Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»
Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

В.С. Монахов
А.А. Трофимук

Алгебра
Линейная алгебра

*Электронный учебно-методический комплекс
для студентов дневной и заочной формы получения образования
специальности 1-02 05 03-02 «Математика. Информатика»,
1–02 05 01 «Математика» физико-математического факультета*

Брест
БрГУ им. А.С.Пушкина
2015

Авторы:

Монахов Виктор Степанович — профессор кафедры алгебры и геометрии ГГУ имени Ф. Скорины, доктор физико-математических наук, профессор

Трофимук Александр Александрович — доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования БрГУ имени А.С. Пушкина, кандидат физико-математических наук

Редактор:

Трофимук Александр Александрович

Рецензенты:

Савчук Вячеслав Фёдорович — доцент кафедры прикладной математики и технологий программирования БрГУ имени А.С. Пушкина, кандидат физико-математических наук, доцент

Кафедра информатики и прикладной математики Брестского государственного технического университета

ЭУМК написан в соответствии с действующей типовой программой по дисциплине «Алгебра» и ставит своей целью облегчить самостоятельную работу студентов с теоретическим материалом при подготовке к лекциям, практическим занятиям и зачету.

Предназначено для студентов дневной и заочной формы получения образования специальности 1-02 05 03-02 «Математика. Информатика», 1–02 05 01 «Математика» физико-математического факультета.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Настоящий ЭУМК предназначен для студентов дневной и заочной формы получения образования специальности 1-02 05 03-02 «Математика. Информатика», 1–02 05 01 «Математика» физико-математического факультета. Он написан в соответствии с действующей типовой программой по дисциплине «Алгебра» (№ ТД-А.123/тип. от 29.12.2008) и в соответствии с образовательным стандартом ОСРБ 1-02 05 03-2008 для специальности «Математика. Информатика».

Комплекс содержит вспомогательный раздел, который включает в себя примерный тематический план, содержание учебного материала, вопросы к экзамену. В курсе лекций излагается теоретический материал, содержащий вопросы, связанные с понятием матриц и определителя, их свойствами и действиями над ними; с векторными пространствами и линейными операторами; а так же с методами решений СЛУ. Теоретический материал иллюстрируется многочисленными примерами решения задач. В практикуме студентам предложено большое количество индивидуальных задач с приведенными типовыми примерами их решения. Логическим завершением ЭУМК является итоговый тест.

ЭУМК ставит своей целью облегчить самостоятельную работу студентов с теоретическим материалом при подготовке к лекциям, практическим занятиям и экзамену.

Авторы

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Название раздела, перечень изучаемых вопросов	УСР	ЛК	ПР
	Семестр III (74 ч.)	**2**	**34**	**38**
1	**Матрицы и определители**	**2**	**8**	**12**
1.1	Действия над матрицами и их свойства..		2	2
1.2	Обратимая матрица. Матричные уравнения. Запись и решение СЛУ в матричной форме.		2	2
1.3	Группа подстановок. Чётность и знак подстановки. Определитель квадратной матрицы, основные свойства определителей.	2	2	4
1.4	Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке (столбцу). Правило Крамера, следствие.		2	4
2	**Алгебра**		**12**	**12**
2.1	Алгебраические операции. Алгебры. Виды бинарных операций. Нейтральный и симметричные элементы.		2	2
2.2	Группы, простейшие свойства группы, примеры.		2	2
2.3	Гомоморфизмы групп (определение, виды гомоморфизма, примеры).		2	2
2.4	Кольца, простейшие свойства кольца, примеры.		2	2
2.5	Гомоморфизмы колец (определение, виды гомоморфизма, примеры).		2	2
2.6	Поля, простейшие свойства поля, примеры.		2	2
3	**Поле $\mathbb{C}$**		**14**	**14**
3.1	Построение поля $\mathbb{C}$. Числовые поля. Поле $\mathbb{Q}$.		4	

Кафедра АГ и ММ

3.2	Алгебраическая форма комплексного числа. Сопряжённые комплексные числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.		2	4
3.3	Решение квадратных уравнений. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексного числа.		6	4
3.4	Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Двучленные уравнения.		2	4
	Контрольная работа.			**2**
	Семестр IV (68 ч.)		**34**	**34**
4	**Введение в теорию векторных пространств**		**6**	**6**
4.1	Определение и примеры векторных пространств. Арифметическое пространство. Простейшие свойства векторных пространств.		2	2
4.2	Линейная зависимость и независимость системы векторов.		2	2
4.3	Эквивалентные системы векторов. Элементарные преобразования системы векторов. Базис системы векторов. Ранг системы векторов.		2	2
5	**Системы линейных уравнений.**		**6**	**6**
5.1	СЛУ, её решение, следствие. Равносильные СЛУ и элементарные преобразования СЛУ.		2	
5.2	Понятие матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Ранг матрицы.		2	2
5.3	Теорема Гаусса и следствия из неё. Теорема Кронекера-Капели, следствие. Метод Гаусса решения СЛУ.		2	4

6	**Линейные векторные пространства**		**8**	**6**
6.1	Базис и размерность векторного пространства. Изоморфизм векторных пространств..		2	
6.2	Координатная строка (столбец) вектора в данном базисе пространства. Связь между координатными столбцами вектора в различных базисах пространства. Связь между различными базисами пространства. Матриц перехода к новому базису.		2	2
6.3	Подпространство. Сумма и пересечение подпространств. Линейная оболочка.		2	2
6.4	Пространство решений однородной СЛУ. Фундаментальная система решений.		2	2
7	**Евклидовы пространства**		**4**	**4**
7.1	Скалярное умножение. Ортонормированные система векторов и базис системы векторов..		2	2
7.2	Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение подпространства. Изоморфизм евклидовых пространств.		2	2
8	**Алгебра линейных операторов**		**10**	**12**
8.1	Линейные отображения. Образ, ядро и матрица линейного оператора..		2	2
8.2	Связь между матрицами линейного оператора относительно разных базисов. Подобие матриц. Действия над линейными операторами. Линейная алгебра.		2	2
8.3	Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.		4	4

8.4	Ортогональные и самосопряженные операторы. Квадратичные формы.		2	2
	Контрольная работа.			**2**

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1 Матрицы и определители

1.1 Матрица. Действия над матрицами. Свойства действий над матрицами. Свойства действия умножения матриц. Свойства транспонирования матриц.

1.2 (Не)Совместная система . Матричная запись системы. Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Элементарные преобразования строк матрицы. Обратимая матрица.

1.3 Перестановки. Подстановки. Инверсия. Знак подстановки. Основные свойства определителя.

1.4 Миноры.Алгебраическе дополнения.Правило Крамера.

Раздел 2 Введение в теорию векторных пространств

2.1 Определение векторного пространства. Свойства векторного пространстваю. Арифметическое векторное пространство.

2.2 Линейная комбинация. Линейное выражение вектора. Линейно зависимая система векторов. Линейно независимая система векторов.

2.3 Эквивалентная система векторов. Элементраные преобразования системы векторов.Базис системы векторов.

2.4 Ранг системы векторов. Элементраные преобразования.

Раздел 3 Системы линейных уравнений

3.1 Решение системы линейных уравнений. Определенная(неопределенная) система векторов.

3.2 Элементарные преобразования векторов-строк. Ранг системы векторов. Теорема Гаусса.

3.3 Метод Гаусса.

Раздел 4 Линейные векторные пространства

4.1 Базис векторного пространства. Максимальная линейно независимая система. Размерность векторного пространства.

4.2 Пересечение подпространств. Сумма подпространств. Прямая сумма подпространств.

4.3 Фундаментальная система.

Раздел 5 Алгебра линейных операторов

5.1 Образ линейного оператора. Ранг линейного оператора. Ядро линейного оператора. Дефект.

5.2 Сумма линейных операторов. Произведение линейного оператора на скаляр. Произведение линейных операторов. Свойства действий над линейными операторами. Линейная алгебра.

5.3 Собственные вектора. Характеристическое уравнение линейного оператора. Собственное подпространство.

Раздел 6 Евклидовы пространства

6.1 Скалярное умножение векторов. Скалярное произведение. Евклидово пространство. Свойства скалярного произведения.

6.2 Длина(норма, модуль) вектора. Нормированный вектор. Неравенство Коши-Буняковского. Свойства действий над линейными операторами. Угол между векторами. Ортогональные вектора.Свойства ортогональных векторов.

6.3 Ортогональная система векторов. Процесс ортогонализации. Ортонормированная система векторов.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$A, B, C, \ldots$ – матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ – матрица } A$$

a_{ij} – элемент определителя или матрицы, стоящий в i-той строке, j-ом столбце

E – единичная матрица

$\triangle$ – определитель

$\det A$ или $|A|$ – определитель матрицы A

$A_{m\times n}$ – матрица размерностью m на n (m – количество строк, n – количество столбцов)

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ – транспонированная матрица}$$

A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя или матрицы

M_{ij} – минор элемента a_{ij} определителя или матрицы

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \text{ – присоединенная матрица}$$

$\tilde{A}$ – расширенная матрица

$rang(A)$ – ранг матрицы A

$\bar{a}, \bar{B}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \ldots$ – векторы

$\bar{a} = x_a\bar{i} + y_a\bar{j} + z_a\bar{k}$ или $\bar{a} = (x_a, y_a, z_a)$ – вектор $\bar{a}$ с координатами x_z, y_a, z_a

$|\bar{a}|$ – модуль (длина) ветора $\bar{a}$

$\bar{a} \cdot \bar{b}$ – скалярное произведение векторов

$\bar{a} \times \bar{b}$ – векторное произведение векторов

$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ – смешанное произведение векторов

РАЗДЕЛ 1
Матрицы и определители

1.1. Действия над матрицами и их свойства

Определение 1.1.1. Таблица $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, где $a_{ik} \in \mathbb{P}$ называется **матрицей размера** $m \times n$ **над полем** $\mathbb{P}$. В качестве поля могут рассматриваться $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$.

Символ a_{ik} называется **элементом матрицы** A. Индекс i элемента a_{ik} указывает на номер строки, а индекс k – на номер столбца. Матрицу A можно кратко записать так: $[a_{ik}]_{m\times n}$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$.

Пример 1.1.1. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

1) Какой размер матрицы A ?

2) Найдите элементы a_{12}, a_{23}, a_{33}.

Ответ: $A_{2\times 3}$; $a_{12} = 4, a_{23} = 7$, $a_{33} =$ не определен.

Определение 1.1.2. Если число строк матрицы равно числу столбцов и равно n, то матрицу A называют **квадратной матрицей порядка** n.

Пример 1.1.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ – квадратная матрица 2-го порядка,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ – квадратная матрица 3-го порядка.}$$

Определение 1.1.3. **Нулевой матрицей** называется матрица, у которой все ее элементы равны нулю.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ – нулевые матрицы}$$

Определение 1.1.4. Квадратная матрица порядка n вида (1.1.1) называется **единичной** и обозначается через E_n.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \qquad (1.1.1)$$

Определение 1.1.5. Матрица размера $m \times n$, строками которой являются столбцы данной матрицы A называется **транспонированной** для $A_{n \times m}$ и обозначается A^T.

Пример 1.1.3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$

Определение 1.1.6. Две матрицы A и B называют **равными** и пишут $A = B$, если их размеры равны и равны одноименные элементы.

Пример 1.1.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Очевидно, что $A \neq B$.

Определение 1.1.7. **Ступенчатой** называется матрица $[a_{ij}]_{m\times n}$, обладающая следующими двумя свойствами:

1. Если i-ая строка нулевая, то $(i+1)$-ая строка также нулевая.
2. Если первые ненулевые элементы i-ой и $(i+1)$-ой строк располагаются в столбцах с номерами k и l, то $k < l$.

Обратим внимание на то, что в определении ступенчатой матрицы не требуется, чтобы она была квадратной.

Пример 1.1.5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ – ступенчатые матрицы.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ – не являются ступенчатыми матрицами.

1. Пусть $A = [a_{ik}]_{m\times n}$, $B = [b_{ik}]_{m\times n}$. **Суммой матриц A и B** называется такая матрица $A + B = [a_{ik} + b_{ik}]_{m\times n}$. Таким образом, чтобы сложить две матрицы одинакового размера нужно сложить их одноименные элементы.

   Пример 1.1.6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$.

   Определение 1.1.8. Матрица $-A = [-a_{ik}]_{m\times n}$ называется **противоположной** к матрице A.

2. Произведение матрицы $A = [a_{ik}]_{m\times n}$ на скаляр $\alpha \in \mathbb{P}$ называется матрица $\alpha A = [\alpha a_{ik}]_{m\times n}$. Таким образом, чтобы умножить любую матрицу на скаляр надо каждый элемент матрицы умножить на этот скаляр.

3. Пусть $A = [a_{ik}]_{m\times n}$, $B = [b_{kj}]_{n\times s}$. **Произведением матриц A и B** называется матрица $A \cdot B = [C_{ij}]_{m\times s}$, где $C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$. Таким образом, чтобы найти произведение двух матриц нужно найти сумму попарных произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы A и j-ого столбца матрицы B.

Пример 1.1.7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 4}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}_{4\times 2}.$

Тогда: $A \cdot B =$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-3)1 + 3\cdot 1 + (-1)1 & 1\cdot 1 + (-3)2 + 3\cdot 1 + (-1)(-2) \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 1 + (-5)1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + (-5)1 + 1(-2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Свойства действий над матрицами

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$ (ассоциативность сложения).
2. $A+B = B+A$ (коммутативность сложения).
3. Если $[0]$ – нулевая матрица, то $A+[0] = A$.
4. Для любой матрицы A существует противоположная $-A$ такая, что $A+(-A) = 0$.
5. $(\alpha_1+\alpha_2)A = \alpha_1 A + \alpha_2 A$.
6. $\alpha(A_1+A_2) = \alpha A_1 + \alpha A_2$.
7. $\alpha_1(\alpha_2 A) = (\alpha_1\alpha_2)A$.
8. $1\cdot A = A$.

Свойства действия умножения матриц

1. $(C\cdot A)\cdot B = C\cdot(A\cdot B) = C\cdot A\cdot B$.
2. $(A_1+A_2)\cdot B = A_1\cdot B + A_2\cdot B$.
3. $A\cdot(B_1+B_2) = A\cdot B_1 + A\cdot B_2$.
4. $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$.

Замечание 1.1.1. Умножение матриц не коммутативно, т. е. $AB \neq BA$.

Свойства транспонированных матриц

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

1.2. Обратимая матрица. Матричные уравнения. Запись и решение системы линейных уравнений в матричной форме.

Определение 1.2.1. **Системой m - линейных уравнений с n неизвестными** над полем $\mathbb{P}$ называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, a_{ij}, b_i \in \mathbb{P}. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Элементы a_{ij} называют **коэффициентами** системы (1.2.1), а b_i - **свободными членами** системы.

Определение 1.2.2. **Решением системы** (1.2.1) называют совокупность $c_1, \ldots, c_n$ элементов из $\mathbb{P}$, которые после подстановки вместо $x_1, \ldots, x_n$ превращают каждое уравнение системы в истинное равенство.

Определение 1.2.3. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**, а система, не имеющая ни одного решения – **несовместной**.

Из коэффициентов при неизвестных в системе (1.2.1) составим матрицу размера $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матрицу A называют **матрицей системы уравнений (1.2.1)**. Введем обозначения:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}.$$

Кафедра АГ и ММ

Перемножив матрицы A и X, получим матрицу:

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

Система(1.2.1) требует, чтобы матрицы AX и B были равны. Мы приходим к матричному уравнению

$$AX = B \tag{1.2.2}$$

Определение 1.2.4. Уравнение (1.2.2) называется **матричной записью** системы (1.2.1).

Определение 1.2.5. **Элементарными преобразованиями** системы линейных уравнений называются преобразования следующих трёх типов:
1) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число;
2) перестановка двух уравнений;
3) умножение одного уравнения на число, отличное от нуля.

Так как нам удобнее работать не с системами, а с их матрицами, то примем следующее определение:

Определение 1.2.6. **Элементарными преобразованиями строк матрицы** называются преобразования следующих трёх типов:
1) прибавление к одной строке другой, умноженной на число;
2) перестановка двух строк местами;
3) умножение одной строки на число, отличное от нуля.

Очевидно, что всякое элементарное преобразование системы линейных уравнений приводит к соответствующему элементарному преобразованию ее матрицы коэффициентов.

Теорема 1.2.1. Всякую матрицу путем элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

Пример 1.2.1. С помощью элементарных преобразований приведите к ступенчатому виду матрицу: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Умножим первую строку матрицы A на 2 и сложим со второй. Затем первую строку умножим на 3 и сложим с третьей. В итоге получим:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 5 & 11 & -11 \end{bmatrix}$$

Теперь вторую строку умножим на (-5) и сложим с третьей, умноженной на 3.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Определение 1.2.7. Квадратная матрица A порядка n называется **обратимой**, если существует матрица B такая, что $AB = BA = E_n$. В этом случае матрица B называется **обратной** к матрице A и ее можно обозначить A^{-1}.

Лемма 1.2.1. 1) Если матрица обратима, то существует единственная обратная к ней матрица.
2) Если A и B – обратимые матрицы одного порядка, то AB обратима и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Способ нахождения обратной матрицы для обратимой матрицы A n-го порядка при помощи элементарных преобразований.
1) К матрице A приписываем справа единичную матрицу n-го порядка, то есть составляем матрицу $A|E$.
2) Элементарными преобразованиями строк матрицы $A|E$ на месте матрицы A получаем единичную матрицу E, тогда на месте единичной матрицы получится A^{-1}.

Пример 1.2.2. Вычислить обратную матрицу для матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу $A|E$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$A^{-1} \cdot A = E_3$

Вернемся к матричному уравнению (1.2.2). Если матрица A является обратимой, то уравнение можно решить следующим образом:
1) умножим обе части этого уравнения на матрицу A^{-1}, т. е. $(A^{-1}(AX)) = A^{-1}B$
2) используя слева свойство ассоциативности умножения матриц, получим $X = A^{-1}B$.

1.3. Множество подстановок. Четность и знак подстановки. Определитель квадратной матрицы, основные свойства определителей.

Напомним сначала понятие перестановки из n элементов. Рассмотрим конечное множество $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, состоящее из первых n натуральных чисел.

Определение 1.3.1. Всевозможные конечные упорядоченные множества, содержащие n различных элементов, которые можно получить из множества A, называются **перестановками** из n элементов(чисел).

Пример 1.3.1. Пусть $n = 3$, $A = \{1, 2, 3\}$. Тогда упорядоченные множества являются перестановками из 3-х элементов.
(1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1)
Их общее число равно 6.

Утверждение 1.3.1. Число перестановок из n элементов равно $n!$

Определение 1.3.2. Взаимооднозначное отображение множества A на себя называется **подстановкой** n-ой степени.

Всякую подстановку φ n-ой степени удобнее записывать в виде таблицы $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$. Если элементы первой строки подстановки записаны в порядке возрастания, то говорят о канонической форме подстановки. Любые две подстановки отличаются вторыми строками которые являются перестановками из n чисел.

$$S_3 = \left\{\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \varphi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Значит всего существует $n!$ подстановок n-ой степени. Обозначим множество всех подстановок через S_n.

Подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ называется **тождественной подстановкой** и также принадлежит множеству S_n. Подстановки φ_1 и φ_2 можно перемножить по следующему правилу перемножения отображений: $\varphi_1 \cdot \varphi_2(k) = \varphi_1(\varphi_2(k))$, $k = \overline{1, n}$.

Пример 1.3.2. Если $n = 4$ $\quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi_2 \cdot \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

В частности, $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \neq \varphi_2 \cdot \varphi_1$, то есть умножение подстановок не коммутативно.

Теорема 1.3.1. 1. Произведение двух перестановок есть перестановка, то есть $\forall\, \varphi,\, f \in S_n \quad \varphi \cdot f \in S_n$;

2. Умножение подстановок ассоциативно;

3. Существует тождественная подстановка $\varepsilon \in S_n$ такая, что $\forall\, \varphi \in S_n$ $\varepsilon \cdot \varphi = \varphi \cdot \varepsilon = \varphi$;

4. Каждая подстановка обладает обратной подстановкой, то есть $\forall\ \varphi \in S_n\ \exists\ \varphi^{-1} \in S_n \qquad \varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot \varphi = \varepsilon.$

Пример 1.3.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Четность и знак подстановки

Пусть дана произвольная подстановка φ n-ой степени в канонической форме. Будем говорить, что элементы i и k $(i < k)$ первой строки образуют **инверсию**, если $\varphi(i) > \varphi(k)$, то есть если больший элемент первой строки имеет меньший образ.

