УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА И ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

(Эвристика как система общих приемов поиска решения нестандартных задач)

Электронный учебно-методический комплекс для студентов физико-математического факультета

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2015

Автор:

Селивоник Светлана Викторовна – доцент кафедры методики преподавания математики и информатики учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», кандидат педагогических наук, доцент.

Рецензенты:

С.А. Марзан – первый проректор учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», кандидат физико-математических наук, доцент.

Кафедра методик преподавания школьных дисциплин учреждения образования «Брестский областной институт развития образования».

Редактор:

С.Н. Ткач – старший преподаватель кафедры информатики и компьютерных систем учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина».

Учебно-методический комплекс предназначен для проведения занятий по дисциплине компонента УВО «Элементарная математика и практикум по решению задач» («Эвристика как система общих приемов поиска решения нестандартных задач»). Его содержание соответствует рабочей программе, утвержденной 30.06.2014г., регистрационный №УД-34-010-14/р. для студентов специальности 1-02 05 01 Математика и информатика. Данный комплекс может также использоваться при проведении занятий по дисциплине «Элементарная математика и практикум по решению задач» со студентами специальности 1-02 05 03 02 Математика. Информатика.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методический комплекс составлен в соответствии с рабочей программой дисциплины компонента УВО «Элементарная математика и практикум по решению задач» («Эвристика как система общих приемов поиска решения нестандартных задач»), утвержденной 30.06.2014 г., регистрационный № УД-34-010-14/р. для студентов специальности 1-02 05 01 Математика и информатика.

Согласно учебному плану для студентов очной формы обучения на изучение раздела «Эвристика как система общих приемов поиска решения нестандартных задач» отводится 40 аудиторных часов, в том числе 16 лекционных, 24 практических; предусмотрены контрольная работа и экзамен.

Данный комплекс является электронным учебным изданием, в котором разработаны и систематизированы учебно-методические материалы по методам решения нестандартных задач с целью совершенствования подготовки будущих учителей математики к работе с одаренной учащейся молодежью.

ЭУМК содержит учебную программу (содержание учебного материала и тематическое планирование), разработки лекционных и практических занятий, примерные задания для контрольной работы и решение нулевого варианта контрольной работы, теоретические вопросы к экзамену и примерные задачи к практической части экзамена, приложение, содержащее краткие теоретические сведения и основные формулы. Разработка каждого практического занятия содержит ссылки на теоретический материал и методы решения задач, рассмотренных в лекционных занятиях, что позволит студентам в случае затруднений при решении задач обратиться к соответствующей теории и примерам.

Поскольку дисциплина компонента УВО «Элементарная математика и практикум по решению задач» несет значительную нагрузку по формированию у студентов аналитических, конструктивных и методических умений и навыков, то при разработке комплекса большое внимание уделено методам решения нестандартных задач: представлены задачи различного уровня сложности; проиллюстрированы различные методы и приемы их решения; многие задачи решены несколькими способами. Это позволяет создать условия для формирования готовности будущих учителей математики к работе с одаренной учащейся молодежью.

Для пользования данным ЭУМК рекомендуется использовать программу STDU Viewer (версии 1.6.62 и новее).

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Доказательства и правдоподобные рассуждения.

Обобщенные приемы исследовательской деятельности в процессе решения уравнений и неравенств (функциональные подстановки; тригонометрические подстановки; метод параметризации). Использование численных неравенств при решении уравнений, неравенств и их систем (неравенства Коши, Коши-Буняковского, Бернулли). Геометрические методы решения алгебраических задач. Векторный метод решения алгебраических задач.

Тема 2. Функциональный подход в поиске решений нестандартных задач.

Использование ограниченности области определения и области значения функции (метод мажорант). Использование монотонности функции. Использование производной при решении уравнений и неравенств.

Тема 3. Эвристические приемы при решении нестандартных задач.

Понятие о функциональных уравнениях. Основные теоремы, используемые при решении функциональных уравнений (нестандартных задач). Основные методы решения функциональных уравнений (олимпиадных задач).

Тема 4. Целая и дробная части числа.

Понятие целой и дробной части числа. Некоторые свойства. Построение графиков функции $y = k[x]$, $y = [kx]$, $y = k\{x\}$, $y = \{kx\}$ с помощью преобразований. Применение целой и дробной части числа для решения уравнений, неравенств, систем.

Тема 5. Делимость чисел.

Основные определения и теоремы. Простые и составные числа. Признаки делимости. Последняя цифра числа. Решение в целых числах (x, y) уравнений вида $ax + by = c$. Китайская задача об остатках. Решение в целых числах (x, y) уравнений вида $ax^2 + bxy + cy^2 = d$.

Тема 6. Принцип Дирихле.

Использование принципа Дирихле при решении задач на делимость. Принцип Дирихле и его следствие. Задачи геометрического содержания. Обобщенный принцип Дирихле. Олимпиадные задачи, решаемые с использованием принципа Дирихле.

Тема 7. Логические задачи.

Виды логических задач. Задачи на инварианты: инварианты и делимость; замощения и раскраски; геометрические инварианты. Применение графов для решения логических задач: основные понятия теории графов; базовые теоремы; логические задачи, решаемые с помощью графов. Матричный метод решения логических задач. Задачи «на стратегии». Основные виды и ме-тоды решения. Задачи на «маршруты» и «мосты» (использование теории графов, задачи исторического содержания).

Тема 8. **Обобщение. Итоговый контроль усвоения курса.**

Обзор и повторение теоретических вопросов курса. Решение задач различными сособами.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Название темы	ЛК	ПР
1	Доказательства и правдоподобные рассуждения	4	4
2	Функциональный подход в поиске решений нестандартных задач	2	2
3	Эвристические приемы при решении нестандартных задач	2	2
4	Целая и дробная части числа	2	2
5	Делимость чисел	2	2
6	Принцип Дирихле	2	2
7	Логические задачи	2	4
8	Обобщение. Итоговый контроль усвоения курса		4
9	Контрольная работа		2

ТЕМА 1
ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ПРАВДОПОДОБНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

1.1 Обобщённые приёмы исследовательской деятельности в процессе решения уравнений и неравенств (функциональные подстановки; тригонометрические подстановки; метод параметризации)

Метод функциональной подстановки является одним из наиболее часто используемых методов решения сложных уравнений (неравенств) школьного курса математики. Суть метода заключается в том, что введение новой переменной $f(x) = t$ позволяет свести исходное уравнение (неравенство) к более простому (понизить степень, уменьшить количество радикалов, свести иррациональное уравнение к квадратному и т.д.).

Пример 1.1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 2\sqrt{2x^2+5x+3} + 3x - 16.$$

Решение. Введём функциональную замену:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = t, \quad t \geq 0; \qquad (*)$$

Отсюда $2x + 3 + x + 1 + 2 \cdot \sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{x+1} = t^2;$

$$3x + 4 + 2 \cdot \sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{x+1} = t^2;$$
$$2\sqrt{(2x+3)\cdot(x+1)} = t^2 - 3x - 4.$$

Исходное уравнение примет вид:

$$t = t^2 - 3x - 4 + 3x - 16;$$

$$t = t^2 - 20;$$
$$t^2 - 20 - t = 0;$$

$$t_1 = 5; \;\; t_2 = -4 \text{ – не удовлетворяет условию } (*).$$

Возвращаясь к замене, получим:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5. \qquad (**)$$

Для решения данного уравнения используем свойство монотонности функции $f(x) = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}$. Функция $f(x)$ – непрерывная и возрастающая на области определения. Следовательно, уравнение (**) имеет не более одного корня. Легко заметить, что корнем уравнения является 3.

Ответ: 3.

Пример 1.2. Решите уравнение

$$x = (\sqrt{9+x} + 3) \cdot (\sqrt{9+x} + x^2 + 8x - 23).$$

Решение. Пусть $\sqrt{9+x} = t, \quad t \geq 0.$ (***)

Тогда $9 + x = t^2$, откуда $x = t^2 - 9$.

Исходное уравнение будет иметь вид:

$$t^2 - 9 = (t+3)(t + x^2 + 8x - 23);$$

$$(t-3)(t+3) = (t+3)(t + x^2 + 8x - 23);$$

$$(t+3) \cdot (t - 3 - (t + x^2 + 8x - 23)) = 0;$$

$t = -3$ – не удовлетворяет условию (***).

$$t - 3 - t - x^2 - 8x + 23 = 0;$$

$$-x^2 - 8x + 20 = 0;$$

$$x^2 + 8x - 20 = 0;$$

$$x_1 = -10; \quad x_2 = 2.$$

Учитывая область определения уравнения $(9 + x \geq 0)$, получим, что $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример 1.3. Решите неравенство

$$\sqrt{1 - log_{tgx} 2} \cdot (1 - 3 \cdot log_{tgx} 2 + 2 \cdot log^2_{tgx} 2) \geq 0.$$

Решение. Введём замену $\sqrt{1 - log_{tgx}2} = t$,
откуда $t \geq 0$ и $1 - log_{tgx}2 = t^2$, т.е. $log_{tgx}2 = 1 - t^2$.
Неравенство примет вид:

$$t \cdot (1 - 3(1 - t^2) + 2(1 - t^2)^2) \geq 0;$$

$$t \cdot (1 - 3 + 3t^2 + 2 - 4t^2 + 2t^4) \geq 0;$$

$$t \cdot (2t^4 - t^2) \geq 0;$$

$$t^3 \cdot (2t^2 - 1) \geq 0;$$

$$t^3 \cdot (\sqrt{2}t - 1)(\sqrt{2}t + 1) \geq 0.$$

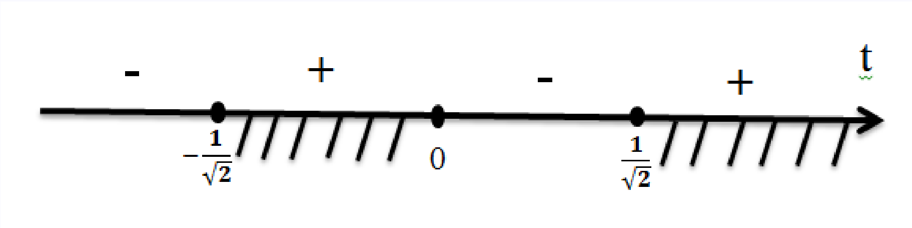


Рис. 1.1.

