \tag{1.3}$$

где $F[x_0,x_1]$ *– оператор разделенной разности* (1.1), *будет для* $F(x)$ *интерполяционным многочленом первой степени относительно узлов* x_0 *и* x_1. *Формула* (1.3) *точна для многочленов вида* (1.2).

Доказательство. Очевидно, что при $x = x_0$ второе слагаемое в правой части (1.3) обращается в ноль. Далее, так как $S_{nm}(x_1-x_0)=1$, то

$$F[x_0,x_1](x_1-x_0) = F(x_1)-F(x_0).$$

Таким образом, многочлен $L_1(x)$ совпадает с $F(x)$ в узлах x_0 и x_1.

Покажем далее, что формула (1.3) точна для операторов $F(x)$ вида (1.2). Если $F(x)=x^{(k)}(t_j)$ $(j=0,1,\dots,m)$ или $F(x)=x^{(k)}(t)$, $t\in T$ $(j=0,1,\dots,m;$ $k=0,1,\dots,n)$, то $\delta F[x;h]=h^{(k)}(t_j)$ или $\delta F[x;h]=h^{(k)}(t)$ соответственно для любого $h(t)\in C^{(n)}(T)$.

Так как в нашем случае $h(t)=x(t)-x_0(t)-[x_1(t)-x_0(t)]S_{nm}(x-x_0)$, то для $F(x)=x^{(k)}(t_j)$, в силу формулы (1.1), будем иметь

$$L_1(x) = x_0^{(k)}(t_j) + \left[x_1^{(k)}(t_j)-x_0^{(k)}(t_j)\right]S_{nm}(x-x_0) +$$

$$+x^{(k)}(t_j)-x_0^{(k)}(t_j)-\left[x_1^{(k)}(t_j)-x_0^{(k)}(t_j)\right]S_{nm}(x-x_0) = x^{(k)}(t_j).$$

Аналогично доказывается этот факт и для $F(x)=x^{(\nu)}(t)$, где t – произвольная точка из T. Из выше изложенного следует справедливость теоремы 1.1.

Рассмотрим далее в качестве примера определенный на $C^{(n)}(T)$ дифференциальный оператор

$$F(x) = f\left(t, x(t), x^{(1)}(t), x^{(2)}(t),\dots, x^{(n)}(t)\right), \tag{1.4}$$

где $x^{(k)}(t)=\dfrac{d^k x(t)}{dt^k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$, а функция $y=f(t,u_0,u_1,\ldots,u_n)$ переменных $t,u_0,u_1,\ldots,u_n$ задана на прямоугольнике $\Omega=T\times T_0\times T_1\times\cdots\times T_n$, T_i – множества числовой оси $(i=0,1,\ldots,n)$.

Для этого оператора дифференциал Гато $\delta F[x;h]$ задается равенством

$$\delta F[x;h]=\frac{\partial f}{\partial x}h(t)+\frac{\partial f}{\partial x'}h'(t)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}h^{(n)}(t)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x^{(k)}}f\bigl(t,x(t),x'(t),\ldots,x^{(n)}(t)\bigr)h^{(k)}(t) \qquad (1.5)$$

и, соответственно, интерполяционный многочлен (1.3) для оператора (1.4) может быть записан в виде

$$L_1(x)=F(x_0)+\frac{F(x_1)-F(x_0)}{(m+1)(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}\frac{x^{(k)}(t_i)-x_0^{(k)}(t_i)}{x_1^{(k)}(t_i)-x_0^{(k)}(t_i)}+$$

$$+\int_0^1\delta F\left[g(\cdot,\tau);x(\cdot)-x_0(\cdot)-\frac{x_1(\cdot)-x_0(\cdot)}{(n+1)(m+1)}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}\frac{x^{(k)}(t_i)-x_0^{(k)}(t_i)}{x_1^{(k)}(t_i)-x_0^{(k)}(t_i)}\right]d\tau, \qquad (1.6)$$

где $x_0(t)$ и $x_1(t)$ – узлы интерполирования, t_i – фиксированные точки отрезка $T\subset\mathbb{R}$. Здесь дифференциал Гато (1.5) берется в точке $x(t)=g(t,\tau)$, где произвольная на $T\times[0,1]$ функция $g(t,\tau)\in C^{(n)}(T)$ при фиксированном $\tau\in[0,1]$, т.е. непрерывно дифференцируема n раз по переменной t, а $h(t)=x(t)-x_0(t)-\bigl[x_1(t)-x_0(t)\bigr]S_{nm}(x-x_0)$. В частном случае при $n=0$ формула (1.6) была получена в работе [51].

Построим формулу, аналогичную (1.3), для операторов $F(x,y)$ двух переменных, где $x(t)\in C^{(n_1)}(T)$, $y(t)\in C^{(n_2)}(T)$ $(T\subset\mathbb{R})$. Как и раньше пусть заданы фиксированные на T точки $t_0,t_1,\ldots,t_m$. Через $S_{n_1m}(x)$ и $S_{n_2m}(y)$ обозначим соответственно суммы

$$S_{n_1m}(x)=\frac{1}{(n_1+1)(m+1)}\sum_{k=0}^{n_1}\sum_{i=0}^{m}\frac{x^{(k)}(t_i)-x_0^{(k)}(t_i)}{x_1^{(k)}(t_i)-x_0^{(k)}(t_i)},$$

$$S_{n_2m}(y)=\frac{1}{(n_2+1)(m+1)}\sum_{k=0}^{n_2}\sum_{i=0}^{m}\frac{y^{(k)}(t_i)-y_0^{(k)}(t_i)}{y_1^{(k)}(t_i)-y_0^{(k)}(t_i)},$$