Пример 1.3.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ — нет инверсий.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ — 3 инверсии.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ — 1 инверсия.

Определение 1.3.3. Если в подстановке содержится четное число инверсий, то такая подстановка называется **четной**, в противном случае **нечетной**.

Определение 1.3.4. Знак подстановки:

$$\operatorname{sgn}\varphi = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi \text{ – четная подстановка ;} \\ -1, & \text{если } \varphi \text{ – нечетная подстановка.} \end{cases}$$

Пример 1.3.5. Найдите знаки подстановок второй и третьей степени.

$$S_2 = \left\{ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\operatorname{sgn} f_2 = -1$ (одна инверсия)
$\operatorname{sgn} f_1 = 1$ (нет инверсий)
S_3 (см.пример выше)
$\operatorname{sgn}\varphi_1 = 1$ (нет инверсий)
$\operatorname{sgn}\varphi_2 = -1$ (1 инверсия)
$\operatorname{sgn}\varphi_3 = -1$ (3 инверсии)
$\operatorname{sgn}\varphi_4 = -1$ (1 инверсия)
$\operatorname{sgn}\varphi_5 = 1$ (2 инверсии)
$\operatorname{sgn}\varphi_6 = 1$ (2 инверсии).

Правило. Чтобы подсчитать число инверсий данной подстановки нужно: подсчитать число k_1 элементов, которые стоят во второй строке впереди 1, затем зачеркнуть 1; найти число k_2 элементов, которые стоят во второй строке впереди 2, затем зачеркнуть 2 и т.д. Тогда число инверсий равно $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$.

Перестановка двух элементов второй строки подстановки называется **транспозицией**.

Теорема 1.3.2. 1. Четность подстановки изменяется на противоположную при транспозиции элементов подстановки.

2. Если к подстановке применить четное число транспозиций, то получится подстановка того же класса четности.

Рассмотрим квадратную матрицу A n-ого порядка:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Составим произведение n-элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца: $a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$. Заметим, что этому произведению соответствует единственная подстановка n-ой степени $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$. И наоборот. Всякой подстановке φ n-ой степени соответствует единственное произведение n элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix} \Rightarrow a_{1_{\varphi_1}} a_{2_{\varphi_2}} \dots a_{n_{\varphi_n}}.$$

Значит всего существует $n!$ произведение n элементов матрицы A взятых по одному из каждой строки и каждого столбца.

Определение 1.3.5. **Определителем (детерминантом)** матрицы A n-го порядка называется сумма $n!$ произведений n элементов матрицы A взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем каждое произведение умножается на $\operatorname{sgn}\varphi$, где φ – подстановка соответствующего произведения и обозначается $|A|$ или $\det A$.

$$|A| = \sum_{\varphi\in S_n} \operatorname{sgn}\varphi \cdot a_{1_{\varphi(1)}} \cdot a_{2_{\varphi(2)}} \cdot \dots \cdot a_{n_{\varphi(n)}}$$

Пример 1.3.6. Найдите определители второй и третьей степени.

$$S_2 = \left\{ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, f_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}\varphi_1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + \operatorname{sgn}\varphi_2 \cdot a_{12} \cdot a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}\varphi_1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + \operatorname{sgn}\varphi_2 \cdot a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + \operatorname{sgn}\varphi_3 \cdot a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} +$$
$$\operatorname{sgn}\varphi_4 \cdot a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + \operatorname{sgn}\varphi_5 \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + \operatorname{sgn}\varphi_6 \cdot a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

Графический способ.

Правило треугольника или правило Саррюса (см.рис 1.1)

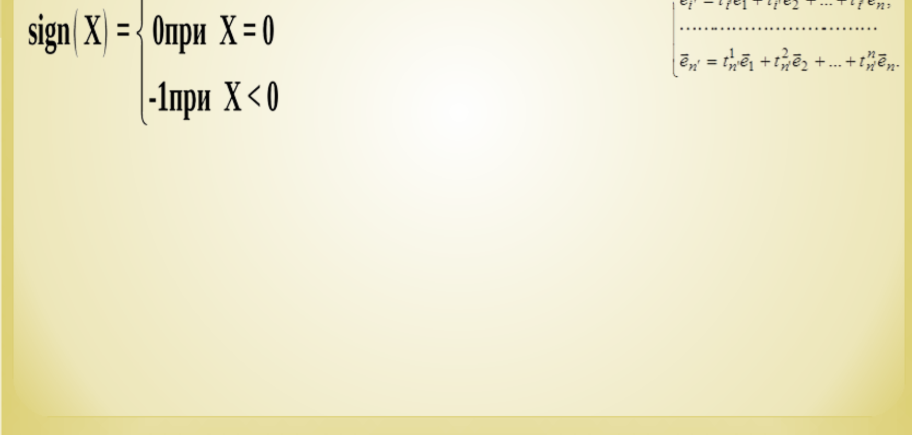

Рис. 1.1: при $n = 3$

Пример 1.3.7. По правилу треугольника найдите определитель.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot4\cdot1+1\cdot2\cdot2+(-1)\cdot0\cdot(-1)-(-1\cdot4\cdot2+3\cdot0\cdot2+1\cdot(-1)\cdot1) =$$
$$12 + 4 - (-8 - 1) = 25.$$

Определение 1.3.6. Квадратная матрица называется **треугольной относительно главной (неглавной) диагонали**, если все элементы по одну сторону главной (неглавной) диагонали равны нулю.

Утверждение 1.3.2. 1)Определитель треугольной относительно главной диагонали матрицы равен произведению элементов этой главной диагонали.

2)Определитель треугольной относительно неглавной диагонали матрицы равен произведению элементвов этой диагонали, умноженному на (-1).

Определение 1.3.7. Квадратная матрица называется **диагональной относительно главной диагонали**, если все элементы, стоящие вне главной диагонали равны 0.

Основные свойства определителей.

1. Определитель не меняется:

а) при транспонировании матрицы, то есть $|A| = |A^T|$;

б) если к какой-нибудь строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженный на произвольное число.

2. Если $|A| \neq 0$, то матрица A обратима, в противном случае нет.

3. Если строка или столбец матрицы A нулевые, либо если две строки или два столбца пропорциональны, то определитель такой матрицы равен 0.

4. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

5. $\alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, то есть чтобы умножить определитель на число нужно какую-нибудь строку или столбец умножить на это число.(Общий множитель элементов какой-нибудь строки (столбца) можно выносить за знак определителя).

6. Если каждый элемент i-ой строки матрицы A равен сумме m слагаемых $(m > 1)$, то определитель матрицы A равен сумме m определителей, причем элементы i-ой строки первого определителя – это первые слагаемые, элементы i-ой строки второго определителя – это вторые слагаемые и т.д.

7. $|AB| = |A| \cdot |B|$. Определитель произведения двух матриц одинакового порядка равен произведению их определителей.

8. Пусть A произвольная квадратная матрица. Определим ее степень с натуральным показателем.

$A^1 = A$;

$A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$;

$A^0 = E_n$;

A^{-1} – обратная матрица;

$A^{-k} = (A^{-1})^k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$;

$|A^k| = |A|^k$.

Пример 1.3.8. Подберите натуральные числа i, j, k таким образом, чтобы слагаемое $a_{4i}a_{2k}a_{32}a_{j4}$ входило в развернутое выражение определителя четвертого порядка со знаком минус.

Ответ: $i = 3, j = 1, k = 1$.

Доказательство. п.1(a).

Пусть $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

По определению:

$$\det A = \sum_{\varphi \in S_n} \mathrm{sgn}\varphi \cdot \mathrm{a}_{1_{\varphi(1)}} \mathrm{a}_{2_{\varphi(2)}} \dots \mathrm{a}_{\mathrm{n}_{\varphi(n)}} \tag{1.3.1}$$

$$\det A^T = \sum_{\varphi \in S_n} \mathrm{sgn}\varphi \cdot \mathrm{a}_{\varphi(1)_1} \mathrm{a}_{\varphi(2)_2} \dots \mathrm{a}_{\varphi(\mathrm{n})_\mathrm{n}} \tag{1.3.2}$$

Очевидно,что все произведения $a_{\varphi(1)_1} a_{\varphi(2)_2} \dots a_{\varphi(n)_n}$ остаются в разных столбцах и строках, значит $a_{\varphi(1)_1} a_{\varphi(2)_2} \dots a_{\varphi(n)_n}$ являются членами определителя 1.3.1.

Подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ имеют одинаковую четность. Поэтому $\det A = \det A^T$ □

Доказательство. п.3

Если матрица имеет нулевую строку, то каждое из произведений $a_{1_{\varphi(1)}} a_{2_{\varphi(2)}} \dots a_{n_{\varphi(n)}}$ будет иметь нулевой множитель. Значит, $\det A = 0$. □

1.4. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке (столбцу). Правило Крамера

Определение 1.4.1. **Минором** элемента a_{ij} определителя d n-ого порядка называется определитель $n-1$ порядка, полученный из d вычеркиванием i-той строки и j-ого столбца. Обозначается через M_{ij}.

Определение 1.4.2. **Алгебраическим дополнением** элемента a_{ij} определителя d n-ого порядка называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$ и обозначается через A_{ij}, то есть $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример 1.4.1. Пусть $d = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $a_{23} = 2$. Тогда

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ — минор элемента a_{23},
$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 \cdot 1 = -1$ – алгебраическое дополнение элемента a_{23}

Утверждение 1.4.1. 1) Определитель n-ого порядка равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на их алгебра-

Кафедра АГ и ММ

Начало

Содержание

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Назад

На весь экран

Закрыть

ические дополнения: $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + \dots + a_{ij} \cdot A_{ij} +$ $\dots + a_{in} \cdot A_{in}$ (разложение по строке) $= a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$ (разложение по столбцу). Это утверждение сводит нахождение определителя n-ого порядка к вычислению определителя $n-1$ порядка. При этом предварительно, используя свойства определителя можно аннулировать элементы какой-нибудь строки (столбца) за исключением одного элемента.

Пример 1.4.2. Вычислите определитель:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 2 & -14 \\ 0 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \end{vmatrix} = (1) \cdot (-1)^{1+1} M_{11} =$$

$$= \begin{vmatrix} -7 & 2 & -14 \\ -2 & 3 & -10 \\ -5 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 134.$$

2)сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) квадратной матрицы n-ого порядка на алгебраическое дополнение соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю, то есть $a_{k1} \cdot$

$A_{i1} + a_{k2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{kn} \cdot A_{in} = 0,\ k \neq i,$
$a_{1l} \cdot A_{1j} + a_{2l} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nl} \cdot A_{nj} = 0,\ l \neq j.$

3) пусть A-обратимая матрица. Тогда $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$

Теорема 1.4.1. *(Крамера.)* Если определитель d системы n линейных уравнений с n переменными не равен нулю, то система имеет единственное решение, причем значение переменных находится по формулам $x_k = \frac{d_k}{d}$, $k = \overline{1, n}$. Здесь d_k – определитель, полученный из d заменой k-ого столбца столбцом свободных членов.

Доказательство. Запишем данную систему уравнений в матричной форме $AX = B$, A – матрица системы, X – столбец переменных, B – столбец свободных членов.
Так как по условию $|A| \neq 0$, то A – обратимая матрица, а значит, матричное уравнение имеет единственное решение: $X = A^{-1}B =$

$$= \frac{1}{d} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_n A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Пусть $d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Алгебраические дополнения к элементам $b_1, b_2, \dots, b_n$ совпадают с алгебраическим дополнение к элементам $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$. Поэтому первая сумма представления матрицы – это есть разложение d_1 по элементам первого столбца, аналогично, вторая сумма – разложение d_2 по элементам второго столбца, n-ая сумма – разложение d_n по элементам n-ого столбца. Поэтому $X = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{d} \\ \dots \\ \frac{d_n}{d} \end{bmatrix}$, то есть $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{d} \\ \frac{d_2}{d} \\ \dots \\ \frac{d_n}{d} \end{bmatrix}$ и $\left(\frac{d_1}{d}, \frac{d_2}{d}, \dots, \frac{d_n}{d}\right)$ – решение данной системы. □

Следствие 1.4.1. Если определитель однородной системы n линейных уравнений с n переменными не равен 0, то система имеет единственное нулевое решение.

Следствие 1.4.2. Если определитель однородной системы n линейных уравнений с n переменными равен 0, то система имеет бесконечное множество решений, в частности, нетривиальное решение.

Пример 1.4.3. Решите систему, используя теорему Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = -12, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -13, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 134 \neq 0.$$

Значит, по теореме Крамера данная система имеет единственное решение.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ -12 & -1 & -1 & -5 \\ -13 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -12 & -3 & -1 & -8 \\ -13 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -15 & -6 & -17 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -12 & -3 & -8 \\ -13 & 4 & -1 \\ 1 & -15 & -17 \end{vmatrix} =$$

$$= -134.$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -12 & -1 & -5 \\ 2 & -13 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -12 & -1 & -8 \\ 3 & -13 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & -6 & -17 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -12 & -8 \\ 3 & -13 & -1 \\ -5 & 1 & -17 \end{vmatrix} =$$

$$= -268.$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & -12 & -5 \\ 2 & 2 & -13 & -4 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & -12 & -14 \\ 2 & -2 & -13 & -10 \\ 1 & -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -12 & -14 \\ -2 & -13 & -10 \\ -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 134$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -12 \\ 2 & 2 & 1 & -13 \\ 1 & -3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & -12 \\ 2 & -2 & 3 & -13 \\ 1 & -5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -2 & -12 \\ -2 & 3 & -13 \\ -5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 268$$

Тогда:

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{-134}{134} = -1$$
$$x_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{-268}{134} = -2$$
$$x_3 = \frac{d_3}{d} = \frac{134}{134} = 1$$
$$x_4 = \frac{d_4}{d} = \frac{268}{134} = 2$$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = 2.$

РАЗДЕЛ 2
Введение в теорию векторных пространств

2.1. Определение и примеры векторных пространств. Арифметическое векторное пространство. Простейшие свойства векторных пространств

Пусть $\mathbb{P}$ – поле, элементы которого будем называть скалярами и обозначать малыми греческими буквами, L – непустое множество элементов любой природы, которые будем обозначать малыми латинскими буквами. Пусть на L задана бинарная операция "$+$". Рассмотрим отображение $\mathbb{P} \times L \to L$, которое назовем умножением элемента из L на скаляр из $\mathbb{P}$, то есть $\forall (\alpha, a) \in \mathbb{P} \times L \ \exists! \alpha a \in L$. Элемент αa называется произведением элемента из L на скаляр из $\mathbb{P}$. Операция умножения элемента из L на скаляр из $\mathbb{P}$ не является бинарной, но является унарной.

Определение 2.1.1. Непустое множество L с бинарной операцией "$+$" и операцией умножения элемента из L на скаляр из $\mathbb{P}$ называется **векторным пространством** (линейным пространством), если выполняются следующие условия (аксиомы):
1) $(L, +)$ – коммутативная группа;
2) $\forall a \in L \qquad 1 \cdot a = a \ (1 \in \mathbb{P})$;
3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}, \forall a \in L \ (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$, то есть умножение элементов из L на скаляр из $\mathbb{P}$ ассоциативно;

4) $\forall \alpha \in \mathbb{P}, \forall a, b \in L\ \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$, то есть умножение на скаляр из $\mathbb{P}$ дистрибутивно относительно сложения элементов из L;
5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}, \forall a \in L\ (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$, то есть умножение элементов из L на скаляр из $\mathbb{P}$ дистрибутивно относительно сложения скаляров из $\mathbb{P}$.

Элементы векторного пространства L будем называть **векторами**.

Пример 2.1.1. 1) Множество всех n-мерных векторов, координаты которых принадлежат полю $\mathbb{P}$, то есть $\mathbb{P}^n = \{(p_1, \ldots, p_n) | p_i \in \mathbb{P}\}$,является векторным пространством.
Векторное пространство $\mathbb{P}^n$ над полем $\mathbb{P}$ называется **арифметическим векторным пространством** над полем $\mathbb{P}$. В частности $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ – арифметические векторные пространства над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, соответсвенно.
2) Множество векторов на плоскости , множество векторов обычного трехмерного пространства с операциями сложения векторов и умножения вектора на действительное число являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$.
3) Расширение $\bar{\mathbb{P}}$ любого поля $\mathbb{P}$ со сложением элементов из $\bar{\mathbb{P}}$ и умножением элемента из $\bar{\mathbb{P}}$ на скаляр из $\mathbb{P}$ является векторным пространством на полем $\mathbb{P}$.
4) Множество $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов от переменной x с действительным коэффициентами со сложением многочленов и умножением многочлена на действительное число является векторным пространством над $\mathbb{R}$.

Простейшие свойства векторного пространства.

Пусть L – векторное пространство над полем $\mathbb{P}$. Тогда $(L,+)$ – коммутативная группа. Тогда справедливы следующие утверждения:
1)сложение на L коммутативно и ассоциативно;
2) $\exists 0 \in L$, $\forall a \in L$, $a + 0 = a$;
3) $\forall a \in L$, $\exists -a \in L$, $a + (-a) = 0$;
4) $\forall a, b \in L$ уравнение $a+x = b$ имеет единственное решение $x = b+(-a)$, которое называется разностью векторов b и a.

Из аксиом векторного пространства вытекают следующие свойства:
5)$\forall \alpha \in \mathbb{P}$, $\forall a \in L$ $\alpha a = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ или $a = 0 \in L$;
6)$\forall \alpha \in \mathbb{P}$, $\forall a \in L$ $\alpha(-a) = (-\alpha)a = -\alpha a$;
7)$\forall \alpha \in \mathbb{P}$, $\forall a, b \in L \quad \alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b$;
8)$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$, $\forall a \in \mathbb{P} \quad (\alpha - \beta)a = \alpha a - \beta a$.

2.2. Линейная зависимость и независимость системы векторов.

Пусть L – произвольное векторное пространство над полем $\mathbb{P}$.

Определение 2.2.1. Вектор $b \in L$ называется **пропорциональным** вектору $a \in L$, если $\exists \alpha \in \mathbb{P}$ такое, что $b = \alpha a$.

Пример 2.2.1. Пусть $a = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ и $b = (2, 4, 6) \in \mathbb{R}^3$. Очевидно, что a и b пропорциональны, так как $b = 2a$.

Заметим, что нулевой вектор из L пропорционален произвольному вектору $a \in L$.

Обобщением понятия пропорциональности двух векторов является их линейная комбинация. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_m$ (a) — произвольная система векторов из пространства L над полем $\mathbb{P}$.

Определение 2.2.2. **Линейной комбинацией** векторов системы (a) называется сумма произведений векторов этой системы на скаляры из поля $\mathbb{P}$, то есть вектор $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m$, $\alpha_i \in \mathbb{P}$. Скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ называются коэффициентами линейной комбинации.

Пример 2.2.2. Пусть $a_1 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, $a_2 = (-1, 3) \in \mathbb{R}^2$.Тогда $2a_1 + 3a_2$ – линейная комбинация векторов a_1 и a_2.

Определение 2.2.3. Линейная комбинация называется **тривиальной (нетривиальной)**, если все ее коэффициенты являются нулями поля $\mathbb{P}$ (если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля поля $\mathbb{P}$).

Определение 2.2.4. Если вектор $b \in L$ является линейной комбинацией векторов системы (a), то есть $b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m$, то говорят, что вектор b **линейно выражается** через вектора системы (a).

Пример 2.2.3. 1) Вектор $b = (-1, 13)$ линейно выражается через вектора $a_1 = (1, 2)$ и $a_2 = (-1, 3)$, так как $b = 2a_1 + 3a_2$.
2) Заметим, что нулевой вектор $0 \in L$ линейно выражается через любую

систему векторов этого пространства.
3)Каждый вектор любой системы векторов пространства L над полем $\mathbb{P}$ линейно выражается через эту систему.

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (b) – еще одна система векторов пространства L над полем $\mathbb{P}$.

Определение 2.2.5. Будем говорить, что система векторов (b) линейно выражается через систему векторов (a), если каждый вектор системы (b) линейно выражается через систему (a).
Заметим, что всякая подсистема любой системы векторов линейно выражается через саму систему.

Утверждение 2.2.1. Если система (a) линейно выражается через систему векторов (b), а система (b) линейно выражается через систему $c_1, c_2, \ldots, c_k$ (c) векторов пространства L над полем $\mathbb{P}$, то система (a) линейно выражается через систему (c).

С понятием линейной комбинации векторов тесно связанао понятие линейной зависимости и линейной независимости системы векторов.