Получили $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 0$ или $t \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Учитывая условие $t \geq 0$, имеем: $t = 0$ или $t \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Вернувшись к замене, получим:

$$\sqrt{1-log_{tgx}2}=0 \text{ или } \sqrt{1-log_{tgx}2}\geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решим уравнение $1-log_{tgx}2=0.$

$$log_{tgx}2=1;$$

$$tgx=2;$$

$$x=arctg\,2+\pi k, k\in Z.$$

Решим неравенство $1-log_{tgx}2\geq \frac{1}{2}.$

$$log_{tgx}2\leq \frac{1}{2};$$

$$log_{tgx}2\leq log_{tgx}(tgx)^{\frac{1}{2}}.$$

Данное неравенство равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} tgx>1, \\ tgx\geq 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0<tgx<1, \\ (tgx)^{\frac{1}{2}}\leq 2. \end{cases}$$

$tgx\geq 4$ или $0<tgx<1.$

$arctg4+\pi n\leq x<\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$ или $\pi m<x<\frac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in Z.$

Ответ: $arctg2+\pi k; [arctg4+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n); (\pi m;\frac{\pi}{4}+\pi m), k,m,n\in Z.$

Интересно, что некоторые рациональные, дробно-рациональные и иррациональные уравнения (неравенства) можно решить, используя **тригонометрическую подстановку** $(x=cos\alpha, x=sin\alpha, x=tg\alpha,$

$x = ctg\alpha$), которая позволяет сводить исходное уравнение (неравенство) к тригонометрическому. Такая подстановка используется, если:

- выражения в уравнении напоминают (внешне) известные тригонометрические формулы;
- областью определения уравнения является отрезок $[-1;1]$ (для подстановки $x = sin\alpha, x = cos\alpha$).

Основная трудность заключается в том, что тригонометрические уравнения имеют бесконечное множество корней, а исходное алгебраическое – конечное количество корней, поэтому необходимо «отсеять» посторонние корни.

Пример 1.4. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2+1} = x + \frac{5}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

Решение. Введём тригонометрическую подстановку $x = tg\alpha$, где

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

получим:

$$\sqrt{tg^2\alpha+1} = tg\alpha + \frac{5}{2\sqrt{tg^2\alpha+1}}.$$

Используя формулу $1+tg^2\alpha=\frac{1}{cos^2\alpha}$, получим:

$$\frac{1}{|cos\alpha|}=tg\alpha+\frac{5}{2\cdot\left|\frac{1}{cos\alpha}\right|}.$$

Учитывая, что $cos\alpha>0$ (т.к. $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$), получим:

$$\frac{1}{cos\alpha}=tg\alpha+\frac{5cos\alpha}{2};$$

$$\frac{1}{cos\alpha}=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}+\frac{5cos\alpha}{2};$$

$$\frac{1-sin\alpha}{cos\alpha}=\frac{5cos\alpha}{2};$$

$$\begin{cases}5cos^2\alpha+2sin\alpha-2=0,\\ cos\alpha\neq 0;\end{cases}$$

$$5(1-sin^2\alpha)+2sin\alpha-2=0;$$

$$5-5sin^2\alpha+2sin\alpha-2=0;$$

$$5sin^2\alpha-2sin\alpha-3=0;$$

$$sin\alpha=1;\, sin\alpha=-\frac{3}{5}.$$

Так как $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $sin\alpha\neq 1$, следовательно, подходит только $sin\alpha=-\frac{3}{5}$. Если $sin\alpha=-\frac{3}{5}$, то $cos\alpha=\frac{4}{5}$. Отсюда $tg\alpha=-\frac{3}{4}$, т.е. $x=-\frac{3}{4}$.

Ответ: $-\frac{3}{4}$.

Пример 1.5. Решите уравнение

$$4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}.$$

Решение. Заметим, что $1 - x^2 \geq 0$, т.е. $-1 \leq x \leq 1$. Поэтому введём подстановку $x = cos\alpha$, где $0 \leq \alpha \leq \pi$. Тогда уравнение примет вид:

$$4cos^3\alpha - 3cos\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha};$$

$$cos3\alpha = |sin\alpha|.$$

Так как $0 \leq \alpha \leq \pi$, то $sin\alpha \geq 0$, отсюда $cos3\alpha = sin\alpha$;

$$cos3\alpha - sin\alpha = 0;$$

$$cos3\alpha - cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0;$$

$$-2 \cdot sin\frac{3\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{2} \cdot sin\frac{3\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{2} = 0;$$

$sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ или $sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 0;$
$2\alpha - \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in Z$ или $\alpha + \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in Z$
$\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z$ или $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$
Учитывая условие $\alpha \in [0; \pi]$, проведём выборку корней.

Получим $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}; \alpha_2 = \frac{5\pi}{8}; \alpha_3 = \frac{3\pi}{4}.$

Отсюда $x_1 = cos\frac{\pi}{8}; x_2 = cos\frac{5\pi}{8}; x_3 = cos\frac{3\pi}{4}.$

Замечание 1.1. Ответ можно записать в тригонометрической форме, однако, в данном случае числа $cos\frac{\pi}{8}, cos\frac{5\pi}{8}, cos\frac{3\pi}{4}$ можно записать алгебраически.

$$cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

$$cos\frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1+cos\frac{5\pi}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

$$cos\frac{3\pi}{4} = -cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}; -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Рассмортим ещё один метод решения уравнений третьей и четвёртой степеней – метод параметризации, суть которого состоит в ведении параметра, позволяющего понизить степень уравнения.

Пример 1.6. Решите уравнение

$$x^3 - (\sqrt{2}+1)\cdot x^2 + 2 = 0.$$

Решение. Введём параметр $\sqrt{2} = a$, тогда уравнение примет вид

$$x^3 - (a+1) \cdot x^2 + a^2 = 0;$$

$$x^3 - ax^2 - x^2 + a^2 = 0;$$

$a^2 - ax^2 + x^3 - x^2 = 0$ – квадратное уравнение относительно параметра a.

$$D = \left(x^2 - 2x\right)^2 \geq 0;$$

$$a_1 = x;\ a_2 = x^2 - x.$$

Вернувшись к замене, получим:

$$x^2 - x = \sqrt{2}; \qquad x = \sqrt{2};$$

$$x^2 - x - \sqrt{2} = 0;$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2};$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2};$$

Ответ: $\sqrt{2}$; $\frac{1+\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$.

Пример 1.7. Решите уравнение

$$x \cdot (x+1)(x+3)(x+4) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}+4).$$

Решение. Перемножим попарно многочлены $(x+1)\cdot(x+3)$ и $x\cdot(x+4)$, получим:

$$(x^2+4x)\cdot(x^2+4x+3)=(2+4\sqrt{2})\cdot(5+4\sqrt{2}).$$

Введём функциональную замену $x^2+4x=t$ и параметр $2+4\sqrt{2}=a$, получим:

$$t\cdot(t+3)=a\cdot(a+3);$$

$$t^2+3t=a^2+3a;$$

$$t^2-a^2+3(t-a)=0;$$

$$(t-a)(t+a)+3(t-a)=0;$$

$$(t-a)\cdot(t+a+3)=0;$$

$$t=a \text{ или } t=-a-3.$$

Возвращаясь к замене, получим:

$$x^2+4x=2+4\sqrt{2} \text{ или } x^2+4x=-(2+4\sqrt{2})-3.$$

Решив каждое из полученный квадратных уравнений, получим:

$$x_1=\sqrt{2}; x_2=-4-\sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}; -4-\sqrt{2}$.

1.2 Использование численных неравенств при решении уравнений, неравенств и их систем (неравенства Коши, Коши-Буняковского, Бернулли)

Существенно расширяет круг решаемых задач знание численных неравенств (Коши, Коши-Буняковского, Бернулли) и умение их применять при решении нестандартных задач.

Теорема 1.1. *(неравенство Коши).* Пусть $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \ldots, a_n \geq 0$, тогда справедливо неравенство:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}, \text{ где } n \geq 2.$$

Причём $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Частным случаем неравенства Коши является неравенство
$a + \frac{1}{a} \geq 2$ при $a > 0$. При этом $a + \frac{1}{a} = 2 \iff a = 1$.
Если $a < 0$, то $a + \frac{1}{a} \leq -2$, причём $a + \frac{1}{a} = -2 \iff a = -1$.

Теорема 1.2. *(неравенство Коши-Буняковского).* Для произвольных действительных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ справедливо неравенство:

$$(x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2),$$

где $n \geq 2$. При этом указанное неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$.

Теорема 1.3. *(неравенство Бернулли).* Если $x > -1$ и $n \in N$, то $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Причём неравенство превращается в равенство при $x = 0$ или $n = 1$.

Обобщённые неравенства Бернулли имеют вид:

- если $p < 0$ или $p > 1$, то $(1+x)^p \geq 1 + px$;
- если $0 < p < 1$, то $(1+x)^p \leq 1 + px$.

Рассмотрим примеры использования записанных выше неравенств при решении задач.

Пример 1.8. Найдите все положительные решения системы

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 10, \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} + \frac{4}{t} = 10. \end{cases}$$

Решение. Сложим почленно уравнения, получим:

$$(x + \frac{1}{x}) + 2(y + \frac{1}{y}) + 3(z + \frac{1}{z}) + 4(t + \frac{1}{t}) = 20.$$

Заметим, что $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $2(y + \frac{1}{y}) \geq 4$, $3(z + \frac{1}{z}) \geq 6$, $4(t + \frac{1}{t}) \geq 8$. Следовательно, сумма в левой части уравнения больше либо равна 20. Равенство будет достигаться при условии $x = 1, y = 1, z = 1, t = 1$.

Ответ: $(1; 1; 1; 1)$.

Пример 1.9. Решите уравнение

$$x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}.$$

Решение. Используем неравенство Коши-Буняковского для выражения в левой части уравнения. Получим:

$$\left(x\sqrt{x+1}+1\cdot\sqrt{3-x}\right)^2 \le (x^2+1)\cdot\left(\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\left(\sqrt{3-x}\right)^2\right)=$$

$$=(x^2+1)\cdot(x+1+3-x)=(x^2+1)\cdot 4.$$

Следовательно, $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\le 2\sqrt{x^2+1}$ для всех x из области определения. Равенство достигается при условии $\frac{\sqrt{x+1}}{x}=\frac{\sqrt{3-x}}{1}$, $x\ne 0$.

Отсюда $\begin{cases} 0<x\le 3, \\ x+1=x^2(3-x); \end{cases}$ $\begin{cases} 0<x\le 3, \\ x^3-3x^2+x+1=0; \end{cases}$

$x=1$, $x=1+\sqrt{2}$, $x=1-\sqrt{2}$– корни уравнения системы.