где $\bigl(x_0(t),y_0(t)\bigr)$ и $\bigl(x_1(t),y_1(t)\bigr)$ – узлы интерполирования таковы, что $x_1^{(k)}(t_i)\neq x_0^{(k)}(t_i)$, $y_1^{(k)}(t_i)\neq y_0^{(k)}(t_i)$ для указанных здесь значений k и i. Введем также вектор $h(t)=\bigl(h_1(t),h_2(t)\bigr)$ с координатами

$$h_1(t) = x(t) - x_0(t) - [x_1(t) - x_0(t)] S_{n_1 m}(x),$$
$$h_2(t) = y(t) - y_0(t) - [y_1(t) - y_0(t)] S_{n_2 m}(y).$$

Обозначим через $\mathrm{P}_1(x, y)$ заданный на $C^{(n_1)}(T) \times C^{(n_2)}(T)$ функциональный многочлен вида

$$\mathrm{P}_1(x, y) = a(t) + \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{m} a_{kj}(t) x^{(k)}(t_j) + \sum_{k=0}^{n_2} \sum_{j=0}^{m} b_{kj}(t) y^{(k)}(t_j) +$$
$$+ \int_T \left[c_{\nu_1}(t, s) x^{(\nu_1)}(s) + c_{\nu_2}(t, s) y^{(\nu_2)}(s) \right] ds, \qquad (1.7)$$

где $a(t), a_{kj}(t), b_{kj}(t), c_{\nu_1}(t, s), c_{\nu_2}(t, s)$ – произвольно заданные функции, а ν_1 и ν_2 – неотрицательные целые числа $(0 \le \nu_1 \le n_1,\ 0 \le \nu_2 \le n_2)$.

Теорема 1.2. *Оператор*

$$L_1(x, y) = F(x_0, y_0) + [F(x_1, y_1) - F(x_0, y_1)] S_{n_1 m}(x) +$$
$$+ [F(x_0, y_1) - F(x_0, y_0)] S_{n_2 m}(y) + \int_0^1 \delta F[g(\cdot, \tau); h(\cdot)] d\tau, \qquad (1.8)$$

где $g(t, \tau) = (g_1(t, \tau), g_2(t, \tau))$ *– произвольно заданный на* $T \times [0,1]$ *вектор, будет интерполяционным многочленом первой степени для* $F(x, y)$ *и узлов* (x_0, y_0), (x_1, y_1). *Формула* (1.8) *инвариантна относительно функциональных многочленов вида* (1.7).

Доказательство. Так как

$$S_{n_1 m}(x_0) = S_{n_2 m}(y_0) = 0,\ S_{n_1 m}(x_1) = S_{n_2 m}(y_1) = 1,$$

и вектор $h(t) \equiv 0$ в узлах интерполирования, то очевидно, что соотношения $L_1(x_0, y_0) = F(x_0, y_0)$ и $L_1(x_1, y_1) = F(x_1, y_1)$ имеют место.

Если $F(x, y) = x^{(\nu_1)}(t_j)$, $F(x, y) = y^{(\nu_2)}(t_j)$ или $F(x, y) = x^{(\nu_1)}(t)$, $F(x, y) = y^{(\nu_2)}(t)$ $(j = 0, 1, \ldots, m;\ \nu_k = 0, 1, \ldots, n_k;\ k = 1, 2)$, то $\delta F[x, y; h] = h_1^{(\nu_1)}(t_j)$, $\delta F[x, y; h] = h_2^{(\nu_2)}(t_j)$, а $\delta F[x, y; h] = h_1^{(\nu_1)}(t)$, $\delta F[x, y; h] = h_2^{(\nu_2)}(t)$ соответственно. Учитывая эти равенства и структуру вектора $h(t)$, легко также проверяется точность формулы (1.8) для указанных выше линейных операторов. Например, если $F(x, y) = x^{(\nu)}(t)$, то третье слагаемое в (1.8) обращается в ноль, а интегральное слагаемое будет равно

$$x^{(\nu)}(t) - x_0^{(\nu)}(t) - \left[x_1^{(\nu)}(t) - x_0^{(\nu)}(t) \right] S_{n_1 m}(x),$$

которое в сумме с первыми двумя слагаемыми равенства (1.8) дает $x^{(\nu)}(t)$.

Рассмотрим далее построение аналогичной формулы для случая операторов от n переменных. Пусть X_k – множество гладких функций $x_k(t)\in C^{(n_k)}(T)$ $(k=1,2,\dots,n)$, определенных на $T\subset\mathbb{R}$, $X=X_1\times X_2\times\dots\times X_n$ – декартово произведение этих множеств и оператор $F:X\to Y$, где Y – также некоторое множество функций $y(t)$, $t\in T\subset\mathbb{R}$. Будем предполагать, что оператор $F(x)=F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ дифференцируем по Гато на X, т.е. $\delta F[x;h]=\sum_{k=1}^{n}\delta_{x_k}F[x;h_k]$, где $h=(h_1,h_2,\dots,h_n)\in X$, $\delta_{x_k}F[x;h_k]$ – частный дифференциал Гато этого оператора по переменной x_k и направлению h_k $(x_k,\ h_k\in X_k,\ k=1,2,\dots,n)$.

Введем далее ряд обозначений. Пусть заданы узлы интерполирования $\bar{x}_0(t)=\left(x_{1,0}(t),x_{2,0}(t),\dots,x_{n,0}(t)\right)$, $\bar{x}_1(t)=\left(x_{1,1}(t),x_{2,1}(t),\dots,x_{n,1}(t)\right)$ и известны также значения оператора $F(x)$ в точках $\tilde{x}_k(t)=\left(x_{1,0}(t),x_{2,0}(t),\dots,x_{k,0}(t),x_{k+1,1}(t),\dots,x_{n,1}(t)\right)$ для $k=0,1,\dots,n$, где $\tilde{x}_0(t)=\bar{x}_1(t)$, а $\tilde{x}_n(t)=\bar{x}_0(t)$.