Определение 2.2.6. Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (a) векторов пространства L над полем $\mathbb{P}$ называется **линейно независимой**, если равенство $\alpha_1 a_1 + \cdots +, \alpha_m a_m$ возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots$

$\cdots = \alpha_m = 0$, то есть если существует только тривиальная линейная комбинация векторов системы (a) равная нулевому вектору.

Определение 2.2.7. Система векторов (a) называется **линейно зависимой**, если $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ($\alpha_1 \neq 0$ или $\alpha_2 \neq 0$ или $\alpha_m \neq 0$) такие, что $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m = 0$, то есть если существует нетривиальная линейная комбинация векторов этой системы равная нулевому вектору.

Пример 2.2.4. 1) Система векторов 1, i пространства комплексных чисел над полем $\mathbb{R}$ линейно независима.
$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot i = 0$;
$\alpha_1 + \alpha_2 i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$.
2) Система векторов $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = \sin^2 x$ из пространства всех непрерывных функций над полем $\mathbb{R}$ является линейно зависима.
$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot \cos^2 x + \alpha_3 \cdot \sin^2 x = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$.
Коэффициенты комбинации нетривиальны.
3) Вектора $e_1 = (1, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_k = (0, 0, \ldots, 1)$ арифметического пространства $\mathbb{P}^n$, где $\mathbb{P}$ – произвольное числовое поле, являются линейно независимыми.

Свойства линейной зависимости и линейной независимости системы векторов

Теорема 2.2.1. Система, состоящая из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Следствие 2.2.1. Система, состоящая из одного вектора линейно независима тогда и только тогда, когда этот вектор ненулевой.

Теорема 2.2.2. Система, содержащая более одного вектора линейно зависима тогда и только тогда когда хотя бы один из векторов линейно выражается через остальные вектора системы.

Доказательство. Необходимость. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (a) система векторов пространства L над полем $\mathbb{P}$ и (a) линейно зависима. Тогда $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{P}$, $(\alpha_1 \neq 0 \vee \cdots \vee \alpha_m \neq 0)$ такие, что $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m = 0$.

Пусть, например, $\alpha_k \neq 0$. Тогда:
$a_k = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_k})a_1 + (-\frac{\alpha_2}{\alpha_k})a_2 + \cdots + (-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k})a_{k-1} + (-\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k})a_{k+1} + \cdots + (-\frac{\alpha_m}{\alpha_k})a_m$.
Это значит, что вектор a_k линейно выражается через остальные вектора система (а).

Достаточность. Пусть вектор a_k системы (a) линейно выражается через остальные вектора, то есть
$a_k = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{k-1} a_{k-1} + \alpha_{k+1} a_{k+1} + \cdots + \alpha_m a_m$. Тогда $\alpha_1 a_1 +, \cdots + \alpha_{k-1} a_{k-1} + (-1) a_k + \alpha_{k+1} a_{k+1} + \cdots + \alpha_m a_m$. Так как $\alpha_k = -1$, то система (a) линейно зависима. $\square$

Следствие 2.2.2. Система, состоящая из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда эти вектора пропорциональны.

Следствие 2.2.3. Система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

Теорема 2.2.3. Если какая-нибудь подсистема системы векторов линейно зависима, то и сама система линейно зависима.

Следствие 2.2.4. Если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.

Теорема 2.2.4. Если система векторов (a) линейно независима, но при добавлении к ней вектора $b \in L$ становится линейно зависимой, то вектор b линейно выражается через систему (a) и причем однозначно.

Доказательство. По условию система $a_1, a_2, \ldots, a_m, b$ (a') — линейно зависима. Тогда $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1} \in \mathbb{P}$, $(\alpha_1 \neq 0 \bigcup \alpha_{m+1} \neq 0)$ такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m + \alpha_{m+1} b = 0 \tag{2.2.1}$$

Если $\alpha_{m+1} = 0$, то $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m = 0$ и так как система (2.2.1) линейно независима, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$. Тогда и система (a') так же линейно независима. Противоречие. Значит, $\alpha_{m+1} \neq 0$. Разделим (2.2.1)на α_{m+1}. Поэтому: $b = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}})a_1 + (-\frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}})a_2 + \cdots + (-\frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}})a_m$ – линейная комбинация векторов системы (a).

Докажем однозначность.

Пусть $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m$ и $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_m a_m$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{P}$ два представления вектора (b) через систему (a).

Тогда $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_m a_m$. Поэтому $(\alpha_1 - \beta_1)a_1 + \cdots + (\alpha_m - \beta_m)a_1 = 0$.

Так как система (a) линейно независима, то $\alpha_i = \beta_i$. □

Теорема 2.2.5. Если система векторов $a_1, \ldots, a_m$ пространства L над полем $\mathbb{P}$ линейно выражается через систему векторов $b_1, \ldots, b_k$ и $m > k$, то система (a) линейно зависима.Другими словами, если большая система векторов линейно выражается через меньшую, то большая система линейно зависима.

Следствие 2.2.5. Если система векторов $a_1, \ldots, a_m$ пространства L над полем $\mathbb{P}$ линейно выражается через систему векторов $b_1, \ldots, b_k$ и система (a) линейно независима, то $m \leq k$.

Следствие 2.2.6. Всякая система векторов арифметического векторного пространства $\mathbb{P}^n$ над полем $\mathbb{P}$, содержащая более n векторов, линейно зависима.

Доказательство. Хорошо известно, что произвольный вектор $b \in \mathbb{P}^n$ линейно выражается, через систему единичных векторов: $e_1 = (1, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, \ldots, 1)$. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ (a) система векторов из $\mathbb{P}^n$, $m > n$. Тогда (a) линейно выражается через (b). А значит, линейно зависима. □

2.3. Эквивалентные системы векторов. Элементарные преобразования системы векторов. Базис системы векторов.

Определение 2.3.1. Две системы векторов $a_1, \ldots, a_m$ (a) и $b_1, \ldots, b_n$ (b) пространства L над полем $\mathbb{P}$ называются **эквивалентными** и пишут $(a) \sim (b)$, если каждая из них линейно выражается через другую.

Утверждение 2.3.1. Если $(a) \sim (b)$, а $(b) \sim (c)$, то $(a) \sim (c)$.

Теорема 2.3.1. Если две системы векторов эквивалентны и каждая из них линейно независима, то они содержат равное число векторов.

Доказательство. Так как $(a) \sim (b)$, то (a) линейно выражается через (b). По следствию 2.2.5 имеем, что $m \leq n$. Аналогично, (b) линейно выражается через (a). Тогда $m \geq n$. Поэтому $m = n$. □

Определение 2.3.2. Элементарными преобразованиями системы векторов пространства L над полем $\mathbb{P}$ называются следующие преобразования:
1) перестановка двух векторов системы;
2) умножение какого-нибудь вектора на ненулевой скаляр из $\mathbb{P}$;
3) прибавление (вычитание) к одному (из одного) из векторов системы другого вектора, умноженного на скаляр из поля $\mathbb{P}$;

4) исключение из системы векторов вектора, который линейно выражается через остальные векторы системы или введение в систему вектора, который линейно выражается через эту систему.

Теорема 2.3.2. Если одна система векторов получена из другой при помощи цепочки элементарных преобразований, то эти две системы эквивалентны.

Базис системы векторов

Определение 2.3.3. **Базисом системы векторов** $a_1, \ldots, a_m$ (a) пространства L над полем $\mathbb{P}$ называется ее линейно независимая подсистема, через которую линейно выражается любой вектор системы (a).

Замечание 2.3.1. Система нулевых векторов не имеет базиса.

Пример 2.3.1. $a_1 = (2, -3, 0, 4)$, $a_2 = (1, 5, 6, 0)$,
$a_3 = (-2, -10, -12, 0) \in \mathbb{R}^4$

Очевидно, что вектора a_1 и a_2 пропорциональны, а, значит, линейно независимы. Причем $a_1 = 1a_1 + 0a_2$, $a_2 = 0a_1 + 1a_2$, $a_3 = 0a_1 + (-2)a_2$. Значит вектора a_1, a_2 образуют базис.

Определение 2.3.4. Линейно независимая подсистема системы векторов (a) называется **максимальной линейно независимой подсистемой**, если при добавлении к ней любого вектора из системы (a) получается линейно зависимая подсистема.

Теорема 2.3.3. Подсистема системы векторов (a) пространства L над полем $\mathbb{P}$ образует базис системы (a) тогда и только тогда, когда она является максимальной линейно независимой подсистемой.

Доказательство. Необходимость. Пусть подсистема $a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots, a_{r_m}$ (a') – базис системы векторов (a). Значит, $\forall b \in (a)$ линейно выражается через вектора системы (a'). Поэтому система $a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots, a_{r_m}, b$ по теореме 2.2.5 линейно зависима, а значит, (a') является максимальной линейно независимой подсистемой.
Достаточность. Пусть $a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots, a_{r_m}$ (a') максимальная линейно независимая подсистема системы (a). Пусть $b \in (a)$ — произвольный вектор системы (a). Поэтому система $a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots, a_{r_m}, b$ является линейно зависимой. Тогда вектор b линейно выражается через (a'). А значит, (a') является базисом системы (a). $\square$

Теорема 2.3.4. Всякая система векторов, содержащая хотя бы один ненулевой вектор, имеет базис.

Теорема 2.3.5. Любые два базиса одной и той же системы векторов имеют одинаковое число векторов.

Доказательство. Пусть $a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}$ (a'), $b_{k_1}, \ldots, b_{k_m}$ (b') – базисы системы (a). Тогда $(a') \sim (b')$. Значит, верно заключение теоремы. $\square$

2.4. Ранг системы векторов

Определение 2.4.1. Рангом конечной системы векторов, содержащей хотя бы один ненулевой вектор, называется количество векторов в ее базисе.

Заметим, что система нулевых векторов не имеет базиса. Поэтому принято считать, что ее ранг равен 0. Ранг системы векторов (a) обозначим через $\mathrm{rang}(a)$. Из введенного определения следует, что:
1) если $\mathrm{rang}\ (a) = m$, то линейно независимая подсистема системы (a), содержащая m векторов, является базисом системы (a).
2) если $\mathrm{rang}(a) = m$, то любая подсистема системы (a), содержащая более m векторов, будет линейно зависимой подсистемой системы (a).

Теорема 2.4.1. Если система векторов $a_1, \dots, a_m$ (a) линейно выражается через систему $b_1, \dots, b_n$ (b), то $\mathrm{rang}(a) \leq \mathrm{rang}(b)$.

Доказательство. 1) Если система (a) состоит из нулевых векторов, то $\mathrm{rang}\ (a) = 0$ и она выражается через любую ненулевую систему векторов (b). Очевидно, что $0 = \mathrm{rang}(a) \leq \mathrm{rang}(b)$.
2) Пусть система (a) ненулевая. Тогда системы (a) и (b) имеют базисы. Пусть $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} (a')$ – базис системы (a), $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_s} (b')$ – базис системы (b). Покажем, что (a') линейно выражается через (b'). Так как (a') выражается через (a), а (a) выражается через (b), а (b) выражается через (b'), то по следствию (2.2.4) (a) линейно выражается через (b').

Так как система (a') линейно независима, то $k \leq s$ или rang $(a) \leq$rang (b). $\square$

Следствие 2.4.1. Ранг всякой подсистемы любой системы векторов не больше ранга самой системы.

Следствие 2.4.2. Ранги эквивалентных систем векторов совпадают.

Следствие 2.4.3. Элементарные преобразования не изменяют ранг системы векторов.

Теорема 2.4.2. Ранг любой системы векторов арифметического пространства $\mathbb{P}^n$ над полем $\mathbb{P}$ не превышает n.

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ (a) — произвольная система векторов пространства $\mathbb{P}^n$. Хорошо известно, что система (a) линейно выражается через систему (e) (единичных векторов). Тогда по теореме (2.3.5) rang $(a) \leq$rang$(e) = n$ $\square$

Теорема 2.4.3. Ранги систем векторов $a_1, \ldots, a_n$ (a) и $a_1, \ldots, a_n, b$ совпадают тогда и только тогда, когда b линейно выражается через (a).

Доказательство. Достаточность. Если b линейно выражается через (a), то систему $a_1, \ldots, a_n, b$ получим из системы (a) элементарными преобразованиями, а значит по следствию (2.3.4) их ранги совпадают.
*Необходимость.*Пусть $a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}$ (a') – базис системы (a). Тогда b линейно выражается через (a). Так как (a') линейно выражается через (a), то b линейно выражается через (a). $\square$

РАЗДЕЛ 3
Системы линейных уравнений

3.1. Системы линейных уравнений. Ее решение и следствие. Равносильные системы линейных уравнений.

Определение 3.1.1. **Системой m линейных уравнений с n неизвестными над полем $\mathbb{P}$** называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

где $a_{ij}, b_i \in \mathbb{P}$, a_{ij} – коэффициенты системы, b_i – свободные члены.

Замечание 3.1.1. Система (3.1.1) может состоять из одного уравнения.

Определение 3.1.2. Система линейных уравнений, все свободные члены которой равны нулю, называются **однородной системой линейных уравнений**, в противном случае неоднородной.

Значение неизвестных x_i будем искать в поле $\mathbb{P}$.

Определение 3.1.3. **Решением системы** (3.1.1) называется n-мерный вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{P}^n$, при подстановке которого в каждое уравнение системы вместо неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, получаются верные равенства.

Определение 3.1.4. Совместная система называется **определенной (неопределенной)**, если она имеет единственное решение (имеет бесконечное множество решений).

Заметим, что всякая однородная система совместна (имеет нулевое решение). Решить систему линейных уравнений — это значит исследовать совместна она или несовместна, а в случае совместности установить количество решений и найти их.
Рассмотрим систему s линейных уравнений над полем $\mathbb{P}$ с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$:

$$b_{i_1}x_1 + b_{i_2}x_2 + \cdots + b_{i_n}x_n = c_i, i = \overline{1, s} \tag{3.1.2}$$

Определение 3.1.5. Система 3.1.2 называется **следствием системы** 3.1.1, если каждое решение системы 3.1.1 является решением системы 3.1.2 или система 3.1.1 несовместна.

Запись 3.1.1 $\to$ 3.1.2 говорит о том, что система 3.1.2 есть следствие системы 3.1.1.
Таким образом, система 3.1.2 является следствием системы 3.1.1 тогда и только тогда, когда множество всех решений системы 3.1.1 является подмножеством множества всех решений системы 3.1.2.

Замечание 3.1.2. Всякая подсистема любой СЛУ является следствием этой системы.

Определение 3.1.6. Линейное уравнение $(\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_m a_{m1})x_1 + \dots + (\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \dots + \alpha_m a_{mn})x_n = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m$, полученное сложением уравнений системы, умноженных на $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{P}$, называется **линейной комбинацией уравнений системы** 3.1.1.

Определение 3.1.7. Две системы линейных уравнений с одними и теми же неизвестными над одним и тем же полем называются **равносильными**, если каждое из них является следствием другого.
Две системы линейных уравнений равносильны тогда и только тогда, когда множество их решений совпадает.

Теорема 3.1.1. Если одна система линейных уравнений получена из другой в результате элементарных преобразований, то эти две системы будут равносильными.

3.2. Ранг матрицы. Теорема Гаусса и следствие из нее. Теорема Кронекера — Капелли, следствие.

Заметим, что каждая строка матрицы $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ является вектором пространства $\mathbb{P}^n$, а каждый столбец вектором пространства $\mathbb{P}^m$. Значит, матрица A задает две системы векторов.

Первая $a_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \dots\dots, a_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \in \mathbb{P}^n$.

Вторая $a^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots\dots, a^n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^m$.

Замечание 3.2.1. Элементарные преобразования векторов-строк (векторов-столбцов) матрицы называются **элементарными преобразованиями** строк (столбцов) матрицы.

Утверждение 3.2.1. Векторы – строки ступенчатой матрицы линейно независимы.

Определение 3.2.1. Ранг системы векторов-строк матрицы A называется **строчечным рангом** матрицы A.
Ранг системы векторов-столбцов матрицы A называется **столбцовым рангом** матрицы A.

Теорема 3.2.1. Строчечные и столбцовые ранги проивольной матрицы равны.

Определение 3.2.2. Общее значение строчечного и столбцового рангов матрицы A называют **рангом матрицы** A и обозначают $\operatorname{rang} A$.

Теорема 3.2.2. Ранг всякой ненулевой матрицы равен числу строк ее ступенчатой матрицы.

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ – векторы-строки ненулевой матрицы A. Элементарными преобразованиями строк приведем матрицу A к ступенчатому виду A'.
Пусть $a'_1, \ldots, a'_r$ – векторы-строки ступенчатой матрицы A'. Очевидно, что $r \leq m$. Тогда $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\,(a_1, \ldots, a_m) = \operatorname{rang}(a'_1, \ldots, a'_r)$. Так как система $a'_1, \ldots, a'_r$ линейно независима, то $\operatorname{rang}\,(a'_1, \ldots, a'_r) = r$ – число строк ступенчатой матрицы.

□

Замечание 3.2.2. Зная как находится ранг матриц, мы сможем находить ранг системы векторов пространства $\mathbb{P}^n$.
Ранг системы векторов пространства $\mathbb{P}^n$ равен рангу матрицы, строками которой являются эти вектора.

Пример 3.2.1. Найти ранг системы векторов пространства $\mathbb{P}^n$:

$$a_1(1, 2, -1, 4),\ a_2(2, 4, 3, -2),\ a_3(0, 0, 5, -3),\ a_4(1, 2, -11, 17)$$

<u>Решение.</u> Составим матрицу A, записывая координаты векторов a_1, a_2, a_3, a_4 в строки и приведем ее к ступенчатому виду.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -11 & 17 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 13 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

Кафедра
АГ и ММ

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Таким образом rang $A = 3$. Значит rang $(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3$

Теорема Гаусса и следствие из нее

Определение 3.2.3. Матрица $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, составленная из коэффициентов системы 3.1.1 называется матрицей системы.

Определение 3.2.4. Матрица $B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$, полученная из матрицы A присоединением к ней столбца свободных членов системы 1.2.1 называется **расширенной матрицей** системы 3.1.1.

Замечание 3.2.3. Матрица B и система 3.1.1 однозначно определяют друг друга. Элементарные преобразования строк матрицы B соответствуют элементарным преобразованиям уравнений системы 3.1.1.

Теорема 3.2.3. *(Теорема Гаусса.)*
Система линейных уравнений 3.1.1 совместна тогда и только тогда, ко-

гда последняя строка ступенчатой матрицы для расширенной матрицы до вертикальной черты ненулевая. Причем система 3.1.1 определенная, если число строк ступенчатой матрицы равно числу неивестных и неопределенная, если это число меньше числа неивестных.

Доказательство. Необходимость. Применим метод от противного. Предположим, что последняя строка ступенчатой матрицы для расширенной матрицы нулевая, то есть $B' = \left[\begin{array}{ccc|c} b_{11} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & \dots & b_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & c_r \end{array}\right]$, $r \leq m$.

По определению ступенчатой матрицы $c_r \neq 0$. Поэтому система 3.1.1 не является однородной. Составим по матрице B' систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n = c_1, \\ 0x_1 + \dots + b_{2n}x_n = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0x_1 + \dots + 0x_n = c_r. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Система 3.2.1 несовместна, так как последнее уравнение системы никогда не будет иметь решение. Так как матрица B' получена из матрицы B путем элементарных преобразований строк, то система 3.2.1 получена из системы 3.1.1 элементарными преобразованиями уравнений, а значит системы 3.1.1 и 3.2.1 равносильны. Поэтому система 3.1.1 не имеет решений. Противоречие с предположением.