Учитывая условие $0<x\le 3$, получим корни исходного уравнения: $x_1=1;\quad x_2=1+\sqrt{2}.$

Ответ: $1;\ \ 1+\sqrt{2}.$

Пример 1.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\sqrt{x+17}+\sqrt{24-x}.$$

Решение. Найдём область определения функции: $\begin{cases} x+17\ge 0, \\ 24-x\ge 0; \end{cases}$

$$-17 \le x \le 24.$$

Используем неравенство Коши-Буняковского:

$$y^2 = (1 \cdot \sqrt{x+17} + 1 \cdot \sqrt{24-x})^2 \le (1+1) \cdot ((\sqrt{x+17})^2 + (\sqrt{24-x})^2) =$$

$$= 2 \cdot (x + 17 + 24 - x) = 2 \cdot 41 = 82.$$

Следовательно, $|y| \le \sqrt{82}$.

Докажем, что функция достигает значения $\sqrt{82}$. Равенство достигается при условии $\frac{\sqrt{x+17}}{1} = \frac{\sqrt{24-x}}{1}$.

Отсюда $x + 17 = 24 - x$;

$$2x = 7;$$

$$x = \frac{7}{2}.$$

$\frac{7}{2} \in D(y)$. В самом деле, $y(\frac{7}{2}) = \sqrt{\frac{7}{2} + 17} + \sqrt{24 - \frac{7}{2}} = \sqrt{\frac{7+34}{2}} + \sqrt{\frac{48-7}{2}} =$
$= \sqrt{\frac{41}{2}} + \sqrt{\frac{41}{2}} = 2\sqrt{\frac{41}{2}} = \sqrt{4 \cdot \frac{41}{2}} = \sqrt{82}$.

Ответ: $\sqrt{82}$.

Пример 1.11. Решите уравнение

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + \sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1+x^2} = 4.$$

Решение. Используем неравенство Бернулли. Найдём область определения уравнения: $\begin{cases} 1-x\geq 0, \\ 1+x\geq 0, \\ 1-x^2\geq 0, \\ 1+x^2\geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\leq 1, \\ x\geq -1, \\ (1-x)(1+x)\geq 0, \\ x=R; \end{cases}$ $-1\leq x\leq 1.$

1. Если $x=-1$, то $\sqrt{1-(-1)}+\sqrt{1+(-1)}+\sqrt[4]{1-(-1)^2}+$ $+\sqrt[4]{1+(-1)^2}=\sqrt{2}+0+\sqrt[4]{0}+\sqrt[4]{2}=\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\neq 4.$ Следовательно, -1 не является корнем исходного уравнения.

2. Пусть $-1<x\leq 1$, тогда согласно неравенству Бернулли:
$$\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}}\leq 1-\frac{1}{2}x;$$
$$\sqrt{1+x}\leq(1+x)^{\frac{1}{2}}\leq 1+\frac{1}{2}x;$$
$$\sqrt[4]{1-x^2}\leq(1-x^2)^{\frac{1}{4}}\leq 1-\frac{1}{4}x^2;$$
$$\sqrt[4]{1+x^2}\leq(1+x^2)^{\frac{1}{4}}\leq 1+\frac{1}{4}x^2.$$
Сложим неравенства почленно, получим:
$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x^2}\leq 4.$$
Неравенство обращается в равенство только при $x=0$.

Ответ: 0.

Пример 1.12. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ и $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$, то справедливо неравенство:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ad + ac + bc + bd + cd \geq 10.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Коши.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4 \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot d^2} = 4 \cdot \sqrt[4]{(abcd)^2} = 4.$$

$$ab + ad + ac + bc + bd + cd \geq 6 \cdot \sqrt[6]{ab \cdot ad \cdot ac \cdot bc \cdot bd \cdot cd} =$$

$$= 6 \cdot \sqrt[6]{a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 \cdot d^3} = \sqrt[6]{(abcd)^3} = 6.$$

Сложив почленно оба неравенства, получим:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ad + ac + bc + bd + cd \geq 10.$$

Неравенство доказано.

1.3 Геометрические методы решения алгебраических задач

Общеизвестным является тот факт, что многие геометрические задачи мы решаем алгебраическим методом. По словам И.Ф. Шарыгина «... то, что алгебра помогает геометрии, даёт ей свой инструмент для исследования – явление обычное. Но важно и то, что геометрия может оказать большую помощь при изучении алгебры...»

Использовать геометрические приёмы можно при:

- преобразовании выражений, содержащих $arccosx$, $arcsinx$, $arctgx$, $arcctgx$;
- доказательстве тригонометрических тождеств;
- вычислении значений тригонометрических выражений;
- решении иррациональных уравнений;
- решении некоторых видов систем уравнений.

Рассмотрим идеи использования геометрических интерпретаций на конкретных примерах.

Пример 1.13. Вычислите $sin(arctg\frac{2}{3})$.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник с острым углом α и катетами 2 и 3 (т.к. $tg\alpha = \frac{2}{3}$, т.е. $\alpha = arctg\frac{2}{3}$). Найдём гипотенузу AB :

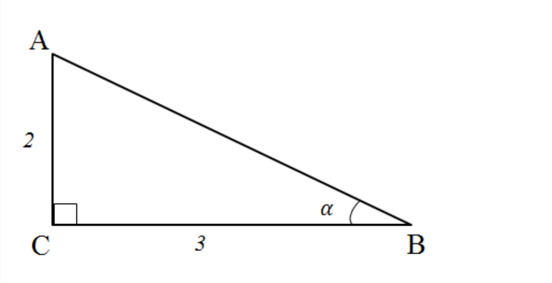


Рис. 1.2.

$AB^2 = 4 + 9 = 13$; $AB = \sqrt{13}$.
Следовательно, $sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Пример 1.14. Найдите значение выражения $sin(arctg\frac{2}{3} + arctg\frac{1}{5})$.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник AOC с катетами 2 и 3 и углом $\alpha = arctg\frac{2}{3}$ и прямоугольный треугольник BHC с катетами 1 и 5 и углом $\beta = arctg\frac{1}{5}$.

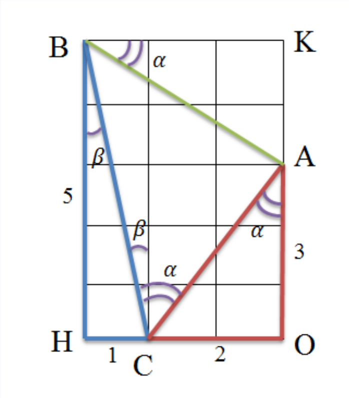


Рис. 1.3.

Легко доказать, что $AC = AB$ и $\triangle ABC$ — прямоугольный, следовательно, $\alpha + \beta = 45°$. Отсюда $sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 1.15. Докажите тождество $\frac{1}{sin10°} - \frac{\sqrt{3}}{cos10°} = 4$.

Доказательство. Построим прямоугольный треугольник ABC с острым углом B, равным $10°$. Тогда $\angle DAB = 20°(D \in BC)$ и $\angle DEA = 20°$ $(E \in BA)$. Легко доказать, что $AD = DE = BE$. Пусть $AD = a$, $AB = x$.

Проведём $EM \| AC$ и рассмотрим подобие треугольников MBE и CBA.

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BE}{BA} = \frac{ME}{CA}.$$

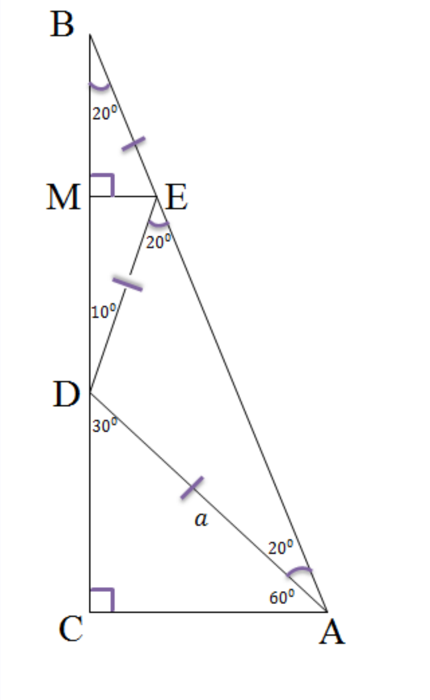


Рис. 1.4.

Заметим, что $BM = a \cdot cos10^\circ$; $ME = a \cdot sin10^\circ$; $CA = \frac{a}{2}$; $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$$BC = BM + MD + DC = a \cdot cos10^\circ + a \cdot cos10^\circ + \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Рассмотрим отношение:

$$\frac{a \cdot cos10^\circ}{a(2cos10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}})= \frac{a}{x} = \frac{a \cdot sin10^\circ}{\frac{a}{2}}.$$

Из первого равенства получим $x = \frac{a\cdot(2cos10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2})}{cos10^\circ}$, а из второго –

$$x = \frac{a}{2sin10^\circ}.$$

Отсюда $\quad \frac{1}{2sin10^\circ} = \frac{2cos10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}}{cos10^\circ}$;

$$\frac{1}{2sin10^\circ} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2cos10^\circ}.$$

Следовательно, $\frac{1}{sin10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{cos10^\circ} = 4$, что и требовалось доказать.

Тождество доказано.

Пример 1.16. Найдите значение выражения $sin 18°$.

Решение. Построим прямоугольный треугольник AOC с углом $18°$ и достроим его до равнобедренного треугольника ABC как показано на рисунке. Проведём биссектрису CD угла C треугольника ABC.

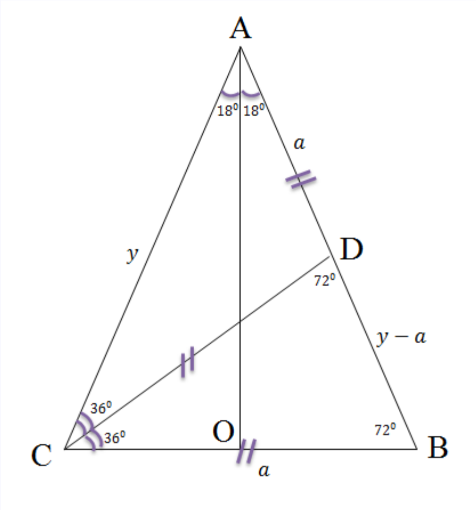


Рис. 1.5.

Пусть $AC = AB = y, AD = DC = BC = a$.