Пусть

$$\sigma_{n_\nu m}(x_\nu)=\frac{1}{(n_\nu+1)(m+1)}\sum_{k=0}^{n_\nu}\sum_{i=0}^{m}\frac{x_\nu^{(k)}(t_i)-x_{\nu,0}^{(k)}(t_i)}{x_{\nu,1}^{(k)}(t_i)-x_{\nu,0}^{(k)}(t_i)},$$

где t_i – фиксированные точки из T, и вектор $h(t)=\left(h_1(t),h_2(t),\dots,h_n(t)\right)$ с координатами $h_k(t)=x_k(t)-x_{k,0}(t)-\left[x_{k,1}(t)-x_{k,0}(t)\right]\sigma_{n_k m}(x_k)$ $(k=1,2,\dots,n)$.

Пусть $\mathrm{P}_1(x)$ – операторный многочлен на X вида

$$\mathrm{P}_1(x)=a(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n_k}\sum_{j=0}^{m}b_{ikj}(t)x_i^{(k)}(t_j)+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{n_k}\int_T c_{\nu k}(t,s)x_\nu^{(k)}(s)ds, \tag{1.9}$$

где $a(t)$, $b_{ikj}(t)$ – заданные функции, $c_{\nu k}(t,s)$ – функции, для которых существуют интегралы в (1.9), а $x_\nu^{(k)}(s)$ – k-ая производная ν-ой компоненты вектора $x(s)=\left(x_1(s),x_2(s),\dots,x_n(s)\right)$, n_k – любое неотрицательное целое число, $t,\ s,\ t_0,t_1,\dots,t_m\in T$.

Теорема 1.3. *Для функционального многочлена*

$$L_1(x)=F(\bar{x}_0)+\sum_{\nu=1}^{n}\left[F(\tilde{x}_{\nu-1})-F(\tilde{x}_\nu)\right]\sigma_{n_\nu m}(x_\nu)+\int_0^1\delta F[g(\cdot,\tau);h(\cdot)]d\tau, \tag{1.10}$$

где $g(t,\tau)=\left(g_1(t,\tau),g_2(t,\tau),\dots,g_n(t,\tau)\right)$ *– заданный на* $T\times[0,1]$ *любой вектор, для которого интеграл в* (1.10) *существует,* x_ν *–* ν*-я компонента вектора*

$x(t)$, *выполняются интерполяционные условия* $L_1(\bar{x}_0) = F(\bar{x}_0)$, $L_1(\bar{x}_1) = F(\bar{x}_1)$. *Формула* (1.10) *точна для функциональных многочленов вида* (1.9).

Доказательство. Имеют место следующие равенства: $\sigma_{n_\nu m}(x_{\nu,0}) = 0$, $\sigma_{n_\nu m}(x_{\nu,1}) = 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Кроме того, вектор $h(t) \equiv 0$ в узлах $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_1$. Из этого следует, что $L_1(\bar{x}_0) = F(\bar{x}_0)$ и $L_1(\bar{x}_1) = F(\bar{x}_1)$.

Если $F(x) = x_i^{(k)}(t_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, m;$ $k = 0, 1, \ldots, n_i;$ $i = 1, 2, \ldots, n)$, то $\delta F[x; h] = h_i^{(k)}(t_j)$. Учитывая структуру компонент вектора $h(t)$, получим

$$h_i^{(k)}(t_j) = x_i^{(k)}(t_j) - x_{i,0}^{(k)}(t_j) - \left[x_{i,1}^{(k)}(t_j) - x_{i,0}^{(k)}(t_j)\right]\sigma_{n_i m}(x_i). \tag{1.11}$$

Далее

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left[F(\tilde{x}_{\nu-1}) - F(\tilde{x}_\nu)\right]\sigma_{n_\nu m}(x_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \Big[F\big(x_{1,0}(t), x_{2,0}(t), \ldots, x_{\nu-1,0}(t), x_{\nu,1}(t), \ldots, x_{n,1}(t)\big) -$$

$$-F\big(x_{1,0}(t), x_{2,0}(t), \ldots, x_{\nu,0}(t), x_{\nu+1,1}(t), \ldots, x_{n,1}(t)\big)\Big]\sigma_{n_\nu m}(x_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{i-1} \left[x_{i,1}^{(k)}(t_j) - x_{i,1}^{(k)}(t_j)\right]\sigma_{n_\nu m}(x_\nu) + \left[x_{i,1}^{(k)}(t_j) - x_{i,0}^{(k)}(t_j)\right]\sigma_{n_i m}(x_i) +$$

$$+ \sum_{\nu=i+1}^{n} \left[x_{i,0}^{(k)}(t_j) - x_{i,0}^{(k)}(t_j)\right]\sigma_{n_\nu m}(x_\nu) = \left[x_{i,1}^{(k)}(t_j) - x_{i,0}^{(k)}(t_j)\right]\sigma_{n_i m}(x_i). \tag{1.12}$$

Тогда из соотношений (1.10) – (1.12) следует, что $L_1(x) = x_i^{(k)}(t_j)$.

Аналогично доказывается это равенство и для $F(x) = x_\nu^{(k)}(s)$ $(k = 0, 1, \ldots, n_\nu;$ $\nu = 1, 2, \ldots, n)$ и s – произвольная точка из T. Таким образом, формула (1.10) точна для многочленов вида (1.9).

Ряд интерполяционных формул другого вида для операторов, заданных на функциональных пространствах, получен в работах [49, 52].