Достаточность. Пусть последняя строка ступенчатой матрицы для расширенной матрицы до вертикальной черты ненулевая. Если в этой матрице первый слева ненулевой элемент i- той строки стоит не в i - ом столбце, а в k-ом $k > 0$, то переставим местами столбцы i и k (это значит переименуем неизвестные x_i на x_k, а x_k на x_i). В результате получим следующую матрицу:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,r-1} & b_{1r} & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2,r-1} & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} & c_r \end{array}\right]$$

$$r \leq m,\ b_{11} \neq 0, \dots, b_{rr} \neq 0.$$

В последней ступенчатой матрице путем элементарных преобразований на месте первых ненулевых элементов получим 1, а все элементы выше полученных единиц аннулируем. В результате получим следующую матрицу:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0b'_{1,r+1} & \dots & b'_{1n} & c'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0b'_{2,r+1} & \dots & b'_{2n} & c'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1b'_{r,r+1} & \dots & b'_{rn} & c'_r \end{bmatrix}$$

Составим по этой матрице систему:

$$\begin{cases} x_1 + b'_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + b'_{1n}x_n = c'_1, \\ x_2 + b'_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + b'_{2n}x_n = c'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r + b'_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + b'_{rn}x_n = c'_r. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Возможны следующие варианты:
1) Пусть $r < n$. Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, при которых стоят первые ненулевые коэффициенты уравнений системы 3.2.2 называются базисными неизвестными системы, а остальные неизвестные – свободными неизвестными. Выразим в системе 3.2.2 базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -b'_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - b'_{1n}x_n + c'_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = -b'_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - b'_{rn}x_n + c'_r. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Система 3.2.3 будет равносильной к системе 3.1.1 в случае обратной перенумерации неизвестных.
Вектор $(-b'_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - b'_{1n}x_n + c'_1, \ldots, -b'_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - b'_{rn}x_n + c'_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$ называется общим решением системы 3.1.1. Так как свободные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ принимают произвольные значения чис-

лового поля $\mathbb{P}$, то система 3.1.1 имеет бесконечное множество решений.
2) Пусть $r = n$. тВ этом случае число строк ступенчатой матрицы для расширенной равно числу неизвестных. В этом случае система 3.2.2 примет вид:

$$\begin{cases} x_1 = c'_1, \\ x_2 = c'_2, \\ \ldots\ldots \\ x_r = c'_r. \end{cases}$$

Следовательно система 3.1.1 имеет единственное решение $(c'_1, \ldots, c'_r)$.

□

Следствие 3.2.1. Любая однородная система линейных уравнений совместна. Причем она определенная, если число строк в ступенчатой матрице для матрицы A равно числу неизвестных, и неопределенная, если это число меньше числа неизвестных.

Следствие 3.2.2. Всякая однородная система линейных уравнение, в которой число уравнений меньше числа неизвестных является неопределенной.

Теорема 3.2.4. (*Кронекера — Капелли.*)
Система 3.1.1 совместна тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$. Причем система 3.1.1 определенная, если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = n$, и неопределенная, если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B < n$.

Следствие 3.2.3. Всякая однородная система совместна, причем она определенная, если ранг матрицы A этой системы равен числу неизвестных и неопределенная, если ранг матрицы A меньше числа неизвестных.

3.3. Метод Гаусса решения СЛУ.

Пусть дана неоднородная система линейных уравнений. Метод Гаусса заключается в следующем:
1. составляют расширенную матрицу B системы из (1.2.1);
2. элементарными преобразованиями строк приводим матрицу B к ступенчатой матрице B';
3. пользуясь критерием Гаусса или Кронекера — Капелли, по ступенчатой матрице B' выясняем совместа система или нет;
4. в случае совместности составляем по ступенчатой матрице систему равносильную данной системе (1.2.1);
5. из этой системы, если она определенная, находим значения переменных и записываем их в виде вектора;
6. если система неопределенная, то выражаем базисные переменные через свободные и записываем общее решение системы (1.2.1) в виде вектора.
Метод Гаусса заключается в следующем:
1. составляем матрицу A данной системы 3.1.1;
2. элементарными преобразованиями строк приводим ее к ступенчатой

матрице A;
3. пользуясь теоремой Гаусса или Кронекера-Капелли, выясняем вопрос о числе решений системы 3.1.1;
4. по системе, соответствующей ступенчатой матрице A', находим все решения системы.

Пример 3.3.1. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = -9. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Решение:
1) Составим расширенную матрицу B и приводим ее к ступенчатому виду:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 7 & -5 & 4 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Последняя строка ступенчатой матрицы для расширенной матрицы B нулевая,поэтому система несовместима: Аналогиченое заключение получаем по критерию Кронекера — Капелли: $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} B$.

$$3)\ B = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & -9 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & -12 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 \end{array}\right].$$

Так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$, то система совместна. Составим равносильную к исходной систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_3 - 5x_4 = -4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 5x_4 - 4, \\ 2x_1 = x_2 + 5x_4 - 4 - 3x_4 + 3. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 5x_4 - 4, \\ x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_4\frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (\tfrac{1}{2}x_2 + x_4\tfrac{1}{2}; x_2; 5x_4 - 4; x_4) \in \mathbb{R}^4$$

Таким образом вектор является общим решением системы.

$$2)B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 4 = n$, то система совместна. Составим по ступенчатой матрице систему равносильную данной.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5, \\ x_3 + 9x_4 = 9, \\ x_4 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, вектор $(-1;-1;0;1) \in \mathbb{R}^4$ является единственным решением исходной системы.

4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$

Так как $\operatorname{rang} A = 2 < 3 = \mathrm{n}$, то система неопределенная. Составим по ступенчатой матрице систему, равносильную данной.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Выразим базисные неизвестные через свободные.

$$\begin{cases} x_2 = x_3, \\ x_1 = x_3. \end{cases}$$

Таким образом вектор $(x_3; x_3; x_3)$ является общим решением исходной системы.

РАЗДЕЛ 4
Линейные векторные пространства

4.1. Базис и размерность векторного пространства. Изоморфизм векторных пространств

Определение 4.1.1. **Базисом векторного пространства** L над полем $\mathbb{P}$ называется его линейно независимая система векторов, через которую линейно выражается каждый вектор пространства.

Замечание 4.1.1. Нулевое пространство над полем $\mathbb{P}$, то есть пространство, состоящее из одного нулевого вектора не имеет базиса.

Пример 4.1.1. 1) Система единичных векторов $\underbrace{(1,\ldots,0)}_{n},\ldots,\underbrace{(0,\ldots,1)}_{n}$ пространства $\mathbb{P}^n$ над полем $\mathbb{P}$ является базисом этого пространства.
2) Векторы $1, i$ – базис пространства $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$.
3) Рассмотрим пространство $M_2(\mathbb{R})$ вещественных матриц 2-го порядка над полем $\mathbb{R}$.

Матрицы $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ образуют базис пространства $M_2(\mathbb{R})$.

Определение 4.1.2. Линейно независимая система векторов пространства L над полем $\mathbb{P}$ называется **максимальной линейно неза-**

висимой системой, если при добавление к ней произвольного вектора из L получается линейно зависимая система.

Теорема 4.1.1. Система векторов пространства L над полем $\mathbb{P}$ образуют базис этого пространства тогда и только тогда, когда является максимальной линейно независимой системой.

Теорема 4.1.2. Любые два базиса одного и того же пространства L над полем $\mathbb{P}$ имеют одинаковое число векторов.

Определение 4.1.3. **Размерностью** векторного пространства L над полем $\mathbb{P}$ называется число векторов в любом базисе пространства L и обозначается $\dim\, L$.

Пример 4.1.2. $\dim\,\{0\} = 0$, $\dim\,\mathbb{C}(\mathbb{R}) = 2$, $\dim\, M_2(\mathbb{R}) = 4$, $\dim\,\mathbb{P}^n = n$.

Определение 4.1.4. Если $\dim\, L = n$, то пространство L называют **n-мерным векторным пространством** и обозначают L_n.

Существуют векторные пространства, содержащие линейно независимые системы с любым числом векторов. Такие пространства называют **бесконечномерными.** Они не имеют базиса.

Теорема 4.1.3. Всякая система, содержащая более n векторнов пространства L_n, линейно зависима.

Следствие 4.1.1. Всякая линейно независимая система векторов пространства L_n содержит не более n векторов.

Теорема 4.1.4. Всякая линейно независимая система векторов пространства L_n над полем $\mathbb{P}$ является базисом, если содержит n векторов, и может быть дополнена до базиса, если содержит менее n векторов.

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ (a) – линейно независимая система векторов. При добавлении к ней вектора $b \in L_n$ система $a_1, \ldots, a_n, b$ будет линейно зависимой, а, значит, система (a) максимальная линейно независимая система. Тогда (a) – базис пространства L_n.
Пусть $a_1, \ldots, a_m$ (a') – линейно независима система векторов. Если при добавлении к ней вектора из L_n получим линейно зависимую систему, то $\dim L_n = m < n$. Противоречие.
А, значит, постепенно добавление вектора из L_n получим линейно независимую систему векторов, содержащую n векторов. □

Пример 4.1.3. Покажите, что система векторов $a_1 = (5, 4, 3)$, $a_2 = (3, 3, 2)$, $a_3 = (8, 1, 3)$ линейно зависима.

Пример 4.1.4. Докажите, что система векторов $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (2, 3, 3)$, $a_3 = (3, 7, 1)$ базис пространства $\mathbb{R}^3$.

4.2. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств

Пусть

$$U_1, U_2, \ldots, U_k \tag{4.2.1}$$

– подпространства пространства L над полем $\mathbb{P}$.

Определение 4.2.1. **Пересечением подпространств** из (4.2.1) называется множество векторов, которые принадлежат каждому из этих подпространств. Обозначается пересечение подпространств через $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$

Определение 4.2.2. **Суммой подпространств** из (4.2.1) называется множество векторов пространства L, каждый из которых есть сумма $u_1 + u_2 + \cdots + u_k$, где $u_i \in U_i$.

Обозначается сумма подпространств через $\sum\limits_{i=1}^{k} U_i$.

Теорема 4.2.1. Сумма и пересечение подпространств пространства L над полем $\mathbb{P}$ являются подпространствами этого пространства.

Доказательство. Пусть $U = \sum\limits_{i=1}^{k} U_i$. Тогда для любых $a, b \in U$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ имеем, что $\alpha a + \beta b = \alpha \sum\limits_{i=1}^{k} a_i + \beta \sum\limits_{i=1}^{k} b_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha a_i + \beta b_i \in U$ (так как a_i

и $b_i \in U_i$, то $\alpha a_i + \beta b_i \in U_i$). Пусть $V = \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$, $V \subset L$, $V \neq \emptyset$. Тогда для любых $a, b \in V$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ имеем, что $a, b \in U_i$. Следовательно $\alpha a_i + \beta b_i \in U_i$ и $\alpha a_i + \beta b_i \in V$.

Значит, V подпространство пространства L. □

Лемма 4.2.1. Сложение подпространств коммутативно и ассоциативно.

Лемма 4.2.2. Если $U_1 \subset U_2$, то $U_1 + U_2 = U_2$.

Теорема 4.2.2. Пусть U и V подпространства пространства L, тогда $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \bigcap V)$.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (a)– базис пространства $X = U \bigcap V$. Очевидно, что (a) содержится в U и в V. Дополним линейно независимую систему (a) до базиса пространства V :

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_s \tag{4.2.2}$$

и до базиса пространства U:

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, c_{k+1}, \ldots, c_m \tag{4.2.3}$$

Рассмотрим систему векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_s, \ldots, c_{k+m}, \ldots, c_m \tag{4.2.4}$$

Покажем, что система(4.2.4) базис подпространства $Y = U + V$. Пусть y – любой вектор пространства Y. Тогда $y = u + v$. Вектор U линейно выражается через систему (4.2.3), а вектор v через систему (4.2.2). Тогда вектор y линейно выражается через систему (4.2.4).
Покажем, что система (4.2.4) линейно независима. Рассмотрим равенство:
$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k + \beta_{k+1} b_{k+1} + \cdots + \beta_s b_s + \tau_{k+1} c_{k+1} + \cdots + \tau_m c_m = 0.$
Пусть $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k + \beta_{k+1} b_{k+1} + \cdots + \beta_s b_s = -\tau_{k+1} c_{k+1} - \ldots$ $\cdots - \tau_m c_m$. Очевидно, что вектор a принадлежит как пространству U так и V. А значит, $a \in X$. Тогда $a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ и поэтому $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = -\tau_{k+1} c_{k+1} - \tau_m c_m$.

Отсюда следует, что $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \tau_{k+1} = \cdots = \tau_m = 0$, так как система (4.2.3) линейно независима, а значит $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_{k+1} = \cdots = \beta_s = 0$, так как система (4.2.2) линейно независима. Таким образом система (4.2.4) базис. Поэтому $\dim\,(U+V) = k+(s-k)+(m-k) = s+m - k = \dim\,U + \dim\,V - \dim\,U \cap V$. $\square$

Определение 4.2.3. Сумма подпространств (4.2.1) называется **прямой** и обозначается $U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$, если каждый ее вектор можно единственным образом представить в виде суммы векторов этих подпространств.

Теорема 4.2.3. Сумма подпространств (4.2.1) является прямой тогда и только тогда, когда каждое из подпространств пересекается с сум-

Кафедра
АГ и ММ

Начало

Содержание

Назад

На весь экран

Закрыть

мой оставшихся подпространств по нулевому подпространству.

Следствие 4.2.1. $\dim\ U \oplus V = \dim\ U + \dim\ V$.

4.3. Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений

Теорема 4.3.1. Множество M всех решений однородной системы линейных уравнений n неизвестных над полем $\mathbb{P}$ является подпространством пространства $\mathbb{P}^n$, а размерность этого подпространства $\dim\ M = n - \operatorname{rang} A$.

Доказательство. Пусть дана система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

Запишем систему (4.3.1) в векторной форме:

$$x_1a^1 + x_2a^2 + \dots + x_na^n = [0]$$

$$a^i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

Покажем, что M подпространство пространства $\mathbb{P}^n$. Воспользуемся критерим подпространства. Очевидно, так как нулевой вектор принадлежит M, то $M \neq \emptyset$ и $M \subset \mathbb{P}^n$.
1) $\forall a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $b = (\beta_1, \ \ldots, \beta_n) \in M$
$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$.
Сумма любых двух решений однородной системы линейных уравнений является так же решением. Действительно, $(\alpha_1 + \beta_1)a^1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)a^n = [0]$, так как выполняется дистрибутивность умножения векторов относительно сложения скаляров.
$\alpha_1 a^1 + \cdots + \alpha_n a^n + \beta_1 a^1 + \cdots + \beta_n a^n = [0]$
2) $\forall \beta \in \mathbb{P}, \forall a \in (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in M, \ \beta a = (\beta\alpha_1, \ldots, \beta\alpha_n) \in M$
Произведение любого решения однородной системы линейных уравнений на любой скаляр является решением данной системы. Действительно, $(\beta\alpha_1)e^1 + \cdots + (\beta\alpha_n)e_n = \beta(\alpha_1 a^1) + \cdots + \beta(\alpha_n a^n) = \beta(\alpha_1 a^1 + \ldots$
$+ \alpha_n a^n) = \beta \cdot [0] = [0]$.
Таким образом M подпространство пространства $\mathbb{P}^n$, если rang $A = 0$, то A – нулевая матрица.Поэтому любой вектор $b \in \mathbb{P}^n$ будет являться решением системы (4.3.1), то есть $M \in \mathbb{P}^n$ и dim M =dim $\mathbb{P}^n - 0 =$ dim $\mathbb{P}^n -$rang $A = n -$ rang A.
Если rang $A = n$, то система (4.3.1) по критерию Кронекера-Капелли имеет единственное решение (нулевое), то есть dim $M = 0 = n-$rang A.
Пусть rang $A = r$ =rang$(a^1, \ldots, a^n)$, где $a^1, \ldots, a^r$ – базис системы (a).

Тогда $\begin{cases} a^{r+1} = \alpha_{r+1,1}a^1 + \alpha_{r+1,2}a^2 + \cdots + \alpha_{r+1,r}a^r, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a^n = \alpha_{n,1}a^1 + \alpha_{n,2}a^2 + \cdots + \alpha_{n,r}a^r. \end{cases}$ или

$$\begin{cases} (-\alpha_{r+1,1})a^1 + \cdots + (-\alpha_{r+1,r})a^r + 1 \cdot a^{r+1} + \cdots + 0 \cdot a^n = [0], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (-\alpha_{n,1})a^1 + \cdots + (-\alpha_{n,r})a^r + 0 \cdot a^{r+1} + \cdots + 1 \cdot a^n = [0]. \end{cases}$$

Очевидно, что вектора:

$$c_{r+1}(-\alpha_{r+1,1}, \dots, -\alpha_{r+1,r}, 1, 0, \dots, 0) \dots c_n(-\alpha_{n,1}, \dots, -\alpha_{n,r}, 0, \dots, 1) \tag{4.3.2}$$

являются решением системы (4.3.1). Их число равно $n-r$. Покажем, что система 4.3.2 является базисом. Для этого составим матрицу и найдем ее решение.

$$\begin{bmatrix} -\alpha_{r+1,1} \cdots - \alpha_{r+1,1} & 1 & 0 \dots 0 \\ -\alpha_{nr} \quad \dots \quad -\alpha_{nr} & 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix}$$

Так как $M_{n-r} = \begin{vmatrix} 1 \dots 00 \\ 00 \dots 1 \end{vmatrix} = 1$, то $\operatorname{rang} c = n - r$, а значит, система 4.3.2 линейно независима. Рассмотрим произвольный вектор $a = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in M$. Покажем, что a линейно выражается через (4.3.2).

Построим вектор $b = \sum_{i=r+1}^{n} \beta_j c_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n)$, где $\alpha_i \in \mathbb{P}$ – первые r координат вектора b. Очевидно, что a и $b \in M$, а значит $a - b \in M$. Тогда $(\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_r - \beta_r, 0, \ldots, 0) \in M$. Поэтому $(\alpha_1 - \beta_1)a^1 + \cdots + (\alpha_r - \beta_r)a^r = [0]$. Так как система $a^1, \ldots, a^r$ – линейно независима то $\alpha_i = \beta_i$ и $a = b$. Значит, $\dim M = n - r = n - \operatorname{rang} A$. $\square$

Определение 4.3.1. Подпространство M всех решений однородной системы линейных уравнений называют **пространством решений** этой системы, а базис этого подпространства называют **фундаментальной системой** решений данной системы.

РАЗДЕЛ 5
Алгебра линейных операторов

5.1. Образ, ядро и матрица линейного оператора

Хорошо известно, что отображение множества можно задать указав образы каждого элемента множества. Поэтому линейный оператор φ пространства L_n над полем $\mathbb{P}$ можно задать образом $\varphi(x)$ любого вектора $x \in L_n$. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ (u) базис пространства L_n. Тогда $x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Отсюда $\varphi(x) = \alpha_1 \varphi(u_1) + \cdots + \alpha_n \varphi(u_n)$. Таким образом, $\varphi(x)$ задается образами базисных векторов, которые содержатся в L_n, а значит, тоже выражаются через базис L_n, то есть

$$\varphi(u_i) = [u_1, \ldots, u_n] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \ldots \\ \alpha_{ni} \end{bmatrix}.$$

Тогда:

$$[\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)] = [u_1, \ldots, u_n] \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Обозначим матрицу $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ через $M^{\varphi}_{(u)}$

Определение 5.1.1. Матрица $M^{\varphi}_{(u)}$ n - го порядка над полем $\mathbb{P}$, i-ый столбец которой есть координатный столбец вектора $\varphi(u_i)$ в базисе (u) называется **матрицей линейного оператора** φ **в базисе** (u).

Таким образом матрица $M^{\varphi}_{(u)}$ задает линейный оператор φ.

Образ и ядро линейного оператора.

Определение 5.1.2. Множество образов всех векторов пространства L_n, на которое действует линейный оператор φ, называется **образом линейного оператора** φ и обозначается Im φ, то есть

$$\text{Im } \varphi = \{\varphi(x) | x \in L_n\}.$$

Теорема 5.1.1. Im φ является подпространством пространства L_n.

Определение 5.1.3. Размерность образа линейного оператора φ называется **рангом линейного оператора** φ и обозначается rang φ.

Легко показать, что rang φ =rang $M^{\varphi}_{(u)}$.

Определение 5.1.4. Множество векторов пространства L_n, которые линейным оператором φ переводятся в нулевой вектор пространства L_n, называется **ядром оператора** φ и обозначается $\mathrm{Ker}\ \varphi$.

Теорема 5.1.2. $\mathrm{Ker}\ \varphi$ является подпространством пространства L_n.

Определение 5.1.5. Размерность ядра оператора φ называется **дефектом** и обозначается $\mathrm{def}\ \varphi$.

Теорема 5.1.3. $\mathrm{rang}\ \varphi + \mathrm{def}\ \varphi = n = \dim L_n$

Связь между координатными столбцами векторов x и $\varphi(x)$

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ (u) – произвольный базис пространства L_n, на которое действует линейный оператор φ,

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ — координатный столбец вектора x в базисе (u),

$\begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$ — координатный столбец вектора $\varphi(x)$ в базисе (u).