По теореме синусов из $\triangle BCD$ получим:

$$\frac{y-a}{sin36^\circ}=\frac{a}{sin72^\circ},$$

откуда

$$\frac{sin72^\circ}{sin36^\circ}=\frac{a}{y-a}.$$

По теореме синусов из $\triangle ADC$ получим: $\frac{a}{sin36^\circ}=\frac{y}{sin108^\circ}$,

$$(sin108^\circ=sin72^\circ)$$

откуда

$$\frac{sin72^\circ}{sin36^\circ}=\frac{y}{a}.$$

Имеем

$$\frac{a}{y-a}=\frac{y}{a};$$

$$a^2=y^2-ay;$$

$$a^2+ay-y^2=0;$$

$$D=y^2+4y^2=5y^2;$$

$$a_1=\frac{-y+y\sqrt{5}}{2};\quad a_2=\frac{-y-y\sqrt{5}}{2}.$$

Т.к. $a > 0$ и $y > 0$, то
$$a = \frac{y(\sqrt{5}-1)}{2};$$

отсюда
$$2a = y(\sqrt{5}-1);$$
$$\frac{2a}{y} = \sqrt{5}-1;$$
$$\frac{a}{y} = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$
$$\frac{a}{2y} = \frac{\sqrt{5}-1}{4};$$
$$sin 18^\circ = \frac{a}{2y} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Пример 1.17. Решите уравнение $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3x\sqrt{3}+9} = \sqrt{19}$.

Решение. Построим прямоугольный треугольник ABC с катетами 2 и x, тогда гипотенуза $AB = \sqrt{4+x^2}$.

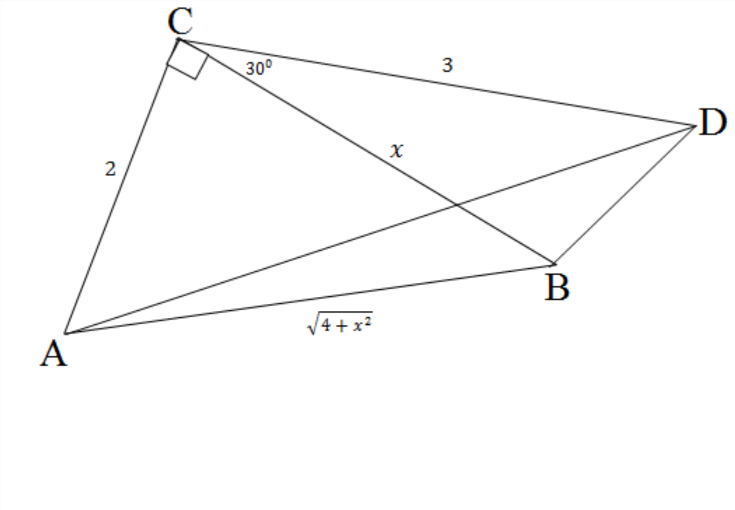


Рис. 1.6.

«Пристроим» к этому треугольнику треугольник CDB с углом DCB, равным $30°$ и стороной $DC = 3$. Тогда по теореме косинусов

$$BD^2 = x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot cos30° = x^2 + 9 - 6x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = x^2 + 9 - 3\sqrt{3}x;$$

$$BD = \sqrt{x^2 - 3x\sqrt{3} + 9}.$$

Согласно неравенству треугольника:

$$AB + BC \geq AD, \text{ т.е. } \sqrt{4+x^2} + \sqrt{x^2 - 3x\sqrt{3} + 9} \geq \sqrt{19},$$

где $AD = \sqrt{4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot cos120^\circ} = \sqrt{19}$.
А по условию задачи $AB + BD = AD$, следовательно, точка $B \in AD$ и рисунок будет выглядеть так:(см. рис. 1.7.).

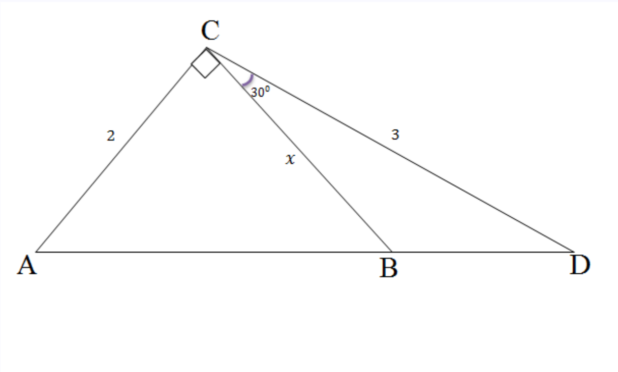


Рис. 1.7.

Используем свойство площадей:

$$S_{ACD} = S_{ACB} + S_{BCD};$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot sin120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x \cdot sin30^\circ;$$

$$3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=x+\frac{3}{4}x;$$
$$\frac{7}{4}x=\frac{3\sqrt{3}}{2};$$
$$x=\frac{4\cdot 3\sqrt{3}}{2\cdot 7}=\frac{6\sqrt{3}}{7}.$$

Ответ: $\frac{6\sqrt{3}}{7}$.

Пример 1.18. Для положительных значений x, y, z найдите значение выражения $\sqrt{3}\cdot xz+y(x+z)$ из системы

$$\begin{cases} x^2+\frac{y^2}{3}+\frac{xy}{\sqrt{3}}=625,\\ \frac{y^2}{3}+z^2+\frac{yz}{3}=49,\\ x^2+z^2+xz=576.\end{cases}$$

Решение. Заметим, что в каждом из уравнений системы «спрятана» теорема косинусов. Так, первое уравнение описывает треугольник AOB со сторонами x, $\frac{y}{\sqrt{3}}$ и углом 120° между ними; второе – треугольник BOC со сторонами z, $\frac{y}{\sqrt{3}}$ и углом 120°; и третье – треугольник AOC со сторонами x, z и углом 120°. Выполним рисунок.
Заметим, что по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ABC – прямоугольный. Воспользуемся свойством площадей:

$$S_{AOB}+S_{BOC}+S_{AOC}=S_{ABC};$$

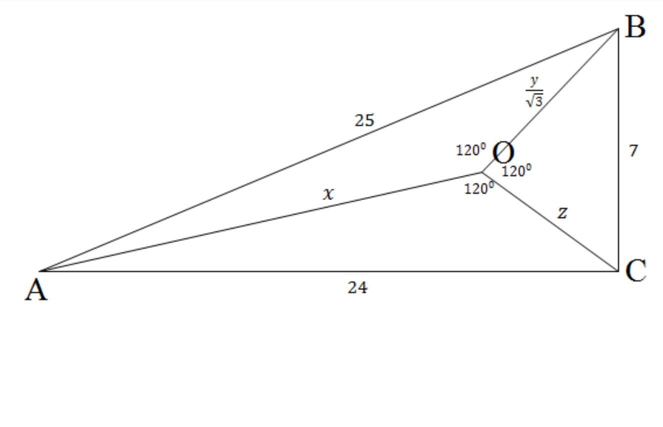


Рис. 1.8.

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot sin120^\circ+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot z\cdot sin120^\circ+\frac{1}{2}\cdot x\cdot z\cdot sin120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 24;$$

Учитывая, что $sin120^\circ = sin(90^\circ + 30^\circ) = cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ получим:

$$\frac{xy}{4}+\frac{yz}{4}+\frac{xz\sqrt{3}}{4}=7\cdot 12;$$

отсюда

$$xy+yz+xz\sqrt{3}=336.$$

Ответ: 336.

1.4 Векторный метод решения алгебраических задач

Использование векторов при решении уравнений, неравенств и систем требует знания следующего теоретического материала.

1. Если $\overrightarrow{a}$ $(a_1; a_2)$ и $\overrightarrow{b}$ $(b_1; b_2)$, то $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ и $|\overrightarrow{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$;
2. $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| \leq |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|$, причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$, т.е. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.
3. $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| \leq |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|$; аналогично, $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| \iff \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$, т.е. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.
4. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot cos\varphi$, где φ – угол между векторами.

   Т.к. $cos\varphi \leq 1$, то $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \leq |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|$. Равенство достигается при условии $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$, т.е. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Замечание 1.2. Все неравенства можно записать в координатной форме:

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2};$$

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2};$$

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Замечание 1.3. Все сформулированные свойства распространяются и на пространство, т.е. если векторы имеют три координаты: $\overrightarrow{a}\ (a_1; a_2; a_3)$ и $\overrightarrow{b}\ (b_1; b_2; b_3)$.

Рассмотрим примеры использования векторов при решении некоторых видов задач.

Пример 1.19. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{x+17} + \sqrt{24-x}.$$

Решение. Введём векторы $\overrightarrow{a}(1;1)$ и $\overrightarrow{b}(\sqrt{x+17}; \sqrt{24-x})$ и найдём их длины:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{2}, |\overrightarrow{b}| = \sqrt{x+17+24-x} = \sqrt{41}.$$

Заметим, что

$$f(x) = 1 \cdot \sqrt{x+17} + 1 \cdot \sqrt{24-x} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}.$$

Зная, что $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \leq |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|$, получим

$$f(x) \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{41} = \sqrt{82}.$$

Докажем, что функция достигает значения $\sqrt{82}$.
Равенство достигается, если $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|$, т.е.

если $\frac{\sqrt{x+17}}{1} = \frac{\sqrt{24-x}}{1}$, откуда $x = \frac{7}{2}$.
В самом деле,

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \sqrt{\frac{7}{2}+17} + \sqrt{24-\frac{7}{2}} = 2\sqrt{\frac{41}{2}} = \sqrt{82}.$$

Ответ: $\sqrt{82}$.

Пример 1.20. Решите систему

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ x^2+y^2+z^2=12, \\ log_x y^2 = z. \end{cases}$$

Решение. Введём векторы $\overrightarrow{a}(1;1;1)$ и $\overrightarrow{b}(x;y;z)$ и найдём их длины:
$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{3}$; $|\overrightarrow{b}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
Отсюда $|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}| = \sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 6$.
Первое уравнение системы можно записать в виде: $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 6$.
Зная, что $|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}| = 6$, получим $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|$. Это равенство справедливо, если $\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$, т.е. $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Отсюда $x=y=z=2$.
Проверим, является ли тройка чисел $(2;2;2)$ решением третьего уравнения системы: $log_2 2^2 = 2$ – верно.

Ответ: $(2;2;2)$.

Пример 1.21. Решите уравнение

$$\sqrt{4cos^2x+1}+\sqrt{4sin^2x+3}=4.$$

Решение. Введём векторы $\overrightarrow{a}(1;1)$ и $\overrightarrow{b}(\sqrt{4cos^2x+1};\ \sqrt{4sin^2x+3})$ и найдём их длины:

$$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{2};$$

$$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{4cos^2x+1+4sin^2x+3}=\sqrt{4(cos^2x+sin^2x)+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

Заметим, что $|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=4.$
Так как $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=4$ и $|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|=4$, то $\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$,
т.е.

$$\frac{\sqrt{4cos^2x+1}}{1}=\frac{\sqrt{4sin^2x+3}}{1};$$

$$4cos^2x+1=4sin^2x+3;$$

$$4(cos^2x-sin^2x)=2;$$

$$4cos2x=2;$$

$$cos2x=\frac{1}{2};$$

$$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z;$$

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z.$

ТЕМА 2
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД В ПОИСКЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

2.1 Использование ограниченности области определения и области значений функции (метод мажорант)

Решение некоторых видов уравнений, неравенств и их систем целесообразно начинать с нахождения области определения входящих в них выражений. Рассмортим решение уравнений, основанных на использовании ограниченности области определения.