§2. Формулы линейной интерполяции с произвольным числом узлов

Общая схема построения на основе известных интерполяционных многочленов фиксированной степени других интерполяционных многочленов той же степени, но с большим числом узлов, предлагается в приведенной далее теореме.

В этом пункте будем рассматривать интерполирование операторов, зависящих от одной переменной $x \in X$, где X – некоторое линейное пространство, со значением в Y.

Теорема 2.1. *Пусть $L_k(F;x)$ – интерполяционный для $F(x)$ операторный многочлен степени k с узлами $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Тогда для многочлена той же степени*

$$\widetilde{L}_k(F;x) = L_k(F;x) + \sum_{\nu=k+1}^{n} r_k(x_\nu) < \varphi_\nu, x >, \tag{2.1}$$

где $r_k(x) = F(x) - L_k(F;x)$, а φ_ν – линейный на X функционал такой, что $< \varphi_\nu, x_i >= \delta_{\nu i}$, где $\delta_{\nu i}$ – символ Кронекера $(k+1 \le \nu \le n,\ 0 \le i \le n)$, будут выполняться интерполяционные условия $\widetilde{L}_k(x_i) = F(x_i)$ для $i = 0,1,2,\ldots,n$. Если интерполяционный многочлен $L_k(F,x)$ точен для какого-либо оператора F, то и многочлен $\widetilde{L}_k(F;x)$ будет также точным для этого оператора.

Доказательство. Совпадение $\widetilde{L}_k(F;x)$ с $F(x)$ при $x = x_i$ $(i = 0,1,\ldots,k)$ имеет место, так как многочлен $L_k(F;x)$ является интерполяционным для F относительно этих узлов, а $< \varphi_\nu, x_i >= 0$ для $k+1 \le \nu \le n$ и $0 \le i \le k$. Интерполяционные условия в узлах x_i для $k+1 \le i \le n$ выполняются в силу равенств $< \varphi_\nu, x_i >= \delta_{\nu i}$ и структуры операторов $r_k(x)$. Утверждение теоремы о точности формулы (2.1) справедливо в силу того, что при условии точности интерполяционного многочлена $L_k(F;x)$ для оператора F, второе слагаемое в (2.1) будет обращаться в ноль.

Рассмотрим случай линейной интерполяции в пространстве непрерывных функций. Пусть $X = C[a,b]$, $F[x_0, x_1]h = \int_0^1 \delta F[x_0 + \tau(x_1 - x_0); h] d\tau$, $P_k(t)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ – ортонормальные на $[a,b]$ относительно весовой функции $p(t) \ge 0$ многочлены. В качестве узлов интерполирования $x_\nu(t)$ возьмем $x_\nu(t) = P_{n_\nu}(t)$, где n_ν $(\nu = 2,\ldots,n)$ – некоторые различные целые числа, а $x_0(t)$ и $x_1(t)$ могут быть любыми многочленами степени, меньшей, чем n_ν для $\nu \ge 2$. Тогда для функционального многочлена

$$L_{n1}(F;x) = F(x_0) + F[x_0, x_1](x - x_0) + \sum_{\nu=2}^{n} r(x_\nu) \int_a^b p(\tau) P_{n_\nu}(\tau) x(\tau) d\tau$$

вида (2.1), где $r(x) = F(x) - F(x_0) - F[x_0, x_1](x - x_0)$, выполняются равенства $L_{n1}(x_k) = F(x_k)$ для $k = 0,1,\ldots,n$.

Действительно, совпадение в первых двух узлах имеет место в силу того, что сумма в предыдущем равенстве обращается в ноль, а первые два слагаемые есть интерполяционный многочлен относительно узлов x_0 и x_1. При $x = x_\nu$ для $\nu \geq 2$ в данной сумме остается одно слагаемое $r(x_\nu)$, которое совместно с первыми двумя слагаемыми дает $F(x_\nu)$.

Пусть $X = \widetilde{C}[0,2\pi]$ – пространство непрерывных на $[0,2\pi]$ и 2π-периодических функций $x(t)$, оператор $F:\widetilde{C}[0,2\pi] \to \mathbb{R}$ или $F:\widetilde{C}[0,2\pi] \to \widetilde{C}[0,2\pi]$, $x_\nu(t) = T_{n_\nu}(t)$, где $T_{n_\nu}(t)$ – тригонометрические многочлены ортонормальные на отрезке $[0,2\pi]$ с весом $p(t)$ соответственно степеней n_ν $(\nu = 0,1,2,\ldots,n)$. Обозначим через $L_1(x)$ выражение

$$L_1(x) = F(x_0) + \int_0^1 \delta F[x_0(\cdot) + \tau(x_1(\cdot) - x_0(\cdot)); x(\cdot) - x_0(\cdot)]d\tau. \tag{2.2}$$

Функциональный многочлен

$$L_{n_1}(x) = L_1(x) + \sum_{\nu=2}^{n} \left[F(x_\nu) - L_1(x_\nu)\right] \int_0^{2\pi} p(t) T_{n_\nu}(t) x(t) dt \tag{2.3}$$

является интерполяционным для оператора $F(x)$ и узлов $x_\nu(t)$ $(\nu = 0,1,2,\ldots,n)$.

Второе слагаемое в равенстве (2.3) при $x(t) = x_0(t)$ и $x(t) = x_1(t)$ обращается в ноль, а при $x(t) = x_\nu(t)$ $(\nu \geq 2)$ оно равно $F(x_\nu) - L_1(x_\nu)$. А так как $L_1(x_0) = F(x_0)$ и $L_1(x_1) = F(x_1)$, то выполнение условий $L_{n_1}(x_\nu) = F(x_\nu)$ имеет место для всех узлов x_ν $(\nu = 0,1,2,\ldots,n)$.