Тогда:

$$x = [u_1, \ldots, u_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ и } \varphi(x) = [\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$$\text{Кроме того } \varphi(x) = [u_1, \ldots, u_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Так как

$$[\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)] = [u_1, \ldots, u_n]\ M^{\varphi}_{(u)}$$

то

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix} = M^{\varphi}_{(u)} \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{5.1.1}$$

Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ (u) и $v_1, \ldots, v_n$ (v) – базисы пространства L_n над полем $\mathbb{P}$, T – матрица перехода от базиса (u) к базису (v), то есть

$$[v_1, \ldots, v_n] = [u_1, \ldots, u_n]\, T, \tag{5.1.2}$$

$M^{\varphi}_{(u)}$, $M^{\varphi}_{(v)}$ – матрицы линейного оператора φ в базисе (u) и (v), соответственно. Тогда справедливы следующие соотношения

$$[\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)] = [u_1, \ldots, u_n]\, M^{\varphi}_{(u)} \tag{5.1.3}$$

$$[\varphi(v_1),\ldots,\varphi(v_n)] = [v_1,\ldots,v_n]\, M^{\varphi}_{(v)} \tag{5.1.4}$$

Из (5.1.2) следует, что

$$[\varphi(v_1),\ldots,\varphi(v_n)] = [\varphi(u_1),\ldots,\varphi(u_n)]\, T, \tag{5.1.5}$$

Подставим (5.1.3) и (5.1.4) в (5.1.5). Получим

$$[v_1,\ldots,v_n]\, M^{\varphi}_{(v)} = [u_1,\ldots,u_n]\, M^{\varphi}_{(u)} T \tag{5.1.6}$$

Подставим (5.1.2) в (5.1.6). Получим:

$$[u_1,\ldots,u_n]\; M^{\varphi}_{(v)} T = [u_1,\ldots,u_n]\; M^{\varphi}_{(u)} T.$$

Следовательно $M^{\varphi}_{(v)} = T^{-1}\, M^{\varphi}_{(u)} T$.

Определение 5.1.6. Матрицы A и B n-го порядка над полем $\mathbb{P}$ называются **подобными**, если найдется невырожденная матрица T n-го порядка такая, что $B = T^{-1}AT$.

Следствие 5.1.1. Матрицы линейного оператора в различных базисах подобны.

5.2. Действия над линейными операторами

Пусть L_n – линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, f_1 и f_2 – линейные операторы пространства L_n.

Определение 5.2.1. **Суммой линейных операторов** f_1 и f_2 называется такой оператор $f_1 + f_2$ такой, что $\forall x \in L_n$ $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Определение 5.2.2. **Произведением линейного оператора** f **на скаляр** λ называется оператор λf такой, что $\forall x \in L_n$ $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Соответствующие операции называются сложением линейных операторов и умножением линейного оператора на скаляр. Кроме того, $f_1 + f_2$ и λf также линейные операторы пространства L_n над $\mathbb{R}$.

Утверждение 5.2.1. Множество $V(L_n)$ линейных операторов пространства L_n над полем $\mathbb{P}$ относительно введенных операций является линейным пространством над полем $\mathbb{P}$.

Утверждение 5.2.2. 1) $M_{(u)}^{f_1+f_2} = M_{(u)}^{f_1} + M_{(u)}^{f_2}$.
2) $M_{(u)}^{\lambda f_1} = \lambda M_{(u)}^{f_1}$.

Определение 5.2.3. **Произведением линейных операторов** f_1 и f_2 называется оператор $f_2 f_1$ такой, что $\forall x \in L_n$ $(f_2 f_1)(x) = f_2(f_1(x))$.

Утверждение 5.2.3. 1) Оператор $f_2 f_1$ является линейным.
2) $M_{(u)}^{f_2 f_1} = M_{(u)}^{f_2} M_{(u)}^{f_1}$

Свойства действий над линейными операторами

1) $\varphi_1\varphi_2 \neq \varphi_2\varphi_1$ (Не всегда. Умножение операторов некоммутативно);
2) $(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3 = \varphi_1(\varphi_2\varphi_3)$;
3) $\lambda(\varphi_1\varphi_2) = (\lambda\varphi_1)\varphi_2$;
4) $(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi_3 = \varphi_1\varphi_3 + \varphi_2\varphi_3$;
5) $\varphi_1(\varphi_2 + \varphi_3) = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3$ $(\forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in L_n)$.

Свойства (2) дает возможность ввести понятие степени линейного оператора следующим образом: $\varphi^n = \underbrace{\varphi \cdot \varphi \cdot \cdots \cdot \varphi}_{n} = \varphi^{n-1} \cdot \varphi = \varphi \cdot \varphi^{n-1}$.

$\varphi^0 = \varepsilon$ – тождественный оператор.
$\varphi^1 = \varphi$.
Пусть f – линейный оператор пространства L_n и f – биекция. Тогда существует обратимый оператор f^{-1} пространства L_n такой, что $\forall y = f(x) \in L_n$

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Причем f^{-1} тоже линейный оператор.

Утверждение 5.2.4. Если f – обратимый оператор пространства L_n, то:
1) $\operatorname{Im} f = L_n$;
2) rang f =dim $L_n = n$;
3) def $f = n -$ rang $f = 0$;
4) Ker $f = \{0\}$;
5) $M_{(u)}^{f^{-1}}$ – невырожденная матрица, причем $M_{(u)}^{f^{-1}} = (M_{(u)}^{f})^{-1}$.

Определение 5.2.4. Если на линейном пространстве L над полем $\mathbb{P}$ определена единица и операция умножения векторов, которая является ассоциативной и дистрибутивной относительно сложения, то L называется **линейной алгеброй** над полем $\mathbb{P}$.

Пример 5.2.1. Множество квадратных матриц и многочленов над заданным полем $\mathbb{P}$ являются примерами линейных алгебр. Множество $V(L_n)$ линейных операторов пространства L_n над полем $\mathbb{P}$ является линейной алгеброй над полем $\mathbb{P}$.

Определение 5.2.5. Две линейных алгебры L и L' над полем $\mathbb{P}$ называются **изоморфными**, если существует биективное отображение f пространства L на пространство L', удовлетворяющее следующим условиям:
1) $\forall a, b \in L \; f(a+b) = f(a) + f(b),\; f(ab) = f(a)f(b)$
2) $\forall a \in L \; \forall \alpha \in \mathbb{P} \; f(\alpha a) = \alpha f(a)$.

Кафедра
АГ и ММ

Начало

Содержание

Назад

На весь экран

Закрыть

5.3. Собственные вектора и собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение линейного оператора

Определение 5.3.1. Ненулевой вектор x пространства L_n над полем $\mathbb{P}$, называется **собственным вектором** линейного оператора φ, если $\exists\lambda \in \mathbb{P}$ такой, что $\varphi(x) = \lambda x$. Коэффициент λ называется **собственным значением** линейного оператора φ, соответствующим собственному вектору x.

Замечание 5.3.1. Всякому собственному вектору соответствует единственное собственное значение.

Обратно: Всякому собственному значению линейного оператора φ соответствует хотя бы один собственный вектор. Действительно, пусть λ_0 – собственное значение оператора φ. Покажем, что всякий вектор вида αx, $\alpha \neq 0$ является собственным вектором оператора φ, где x – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_0.
$\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha(\lambda_0(x)) = (\alpha\lambda_0)x = \lambda_0(\alpha x)$.
Пусть линейный оператор φ пространства L_n над полем $\mathbb{P}$ задан матрицей $M_{(u)}^{\varphi}$ в некотором базисе (u): $M_u^{(\varphi)} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$.

Пусть $x = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n$ – собственный вектор линейного оператора φ, соответствующий собственному значению λ_0.

Тогда $\varphi(x) = \lambda_0 x = (\lambda_0\beta_1)u_1 + (\lambda_0\beta_2)u_2 + \cdots + (\lambda_0\beta_n)u_n$.

Значит $\begin{bmatrix}\lambda_0\beta_1\\ \dots\\ \lambda_0\beta_n\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}\beta_1\\ \dots\\ \beta_n\end{bmatrix}$ – координатный столбец вектора $\varphi(x)$ в базисе (u). Кроме того, $\lambda_0 \begin{bmatrix}\beta_1\\ \dots\\ \beta_n\end{bmatrix} = M^{\varphi}_{(u)} \begin{bmatrix}\beta_1\\ \dots\\ \beta_n\end{bmatrix}$. Поэтому

$$(M^{\varphi}_{(u)} - \lambda_0 E)\begin{bmatrix}\beta_1\\ \dots\\ \beta_n\end{bmatrix} = [0] \tag{5.3.1}$$

где E – единичная матрица порядка n, $[0]$ – нулевая матрица размера $n \times 1$. Перепишем (5.3.1) в следующем виде:

$$\begin{cases}(\alpha_{11} - \lambda_0)\beta_1 + \cdots + \cdots + \alpha_{1n}\beta_n = 0\\ \alpha_{21}\beta_1 + (\alpha_{22} - \lambda_0)\beta_2 + \cdots + \alpha_{2n}\beta_n = 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_{n1}\beta_1 + \cdots + \cdots + (\alpha_{nn} - \lambda_0)\beta_n = 0\end{cases}$$

Очевидно, что собственный вектор x является ненулевым решением системы n однородных линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} (\alpha_{11}-\lambda_0)x_1+\cdots+\cdots+\alpha_{1n}x_n=0 \\ \alpha_{21}x_1+(\alpha_{22}-\lambda_0)x_2+\cdots+\alpha_{2n}x_n=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}x_1+\cdots+\cdots+(\alpha_{nn}-\lambda_0)x_n=0 \end{cases} \tag{5.3.2}$$

Система (5.3.2) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda_0 & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \left|M^{\varphi}_{(u)}-\lambda_0 E\right| = 0.$$

Поэтому λ_0 – корень алгебраического уравнения n - ой степени с неизвестной λ:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \left|M^{\varphi}_{(u)}-\lambda E\right| = 0. \tag{5.3.3}$$

Определение 5.3.2. Уравнение (5.3.3) называется **характеристическим уравнением** линейного оператора φ, а многочлен $\left|M^{(\varphi)}_{(u)}-\lambda E\right|$ называется **характеристическим многочленом** линейного оператора φ.

Всякий корень уравнения (5.3.3), который принадлежит полю $\mathbb{P}$, является соответственным значением линейного оператора φ. Так будут найдены все собственные значения линейного оператора φ.

Замечание 5.3.2. Характеристическое уравнение матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Рассмотрим множество $L(\lambda_0) = \{x \in L_n | \varphi(x) = \lambda_0 x\}$ – множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_0 вместе с нулевым вектором из L_n. Покажем, что $L(\lambda_0)$ – векторное подпространство пространства L_n:

1) $\forall x, y \in L(\lambda_0)$ $x + y \in L(\lambda_0)$.

$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \lambda_0 x + \lambda_0 y = \lambda_0(x + y)$.

2) $\forall x \in L(\lambda_0)$, $\alpha \in \mathbb{P}$ $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha\lambda_0 x = \lambda_0(\alpha x)$.

Значит $\alpha x \in L(\lambda_0)$.

Определение 5.3.3. Пространство $L(\lambda_0)$ называется **собственным подпространством** линейного оператора.

Определение 5.3.4. Говорят, что α_0 является k - кратным корнем многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x - \alpha_0)^k$, но не делится на $(x - \alpha_0)^{k+1}$.

Пример 5.3.1. Линейный оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ задан в базисе (e) матрицей $M^{\varphi}_{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Найдите собственные значения, собственные вектора им соответствующие для данного оператора φ.

<u>Решение.</u>

Решим характеристическое уравнение $\left|M_{(e)}^{\varphi} - \lambda E\right| = 0.$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$(2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda(\lambda-4)+4) = 0;$

$(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda_4) = 0.$

$\lambda_0 = 2$ — 3-кратный корень характеристического уравнения.

Составим систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

где x_3 любое. Приведет матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

По полученной ступенчатой матрице составим и решим систему линейных уравнений, равносильную данной. $-2x_1 + x_2 = 0$, x_1, x_3 – свободные неизвестные.
$\dim L(2) = 3 - \text{rang } A = 2$. $x_2 = 2x_1$.
Таким образом $\{(x_1, 2x_1, x_3), x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$ — множество всех собственных векторов, соответствующих $\lambda_0 = 2$

Говорят, что матрица линейного оператора приводится к диагональному виду, если существует базис пространства, в котором матрица является диагональной.

Теорема 5.3.1. Матрица линейного оператора φ пространства L_n над полем $\mathbb{P}$ в базисе $a_1, \ldots, a_n$ (a) пространства L_n является диагональной тогда и только тогда, когда этот базис состоит из собственных векторов линейного оператора φ.

РАЗДЕЛ 6
Евклидовы пространства

6.1. Скалярное умножение. Евклидово пространство

Определение 6.1.1. Пусть L – векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Отображение $L^2 \to \mathbb{R}$ называется **скалярным умножением векторов** из L, а образ пары векторов $(a, b) \in L^2$ при этом отображении называется **скалярным произведением векторов** a и b и обозначается $a \cdot b$, если выполняются следующие условия (аксиомы скалярного произведения):
1) $(\forall a, b \in L)\ a \cdot b = b \cdot a$;
2) $(\forall a, b, c \in L)\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
3) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ (\forall a, b \in L)\ (\alpha a)b = \alpha(a \cdot b)$;
4) $(\forall a \in L, a \neq \bar{0})\ a^2 > 0$.

Векторное пространство L над полем $\mathbb{R}$ со скалярным умножением векторов из L называется **евклидовым пространством** и обозначается символом E.

Пример 6.1.1. 1) Обычное скалярное произведение в пространстве V_3 является скалярным произведением в смысле приведенного вышего определения. Таким образом, пространство V_3 геометрических векторов, в котором определено скалярное умножение, является евклидовым пространством.

2) В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение векторов $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ зададим формулой $a \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$. (Проверте, что аксиомы (1-4) при этом выполняются). Значит, пространство $\mathbb{R}^n$ евклидово пространство.

3) В пространстве $C_{[a,b]}$ непрерывных функций действительной переменной на промежутке $[a, b]$ скалярное произведение функций f и g определяется по формуле $fg = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$. (Убедитесь, что эта формула задает скалярное произведение).

Таким образом, пространство $C_{[a,b]}$ с определенной на нем операцией скалярного умножения является евклидовым.

Теорема 6.1.1. Любое ненулевое векторное пространство L_n над полем $\mathbb{R}$ можно преобразовать в евклидово пространство E_n, это значит в $\mathbb{L}_n$ можно ввести скалярное умножение.

Доказательство. Действительно, это можно сделать, например, следующим способом. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n$ – произвольный базис пространства L_n. Для любых векторов $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, $b = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i u_i$ из $\mathbb{L}_n$ примем

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i. \qquad (6.1.1)$$

Введенное таким образом скалярное умножение векторов удовлетворяет аксиомам (1 - 4). На самом деле, когда $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, $b = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i u_i$, $c = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i u_i$ – любые векторы пространства L_n и λ – любое действительное число, то:

1) $a \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \; \alpha_i = b \cdot a$;

2) $(a + b) \cdot c = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\gamma_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_i = a \cdot c + b \cdot c$;

3) $(\lambda a) \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_) \beta_i = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \lambda(a \cdot b)$;

4) $a \neq 0 \; a^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$, поскольку хотя бы одно из чисел α_i $(i = \overline{1, n})$ отличается от нуля.

Таким образом, получено евклидово пространство $\mathbb{E}_n$. $\square$

Заметим, что выбирая в пространстве L_n различные базисы, получим из L_n различные евклидовы пространства. Можно даже другими способами преобразовать пространство L_n в евклидово.

Но дальше будет доказано, что как бы не выбиралось в пространстве L_n скалярное произведение, все эти пространства изоморфны между собой и обязательно найдется такой базис пространства E (и даже не один), в котором скалярное произведение выражается формулой (6.1.1).

Рассмотрим простейшие свойства скалярного произведения.

1)$(\forall a, b \in E)$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Действительно, применяя аксиомы (1),(2), получим: $a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a = a \cdot b + a \cdot c$;

2)$(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ $(\forall a, b \in E)$ $a \cdot (\alpha b) = \alpha(a \cdot b)$. На самом деле, с аксиом (1),(3) следует, что $a \cdot (\alpha b) = (\alpha b) \cdot a = \alpha(a \cdot b)$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} b_j = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{m} a_i \cdot b_j$ – формула скалярного произведения двух произвольных систем векторов $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_m$ из E;

4)$\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j b_j = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (a_i \cdot b_j)$ – формула скалярного произведения линейных комбинаций двух произвольных систем векторов $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_m$ из E.(Формулы (3) и (4) докажите самостоятельно методом математической индукции);

5) $(\forall a \in E)$ $a \cdot 0 = 0$. Действительно, $a \cdot 0 = a \cdot (0 \cdot b) = 0(a \cdot b) = 0$, где b – любой вектор из E. В частности, $0^2 = 0$, это значит скалярный квадрат нулевого вектора равен 0.

Заметим, что с формулы (4) получим для произвольного базиса $u_1, \ldots, u_n$ пространства E_n и для любых векторов $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, $b = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j u_j$, что

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_i (u_i \cdot u_j).$$

6.2. Длина вектора. Угол между векторами. Ортогональность

Пусть a – любой вектор пространства E. Известно, что $a^2 \geq 0$.

Определение 6.2.1. **Длиной(нормой, модулем) вектора** a называется арифметический квадратный корень из скалярного квадрата этого вектора.

Обозначим длину вектора a через $||a||$. Таким образом, $||a|| = \sqrt{a^2}$. Значит, $||a||^2 = a^2$.

Определение 6.2.2. Вектор a называется **нормированным**, когда $||a|| = 1$.

Рассмотрим некоторые свойства нормы вектора.
1) $||a|| \geq 0$, причем $|a| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = o$.
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $||\alpha a|| = |\alpha| \cdot ||a||$. Действительно, $||\alpha a|| = \sqrt{(\alpha a) \cdot (\alpha a)} = \sqrt{\alpha^2 a^2} = |\alpha| \sqrt{a^2} = |\alpha| \cdot ||a||$.

Вывод. Любой ненулевой вектор $a \in \mathbb{E}$ можно нормировать, это значит, преобразовать в нормированный вектор. Для этого достаточно вектор a умножить на число $\frac{1}{||a||}$ или $-\frac{1}{||a||}$. На самом деле, $\left|| \pm \frac{1}{||a||} \cdot a|\right| = \frac{1}{||a||} \cdot ||a|| = 1$.

Кафедра АГ и ММ

Начало

Содержание

Страница 102 из 171

Назад

На весь экран

Закрыть

3) $(\forall a, b \in E)$ $|a \cdot b| \le ||a|| \cdot ||b||$ (неравенство Коши-Буняковского), причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда векторы a и b линейно зависимы.

Доказательство. Когда хотя бы один с векторов нулевой, то неравенство Коши-Буняковского очевидно. Пусть a и b – произвольные ненулевые вектора пространства E, а α – любое действительное число. Понятно, что $(\alpha a - b)^2 \ge 0$, откуда $\alpha^2 a^2 - 2\alpha(a \cdot b) + b^2 \ge 0$. Заметим, что левая часть последнего неравенства есть квадратный трехчлен относительно α. Поэтому это неравенство действительно при всех $\alpha \in R$ тогда и только тогда, когда дискриминант трехчлена неположительный, то есть $(a \cdot b)^2 - a^2 b^2 \le 0$ или $(a \cdot b)^2 \le a^2 b^2$. Поскольку обе части неравенства неотрицательные, то $\sqrt{(a \cdot b)^2} \le \sqrt{a^2 b^2}$ или $|a \cdot b| < ||a|| \cdot ||b||$. Когда векторы a и b линейно зависимы, то $b = \alpha a$. Тогда $|a \cdot b| = |a \cdot (\alpha a)| = |\alpha| \cdot ||a||^2 = ||a|| \cdot ||b||$. Когда же векторы a и b линейно независимы, то при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha a - b \ne 0$, а поэтому $(\alpha a - b)^2 > 0$, откуда $|a \cdot b| < ||a|| \cdot ||b||$. □

4) $(\forall a, b \in E)$ $||a + b|| \le ||a|| + ||b||$ (неравенство треугольника). Действительно, $||a + b||^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$. Но поскольку, по неравенству Коши-Буняковского, $|a \cdot b| \le ||a|| \cdot ||b||$, то $||a + b||^2 \le$
$\le ||a||^2 + 2||a||\ ||b|| + ||b||^2 = (||a|| + ||b||)^2$, и поэтому $||a + b|| \le ||a|| + ||b||$.
Пусть a и b – ненулевые вектора евклидового пространства E. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что $\frac{|a \cdot b|}{||a|| \cdot ||b||} \le 1$. Поэтому на проме-

жутке $[0,\pi]$ из равенства $\cos\varphi = \frac{a\cdot b}{||a||\cdot||b||}$ однозначно определяется число φ, а значит, корректно будет следующее определение.