Пример 2.1. Решите уравнение

$$\sqrt{3+11x}-\sqrt{2-x}=\sqrt{9x+7}-\sqrt{x-2}.$$

Решение. Область определения уравнения найдём из системы:

$$\begin{cases} 3+11x\geq 0,\\ 2-x\geq 0,\\ 9x+7\geq 0,\\ x-2\geq 0;\end{cases}\qquad \begin{cases} 11x\geq -3,\\ x\leq 2,\\ 9x\geq -7,\\ x\geq 2;\end{cases}\qquad x=2.$$

Проверим, является ли число 2 корнем данного уравнения:

$$\sqrt{3+11\cdot 2}-\sqrt{2-2}=\sqrt{9\cdot 2+7}-\sqrt{2-2};$$

$$5-0=5-0;$$

$$0=0 - \text{ верное числовое равенство.}$$

Ответ: 2.

Пример 2.2. Решите уравнение

$$\sqrt{x-3}-\sqrt{x+9}=\sqrt{x-2}.$$

Решение. Найдём область определения уравнения:

$$\begin{cases} x-3\ge 0,\\ x+9\ge 0,\\ x-2\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 3,\\ x\ge -9,\\ x\ge 2; \end{cases} \quad x\ge 3.$$

Областью определения уравнения является промежуток $[3;+\infty)$. Заметим, что при $x\ge 3$ левая часть уравнения принимает только отриательные значения (т.к. $x-3<x+9$), а правая часть уравнения $\sqrt{x-2}\ge 1$. Следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Пример 2.3. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-6x+8}=\sqrt{x^2-11x+18}.$$

Решение. Найдём область определения уравнения:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ x^2 - 6x + 8 \geq 0, \\ x^2 - 11x + 18 \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-2)(x-1) \geq 0, \\ (x-2)(x-4) \geq 0, \\ (x-2)(x-9) \geq 0; \end{cases}$$

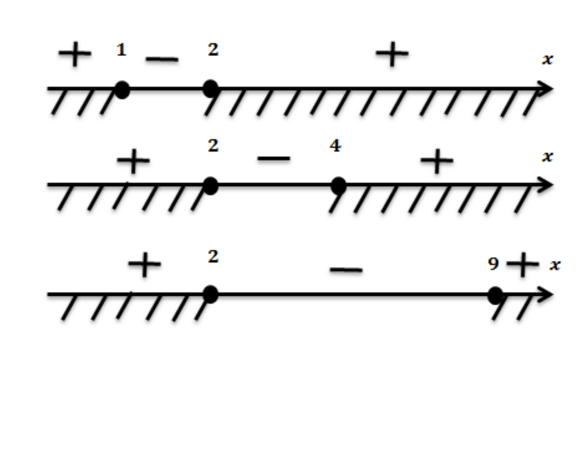


Рис. 2.1.

$$D = (-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [9; +\infty).$$

1. Легко видеть, что число 2, входящее в область определения, явля-

ется корнем уравнения.

2. Рассмотрим промежуток $[9;+\infty)$ и перепишем уравнение в виде:

$$\sqrt{(x-2)(x-1)}+\sqrt{(x-2)(x-4)}=\sqrt{(x-2)(x-9)}.$$

Заметим, что при $x\geq 9$ каждый из множителей $(x-2; x-1;\ x-4;$ $x-9)$ принимает неотрицательное значение. Поэтому на основании свойства $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, где $a\geq 0, b\geq 0$ запишем:

$$\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-4}=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-9}.$$

Разделив обе части уравнения на $\sqrt{x-2}$ $(\sqrt{x-2}\neq 0,$ т.к. $x\geq 9)$, получим: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4}=\sqrt{x-9}$.
Возведём обе части уравнения в квадрат.

$$x-1+x-4+2\cdot\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-4}=x-9;$$

$$2x-5+2\cdot\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-4}=x-9;$$

$$2\cdot\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-4}=-x-4.$$

Заметим, что при $x\geq 9$ левая часть полученного уравнения принимает положительные значения, а правая часть – отрицательная. Следовательно, корней нет.

3. Рассмотрим промежуток $(-\infty;1]$ и запишем уравнение:

$$\sqrt{(x-2)(x-1)}+\sqrt{(x-2)(x-4)}=\sqrt{(x-2)(x-9)}.$$

Заметим, что каждый из множителей $x-2; x-1; x-4; x-9$ принимает отрицательные значения, поэтому перепишем уравнение в виде:

$$\sqrt{(2-x)(1-x)}+\sqrt{(2-x)(4-x)}=\sqrt{(2-x)(9-x)}.$$

Далее, $\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{4-x}=\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{9-x}$. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{2-x}$, получим:

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{4-x}=\sqrt{9-x}.$$

Возведём обе части этого уравнения в квадрат и выполним необходимые преобразования:

$$1-x+4-x+2\cdot\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{4-x}=9-x;$$

$$2\cdot\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{4-x}=4+x;$$

$$\begin{cases} 4+x\geq 0, \\ 4\cdot(1-x)\cdot(4-x)=(4+x)^2; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x\geq -4, \\ 4\cdot(4-4x-x+x^2)=16+x^2+8x; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x\geq -4, \\ 16-20x+4x^2=16+x^2+8x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4, \\ 3x^2 - 28x = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq -4, \\ x = 0 \text{ или } x = 9\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Учитывая, что уравнение решали при условии, что $x \leq 1$, получим корень $x = 0$.

Ответ: 0; 2.

Рассмотрим **метод мажорант** (использование ограниченности области значений функции (мажоранта функция – от франц. «объявлять большим»).

Пример 2.4. Решите уравнение

$$x^2 + 2x + 3 = \sqrt{4 - x^2}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 2x + 3$ и найдём её область значений.

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x+1)^2 + 2 \geq 2.$$

Областью значений функции $f(x)$ является промежуток $[2; +\infty)$. Найдём область значений функции $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Кафедра методики преподавания математики и информатики
Начало
Содержание
Приложение
Страница 51 из 206
Назад
На весь экран
Закрыть

Учитывая, что $-2 \le x \le 2$, имеем: $E(g) = [0;2]$.

Таким образом, исходное уравнение будет иметь решение тогда и только тогда, когда будет иметь решение система:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 3 = 2, \\ \sqrt{4 - x^2} = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)^2 + 2 = 2, \\ 4 - x^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ x = 0; \end{cases} \quad \varnothing$$

Ответ: нет решений.

Пример 2.5. Решите уравнение

$$5 \cdot (1 + cos2\pi x) = 5^x + 5^{2-x}.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на 5, получим:

$$1 + cos2\pi x = 5^{x-1} + 5^{1-x}.$$

Областью значений функции $f(x) = 1 + cos2x$ является промежуток $[0;2]$, а функции $g(x) = 5^{1-x} + 5^{x-1}$– промежуток $[2;+\infty)$. Поэтому исходное уравнение будет иметь решение в том случае, если будет иметь решение система: $\begin{cases} 1 + cos2\pi x = 2, \\ 5^{1-x} + 5^{x-1} = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} cos2\pi x = 1; \\ 5^{x-1} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} cos2\pi x = 1; \\ x - 1 = 0; \end{cases}$

$x = 1$.

Ответ: 1.

Пример 2.6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 + 3 = 5\sqrt{x \cdot z}, \\ z^2 - 16 = 3xy\sqrt{9 - 25xz}. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения системы получим:

$$9 - 25xz \geq 0;\ xz \leq \tfrac{9}{25}.$$

Из первого уравнения системы будем иметь:

$$5\sqrt{xz} - 3 \geq 0.$$

Отсюда

$$\sqrt{xz} \geq \frac{3}{5} \text{ и } xz \geq \frac{9}{25}.$$

Следовательно, $xz = \frac{9}{25}$.
Далее, легко получить решение системы:

$$z = \pm 4;\ y = 0;\ x = \pm\tfrac{9}{100}.$$

Ответ: $(\frac{9}{100}; 0; 4); (-\frac{9}{100}; 0; -4)$.

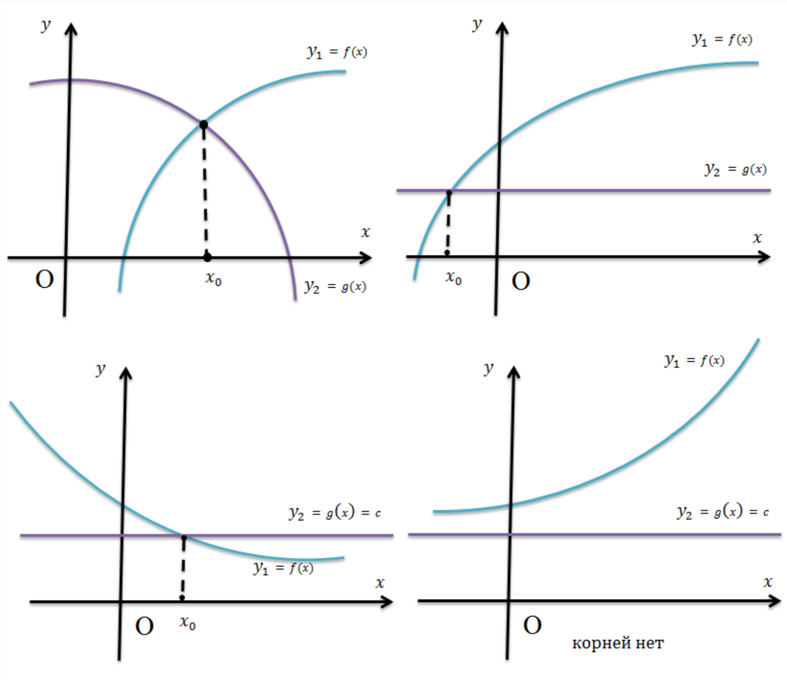
2.2 Использование монотонности функции

При решении некоторых уравнений (неравенств) вида $f(x) = g(x)(f(x) > g(x); f(x) < g(x))$ оказывается эффективным метод, основанный на **монотонности** функций $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$.

Если функция $y_1 = f(x)$ **непрерывна и возрастает** (убывает) на отрезке $[a; b]$, а функция $y_2 = g(x)$ **непрерывна и убывает** (возрастает) на отрезке $[a; b]$, то уравнение $f(x) = g(x)$ на $[a; b]$ имеет не более одного корня.