Рассмотрим частный случай формулы (2.3). Возьмем в качестве узлов интерполирования функции $x_0(t) = x_0$ – константа, $x_k(t) = \cos kt + \sin kt$ $(k = 1,2,\ldots,n)$. Для функционалов

$$I_\nu(x) = \frac{1}{(a_\nu + b_\nu)\pi} \int_0^{2\pi} (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t) x(t) dt \quad (a_\nu + b_\nu \neq 0),$$

которые будут использоваться далее в интерполяционной формуле при $\nu \geq 2$, имеют место равенства $I_\nu(x_k) = \delta_{k\nu}$, где $\delta_{k\nu}$ – символ Кронекера. И соответственно интерполяционный многочлен (2.3) примет вид

$$L_{n_1}(x) = L_1(x) + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{a_\nu + b_\nu} [F(x_\nu) - L_1(x_\nu)] \int_0^{2\pi} (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t) x(t) dt, \tag{2.4}$$

где $L_1(x)$ задается формулой (2.2).

Интерполяционные формулы для операторов, определенных на множествах периодических функций, в том числе и формулы (2.3) и (2.4), могут быть использованы, например, в задаче построения приближенных периодических решений нелинейных дифференциальных, интегро-дифференциальных и других видов уравнений.

Пример 2.1. Используем формулу (2.4) для приближения оператора $F(x) = [x'(t)]^2 = \left[\dfrac{dx(t)}{dt}\right]^2$, $x(t+2\pi) = x(t)$. В этом случае $\delta F[x;h] = 2x'(t)h'(t)$, а

$$L_1(x) = [x_1'(t) + x_0'(t)]x'(t) - x_1'(t)x_0'(t).$$

Пусть $x_0(t) = \alpha_{0,0}$, $x_1(t) = \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}\cos t + \beta_{1,1}\sin t$, $x_k(t) = \alpha_{k,0} + \alpha_{k,1}\cos t + \beta_{k,1}\sin t + \alpha_{k,k}\cos kt + \beta_{k,k}\sin kt$ $(k = 2,3,\ldots,n)$ – узлы интерполирования.

Так как $F(x_\nu) - L_1(x_\nu) = [x_\nu'(t) - x_1'(t)]x_\nu'(t)$, то интерполяционная формула (2.4) для оператора $F(x) = [x'(t)]^2$ примет вид

$$L_{n_1}(x) = x_1'(t)x'(t) + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=2}^{n_1}\frac{[x_\nu'(t) - x_1'(t)]x_\nu'(t)}{\alpha_{\nu,\nu}b_\nu + \beta_{\nu,\nu}a_\nu}\int_0^{2\pi}(a_\nu\cos\nu t + b_\nu\sin\nu t)x(t)dt. \tag{2.5}$$

Очевидно, что $L_{n_1}(x_k) = [x_k'(t)]^2$ $(k = 0,1,\ldots,n)$.

Замена, например, второй степени $x'(t)$, входящей в дифференциальные уравнения, на формулу линейной интерполяции $L_1(x)$, приближенно сводит их к линейным относительно $x'(t)$ дифференциальным уравнениям.

Пример 2.2. Рассмотрим уравнение Клеро (см. [53], с. 362) вида

$$(x'(t))^2 + (t+a)x'(t) - x(t) = 0,\ a = const, \tag{2.6}$$

решения которого задаются формулами

$$x(t) = C(t+a) + C^2,\ C = const \text{ и } x(t) = -\frac{1}{4}(t+a)^2.$$

Если в интерполяционной формуле $L_1(t)$ в качестве узлов берутся функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, то уравнение (2.6) сведется к

$$(\alpha'(t) + \beta'(t) + t + a)x'(t) - x(t) - \alpha'(t)\beta'(t) = 0. \tag{2.7}$$

В частности, при $\alpha(t) = -\dfrac{1}{4}(t+a)^2 + C_1$, $\beta(t) = C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные константы, уравнение (2.7) примет простой вид

$$x'(t) = \frac{2x(t)}{t+a}.$$

Решение этого уравнения, при начальном условии $x(0) = -\frac{a^2}{4}$, совпадает со вторым решением $x(t) = -\frac{1}{4}(t+a)^2$ нелинейного уравнения (2.6). Если же в качестве узлов интерполирования взять $\alpha(t) = C_1$, $\beta(t) = Ct + C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные константы, то уравнение (2.7) преобразуется к виду

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t+a+C},$$

и его решение, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = C(a+C)$, будет совпадать с первым решением $x(t) = C(t+a) + C^2$ уравнения (2.6).

Заключение

В книге рассмотрены и решены интерполяционные задачи лагранжева типа, обычная и обобщенная Эрмита–Биркгофа типов для операторов, заданных в пространствах непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций, а также на множествах постоянных и функциональных матриц.

1. Для функций скалярного аргумента построены обобщенные интерполяционные многочлены типа Эрмита–Биркгофа произвольной степени относительно тригонометрических, двух видов рациональных и экспоненциальных чебышевских систем функций [54]. Для построенных формул получены явные представления погрешностей, а также их оценки [55]. Аналогичные формулы построены для функций матричной переменной. Для первого и второго порядков формул найдены классы инвариантных матричных многочленов и условия, при которых выполняется инвариантность [56–58]. Для всех построенных формул доказаны соответствующие теоремы о выполнении интерполяционных условий и для некоторых из них о представлении погрешностей и их оценках. Рассмотрены иллюстрационные примеры.