Определение 6.2.3. **Углом между ненулевыми векторами a и b** пространства E называется такое действительное число φ, $0\le\varphi\le\pi$, что $\cos\varphi = \frac{a\cdot b}{||a||\cdot||b||}$. С этого определения следует, что $a\cdot b = ||a||\cdot||b||\cos\varphi$.

Определение 6.2.4. Векторы a и b пространства E называются **ортогональными или взаимно ортогональными** и пишут $a\perp b$, когда их скалярное произведение равно нулю.

Отметим некоторые свойства ортогональных векторов.

1) $a\perp a$ тогда и только тогда, когда $a=0$.

2) Вектор a ортогонален каждому вектору пространства E тогда и только тогда, когда $a=0$.

3) Ненулевые вектора a и b пространства E ортогональны тогда и только тогда, когда угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

4) $(\forall a,b\in E)$. Если $a\perp b$, то $||a+b||^2 = ||a||^2+||b||^2$.

6.3. Ортогональная система векторов. Процесс ортогонализации. Ортонормированный базис евклидова пространства

Определение 6.3.1. Система векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$ пространства E называется **ортогональной**, когда её векторы попарно ортогональны, это значит $a_i \cdot a_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, k}$. Система, которая состоит из одного вектора, считается ортогональной.

Базис евклидова пространства E, который является ортогональной системой векторов называется **ортогональным базисом**. Например, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ базис $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots$ $\dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ – ортогональный базис.

Теорема 6.3.1. Любая ортогональная система ненулевых векторов пространства E линейно независимая.

Доказательство. Пусть

$$a_1, a_2, \dots, a_k - \tag{6.3.1}$$

ортогональная система ненулевых векторов пространства E. Допустим, что она линейно зависимая, это значит существуют числа $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$, среди которых хотя бы один отличный от нуля такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0. \tag{6.3.2}$$

Пусть $\alpha_j \neq 0, 1 \leq j \leq k$. Умножив скалярно обе части равенства (6.3.2) на вектор a_j, получим равенство $\alpha_1(a_1 a_j)+\cdots+\alpha_j(a_j a_j)+\cdots+\alpha_k(a_k a_j) = 0$.. Отсюда, учитывая ортогональность системы (6.3.1), имеем

$$\alpha_j a_j^2 = 0. \tag{6.3.3}$$

Поскольку по допущению $\alpha_j \neq 0$, то с (6.3.3) следует, что $a_j^2 = 0$. Это означает, что a_j – нулевой вектор, что противоречит условию теоремы.

$\square$

Вывод 1. Любая ортогональная система n ненулевых векторов евклидова пространства E_n является ортогональным базисом этого пространства.

Вывод 2. Любая ортогональная система ненулевых векторов пространства E_n содержит не более n векторов.

Теорема 6.3.2. Всякую систему векторов

$$a_1, \ldots, a_k \tag{6.3.4}$$

пространства E можно ортогонализовать, это значит преобразовать в ортогональную систему векторов

$$b_1, \ldots, b_k \in E \tag{6.3.5}$$

такую, что системы

$$a_1, \ldots, a_i \tag{6.3.6}$$

и

$$b_1, \ldots, b_i, i = \overline{1, k} \tag{6.3.7}$$

эквивалентные.

Доказательство. Систему (6.3.5) будем строить последовательно, применяя способ, который называется **процессом ортогонализации**. Возьмем вектор $b_1 = a_1$. Вектор b_2 будем искать в форме линейной комбинации векторов a_2 и b_1: $b_2 = a_2 + \lambda_1 b_1$. Поскольку b_2 должен быть ортогоналту b_1, то $b_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2 + \lambda_1 b_1^2 = 0$, откуда $\lambda_1 = \frac{-b_1 \cdot a_2}{b_1^2}$. Когда же $b_1 = 0$, то $b_2 \perp b_1$ при $\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}$. Заметим, что системы (6.3.6), (6.3.7) эквивалентные при $i = 1, 2$. Пусть уже построена ортогональная система (6.3.7), эквивалентная системе (6.3.6), $i < k$. Возьмем следующий вектор

$$b_{i+1} = a_{i+1} + \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \cdots + \mu_i b_i, \tag{6.3.8}$$

где $\mu_j, j = \overline{1, i}$ – пока неизвестное действительное число. Условия ортогональности b_{i+1} каждому $b_j (j = \overline{1, i})$ дают систему уравнений для определения μ_j: $b_{i+1} \cdot b_j = a_{i+1} \cdot b_j + \mu_j b_j^2 = 0, j = \overline{1, i}$. Когда $b_j \neq 0$, то $\mu_j = -\frac{b_j \cdot a_{i+1}}{b_j^2}$. Когда же $b_j = \bar{0}$, то $b_{i+1} \perp b_j$ при $\forall \mu_j \in \mathbb{R}$. Докажем, что системы

$$a_1, \ldots, a_i, a_{i+1} \tag{6.3.9}$$

и

$$b_1, \ldots, b_i, b_{i+1} \tag{6.3.10}$$

эквивалентные. Действительно, система (6.3.7) линейно выражается через систему (6.3.6) ($i < k$), а вектор b_{i+1} – через систему (6.3.9), значит, система (6.3.10) линейно выражается через систему (6.3.9). В свою очередь, система (6.3.6) линейно выражается через систему (6.3.7) ($i < k$), а вектор a_{i+1}, согласно с равенством (6.3.8) – через систему (6.3.10). Значит система (6.3.9) линейно выражается через систему (6.3.10). Поэтому эти системы эквивалентные. Таким образом, всякую систему (6.3.4) можно ортогонализовать, применяя процесс ортогонализации. $\square$

Вывод 3. Всякую линейно независимую систему векторов

$$a_1, \ldots, a_k \tag{6.3.11}$$

пространства E можно преобразовать с помощью процесса ортогонализации в ортогональную линейно независимую систему векторов

$$b_1, \ldots, b_k \in E \tag{6.3.12}$$

Действительно, по теореме (6.3.2) системы (6.3.11) $\sim$ (6.3.12). Так как ранги эквивалентных систем векторов равны, то rang (6.3.11) $=$
$=$ rang (6.3.12) $= k$. Поэтому система (6.3.12) линейно независимая.

Вывод 4. В каждом ненулевом евклидовом пространства E_n существует ортогональный базис. На самом деле, пусть

$$a_1, \ldots, a_n \tag{6.3.13}$$

Кафедра
АГ и ММ

Начало

Содержание

Назад

На весь экран

Закрыть

произвольный базис пространства E_n. По выводу 3 базис (6.3.13) можно преобразовать в ортогональную линейно независимую систему $b_1, \ldots, b_n \in E_n$. Поскольку число векторов этой системы равно размерности E_n, то она является ортогональным базисом E_n.

Вывод 5. Всякую ортогональную систему ненулевых векторов пространства E_n, которая содержит менее n векторов, можно дополнить до ортогонального базиса пространства E_n.

Пример 6.3.1. Ортогонализуем систему векторов $a_1 = (1,1,1,1), a_2 = (1,1,-3,-3), a_3 = (4,3,0,-1) \in \mathbb{R}^4$. Применим процесс ортогонализации. Возьмем $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + \lambda_1 b_1$, причем λ_1 найдем из условия ортогональности $b_2 \cdot b_1 = 0$ или $a_1 \cdot a_2 + \lambda_1 a_1^2 = 0$. Отсюда $\lambda_1 = -\frac{a_1 \cdot a_2}{a_1^2} = 1$. Поэтому $b_2 = a_2 + a_1 = (2,2,-2,-2)$. Вектор $b_3 = a_3 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$, причем $a_3 \cdot a_1 + \alpha_1 b_1^2 = 0, a_3 \cdot b_2 + \alpha_2 b_2^2 = 0$, откуда $\alpha_1 = -\frac{3}{2}, \alpha_2 = -1$. Тогда $b_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Значит, система векторов b_1, b_2, b_3 является ортогональной.

Определение 6.3.2. Система векторов $a_1, \ldots, a_k$ евклидова пространства называется **ортонормированной**, когда она ортогональная и каждый ее вектор **нормированный**, это значит $a_i \cdot a_j = \begin{cases} 0, i \neq j; \\ 1, i = j, i,j = \overline{1,k} \end{cases}$

Вывод 6. Любая ортонормированная система векторов пространства E_n содержит не более n векторов.

Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства E_n называется **ортонормированным**, когда он ортогонален и все его векторы нормированы. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ базис $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots$ $\ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$является ортонормированным.

Теорема 6.3.3. В каждом ненулевом евклидовом пространстве E_n существует ортонормированный базис.

Доказательство. По выводу 4 в E_n существует ортогональный базис. Пусть $b_1, \ldots, b_n$ такой базис. Нормируем его векторы: $e_1 = \frac{b_1}{||b_1||}, \ldots$ $\ldots, e_n = \frac{b_n}{||b_n||}$. Очевидно, что $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0, i \neq j; \\ 1, i = j, i, j = \overline{1, n}. \end{cases}$

Значит, система $e_1, \ldots, e_n$ является ортонормированным базисом пространства E_n. □

Вывод 7. Любая ортонормированная система векторов пространства E_n является ортонормированным базисом, когда она содержит n векторов, и может быть дополнена до ортонормированного базиса, когда она содержит менее n векторов.

Ортонормированный базис удобнен потому, что в нем скалярное произведение двух векторов просто выражается через их координаты.

Теорема 6.3.4. Скалярное произведение векторов $a, b \in E_n$, разложенных по базису $e_1, \ldots, e_n$ пространства E_n, равно сумме произведений одноименных координат тогда и только тогда, когда этот базис ортонормированный.

Доказательство. Необходимость. Пусть базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства E_n такой, что скалярное произведение любых векторов $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $b = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ выражается формулой $a \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$. Так как вектор e_i имеет i-тую координату, равную 1, а остальные его координаты ровны 0, то по этой формуле получим, что $e_i \cdot e_i = 1$. Аналогично по той же формуле получаем при $i \neq j$, произведение $e_i \cdot e_j = 0$. Значит, $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис пространства E_n.
Достаточность. Пусть базис $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис пространства E_n,то есть $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0, i \neq j; \\ 1, i = j, i, j = \overline{1, n} \end{cases}$. Тогда для любых векторов $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $b = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ имеем $a \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$. □

Отметим еще некоторые свойства ортонормированного базиса. Если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис пространства E_n и $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ – любой вектор из E_n, то:
1) $||a|| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}$
2) $\alpha_i = a e_i, i = \overline{1, n}$.

РАЗДЕЛ 7
Практикум

7.1. Практическое занятие по разделу «Матрицы и определители»

Пример 7.1.1. Найти M_{23} для определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Решение: $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8$ - $14 = $ -6.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} данного определителя называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Пример 7.1.2. Найти A_{32} из определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Решение: $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -(6 - 12) = 6$

Пример 7.1.3. Найти A^{-1}, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Решение: $|A| = 8 - 3 = 5 \neq 0$, поэтому A^{-1} – существует. Найдем алгебраические дополнения: $A_{11} = 4, A_{12} = -3, A_{21} = -1, A_{21} = 2$. Отсюда:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Пример 7.1.4. При помощи элементарных преобразований найдем ранг матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -11 & 17 & 8 \end{bmatrix}$$

Решение. Элементарными преобразованиями строк приведем матрицу A к ступенчатому виду (знак $\to$ между двумя матрицами означает, что другая матрица получена из первой с помощью элементарных преобразований строк первой матрицы):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -11 & 17 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & 13 & 5 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 \end{bmatrix} = A'$$

I – аннулируем элементы $a_{21} = 2$,$a_{41} = 1$: ко второй строке прибавим первую, умноженную на –2, а из четвертой строки вычтем первую;
II – аннулируем элементы $a_{33} = 5$,$a_{43} = -10$: из третьей строки вычтем вторую , а к четвертой строке прибавим вторую, умноженную на 2;
III – исключаем четвертую строку, которая линейно выражается через остальные строки.
Таким образом, A'– ступенчатая матрица для матрицы . Значит, rang A=3.

Пример 7.1.5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам первой строки.

Решение: $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\cdot$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 - 3\cdot(-34) + 2\cdot(-17) = 68$

Замечание. Пользуясь свойствами определителя, можно вынести общий множитель из 3-го столбца: $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

Пример 7.1.6. Выясним, обратима ли матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 0 \end{bmatrix}$.

Если да, то используя формулу для обратной матрицы, найдем A^{-1}.

<u>Решение</u>: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, значит, матрица A обратима. Найдем

A^{-1} по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = 7$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} =$ -1,

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = 21$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$ -12, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 10$,

$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 14$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} =$ -7, следователь-

но, $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 & 21 & 14 \\ 4 & -12 & 7 \\ -1 & 10 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \frac{4}{7} & \frac{-12}{7} & 1 \\ \frac{-1}{7} & \frac{10}{7} & -1 \end{bmatrix}$

Проверка: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Пример 7.1.7. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -8 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Решение: Заметим, что среди элементов 1-го столбца (или 2-ой строки) есть ноль, поэтому проще вычислить определитель, раскладывая его по элемантам первого столбца или второй строки. Разложим определитель по элементам 1-го столбца:

$$\begin{vmatrix} -8 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -8 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 0 - 5 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 9 & -7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 \cdot (-5) - 5 \cdot 25 = -85.$$

Пример 7.1.8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 2 & 5 & 16 \end{vmatrix}$

Решение: Все, очевидно, заметили, что проще раскладывать определитель по элементам той строки (или столбца), которая содержит один или два нуля. Пользуясь свойствами определителя, можно преобразовать его так, чтобы нули появились, например, в 1-ом стобце (при этом величина определителя не изменится). Для этого:

1)Из 2-ой строки вычитаем 1-ю: 1-1=0; 3-2=1; 9-4=5.

2)Из 3-ей строки вычитаем 1-ю, умноженную на 2: $2 - 1 \cdot 2 = 0; 5 - 2 \cdot 2 = 1; 16 - 4 \cdot 2 = 8$.

При этом 1-ю строку переписываем без изменений:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 2 & 5 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$. Полученный определитель раскладываем по элементам 1-го столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 3.$$

Пример 7.1.9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \\ -8 & 9 & -7 \end{vmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \\ -8 & 9 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -5 \\ -8 & 9 & -25 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -8 & -25 \end{vmatrix} = -(125 - 40) = -85.$

(Сначала мы из 3-го столбца вычли 2-й, умноженный на 2, а затем разложили полученный определитель по элементам 1-ой строки).

Домашние задания.

1. Для определителя $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ записать алгебраическое дополнения A_{31} и A_{23}.

2. Вычислить указанные определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & \operatorname{ctg}\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\alpha \\ \operatorname{ctg}\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$

3.Для данного определителя найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2}, a_{3j}. Вычислить указанные

1)разложив его по элементам i-той строки;

2)разложив его по элементам j-го столбца;

3)получив предварительно нули в i-той строке.

а) $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$ - $i = 1; j = 3$ б) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ - $i = 4; j = 1$

в) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ - $i = 1; j = 2$

4.Даны две матрицы A и B. Найти матрицы AB, BA, A^{-1}, AA^{-1}, $A^{-1}A$:

а)$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$б)A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$в)A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

7.2. Практическое занятие по разделам « Введение в теорию векторных пространств. Линейные векторные пространства »

Пример 7.2.1. 1. Выясним, является ли векторным пространством над полем $\mathbb{R}$:
а) множество A всех многочленов с действительными коэффициентами n-й степени со сложением многочленов и умножением многочлена на действительное число;
б) множество Z относительно сложения целых чисел и умножения целого числа на действительное число.
Решение. а) Сложение многочленов с действительными коэффициентами n-й степени не является бинарной операцией на множестве A, т.е. отображением $A^2 \to A$, так как сумма двух многочленов степени n не всегда является многочленом также степени n.
Так, при n=3 сумма многочленов $f_1(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 5, f_2(x) = -2x^3 - x^2 + x + 3$ есть многочлен $f(x) = -x + 8$ первой, а не третьей степени. Значит, множество A не является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$.
б) Сложение целых чисел – бинарная операция на $\mathbb{Z}$. Однако умножение целого числа на действительное число не является отображением $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, так как $(\forall(\alpha, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ $(\exists \alpha a \in \mathbb{Z})$, т.е. при умножении целого числа а на действительное число α не всегда получим целое чис-

ло (например, при $a = 1, \alpha = \frac{1}{2}$). Поэтому $\mathbb{Z}$ не является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$.

2. Покажем, что множество M всех матриц формата $m \times n$ над числовым полем $\mathbb{P}$ со сложением матриц и умножением матрицы на число из $\mathbb{P}$ есть векторное пространство над полем $\mathbb{P}$.
Решение. Известно из теории матриц, что сложение матриц из M – бинарная операция на M. Умножение матрицы из M на число из $\mathbb{P}$ – отображение $\mathbb{P} \times M \to M$, потому что $(\forall(\alpha, A) \in \mathbb{P} \times \mathbb{M})\ (\exists! \alpha A \in M)$.

Известно также, что $< M, + >$ – коммутативная группа. Операции сложения матриц из M и умножения матрицы из Mна число поля $\mathbb{P}$ удовлетворяют условиям 2)–5) в определении векторного пространства. Значит, M есть векторное пространство над полем $\mathbb{P}$.

Пример 7.2.2. Покажем, что каждая из систем векторов:
$a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (2, 3, 3)$, $a_3 = (3, 7, 1)$ – (a) $b_1 = (3, 1, 4)$, $b_2 = (5, 2, 1)$, $b_3 = (1, 1, -6)$ – (b) является базисом пространства $\mathbb{R}^3$, найдем матрицы перехода от базиса (a) к базису (b) и обратно, а также координаты вектора
$c = (-17, -36, -11) \in \mathbb{R}^3$ в каждом из заданных базисов.

Решение. Каждая из систем состоит из 3 векторов. Но $\dim\ \mathbb{R}^3 = 3$.

Поэтому достаточно показать, что системы линейно независимы.

Первый способ. Решим уравнение $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \bar{0}$

Выполним слева операции умножения вектора на скаляр и сложения векторов. Получим: $(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3, 2\lambda_1+3\lambda_2+7\lambda_3, \lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим единственное нулевое решение (проверьте!). Следовательно, по определению линейной независимости система векторов (a) линейно независима. Аналогично доказываем линейную независимость системы векторов (b).

Второй способ. Составим матрицы, строками которых являются данные векторы: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$.

Найдем rang A =3, rang B =3 (проверьте!). Следовательно, rang (a) =rang A =3, rang (b) =rang B =3, т.е. равен числу векторов в системе. Значит, системы (a) и (b) линейно независимы.

Можно найти, $|A| = 1 \neq 1, |B| = 4 \neq 0$ (проверьте!). Поэтому строки каждой матрицы линейно независимы. А это и означает, что и обе системы векторов линейно независимы.

Таким образом, доказано, что системы векторов (a) и (b) есть базисы $\mathbb{R}^3$. Пусть x_1, x_2, x_3 – координаты вектора c в базисе (a), $T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ – матрица перехода от базиса (a) к базису (b).

Решим уравнения:

$$c = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3, \tag{7.2.1}$$

$$[b_1, b_2, b_3] = [a_1, a_2, a_3] \cdot T \tag{7.2.2}$$

В уравнении (7.2.1) выполним справа умножение вектора на скаляр и сложение векторов, а затем приравняем соответствующие координаты равных векторов; в уравнении (7.2.2) перемножим справа матрицы, приравняем одноименные элементы равных матриц и полученные уравнения решаем аналогично уравнению (7.2.1). Уравнения (7.2.1), (7.2.2) дадут соответственно следующие системы уравнений с одинаковой матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -17, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -36, \\ X_1 + 3x_2 + x_3 = -11. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{21} + 3a_{31} = 3, \\ 2a_{11} + 3a_{21} + 7a_{31} = 1, \\ a_{11} + 3a_{21} + a_{31} = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} + 2a_{22} + 3a_{33} = 5, \\ 2a_{12} + 3a_{22} + 7a_{32} = 2, \\ a_{12} + 3a_{22} + a_{32} = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{13} + 2a_{23} + 3a_{33} = 1, \\ 2a_{13} + 3a_{23} + 7a_{33} = 1, \\ a_{13} + 3a_{23} + a_{33} = -6. \end{cases}$$

Поэтому все четыре системы можно решать методом Гаусса одновременно:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & -36 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -11 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 1 & -4 & -7 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -9 & -31 & -23 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -9 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right]$$

Получаем: $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -4$ – координаты вектора в базисе (a);

$$T = \begin{bmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$ – матрица перехода от базиса (a) к базису (b).