Это утверждение справедливо и для случая, если $g(x) = c$, где c – некоторая константа.

Графическая илюстрация сформулированных утверждений:



y
y1 = f(x)
x
O
x0
y2 = g(x)
y
y1 = f(x)
y2 = g(x)
x
x0
O
y
y2 = g(x) = c
y1 = f(x)
x
O
x0
y
y1 = f(x)
y2 = g(x) = c
x
O
корней нет

Рис. 2.2.

Пример 2.7. Решите уравнение

$$3^x + 4^x + 5^x = 6^x.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на 6^x, получим:

$$\left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x = 1 \qquad (*)$$

Заметим, что функция $f(x) = \left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x$ непрерывная и убывающая на множестве R, а функция $g(x) = 1$ – постоянная. Следовательно, уравнение $(*)$ имеет не более одного корня.
Легко видеть, что корнем данного уравнения является число 3.

Ответ: 3.

2.3 Использование производной при решении уравнений и неравенств

Пример 2.8. Решите уравнение

$$log_2(|x-1|+1)+\sqrt[3]{(x-1)^4}=2.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=log_2(|x-1|+1)$ и заметим, что если:

- $x \geq 1$, то $f(x)=log_2(x-1+1)=log_2 x$ – возрастает на промежутке $[1;+\infty)$;
- $x<1$, то $f(x)=log_2(-x-1+1)=log_2(2-x)$ – убывает на промежутке $(-\infty;1]$.

Рассмотрим функцию $g(x)=2-\sqrt[3]{(x-1)^4}$ и найдём $g'(x)=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{x-1}$.

1. Если $x \geq 1$, то $g(x)$ убывающая.
2. Если $x<1$, то $g(x)$ возрастающая.

Анализируя монотонность функций $f(x)$ и $g(x)$ на промежутках $(-\infty;1]$ и $[1;+\infty)$ легко найти корни уравнения: $x_1=2$; $x_2=0$.

Ответ: 2; 0.

Пример 2.9. Найдите количество действительных корней уравнения

$$x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$ и исследуем её на наибольшее и наименьшее значение.

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x^2 + 4x + 3) = 3(x + 1)(x + 3).$$

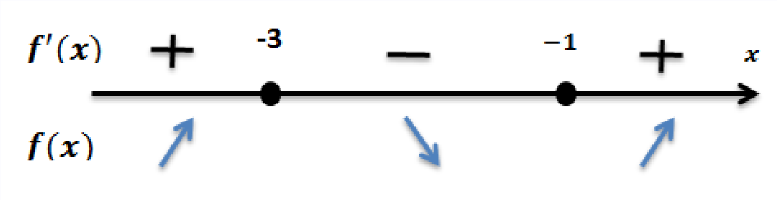


Рис. 2.3.

$$x = -3 \text{ – точка максимума;}$$

$$f(-3) = -27 + 54 - 27 + 1 = 1;$$

$$x = -1 \text{ – точка минимума;}$$

$$f(-1) = -1 + 6 - 9 + 1 = -3.$$

Построим схематически график функции $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$.

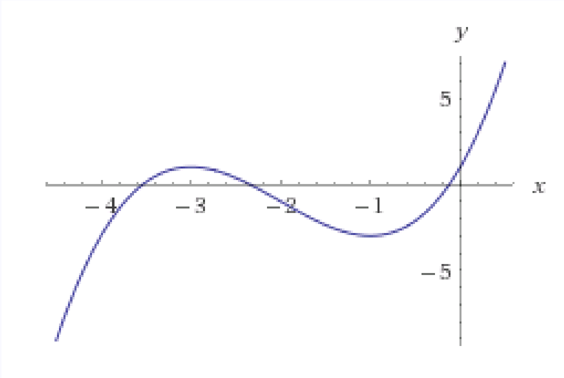


Рис. 2.4.

Из графика видно, что исходное уравнение имеет три действительных корня.

Ответ: 3 корня.

ТЕМА 3
ЭВРИСТИЧЕСКИЕ ПРИЁМЫ ПРИ РЕШЕНИИ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

3.1 Понятие о функциональных уравнениях

Существуют различные определения понятий «уравнение» и «функциональное уравнение». Ограничимся рассмотрением одного из наиболее часто употребляемых.

Определение 3.1. *Уравнение – аналитическая запись задачи о разыскании значений аргументов, при которых значение двух данных функций равны* [14, с. 603].

Определение 3.2. *Функциональное уравнение – аналитическая запись задачи о разыскании функций (класса функций), обладающих определённым свойством [14, с. 603].*

Простейшими примерами функциональных уравнений являются:

1. $f(-x) = f(x)$ – уравнение чётности, решением которого являются, например, функции $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$, $f(x) = cos3x$ и т.д.

2. $f(-x) = -f(x)$ – уравнение, решением которого являются, например, функции $f(x) = x^3$, $f(x) = 2x$, $f(x) = sinx$ и др.

3. $f(x+T)=f(x)$ – уравнение периодичности;
   $f(x)=cosx$, $f(x)=tgx$ – его решения.

Существует также ещё один тип функциональных уравнений вида $f(f(x))=x$ или $f(g(x))=f(h(x))$, который рассматривается в учебно-методической литературе [15, 16].

3.2 Основные теоремы, используемые при решении функциональных уравнений

Методы решения функциональных уравнений:

$$\underbrace{f(f(\cdot(f(x))))}_{n} = x \quad (1) \quad \text{и} \quad f(g(x)) = f(h(x)) \qquad (2)$$

основаны на использовании следующих основных теорем.

Теорема 3.1. *Корни уравнения $f(x) = x$ являются корнями уравнения (1) [15].*

Доказательство. Пусть $x = x_0$ – корень уравнения $f(x) = x$, тогда справедливо равенство $f(x_0) = x_0$. Следовательно, справедливы и следующие равенства:

$$f(f(x_0)) = f(x_0);$$
$$f(f(f(x_0))) = f(f(x_0)), ..., \underbrace{f(f(...(f(x_0))...))}_{n \text{ раз}} = \underbrace{f(f(...(f(x_0))...)}_{(n-1) \text{ раз}}.$$

Отсюда следует, что $\underbrace{f(f...f(x_0)...))}_{n \text{ раз}} = x_0$, т.е. $x = x_0$ – является корнем уравнения (1).

Теорема 3.2. *Если $y = f(x)$ – возрастающая функция на отрезке $a \le x \le b$ и $f(a) \le f(x) \le f(b)$, то на данном отрезке уравнения (1) и $f(x) = x$ равносильны [15].*

Доказательство. Пусть $x = x_0$ – является корнем уравнения (1), т.е. $\underbrace{f(f...f(x_0)...)}_{n} = x_0$. Предположим, что $x = x_0$ не является корнем уравнения $f(x) = x$, т.е. $f(x_0) \neq x_0$. Тогда либо $x_0 < f(x_0)$, либо $x_0 > f(x_0)$.

Следовательно, в силу возрастания функции $y = f(x)$ справедливы неравенства $x_0 < f(x_0) < f(f(x_0)) < ... < \underbrace{f(f...f(x_0)...)}_{n} < x_0$, либо

$x_0 > f(x_0) > f(f(x_0)) > ... > \underbrace{f(f...f(x_0)...)}_{n} > x_0$.

Получили противоречие: $x_0 < x_0$ либо $(x_0 > x_0)$.

Следовательно, $f(x_0) = x_0$.

Следствие 3.1. *Если функция $y = f(x)$ – возрастает для любого $x \in R$, то уравнения (1) и $f(x) = x$ равносильны.*

Следствие 3.2. *Если функция $y = f(x)$ – возрастает на своей области определения, то уравнения (1) и $f(x) = x$ равносильны.*

Теорема 3.3. *Если $y = f(x)$ – возрастающая (или убывающая) функция на области допустимых значений уравнения (2), то уравнения (2) и $g(x) = h(x)$ равносильны.*

Следствие 3.3. *Если функция $y = f(x)$ – возрастающая (или убывающая) функция на области значений функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$, то уравнения (2) и $g(x) = h(x)$ равносильны.*

Замечание 3.1. *Теорема 3.3 доказывается аналогично теореме 3.2 (методом от противного).*

3.3 Основные методы решения функциональных уравнений (олимпиадных задач)

Рассмотрим основные методы решения функциональных уравнений.

Пример 3.1. Существует ли линейная функция $f(x)$, удовлетворяющая при любых действительных значениях переменной x уравнению $2 \cdot f(x+2) + f(4-x) = 2x + 5$?

Решение. Пусть $f(x) = kx + b$ – искомая линейная функция, тогда

$$2 \cdot (k(x+2) + b) + k(4-x) + b = 2x + 5;$$

$$2 \cdot (kx + 2k + b) + 4k - kx + b = 2x + 5;$$

$$2kx + 4k + 2b + 4k - kx + b = 2x + 5;$$

$$kx + 8k + 3b = 2x + 5;$$

Отсюда: $\begin{cases} k = 2, \\ 8k + 3b = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} k = 2, \\ 3b = -11; \end{cases}$ $\begin{cases} k = 2, \\ b = -\frac{11}{3}. \end{cases}$

Получили $f(x) = 2x - \frac{11}{3}$.

Легко проверить, что функция $f(x) = 2x - \frac{11}{3}$ искомая.

В самом деле, $2 \cdot (2(x+2) - \frac{11}{3}) + 2 \cdot (4-x) - \frac{11}{3} = 2x + 5;$

$$2 \cdot (2x + 4 - \frac{11}{3}) + 8 - 2x - \frac{11}{3} = 2x + 5;$$

$$4x + 8 - \frac{22}{3} + 8 - 2x - \frac{11}{3} = 2x + 5;$$

$$2x + 16 - \frac{33}{3} = 2x + 5;$$

$$2x + 5 = 2x + 5 - \quad \text{верно для} \quad \forall x \in R.$$

Ответ: $f(x) = 2x - \frac{11}{3}$.

Переформулируем вопрос первой задачи: Существуют ли другие функции, не обязательно линейные, удовлетворяющие уравнению

$$2 \cdot f(x+2) + f(4-x) = 2x + 5? \qquad (*)$$

Ответ на данный вопрос предполагает решение уравнения в общем виде.

Решение. Используем метод подстановки: подставим вместо x в уравнение $(*)$ выражение $x - 2$, получим новое уравнение:

$$2 \cdot f(x) + f(6-x) = 2(x-2) + 5.$$

Выполнив ещё одну подстановку $x \longrightarrow 4-x$, получим ещё одно уравнение:

$$2 \cdot f(6-x) + f(x) = 2(4-x) + 5.$$

Решим систему: $\begin{cases} 2 \cdot f(x) + f(6-x) = 2(x-2) + 5, \\ 2 \cdot f(6-x) + f(x) = 2(4-x) + 5 \end{cases}$ и найдём $f(x)$.