2. Получены алгебраические интерполяционные многочлены лагранжева типа первой и второй степеней для функций от стационарных матриц [58]. Построен тригонометрический вариант интерполяционной формулы Лагранжа–Сильвестра, её применение проиллюстрировано на примере [56]. Для операторов от функциональной матричной переменной получены интерполяционные алгебраические многочлены лагранжева [58] и Эрмита–Биркгофа [56] типов второго порядка относительно тригонометрических матричных функций и матричных экспонент, содержащие интегро-дифференциальные операторы и дифференциалы Гато. Для них найдены классы инвариантных многочленов и определены условия инвариантности. Построены тригонометрические и экспоненциальные многочлены лагранжева типа на множествах сингулярных матриц, содержащие псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза [56].

3. Построены интерполяционные формулы, содержащие произвольные числовые параметры и функции, для операторов одной, двух и многих переменных, заданных на множествах непрерывных и гладких функций. На основе данных интерполяционных операторных многочленов построены другие интерполяционные многочлены такой же степени, но с большим числом узлов [59]. Применение данных формул проиллюстрировано на примерах приближения дифференциальных операторов построенными интерполяционными операторными многочленами.

Полученные в работе результаты имеют теоретическое и прикладное значение. Они могут быть использованы для дальнейшего развития теории операторного интерполирования, в том числе теории приближения функций матричных переменных. Полученные интерполяционные методы приближения являются основой построения алгоритмов решения ряда задач математической и теоретической физики, математического и матричного анализа, в частности, алгоритмов решения дифференциальных и интегральных уравнений и систем. Результаты работы также могут быть использованы в учебном процессе при чтении курсов теории приближения функций и операторов.

Список литературы

1. Пупков, К.А. Функциональные ряды в теории нелинейных систем / К.А. Пупков, В.И. Капалин, А.С. Ющенко. – М. : Наука, 1976. – 448 с.

2. Леви, П. Конкретные проблемы фунукционального анализа / П. Леви ; под ред. Г.Е. Шилова. – М. : Наука, 1967. – 512 с.

3. Prenter, P.M. A Weierstrass theorem for real, separable Hilbert spaces / P.M. Prenter // J. Approx. Theory. – 1970. – Vol. 3, № 4. – P. 341–351.

4. Istratescu, V.I. A Weierstrass theorem for real Banach spaces / V.I. Istratescu // J. Approx. Theory. – 1977. – Vol. 19, № 2. – P. 118–122.

5. Даугавет, И.К. О полиномиальном приближении операторов / И.К. Даугавет // Вестник СПбГУ. Сер. 1, Математика. Механика. Астрономия. – 1994. – Вып. 3, № 15. – С. 23–26.

6. Porter, W.A. Synthesis of polynomic systems / W.A. Porter // SIAM J. Math. Anal. – 1980. – Vol. 11, № 2. – P. 308–315.

7. Ульм, С.В. Об обобщенных разделенных разностях – I / С.В. Ульм // Изв. АН ЭССР. Сер. Физика. Математика. – 1967. – Т. 16, № 1. – С. 13–26.

8. Ульм, С.В. Об обобщенных разделенных разностях – II / С.В. Ульм // Изв. АН ЭССР. Сер. Физика. Математика. – 1967. – Т. 16, № 2. – С. 146–156.

9. Ульм, С.В. О построении обобщенных разделенных разностей / С.В. Ульм, В. Полль // Изв. АН ЭССР. Сер. Физика. Математика. – 1969. – Т. 18, № 1. – С. 100–102.

10. Соболевский, П.И. Интерполяция функционалов и некоторые приближенные формулы для интегралов по гауссовой мере / П.И. Соболевский // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1975. – № 2. – С. 5–12.

11. Янович, Л.А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам / Л.А. Янович. – Минск : Наука и техника, 1976. – 384 с.

12. Yanovich, L.A. Linear Interpolation of Operators in the Space of Continuously Differentiable Functions / L.A. Yanovich // Nonlinear Phenomena in Complex Systems : Proc. of the Third Seminar / Institute of Physics. – Minsk, 1995. – Vol. 2. – P. 76–82.

13. Манюк, Е.М. Интерполяционные многочлены второго порядка для функционалов, заданных в пространстве непрерывно дифференцируемых функций / Е.М. Манюк, Л.А. Марневская // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1995. – № 3. – С. 11–15.

14. Жаврид, Н.С. Квадратичное интерполирование функционалов в пространствах непрерывно дифференцируемых функций одной и двух переменных

/ Н.С. Жаврид, Л.А. Янович // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1996. – № 1. – С. 8–15.

15. Yanovich, L.A. Some Interpolation Operator Formulae in Functional Spaces / L.A. Yanovich, E.M. Manyuk // Nonlinear Phenomena in Complex Systems : Proc. of the Fifth Annual Seminar / Institute of Physics. – Minsk, 1997. – Vol. 8. – P. 265–270.

16. Игнатенко, М.В. Применение преобразования Ганкеля для построения формул операторного интерполирования / М.В. Игнатенко, Л.А. Янович // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 2. – С. 5–10.

17. Игнатенко, М.В. Применение преобразования Фурье и синус (косинус)-преобразования для построения формул операторного интерполирования / М.В. Игнатенко // Вестник БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 1997. – № 3. – С. 53–58.

18. Yanovich, L.A. Construction of Formulae of Operator Interpolation by means of Abel Integral Transform / L.A. Yanovich, M.V. Ignatenko // Nonlinear Phenomena in Complex Systems : Proc. of the Sixth Seminar / Institute of Physics. – Minsk, 1998. – Vol. 9. – P. 21–27.

19. Игнатенко, М.В. Формулы операторного интерполирования ньютоновского типа на пространствах функций многих переменных / М.В. Игнатенко, Л.А. Янович // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1998. – № 3. – С. 25–30.