Замечание. Последние три системы можно записать одним матричным уравнением: $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot T$

и отсюда найти матрицу T. Обратная к ней матрица:

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 52 & 76 & 181 \\ -36 & -52 & -126 \\ 28 & 40 & 99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 9 & \frac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\frac{63}{2} \\ 7 & 10 & \frac{99}{4} \end{bmatrix}$$

(проверьте !), является матрицей перехода от базиса (b) к базису (a). Координаты y_1, y_2, y_3 вектора в базисе (b) можно найти также как и в базисе (a) или, используя связь между координатами столбцами вектора в различных базисах:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = T^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -232 \\ 161 \\ -126 \end{bmatrix}$$

П р о в е р к а : $c = -232 \cdot b_1 + 161 \cdot b_2 - 126 \cdot b_3$

Пример 7.2.3. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4$, найдем подпространство M решений однородной линейной системы

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 24x_4 = 0, \\ -3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

его размерность и базис (фундаментальную систему решений).

Решение. Составим матрицу A данной системы и элементарными преобразованиями строк приведем ее к ступенчатому виду:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & -2 & 24 \\ -3 & -4 & 3 & -19 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & -18 & 12 \\ 0 & 5 & 15 & -10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, rang A=2, dim $M = n -$ rang A =4–2=2. Следовательно, базис M, т.е. фундаментальная система решений, состоит из 2-х непропорциональных решений. Найдем их. Исходная система приведена к ей равносильной:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Придавая свободным переменным x_3, x_4 значения 1,0 и 0,1, находим базис : $a_1 = (5, -3, 1, 0), a_2 = (-9, 2, 0, 1)$
Итак, $M = \{k_1 a_1 + k_2 a_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$.

Пример 7.2.4. Докажем, что в пространстве L вещественных матриц 2-го порядка над полем $\mathbb{R}$ подмножество M матриц вида, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ является его подпространством. Найдем базис и размерность .

Решение. 1) $\forall A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \in M$

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{bmatrix} \in M \;\; a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M,\ \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda b \end{bmatrix} \in M,\ \lambda a, \lambda b \in \mathbb{R}$

Следовательно, множество является подпространством пространства L. Система векторов $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ линейно независима как подсистема базиса пространства L. Кроме того, любой вектор из M линейно разлагается по векторам E_{11}, E_{22}: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = aE_{11} + bE_{22}$. Поэтому система E_{11}, E_{22} есть базис подпространства M и $\dim M = 2$.

Пример 7.2.5. Найдем размерность и базис линейной оболочки, натянутой на векторы пространства $\mathbb{R}^4$:

$a_1 = (1,1,1,1), a_2 = (1,2,3,4), a_3 = (-2,0,2,4), a_4 = (0,3,6,-5) - (a)$

Решение. Известно, что базисом линейной оболочки $L(a_1, a_2, a_3, a_4)$ является базис системы векторов (a), а $\dim L(a_1, a_2, a_3, a_4) = \mathrm{rang}$ (a). Поэтому составляем матрицу A, строками которой являются векторы системы (a) и элементарными преобразованиями строк приводим ее к ступенчатой; при этом слева от каждой строки пишем ее выражение через векторы системы (a). Итак, имеем:

$$A = \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 + 2a_1 \\ a_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 + 2a_1 - 2(a_2 - a_1) \\ a_4 - 3(a_2 - a_1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_4 - 3a_2 + 3a_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

Отсюда $\dim L(a_1,a_2,a_3,a_4) = \text{rang (a)} = \text{rang } A = 3$. Значит, базис $L(a_1,a_2,a_3,a_4)$ состоит из 3-х линейно независимых векторов. Найдем его. Заметим, что система векторов – строк $a_1, a_2 - a_1, a_4 - 3a_2 + 3a_1$ ступенчатой матрицы получена с помощью элементарных преобразований подсистемы a_1, a_2, a_4 данной системы (a). Следовательно, rang (a_1, a_2, a_4) $\underset{1}{=}$ rang $(a_1, a_2 - a_1, a_4 - 3a_2 + 3a_1) \underset{2}{=} 3$

1) – элементарные преобразования не изменяют ранга системы векторов;

2) – векторы-строки ступенчатой матрицы линейно независимы.

Тогда a_1, a_2, a_4 - линейно независимая подсистема системы (a), которая содержит 3 вектора. Но и rang (a) $= 3$.

Таким образом, векторы a_1, a_2, a_4 составляют базис системы (a), а значит базис подпространства $L(a_1,a_2,a_3,a_4)$ и $L(a_1,a_2,a_3,a_4) = L(a_1,a_2,a_4) = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_4 a_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{R}\}$

7.3. Практическое занятие по разделу «Системы линейных уравнений »

Пример 7.3.1. Решить систему уравнений, если она совместна:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 19, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение: Для того, чтобы узнать, совместна ди система ли система, необходимо вычислить её определитель, который составляется из коэффициентов при неизвестных: $\triangle = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 97$. Так как $\triangle \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера, где определители $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ получаются из определителя $\triangle$ путем замены соответственно 1-го, 2-го, 3-го столбца столбцом свободных членов:

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 19 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 97,\ \triangle_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & 19 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 291,$$

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 19 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -194.$$

Отсюда $x_1 = \frac{97}{97} = 1$, $x_2 = \frac{291}{97} = 3$,$x_3 = -\frac{194}{97} = -2$.

Ответ: $\{1;3;-2\}$.

Пример 7.3.2. Решить системy уравнений, если она совместна:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2, \\ 2x_1+3x_2-x_3=3, \\ x_1+5x_2+10x_3=1. \end{cases}$$

Решение: $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0$, причём $\triangle_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$.

Следовательно, система несовместна, то есть не имеет решения.

Ответ: $\varnothing$

Пример 7.3.3. Решим системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$1)\ \begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=1, \\ 2x_1+2x_2-x_3+2x_4=2, \\ x_1-4x_2+7x_3-5x_4=4. \end{cases}$$

Дана неоднородная система линейных уравнений с четырьмя переменными над числовым полем $\mathbb{P}$. Составим расширенную матрицу B и элементарными преобразованиями строк приведем ее к ступенчатой (знак $\Leftrightarrow$ между двумя матрицами означает равносильность соответствующих им систем линейных уравнений):

$$B=\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-1&1\\2&1&-1&2&2\\1&-4&7&-5&4\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-1&1\\0&3&-5&4&0\\0&-3&5&-4&3\end{array}\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-1&1\\0&3&-5&4&0\\0&0&0&0&3\end{array}\right]=B'$$

Последняя строка ступенчатой матрицы B' для расширенной до вертикальной черты является нулевой. Значит, по теореме Гаусса система (1) несовместна. Или по теореме Кронекера-Капелли, так как rang A=2, rang B=3, rang $A\neq$ rang B 2) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4\\2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6\\x_1+2x_2+3x_3\breve{}\,x_4=-4\end{cases}$

Имеем неоднородную систему линейных уравнений с четырьмя переменными над числовым полем $\mathbb{P}$. Преобразуем расширенную матрицу B в ступенчатую:

$$B=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\3&-1&-1&-2&-4\\2&3&-1&-1&-6\\1&2&3&-1&-4\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\0&-4&-7&-11&-7\\0&1&-5&-7&-8\\0&1&1&-4&-5\end{array}\right]\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = B'$$

Последняя строка ступенчатой матрицы B' для расширенной до вертикальной черты ненулевая. Значит, по теореме Гаусса система совместна, причем она имеет единственное решение, потому что число строк в B' равно числу переменных. Или по теореме Кронекера-Капелли, rang $A = \text{rang } B = 4$ и $n = 4$. Чтобы найти единственное решение исходной системы 2), составим по матрице B' систему, равносильную ей:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5, \\ x_3 + 9x_4 = 9, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Отсюда снизу находим значения переменных: $x_3 = 0, x_2 = -1, x_1 = -1$. Значит, вектор $(-1; -1; 0; 1)$ – единственное решение системы (2).
Замечание. Можно было бы в матрице B' аннулировать все элементы в

столбцах выше полученных 1, а затем переходить к системе.

$$3)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = -9. \end{cases}$$

– неоднородная система линейных уравнений с четырьмя переменными над числовым полем $\mathbb{P}$. Приведем расширенную матрицу B к ступенчатой:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & -9 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & -12 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 \end{array}\right] = B'$$

Последняя строка ступенчатой матрицы B' для расширенной до вертикальной черты ненулевая. Поэтому по теореме Гаусса система совместна, причем она имеет бесконечное множество решений, так как число строк ступенчатой матрицы меньше числа переменных. Или, поскольку $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 2$, то по теореме Кронекера-Капелли система совместна. Кроме того, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 2 < 4$ (число переменных), значит, система имеет бесконечное множество решений. Найдем их. Составим по матрице B' систему, равносильную исходной (3):

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_3 - 5x_4 = -4. \end{cases}$$

Отсюда выразим базисные переменные x_1, x_3 через свободные x_2, x_4 :

$$x_3 = 5x_4 - 4, x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_4 - \frac{1}{2}.$$

Тогда вектор $(\frac{1}{2}x_2 + x_4; x_2; 5x_3 - 4; x_4) \in \mathbb{P}^4$ есть общее решение системы (3).

4) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

– однородная система линейных уравнений с тремя переменными над числовым полем $\mathbb{P}$. Составим матрицу A и элементарными преобразованиями строк приведем ее к ступенчатой:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = A'$$

Число строк ступенчатой матрицы A' для матрицы A меньше числа переменных. Поэтому по следствию из теоремы Гаусса система имеет бесконечное множество решений. Или, $\operatorname{rang} A = 2 < 3$ (число переменных).

Значит, по следствию из теоремы Кронекера-Капелли система имеет бесконечное множество решений. Найдем их. Составим однородную линейную систему по матрице A', равносильную системе 4):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда выразим базисные переменные x_1, x_2 через свободную x_3: $x_2 = x_3$, $x_1 = x_3$. Тогда вектор $(x_3, x_3, x_3) \in \mathbb{P}^3$ есть общее решение системы (4)

5) Решим систему матричным способом. Запишем ее в виде матричного уравнения $AX = B$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix}$

Так как $|A| = d \neq 0$, то матрица A обратима. Можно было проверить невырожденность матрицы A, т.е. найти ее ранг: rang A=3 (порядок матрицы A). Решение матричного уравнения будет:

$$X = A^{-1}B.$$

Найдем матрицу A^{-1} с помощью элементарных преобразований: составим матрицу $A|E$, где E – единичная матрица третьего порядка; элементарными преобразованиями строк A переведем в E, а на месте E появитсяA^{-1}.

$$A|E = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 7 & -6 & 5 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 7 & -6 & 5 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -25 & 0 & 0 & 2 & -16 & 5 \\ 0 & -25 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 25 & 7 & -6 & 5 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{25} & \frac{16}{25} & \frac{-5}{25} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{25} & \frac{1}{25} & \frac{-5}{25} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{25} & \frac{-6}{25} & \frac{5}{25} \end{array}\right]$$

получим $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{25} & \frac{16}{25} & \frac{-5}{25} \\ \frac{3}{25} & \frac{1}{25} & \frac{-5}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{-6}{25} & \frac{5}{25} \end{bmatrix}$ (проверьте!).

Итак, (3; –1; 2) – единственное решение данной системы.

Пример 7.3.4. Решить систему уравнений, если она совместна:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Решение: Определитель системы $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Вычислим $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$:

$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$,$\triangle_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$. Так как среди миноров 2-го порядка определителя $\triangle$ есть минор, отличный от нуля, например, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, то система уравнений приводится к двум уравнениям. В самом деле, складывая 1-е и 3-е уравнения, получим $2x_1 + 2x_2 = 6$, или $x_1 + x_2 = 3$, то есть 2-е уравнение. Решаем совместно 1-е и 3-е уравнения $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$. Неизвестное x_3 считаем произвольным, обозначим $x_3 = C$, где $C \in \mathbb{R}$. Получим систему двух уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - , \\ x_1 + x_2 = 5 - \end{cases}$, откуда $x_1 = 3 - C, x_3 = 2$.

Ответ: $\{3 - C; 2; C | C \in \mathbb{R}\}$.

Рассмотрим решение однородных систем на примере трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример 7.3.5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение: Определитель системы $\triangle = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$. Значит, система имеет ненулевое решение. Заметим, что среди миноров второго порядка определителя есть миноры, отличные от нуля, например, $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$. Поэтому рассмотрим первые два уравнения (3-е уравнение является их следствием). При этом неизвестному x_3 придадим произвольное значение: $x_3 = C$. Получим систему: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4, \\ x_1 + x_2 = -, \end{cases}$, откуда

$x_1 = -\frac{7}{5}C, x_2 = \frac{2}{5}C.$

Ответ: $\{-\frac{7}{5}C; \frac{2}{5}|C \in \mathbb{R}\}$

Пример 7.3.6. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 12x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: Определитель системы $\triangle = 0$ и все миноры второго порядка равны нулю. Поэтому система сводится к одному уравнению: $x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$. Неизвестным x_1 и x_2 придадим произвольные значения:

$x_1 = C_1, x_2 = C_2$; тогда $x_3 = C_1 + 3C_2$.

Ответ: $\{C_1, C_2, C_1 + 3C_2 | C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$

Пример 7.3.7. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: Определитель системы $\triangle = -4 \neq 0$;

$\triangle_1 = \triangle_2 = \triangle_3 = 0$(Каждый из определителей имеет нулевой столбец). Следовательно, единственное решение системы – нулевое: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Ответ: $\{0; 0; 0\}$

Пример 7.3.8. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: Расширення матрица системы имеет вид $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 12 \\ 1 & -4 & 3 & -22 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$.

Поменяем местами первую и вторую строки: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 2 & 3 & -5 & 12 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$. Прибавим ко второй строке первую, умноженную на -2, а к третьей – первую, умноженную на -3: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 11 & -11 & 66 \end{array}\right]$. Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на -1: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \end{array}\right]$. Этой матрице соответствует система $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22, \\ 11x_2 - x_3 = 56, \\ -10x_3 = 10 \end{cases}$ Осуществляет обратный ход, получим: $x_3 = -1, x_2 = 5, x_1 = 1$

Ответ: $\{1; 5; -1\}$

Пример 7.3.9. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$

Решение: Так как определитель этой системы $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, то система имеет единственное решение. Введем обозначения:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Найдем A^{-1}.

$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -3$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1$;

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -14; \; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2; \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 9; \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1; \; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7.$$

Тогда $A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & -14 & 9 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 10 & -7 \end{bmatrix}$. $X = A^{-1} \cdot B$, откуда

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & -14 & 9 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 10 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Поэтому $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

Ответ: $\{1; 2; 3\}$.

Домашние задания.

Решить систему линейных уравнение:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 + 16x_3 = -12, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 14 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 12, \\ -6x_1 + 4x_2 + x_3 = 16, \\ 8x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 5, \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 12, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -11 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 7x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -3, \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 16, \\ 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 13, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = -9, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -6x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ 9x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$.

2.Проверить совместность системы уравнений и,в случае совместности, решить её по формуле Крмера:

а) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 12, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -10 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

и) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

3. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

4.Решить систему уравнений матричным методом:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = -2 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

7.4. Практическое занятие по разделу «Алгебра линейных операторов »

Пример 7.4.1. 1. Покажем, что оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ переводящий любой вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $\varphi(x) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$ является линейным. Найдем его матрицу в базисе

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1) \tag{7.4.3}$$

Решение. По определению оператор φ пространства L над полем $\mathbb{P}$ является линейным, если выполняются следующие два условия:
1)$(\forall x, y \in L)\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
2)$(\forall x, y \in L)(\forall \lambda \in \mathbb{P})\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$.
Проверим, выполняются ли эти требования для заданного оператора. 1) $(\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3)$ $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \varphi(x + y) = (x_2 + x_3 + y_2 + y_3, 2x_1 + 2y_1 + x_3 + y_3, 3x_1 + 3y_1 - x_2 - y_2 + x_3 + y_3) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) + (y_2 + y_3, 2y_1 + y_3, 3y_1 - y_2 + y_3) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
2)$(\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3)(\forall \lambda \in \mathbb{R})$ $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, $\varphi(\lambda x) = (\lambda x_2 + \lambda x_3, 2\lambda x_1 + \lambda x_3, 3\lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3) = \lambda(x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) = \lambda\varphi(x)$.
Таким образом, требования 1) – 2) выполнены, и поэтому оператор φ является линейным. Найдем $M^{\varphi}_{(e)}$. По условию
$\varphi(e_1) = (0, 2, 3) = 0e_1 + 2e_2 + 3e_3,$

$\varphi(e_2) = (1, 0, -1) = 1e_1 + 0e_2 - 1e_3,$
$\varphi(e_3) = (1, 1, 1) = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3.$

Записывая эти равенства в матричной форме, получаем:

$$[\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)] = [e_1, e_2, e_3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Таким образом, матрица $M_{(e)}^{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ будет искомой матрицей оператора φ в базисе (e).

Пример 7.4.2. Линейный оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ имеет в базисе

$$a_1 = (8, -6, 7), a_2 = (-16, 7, -13), a_3 = (9, -3, 7) \tag{7.4.4}$$

матрицу $M_{(a)}^{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$

Найдем матрицу того же оператора φ в базисе

$$b_1 = (1, -2, 1), b_2 = (3, -1, 2), b_3 = (2, 1, 2) \tag{7.4.5}$$

Решение. Сначала находим матрицу T перехода от базиса (7.4.4) к базису (7.4.5): $[b_1, b_2, b_3] = [a_1, a_2, a_3] \cdot T$, что равносильно матричному уравнению

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{bmatrix} \cdot T$$

Отсюда получим $T = \begin{bmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ (проверьте). Найдем обратную к T матрицу: $T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (проверьте!). Матрицу данного оператора φ в базисе (7.4.5) находим по известной формуле: $M^{\varphi}_{(b)} = T^{-1} \cdot M^{\varphi}_{(a)} \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Пример 7.4.3. Найдем собственные значения и собственные векторы линейного оператора φ пространства $\mathbb{R}^4$, заданного матрицей $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Решение. Так как $\mathbb{R}^4$ есть линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, то собственными значениями л.о. φ будут являться только действительные корни его характеристиче-ского уравнения $|A-\lambda E|=0$. Найдем определитель матрицы $A-\lambda E$:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 & -1 \\ 2-\lambda & 0 & 2-\lambda & -1 \\ 2\lambda-\lambda^2 & -2+\lambda & -2+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \lambda & -1 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^3(\lambda+2)$$

Так как характеристическое уравнение $(\lambda-2)^3(\lambda+2)=0.$ имеет действительные корни $\lambda_{1,2,3}=2$, $\lambda_4=-2$, то собственными значениями л.о. φ являются числа 2 и -2. Теперь найдем соответствующие этим значениям собственные векторы.

а) Собственными векторами, соответствующими собственному значению $\lambda=2$ будут ненулевые решения матричного уравнения $(A-2E)X=0$,

т.е. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ или однородной линейной системы уравнений: $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3-x_4=0. \end{cases}$ которая равносильна одному уравнению: $x_1-x_2-x_3-x_4=0$. Ранг матрицы этой системы, т.е. rang $(A-2E)=1$. Значит, фундаментальная система решений состоит из трех векторов, например, $a_1=(1,1,0,0), a_2=(1,0,1,0), a_3=(1,0,0,1)$.

Значит, собственному значению $\lambda=2$ соответствуют собственные векторы $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3 \neq \bar{0}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.
б) При $\lambda=-2$ для соответствующих собственных векторов получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1+3x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2+3x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+3x_4=0. \end{cases}$$

rang $(A+2E)=3$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из одного вектора, например, $b=(-1,1,1,1)$(проверьте!). Значит, собственному значению $\lambda=-2$ соответствуют собственные векторы $\beta b, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$.

Пример 7.4.4. Выясним, можно ли матрицу A л.о. φ пространства $\mathbb{R}^3$ привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Если можно, то найдем этот базис и соответствующую ему диагональную матрицу:

а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$; г) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$

Решение.