Кафедра методики преподавания математики и информатики

Начало

Содержание

Приложение

Назад

На весь экран

Закрыть

Умножим обе части первого уравнения на (-2), сложим почленно со вторым уравнением и получим:

$$-3 \cdot f(x) = -2 \cdot (2x - 4 + 5) + 8 - 2x + 5;$$

$$-3f(x) = 11 - 6x.$$

Отсюда $f(x) = 2x - \frac{11}{3}$ – искомая функция.

Ответ: $f(x) = 2x - \frac{11}{3}$.

Пример 3.2. Известно, что $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $\quad x \neq 0$. Найдите $f(x)$.

Решение. Заметим, что

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2.$$

Получили, что $f(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$, следовательно, $f(x) = x^2 - 2$.
Ответ: $f(x) = x^2 - 2$.

Пример 3.3. Решите уравнение

$$2 \cdot f(\frac{x-2}{x+1}) + f(\frac{x+1}{x-2}) = x, \text{ где } x \neq 2, x \neq -1.$$

Решение. Используем метод замены:
пусть $\frac{x-2}{x+1} = a$, $\quad$ тогда $x - 2 = a \cdot (x + 1)$;

$$x - 2 = ax + a;$$

$$x - ax = 2 + a;$$
$$x(1 - a) = 2 + a;$$
$$x = \frac{2 + a}{1 - a}, x \neq 1.$$

В этом случае исходное уравнение примет вид:

$$2 \cdot f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2 + a}{1 - a}.$$

Используя подстановку $a \longrightarrow \frac{1}{a}$, получим новое уравнение:

$$2 \cdot f\left(\frac{1}{a}\right) + f(a) = \frac{2 + \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}}.$$

Преобразуем выражение:

$$\frac{2 + \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{2a+1}{a}}{\frac{a-1}{a}} = \frac{2a + 1}{a} \cdot \frac{a}{a - 1} = \frac{2a + 1}{a - 1}.$$

Получили систему:

$$\begin{cases} 2 \cdot f(a) + f(\frac{1}{a}) = \frac{2+a}{1-a}, \\ 2 \cdot f(\frac{1}{a}) + f(a) = \frac{2a+1}{a-1}. \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на (-2) и сложим со вторым уравнением почленно, получим:

$$-3 \cdot f(a) = -2 \cdot \frac{2 + a}{1 - a} + \frac{2a + 1}{a - 1}.$$

Кафедра методики преподавания математики и информатики

$$-3f(a) = \frac{-4-2a}{1-a} + \frac{2a+1}{a-1};$$

$$-3f(a) = \frac{4+2a+2a+1}{a-1};$$

$$-3f(a) = \frac{4a+5}{a-1};$$

$$f(a) = \frac{4a+5}{3(1-a)}.$$

Следовательно, $f(x) = \frac{4x+5}{3-3x}$.

Ответ: $f(x) = \frac{4x+5}{3-3x}$.

Пример 3.4. Функция $f(n)$ определена для всех натуральных значений n и удовлетворяет условиям: $f(n) = f(n-1) + 1$; $f(1) = 2015$. Найдите $f(n)$.

Решение. Запишем следующие равенства и сложим их почленно:

$$f(2) = f(1) + 1;$$

$$f(3) = f(2) + 1;$$

$$f(4) = f(3) + 1;$$

$$+ \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$f(n-1) = f(n-2) + 1;$$

$$f(n) = f(n-1) + 1;$$

$$f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(n-1)+f(n) = f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-2)+$$
$$+f(n-1) + 1\cdot(n-1).$$

Приведём подобные слагаемые, получим:

$$f(n) = f(1) + 1\cdot(n-1);$$

$$f(n) = 2015 + n - 1 = 2014 + n.$$

Ответ: $f(n) = 2014 + n$.

Пример 3.5. Функция $f(n)$ удовлетворяет условию

$$f(\tfrac{n+2m}{3}) = \tfrac{f(n)+2\cdot f(m)}{3}, \forall n, m \in N \text{ и } f(1) = 1;\ f(4) = 7.$$

Найдите $f(n)$.

Решение. Положим $n = 1, m = 4$, тогда $f(3) = \frac{f(1)+2f(4)}{3} = 5$.
Пусть теперь $n = 4, m = 1$, тогда $f(2) = \frac{f(4)+2f(1)}{3} = 3$.
Имеем: $f(1) = 1;\ f(2) = 3;\ f(3) = 5;\ f(4) = 7$.
Следовательно, $f(n) = 2n - 1, n \in N$.
Проверим, верна ли наша гипотиза.
В самом деле,

$$f\left(\frac{n+2m}{3}\right) = 2\cdot\left(\frac{n+2m}{3}\right) - 1 = \frac{2n+4m}{3} - 1 = \frac{2n+4m-3}{3}.$$

$$\frac{f(n)+2f(m)}{3} = \frac{2n-1+2(2m-1)}{3} =$$

$$= \frac{2n-1+4m-2}{3} = \frac{2n+4m-3}{3}, \text{ ч.т.д.}$$

Ответ: $f(n) = 2n-1, n \in N$.

Рассмотрим второй тип функциональных уравнений, решение которых опирается на теоремы 3.1; 3.2; 3.3 и следствие из них.

Пример 3.6. Решите уравнение:

$$x = \sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+x}}}}. \qquad (1)$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{7+x}$, причём $x > 0$, что следует их исходного уравнения, тогда уравнение примет вид:

$$x = f(f(f(f(x)))).$$

Так как при $x > 0$ функция $f(x) = \sqrt{7+x}$ возрастает, то по теореме 3.2 на промежутке $(0;+\infty)$ уравнение (1) равносильно уравнению $f(x) = x$, т.е. $x = \sqrt{7+x}$;

$$x^2 - 7 - x = 0;$$

$$x^2 - x - 7 = 0;$$

$$D = 1 + 28 = 29 > 0;$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{29}}{2};$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{29}}{2};$$

$$\frac{1 - \sqrt{29}}{2} \in (0; +\infty).$$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$.

Пример 3.7. Решите уравнение:

$$(x^2 + 4x + 2)^2 + 4(x^2 + 4x + 2) + 2 = x. \qquad (2)$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 4x + 2$, тогда уравнение (2) примет вид $f(f(x)) = x$. Исследуем функцию $f(x)$ на монотонность.

$$f'(x) = 2x + 4 = 2(x + 2).$$

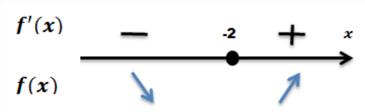


Рис. 3.1.

Поскольку функция на промежутке $(-\infty; -2]$ убывает, а на промежутке $[-2; +\infty)$ возрастает, то на основании теоремы 3.1 корни уравнения $f(x) = x$ являются корнями уравнения $f(f(x)) = x$.

Решим уравнение $x^2 + 4x + 2 = x$;

$$x^2 + 3x + 2 = 0;$$

$$x_1 = -1; x_2 = -2.$$

Для поиска остальных корней уравнения (2) разделим многочлен $(x^2 + 4x + 2)^2 + 4(x^2 + 4x + 2) + 2 - x$ на многочлен $x^2 + 3x + 2$, получим:

$$(x^2 + 4x + 2)^2 + 4(x^2 + 4x + 2) + 2 - x = (x^2 + 3x + 2) \cdot (x^2 + 5x + 7).$$

Заметим, что уравнение $x^2 + 5x + 7 = 0$ не имеет действительных корней.

Ответ: -2; -1.

Пример 3.8. Решите уравнение:

$$sin^6 x - 3sin^2 x = cos^3 2x - 3cos2x.$$

Решение. Введём в рассмотрение функции $f(x) = x^3 - 3x$; $g(x) = sin^2 x$ и $h(x) = cos2x$.

Заметим, что $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$ и $0 \le g(x) \le 1$; $-1 \le h(x) \le 1$, то функция $f(x)$ убывает на области значений функций $g(x)$ и $h(x)$, поэтому по следствию 3.3, уравнения $f(g(x)) = f(h(x))$ и $g(x) = h(x)$ равносильны.

Поэтому решим уравнение: $sin^2 x = cos2x$;

$$\frac{1 - cos2x}{2} = cos2x;$$

$$1 - cos2x = 2cos2x;$$

$$3cos2x = 1;$$

$$cos2x = \frac{1}{3};$$

$$2x = \pm arccos\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = \pm\frac{1}{2}arccos\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\pm\frac{1}{2}arccos\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z.$

ТЕМА 4
ЦЕЛАЯ И ДРОБНАЯ ЧАСТИ ЧИСЛА

4.1 Понятие целой и дробной части числа. Некоторые свойства

Определение 4.1. *Целой частью действительного числа x (обозначается $[x]$) называется наибольшее целое число, не превосходящее x.*

То есть $[x] = n, n \in Z$, причём $n \leq x$.
Например, $[2,3] = 2$; $[-7\frac{1}{3}] = -8$; $[\sqrt{3} = 1]$.
Заметим, что если $x \in Z$, то $[x] = x$; если $x \notin Z$ то $[x] < x$.
Следовательно, для любого действительного числа x справедливы неравенства:

$$[x] \leq x < [x] + 1. \quad (1)$$

Определение 4.2. *Дробной частью действительного числа x (обозначается $\{x\}$) называется разность между самим числом и его целой частью.*

То есть $\{x\} = x - [x]$, откуда $x = [x] + \{x\}$. $\quad (2)$
Очевидно, что $0 \leq \{x\} < 1$. (3)
Сформулируем и докажем некоторые свойства целой и дробной части.

Кафедра методики преподавания математики и информатики

Теорема 4.1. *$\forall x \in R$ и $\forall p \in Z$ справедливо равенство*

$$[x+p] = [x] + p. \quad (4)$$

Доказательство: Пусть $[x] = n$, $n \in Z$, тогда $n \le x \le n+1$.

Следовательно, $n+p \le x+p < n+1+p$. Это неравенство означает, что $[x+p] = n+p$, т.е. $[x+p] = [x]+p$.

Теорема 4.2. *Для всех действительных x и y выполняется неравенство*

$$[x+y] \ge [x] + [y]. \quad (5)$$

Доказательство. Зная, что $x = [x] + \{x\}$, где $0 \le \{x\} < 1$ и $y = [y] + \{y\}$, $0 \le \{y\} < 1$, запишем: $x + y = [x] + \{x\} + [y] + \{y\} = [x] + [y] + (\{x\} + \{y\})$, где $0 \le \{x\} + \{y\} < 2$.