20. Игнатенко, М.В. Об операторных интерполяционных формулах специального вида с двукратными узлами / М.В. Игнатенко, Л.А. Янович // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 4. – С. 35–41.

21. Янович, Л.А. О взаимосвязи интерполирования операторов и функций / Л.А. Янович, М.В. Игнатенко // Докл. НАН Беларуси. – 1998. – Т. 42, № 3. – С. 9–16.

22. Игнатенко, М.В. Об интерполировании дифференцируемых операторов, заданных на пространствах вектор-функций / М.В. Игнатенко, Л.А. Янович // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. – 1998. – Т. 1. – С. 125–132.

23. Yanovich, L.A. Interpolation formulae for operators defined on Cartesian product of the functional spaces / L.A. Yanovich, M.V. Ignatenko // Modern Trends in Computational Physics : Abstracts of the First Int. Conf. MTCP'98, Dubna, Russia, June 15–20, 1998. – Dubna, 1998 – P. 170.

24. Макаров, В.Л. Интерполирование операторов / В.Л. Макаров, В.В. Хлобыстов, Л.А. Янович. – К. : Наукова думка, 2000. – 407 с.

25. Makarov, Volodymyr L. Methods of Operator Interpolation / Volodymyr L. Makarov, Volodymyr V. Khlobystov, Leonid A. Yanovich. – К. : Праці Ін-ту математики НАН України, 2010. – Т. 83. – 517 с.

26. Кашпур, Е.Ф. К задаче эрмитовой интерполяции операторов в гильбертовом пространстве / Е.Ф. Кашпур, В.Л. Макаров, В.В. Хлобыстов // Ж. обчисл. та прикл. матем. – 1994. – № 78. – С. 38–48.

27. Кашпур, Е.Ф. Матричная модификация формул эрмитовой интерполяции операторов в гильбертовом пространстве / Е.Ф. Кашпур // Ж. обчисл. та прикл. матем. – 1994. – № 78. – С. 28–37.

28. Кашпур, Е.Ф. Интерполирование полиномиальных операторов в гильбертовом пространстве / Е.Ф. Кашпур, В.В. Хлобыстов // Ж. обчисл. та прикл. матем. – 1995. – № 79. – С. 85–91.

29. Хлобыстов, В.В. К задаче интерполирования полиномиальных операторов / В.В. Хлобыстов, Е.Ф. Кашпур // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 3. – С. 102–108.

30. Макаров, В.Л. Інтерполяційні інтегральні операторні дроби в банаховому просторі / В.Л. Макаров, В.В. Хлобистов, І.І. Демків // Доп. НАН України. – 2008. – № 3. – С. 17–23.

31. Макаров, В.Л. Існування єдиного інваріантного інтерполяційного операторного полінома на гільбертовому просторі / В.Л. Макаров, І.І. Демків // Доп. НАН України. Сер. Математика. Природознавство. Техн. науки. – 2003. – № 12. – С. 21–26.

32. Demkiv, I.I. Interpolation functional polynomial of the fourth order which does not use substitution rule / I.I. Demkiv // J. Numer. Appl. Math. – 2010. – № 1 (100). – P. 40–59.

33. Жидков, Н.П. Линейные аппроксимации функционалов / Н.П. Жидков. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1977. – 262 с.

34. Ибрагимов, И.И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения / И.И. Ибрагимов. – М. : Наука, 1971. – 518 с.

35. Турецкий, А.Х. Теория интерполирования в задачах / А.Х. Турецкий. – Минск : Вышэйшая школа, 1968. – 320 с.

36. Янович, Л.А. Интерполяционные операторные многочлены Эрмита–Биркгофа в пространстве гладких функций / Л.А. Янович, М.В. Игнатенко // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 5. – С. 15–21.

37. Янович, Л.А. Специальный случай интерполяционной задачи Эрмита–Биркгофа для операторов в пространстве гладких функций / Л.А. Янович, М.В. Игнатенко // Актуальные проблемы современного анализа: сб. науч. тр. /

Гродн. гос. ун-т им. Я. Купалы; отв. ред. Ю.М. Вувуникян. – Гродно, 2009. – С. 198–215.

38. Хаусхолдер, А.С. Основы численного анализа / А.С. Хаусхолдер ; под ред. Л.А. Люстерника. – М. : Изд-во иностр. лит., 1956. – 320 с.

39. Гуло, И.Н. Квадратурные формулы для стохастических интегралов от неслучайных периодических функций. / И.Н. Гуло, Л.А. Янович // Докл. НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 3. – С. 14–19.

40. Литвин, О.М. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування / О.М. Литвин, В.Л. Рвачов. – К. : Наук. думка, 1973. – 122 с.

41. Дорошко, В.В. О взаимосвязи интерполирования по рациональным функциям с задачей операторного интерполирования / В.В. Дорошко // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 5. – С. 27–29.

42. Янович, Л.А. Интерполяционные формулы Эрмита–Биркгофа для функций матричной переменной / Л.А. Янович // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 30–33.

43. Вольвачев, Р.Т. Линейная интерполяция операторов в пространствах прямоугольных матриц / Р.Т. Вольвачев, Л.А. Янович // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 1999. – № 3. – С. 16–21.

44. Янович, Л.А. Интерполирование функций, заданных на множествах матриц с йордановым и кронекеровским умножением / Л.А. Янович, А.В. Тарасевич // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 3. – С. 9–13.

45. Янович, Л.А. Сходимость интерполирования по скалярным матричным узлам в классе аналитических функций / Л.А. Янович, А.В. Тарасевич // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2006. – Т. 14. № 2. – С. 102–111.

46. Янович, Л.А. Приближение функций от стохастических матриц интерполяционными многочленами / Л.А. Янович // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2007. – Т. 15, № 2. – С. 121–129.