а) Решим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0.$

Оно имеет три действительных различных корня $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$, т.е. $Sp\varphi = \{1, 2, -1\}$ – простой спектр. Следовательно, матрица л.о. приводится к диагональной – элементами ее главной диагонали будут собственные значения 1, 2, –1: $M^{\varphi}_{(a)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ где $a_1, a_2, a_3 (a)$ – собственные векторы, соответствующие собственным значениям 1, 2, –1. Для нахождения базиса (a) нужно найти по одному ненулевому решению для каждой из линейных систем уравнений:

1) $\lambda_1 = 1$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

2) $\lambda_2 = 2$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

3) $\lambda_3 = -1$

$$\begin{cases} 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Получаем соответственно $a_1 = (0, 1, 0), a_2 = (2, -1, 30, a_3 = (2, -1, 0)$

б) Решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-\lambda(3-\lambda)+2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0$$

Значит, $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$– действительные корни этого уравнения. Так как $Sp\varphi$ не простой (имеется кратный корень 1), то сразу на поставленный в задаче вопрос ответить нельзя. Найдем сначала сумму размерностей собственных подпространств $L(1)$, $L(2)$, соответствующих собственным значениям 1 и 2: $\dim L(1) + \dim\ L(2)$.

$L(1)$ – пространство решений однородной линейной системы уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$\dim\, L(1) = 3 - 1 = 2.$

$L(2)$ – пространство решений однородной линейной системы уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$\dim\, L(2) = 3 - 2 = 1$. Итак, $\dim\, L(1) + \dim\, L(2) = 2 + 1 = 3 = \dim\, \mathbb{R}^3$. Поэтому объединение базисов $L(1)$ и $L(2)$ образует базис $\mathbb{R}^3$ и матрица л.о. φ в этом базисе является диагональной. Найдем базисы $L(1)$ и $L(2)$: $a_1 = (1, -1, 0), a_2 = (2, 0, -1)$ – базис $L(1)$; $a_3 = (1, 0, -1)$ – базис $L(2)$. Значит, в базисе $a_1, a_2, a_3 (a)$ пространства $\mathbb{R}^3$ матрица л.о. φ принимает вид: $M_{(a)}^{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

в) В этом случае характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2(\lambda-2) =$$

0 также имеет действительный кратный корень $\lambda = 1$. Поэтому сначала найдем $\dim\, L(1) + \dim\, L(2)$. Подпространство $L(1)$ задается системой

уравнений
$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x3 = 0. \end{cases}$$
Тогда $\dim\ L(1) = 3 - 2 = 1$. Подпространство $L(2)$ задается системой уравнений $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

Тогда $\dim\ L(2) = 3 - 2 = 1$. Итак, $\dim\ L(1) + \dim\ L(2) = 2 < \dim\ \mathbb{R}^3$, а, следовательно, матрица к диагональному виду не приводится.

г) Характеристическое уравнение:
$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 6 \\ 3 & 2-\lambda & 6 \\ -3 & -2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$
$(\lambda+3)(\lambda^2-\lambda+1) = 0$ имеет только один простой действительный корень $\lambda = -3$, который является единственным собственным значением л.о. φ Значит, матрица к диагональному виду не приводима.

7.5. Практическое занятие по разделу «Евклидовы пространства »

Пример 7.5.1. Ортогонализируем систему векторов $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,1,-3,-3)$, $a_3 = (4,3,0,-1)$ пространства $\mathbb{R}^4$.

Решение. Применим процесс ортогонализации. Возьмем $b_1 = a_1, b_2 = a_2 + \lambda_1 b_1$, причем λ_1 найдем из условия ортогональности векторов b_1, b_2: $b_1 b_2 = 0$ или $b_1 a_2 + \lambda_1 b_1^2 = 0$. Отсюда $\lambda_1 = -\frac{b_1 a_2}{b_1^2} = 1$. Тогда $b_2 = a_2 + b_1 = (2,2,-2,-2)$. Вектор $b_3 = a_3 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$, причем $a_3 b_1 + \alpha_1 b_1^2 = 0$, $a_3 b_2 + \alpha_2 b_2^2 = 0$, откуда $\alpha_1 = \frac{-3}{2}, \alpha_2 = -1$

Поэтому $b_3 = a_3 - \frac{3}{2} b_1 - b_2 = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$ Значит, система векторов b_1, b_2, b_3 является ортогональной.

П р о в е р к а:

$b_1 b_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) = 0$

$b_1 b_3 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{-1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{-1}{2} = 0$

$b_2 b_3 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{-1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{-1}{2} = 0$

Пример 7.5.2. Методом ортогонализации построим ортонормированный базис подпространства L, натянутого на следующую систему векторов пространства $\mathbb{R}^4$:

$a_1 = (1,0,0,-1), a_2 = (2,1,1,0), a_3 = (1,1,1,1), a_4 = (1,2,3,4)$, $a_5 = (0,1,2,3)$

Решение. Находим сначала базис подпространства $L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

$$\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ a_3 - a_1 \\ a_4 - a_1 \\ a_5 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ a_1 + a_3 - a_2 \\ a_4 - 2a_2 + 3a_1 \\ a_5 - a_2 + 2a_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ a_4 - 2a_2 + 3a_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, векторы a_1, a_2, a_4 составляют базис $L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Ортогонализируем найденный базис. Положим $b_1 = a_1$ Второй вектор b_2 получим по формуле $b_2 = a_2 - \frac{b_1 a_1}{b_1^2} b_1$

Имеем:

$b_1 a_2 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 2$

$b_1^2 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$, $b_2 = a_2 - 1 \cdot b_1 = (1, 1, 1, 1)$

Третий вектор b_3 получим по формуле $b_3 = a_4 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$ где $\alpha_1 = \frac{-b_1 a_4}{b_1^2}$,$\alpha_2 = \frac{-b_2 a_4}{b_2^2}$, откуда $b_3 = a_4 - \frac{3}{2} b_1 - \frac{5}{2} b_2 = (0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ (проверьте!). Следовательно, система b_1, b_2, b_3 является ортогональным базисом $L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Нормируем этот базис:

$e_1 = \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2}} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{-\sqrt{2}}{2})$
$e_2 = \frac{b_2}{|b_2|} = \frac{b_2}{\sqrt{b_2^2}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$e_3 = \frac{b_3}{|b_3|} = \frac{b_3}{\sqrt{b_3^2}} = (0, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$
Итак, ортонормированным базисом пространства $L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ является система векторов e_1, e_2, e_3.

Пример 7.5.3. Пусть

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Является ли функция

$$F(x, y) = (x_1 + \dots + x_n)(y_1 + \dots + y_n)$$

скалярным произведением в $\mathbb{R}^n$? Если нет, то укажите, какие из свойств скалярного произведения нарушаются.
Решение. Очевидно, $F(x, y) = F(y, x)$. Значит, первое свойство скалярного произведения выполняется. Положим $z = (z_1, \dots, z_n)$. Тогда

$$F(x + y, z) = ((x_1 + y_1) + \dots + (x_n + y_n))(z_1 + \dots + z_n) =$$

$$= ((x_1 + \dots + x_n) + (y_1 + \dots + y_n))(z_1 + \dots + z_n) =$$

$$= (x_1 + \dots + x_n)(z_1 + \dots + z_n) + (y_1 + \dots + y_n)(z_1 + \dots + z_n) =$$

$$= F(x, z) + F(y, z).$$

Значит, второе свойство скалярного произведения выполняется. Так как для любого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$F(\lambda x, y) = (\lambda x_1 + \cdots + \lambda x_n)(y_1 + \cdots + y_n) = \lambda(x_1 + \cdots + x_n)(y_1 + \cdots + y_n) =$$

$$= \lambda F(x, y),$$

то третье свойство скалярного произведения выполняется. Положим $x = (-1, 1, 0, \ldots, 0)$. Тогда

$$F(x, x) = (-1 + 1)(-1 + 1) = 0.$$

Значит, четвертое свойство скалярного произведения не выполняется.

Пример 7.5.4. Векторы e_1, e_2, e_3 образуют ортогональный базис евклидова пространства V и

$$||e_1|| = 2, ||e_2|| = 1, ||e_3|| = 3.$$

Найдите угол ϕ между векторами

$$a = e_1 + e_2 - e_3, b = e_1 + e_2 + e_3.$$

Решение. Так как векторы e_1, e_2, e_3 образуют ортогональный базис евклидова пространства V, то $(e_1, e_2) = (e_1, e_3) = (e_2, e_3) = 0$. Поэтому

$$(a, a) = (e_1, e_1) + (e_2, e_2) + (e_3, e_3) = ||e_1||^2 + ||e_2||^2 + ||e_3||^2 = 4 + 1 + 9 = 14,$$

$$(b,b) = (e_1,e_1) + (e_2,e_2) + (e_3,e_3) = 14,$$
$$(a,b) = (e_1,e_1) + (e_2,e_2) - (e_3,e_3) = 4 + 1 - 9 = -4.$$

Теперь
$$\cos\phi = \frac{(a,b)}{||a||\cdot||b||} = \frac{-4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = -\frac{2}{7},$$
и угол $\phi = \arccos(-2/7)$.

Пример 7.5.5. Применяя процесс ортогонализации Грамма-Шмидта, по заданному базису
$$x_1 = (1,-2,2), x_2 = (-1,0,1), x_3 = (5,-3,-7)$$
постройте в $\mathbb{R}^3$ ортонормированный базис.

Решение. Построим сначала ортогональный базис a_1, a_2, a_3 пространства $\mathbb{R}^3$. Положим $a_1 = x_1$. Ввиду теоремы (6.3.1) имеем $a_2 = x_2 + \alpha a_1$, где
$$\alpha = -\frac{(a_1,x_2)}{(a_1,a_1)} = -\frac{1(-1)+(-2)0+2(-1)}{1\cdot 1+(-2)(-2)+2\cdot 2} = \frac{1}{3}.$$
Тогда
$$a_2 = (-1,0,-1) + (1/3)(1,-2,2) = (-2/3,-2/3,-1/3).$$
Снова ввиду теоремы (6.3.1) имеем $a_3 = x_3 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, где где
$$\alpha_1 = -\frac{(a_1,x_3)}{(a_1,a_1)} = -\frac{1\cdot 5+(-2)(-3)+2(-7)}{9} = \frac{1}{3}, \alpha_2 = -\frac{(a_2,x_3)}{(a_2,a_2)} = -1.$$

Тогда $a_3 = (5, -3, -7) + (1/3)(1, -2, 2) - (-2/3, -2/3, -1/3) = (6, -3, -6)$. Пронормируем векторы a_1, a_2, a_3. Для этого найдем их длины:

$$||a_1|| = \sqrt{(a_1, a_1)} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3,$$

$$||a_2|| = \sqrt{(a_2, a_2)} = \sqrt{(-2/3)^2 + (-2/3)^2 + (-1/3)^2} = 1,$$

$$||a_3|| = \sqrt{(a_3, a_3)} = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 9.$$

Теперь векторы

$$y_1 = (1/3)a_1 = (1/3, -2/3, 2/3),$$

$$y_2 = a_2 = (-2/3, -2/3, -1/3),$$

$$y_3 = (1/9)a_3 = (2/3, -1/3, -2/3)$$

образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$.

1. Пусть a и b – векторы действительного линейного пространства V. Является ли функция $F(a,b)$ скалярным произведением ?

Если нет, то укажите какие из аксиом скалярного произведения нарушаются.

1.1 $V=\mathbb{R}^2$, $a=(a_1,a_2), b=(b_1,b_2), F(a,b)=2a_1b_1+3a_2b_2$.

1.2 $V=\mathbb{R}[x]$, $a=m(x), b=n(x), F(a,b)=deg(m(x)\cdot n(x))$.

1.3 $V=\mathbb{R}^3$, $a=(a_1,a_2,a_3), b=(b_1,b_2,b_3), F(a,b)=a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3$.

2. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите скалярное произведение векторов a,b и угол между ними.

2.1 $a=(1,1,1,1), b=(3,5,1,1)$

2.2 $a=(1,0,1,2), b=(3,-5,1,0)$

2.3 $a=(1,0,0,4), b=(1,2,7,-5)$

3. Найдите нормированный вектор евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, ортогональный векторам a_1,a_2.

3.1 $a=(1,1,1), b=(1,-1,1)$

3.2 $a=(2,-1,1), b=(-3,1,-1)$

3.3 $a=(1,0,2), b=(-3,4,-1)$

4. Дополните до ортонормированного базиса евклидова пространство $\mathbb{R}^4$ систему векторов a_1,a_2.

4.1 $a=(1,-2,2,-3), b=(2,-3,2,4)$

4.2 $a=(1,1,1,2), b=(1,2,3,-3)$

4.3 $a = (1, 1, 2, 1), b = (1, -1, -1, -2)$

5. Применяя процесс ортогонализации Грамма-Шмидта, постройте ортонормированный базис линейной оболочки системы векторов a_1, a_2, a_3 евклидова пространства $\mathbb{R}^4$. 5.1 $a_1 = (1, 2, 2, -1), a_2 = (1, -1, 0, 3), a_3 = (0, 3, 2, -4)$

5.2 $a_1 = (1, 1, -1, -2), a_2 = (3, 0, -1, 2), a_3 = (2, -1, 0, 4)$

5.3 $a_1 = (2, 1, 3, -1), a_2 = (1, 1, -3, 2), a_3 = (3, 2, 0, 1)$

Литература

1. Беняш-Кривец, В.В. Лекции по алгебре : группы, кольца, поля / В.В. Беняш-Кривец, О.В. Мельников. — Минск : БГУ, 2009.

2. Боревич З.И. Определители и матрицы. М.:Наука. 1988

3. Бузланов А.В., Монахов В.С. Лабараторные работы по курсу "Алгебра и теория чисел". Гомель. 1991. 96 с.

4. Виленкин, Н.Я. Алгебра и теория чисел. Часть III: Учебное пособие для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов / Н.Я. Виленкин. — М.: Просвещение, 1974.

5. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс. 2001. 544 с.

6. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра. Том 1. М.: Гелиос АРВ. 2003. 336 с.

7. Квант [Электронный ресурс] : научно-популярный физико- математический журн. — Электрон. журн. — М., 2003. — URL: http://kvant.info/ (дата обращения: 10.03.2011).

8. Кострикин, А.И. Введение в алгебру (в 3-х Т.Т.) / А.И. Кострикин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001-2004.

9. Кочева, А.А. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть III: Учебное пособие для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов / А.А. Кочева. — М.: Просвещение, 1984.

10. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел / Л.Я. Куликов. — М.: Высш. шк., 1979.

11. Куликов, Л.Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Я. Куликов, А.И. Москаленко, А.А. Фомин. — М.: Просвещение, 1993.

12. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука. 1975.

13. Милованов, М.В. Алгебра и аналитическая геометрия / М.В. Милованов, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. — Минск: Амалфея, 2001.

14. Михалев А.В., Михалев А.А. Начала алгебры, часть 1. М.: Интернет-университет информационных технологий. 2005 258 с.

15. Моисеев, С.А. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. 2-е изд., испр. и доп. / С.А. Моисеев, Н.М. Суворов. — Ряз. : Ряз. гос. ун-т им. С.А. Есенина, 2006.

16. Монахов, В.С. Алгебра и теория чисел : учебное пособие / В.С. Монахов, А.В. Бузланов. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007.

17. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. — Мн.: Высшая школа, 2006.

18. Сборник задач по алгебре / под ред. А.И. Кострикина. — М.: Физматлит, 2001

19. Смолин, Ю.Н. Алгебра и теория чисел / Ю.Н. Смолин. — М.: Флинта, 2006.

20.Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. М.:Наука. 1984.

21. Шнеперман, Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Б. Шнеперман. — Минск: Вышэйш. шк., 1982.

22. Шнеперман, Л.Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях: в 2 ч. / Л.Б. Шнеперман. — Минск: Вышэйш. шк., 1986–1987. — 2 ч.

Вопросы к экзамену

3 Семестр

1. Матрицы. Действия над матрицами и их свойства.
2. Элементарные преобразования строк матрицы. Ступенчатая матрица. Приведение матрицы к ступенчатому виду
3. Обратимая матрица. Свойства обратимой матрицы. Нахождение обратной матрицы при помощи элементарных преобразований.
4. Матричные уравнения. Запись и решение СЛУ в матричной форме.
5. Подстановки. Четность и знак подстановки. Примеры.
6. Определитель квадратной матрицы. Правило нахождения определителей второго и третьего порядка (с выводом).
7. Определитель квадратной матрицы. Основные свойства определителей.
8. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Пример.
9. Миноры и алгебраические дополнения. Нахождение обратной матрицы через алгебраические дополнения. Пример.
10. Миноры и алгебраические дополнения. Правило Крамера, следствие.
11. Алгебраические операции. Виды бинарных операций. Полугруппы и их свойства. Нейтральный и симметричный элементы.
12. Группы, простейшие свойства, примеры.
13. Подгруппы. Примеры. Критерий подгруппы.

14. Гомоморфизмы групп (определение, виды гомоморфизма, примеры).

15. Кольца, простейшие свойства кольца, примеры. Делители нуля. Область целосности.

16. Подкольца, примеры. Критерий подкольца.

17. Гомоморфизмы колец (определение, виды гомоморфизма, примеры).

18. Поле, простейшие свойства поля, примеры. Характеристика поля.

19. Построение поля комплексных чисел C. Теоремы (с д-вом).

20. Алгебраическая форма комплексного числа. Сопряженные комплексные числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

21. Алгебраическая форма комплексного числа. Сопряженные комплексные числа. Извлечение квадратного корня из комплексного числа записанного в алгебраической форме.

22. Геометрическая интерпретация комплексных чисел, корней из них и модуля разности двух комплексных чисел. Решение квадратных уравнений. Двучленные уравнения.

23. Тригонометрическая форма комплексного числа. Равенство комплексных чисел в тригонометрической форме. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме (деление и умножение) (с д-вом).

24. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра (с д- вом).

25. Тригонометрическая форма комплексного числа. Теорема о корне n-ой степени из комплексного числа в тригонометрической форме.

26. Корни из единицы. Первообразные корни. Теоремы (с д-вом).

4 Семестр

1. Группы. Порядок элемента группы. Циклические группы. Подгруппы циклических групп (с д-вом). Изоморфизм циклических групп.

2. Группы подстановок. Теорема Кэли (с д-вом).

3. Разложение группы по подгруппе. Смежные классы, свойства смежных классов (с д-вом). Индекс подгруппы. Примеры.

4. Теорема Лагранжа (с д-вом). Следствия 1-2 (с д-вом).

5. Нормальная подгруппа. Примеры. Критерий нормальной подгруппы (с д- вом). Примеры.

6. Фактор-группа. Теорема (с д-вом). Теорема о соответствии (с д-вом). Простые группы. Примеры.

7. Ядро гомоморфизма группы. Теорема о нормальности ядра в группе (с д- вом).

8. Теорема о эпиморфизмах групп (с д-вом). Примеры.

9. Кольцо. Подкольцо. Критерий подкольца. Идеалы кольца. Примеры. Критерий идеала кольца K (с д-вом). Действия над идеалами (с д-вом).

10. Идеал порожденный множеством $\mathbb{S}$. Главный идеал. Пример кольца главных идеалов.

11. Фактор-кольцо по идеалу. Классы вычетов кольца K по идеалу I. Примеры. Критерий сравнимости по идеалу (с д-вом).

12. Ядро гомоморфизма колец. Теорема о ядре (с д-вом). Теорема об

эпиморфизмах колец (с д-вом).

13. Определение многочлена от одной переменной. Формализация понятия многочлена. Кольцо многочленов над областью целостности.

14. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов.

15. Деление в кольце $\mathbb{K}[x]$. Простейшие свойства делимости. Теорема о делении с остатком в кольце $\mathbb{K}[x]$ (с д-вом).

16. Деление с остатком на нормированный линейный двучлен (х-а). Схема Горнера. Теорема Безу (с д-вом). Следствия 1-2 (с д-вом).

17. Корни многочлена. Критерий корня. Следствие. Кратные корни. Наибольшее возможное число корней в области целостности. Теорема (с д- вом). Следствия.

18. Кольцо многочленов от одной переменной над полем Р. Свойства делимости многочленов из $\mathbb{P}[x]$ (с д-вом). Теорема о делении с остатком в кольце $\mathbb{P}[x]$.

19. Общие делители и НОД многочленов. Взаимно простые многочлены. Теорема о линейном представлении НОДа. Следствие. НОК многочленов. Нахождение НОКа многочленов.

20. Алгоритм Евклида и нахождение НОДа 2-х многочленов. Пример.

21. Приводимые и неприводимые над полем многочлены. Свойства неприводимых многочленов (с д-вом).

22. Оновная теорема теории делимости многочленов (с д-вом).

23. Разложение многочлена по степеням двучлена (х-а). Формальная производная многочленов. Ряд Тейлора.

24. Неприводимые k-кратные множители многочлена, k-кратные корни многочлена. Теорема о неприводимом k-кратном множителе многочлена (с д-вом).

Итоговый тест

К итоговому тесту можно перейти по следующей ссылке Тест.