47. Yanovich, L.A. On matrix function interpolation / L.A. Yanovich, I.V. Romanovski // J. Numer. Appl. Math. – 2009. – № 1 (97). – P. 122–131.

48. Янович, Л.А. Интерполяционные формулы для функций многих матричных переменных / Л.А. Янович, Ю.В. Романовский // Зб. пр. Iн-ту матем. НАН України. – 2010. – Т. 7, № 1. – С. 365–379.

49. Игнатенко, М.В. Обобщенные интерполяционные формулы для операторов, определенных на декартовом произведении функциональных пространств / М.В. Игнатенко, Л.А. Янович // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 2011. – № 1. – С. 5–11.

50. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 3-е изд. – М. : Наука, 1967. – 575 с.

51. Манюк, Е.М. О формулах линейной и квадратичной интерполяции функционалов в пространстве дифференцируемых функций / Е.М. Манюк, Л.А. Янович // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1999. – № 4. – С. 10–15.

52. Yanovich, L.A. Operator interpolation Hermite–Birkhoff formulas in spaces of smooth functions / L.A. Yanovich, M.V. Ignatenko // J. Numer. Appl. Math. – 2010. – № 1 (100). – P. 117–129.

53. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – 4-е изд., испр. – М. : Наука, 1971. – 576 с.

54. Худяков, А.П. Интерполяционные многочлены типа Эрмита–Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций / А.П. Худяков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 29–36.

55. Худяков, А.П. Явные формулы погрешностей для одного случая эрмитова интерполирования / А.П. Худяков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 13–21.

56. Yanovich, L.A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L.A. Yanovich, A.P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.

57. Худяков, А.П. Обобщенные интерполяционные эрмитова типа многочлены для функций матричной переменной / А.П. Худяков, Л.А. Янович // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 103–114.

58. Янович, Л.А. Интерполяционные формулы первых и вторых порядков для функций матричного аргумента / Л.А. Янович, А.П. Худяков // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 16–22.

59. Янович, Л.А. Формулы линейной операторной интерполяции с произвольным числом узлов и с произвольными входными функциями / Л.А. Янович, А.П. Худяков // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 4. – С. 5–10.

60. Худяков, А.П. Обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита–Биркгофа относительно тригонометрических и рациональных функций / А.П. Худяков // Веб-программирование и Интернет-технологии WebConf2012 : мат. II Межд. науч.-практ. конф., Минск, 5–7 июня 2012 г. / Мех.-мат. фак. БГУ; отв. ред. Т.Е. Янчук. – Минск : Изд. центр БГУ, 2012. – С. 105–106.

61. Худяков, А.П. Интерполирование Эрмита–Биркхофа типа для случая экспоненциальных функций / А.П. Худяков // Математика и физика в научных и методических исследованиях : сб. мат. межфак. науч.-практ. конф., посвящ. 15-летию каф. высш. матем., Брест, 12 окт. 2012 г. / УО «БрГУ им. А.С. Пушкина» ; ред. Н.Н. Сендер. – Брест, 2013. – С. 71.

62. Худяков, А.П. Обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита–Биркгофа относительно тригонометрических функций / А.П. Худяков // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. мат. регион. науч.-практ. конф., Брест, 18–19 окт. 2012 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2012. – С. 38–40.

63. Худяков, А.П. Формулы операторного интерполирования с произвольными параметрами / А.П. Худяков, Л.А. Янович // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 5–9 ноября 2012 г. : в 3 ч. / Ин-т матем. НАН Беларуси ; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2012. – Ч. 3. – С. 25–26.

64. Худяков, А.П. Интерполяционные многочлены Эрмита–Биркхофа по системе рациональных функций / А.П. Худяков // Научные стремления – 2012 : сб. мат. III Междунар. молод. науч.-практ. конф., Минск, 6–9 ноября 2012 г. : в 2 т. / Совет молодых ученых НАН Беларуси, редкол.: В.В. Казбанов [и др.]. – Минск : Белорусская наука, 2012. – Т. 1. – С. 403–407.

65. Худяков, А.П. Тригонометрические и экспоненциальные многочлены для функций матричных переменных, содержащие дифференциалы Гато первого порядка / А.П. Худяков // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : сб. мат. межвуз. науч.-практ. конф., посвящ. 370-летию со дня рожд. И. Ньютона, Брест, 22 марта 2013 г. / УО «БрГУ им. А.С. Пушкина» ; ред. Н.Н. Сендер. – Брест, 2013. – С. 201–203.

66. Худяков, А.П. Интерполяционные многочлены, определенные на множестве прямоугольных матриц / А.П. Худяков // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам : мат. V Междунар. науч.-практ. интернет-конф., Мозырь, 26–29 марта 2013 г. / УО МГПУ им. И. П. Шамякина ; редкол.: И.Н. Ковальчук (отв. ред.) [и др.]. – Мозырь, 2013. – С. 205–206.

67. Худяков, А.П. Дифференциальные операторы специального вида и их приложение в теории интерполяции / А.П. Худяков // Еругинские чтения – 2013 : тез. докл. XV Межд. конф. по диф. ур-ям, Гродно, 13–16 мая 2013 г. / Ин-т математики НАН Беларуси; редкол.: А.К. Деменчук [и др.]. – Минск, 2013. – С. 50–51.

68. Худяков, А.П. Интерполяционные формулы первых и вторых порядков для функций, заданных на множестве функциональных матриц / А.П. Худяков // XV республиканская научно-методическая конференция молодых ученых : сб. мат., Брест, 17 мая 2013 г. : в 2 ч. / М-во образ-я Респ. Беларусь, Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. В.В. Здановича. – Брест, 2013. – Ч. 1. – С. 58–60.