Если $0 \le \{x\} + \{y\} < 1$, то $[x+y] = [x]+[y]$; если $1 \le \{x\} + \{y\} < 2$, то можно записать, что $\{x\} + \{y\} = 1 + \alpha$, где $0 \le \alpha < 1$ и тогда $[x+y] = [x] + [y] + 1 > [x] + [y]$.

Замечание 4.1. *Это неравенство имеет место для любого конечного числа слагаемых: $[x_1 + x_2 + \ldots + x_n] \ge [x_1] + [x_2] + \ldots + [x_n]$, $n \ge 1$.*

Теорема 4.3. *Если $[x] = [y]$, то $|x-y| < 1$.* $\quad (6)$

Доказательство: Пусть $[x] = n$ и $[y] = n$, где $n \in Z$.
Тогда $n \le x < n+1$ и $n \le y < n+1$, откуда $-n-1 < -y \le -n$. Сложив почленно неравенства, получим $-1 < x-y < 1$, т.е. $|x-y| < 1$.

Теорема 4.4. *Если* $x < y$, *то* $[x] \le [y]$ $\quad (7)$

Докажите самостоятельно.

4.2 Построение графиков функции $y = k[x]$, $y = [kx]$, $y = k\{x\}$, $y = \{kx\}$ с помощью преобразований

1. Построим графики функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$.

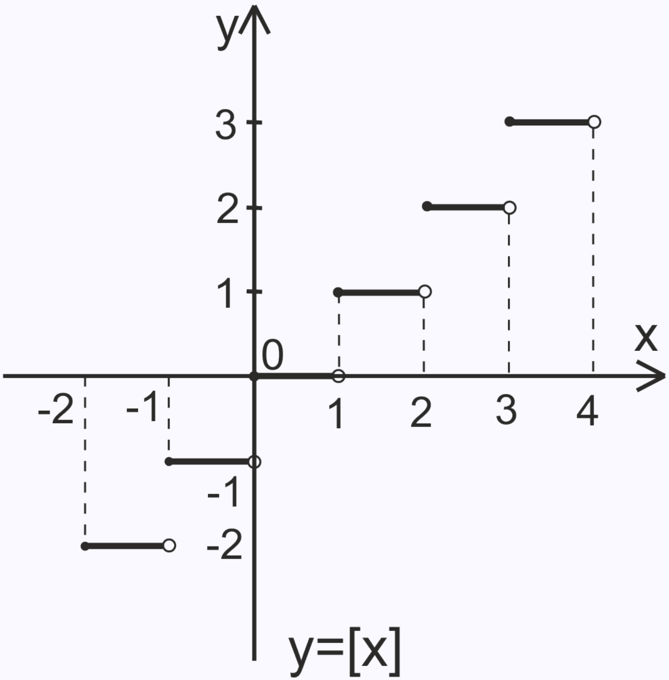


Рис. 4.1.

Для построения графика функции $y = [x]$ (рис 4.1.) заметим, что:
1) если $0 \le x \le 1$, то $y = [x] = 0$;

2) если $1 \le x < 2$, то $y = 1$;

3) если $k - 1 \le x < k$, то $y = k - 1$.

Таким образом $D(y) = R$, $E(y) = Z$.

Для построения графика функции $y = \{x\}$ заметим, что $D(y) = R$, $E(y) = [0; 1)$ (рис 4.2).

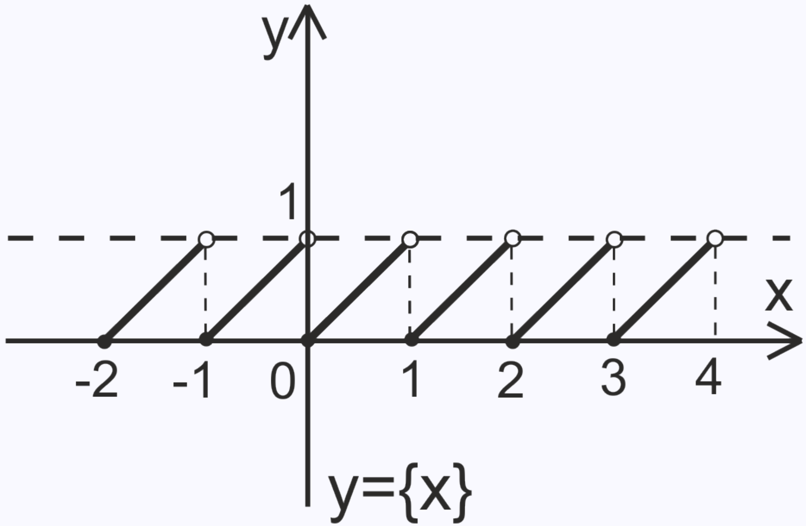


Рис. 4.2.

2. Построим график функции $y = k \cdot [x]$ для $k = 3$ (рис. 4.3) и $k = \frac{1}{3}$ (рис. 4.4).

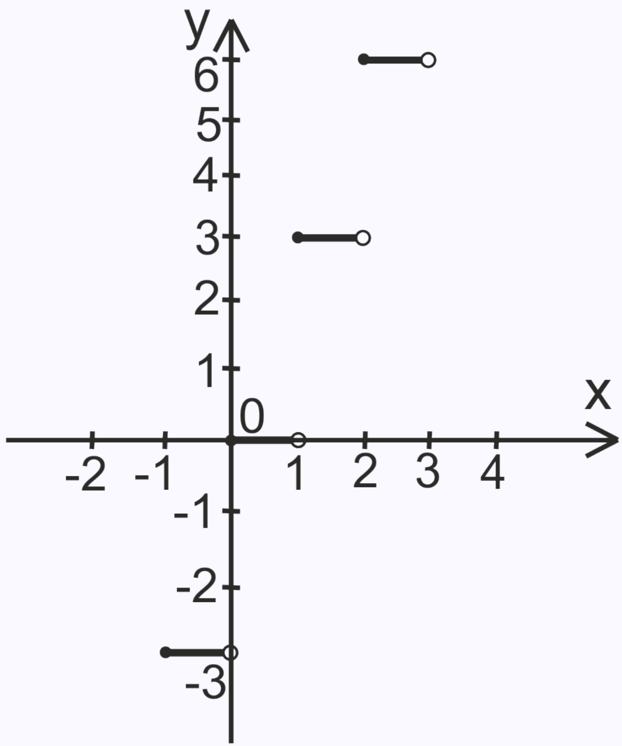


Рис. 4.3.

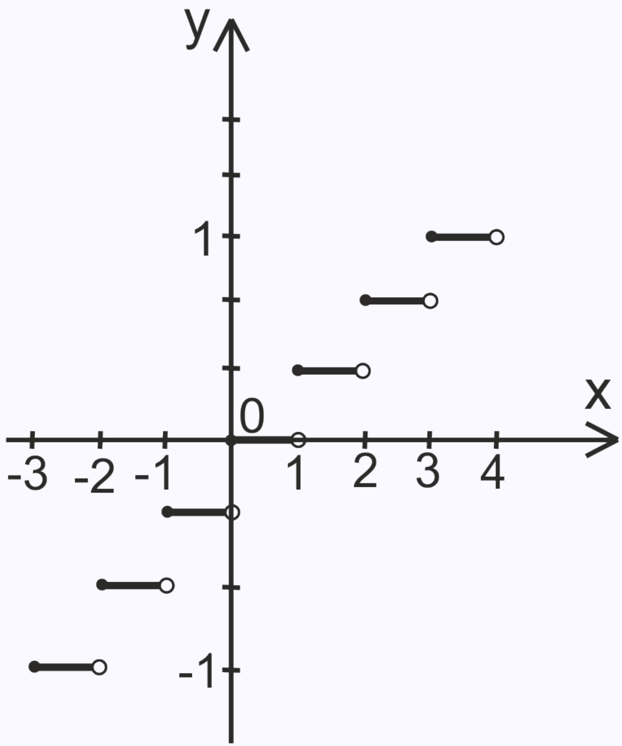


Рис. 4.4.

3. Построим график функции $y = k \cdot \{x\}$ для $k = 2$ (рис. 4.5) и $k = \frac{1}{2}$ (рис. 4.6) .

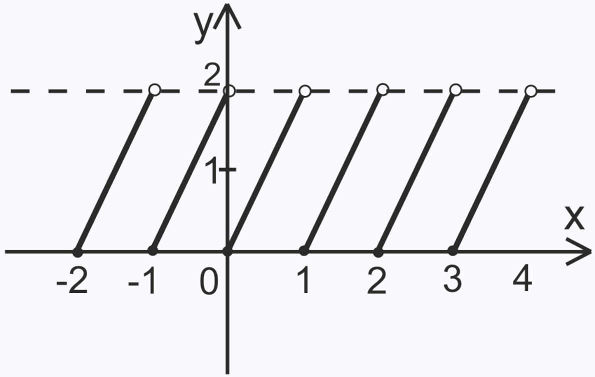


Рис. 4.5.

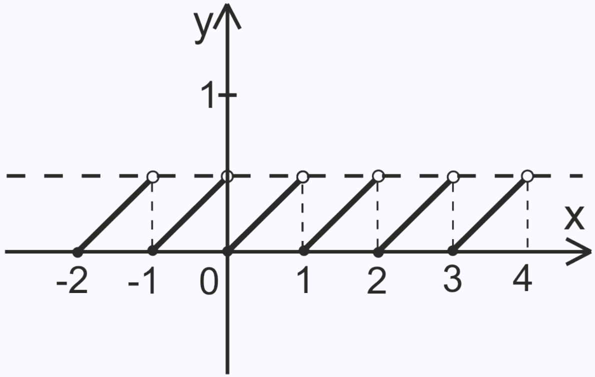


Рис. 4.6.

Графики функций $y = [kx]$ и $y = \{kx\}$ предлагаем построить самостоятельно.

Начало
Содержание
Приложение

Назад
На весь экран
Закрыть

4.3 Применение целой и дробной части для решения уравнений, неравенств, систем

Рассмотрим некоторые виды уравнений, содержащих целую и дробную часть числа.

Пример 4.1. Решите уравнение:

$$[x] = 2 \cdot \{x\} + 4.$$

Решение. Заметим, что так как $[x] \in Z$ и $4 \in Z$, то $2\{x\}$ – целое число. Следовательно, $0 \leq 2\{x\} < 2$ (так как $0 \leq \{x\} < 1$).
Возможны случаи:
1) $2\{x\} = 0$; тогда $x = 0$ и $[x] = 4$. Отсюда $x = 4$;
2) $2\{x\} = 1$, тогда $x = 0,5$ и $[x] = 5$. Отсюда $x = 5,5$.

Ответ: 4; $5,5$.

Пример 4.2. Решите уравнение:

$$[x^2 - 5x] = x + 7.$$

Решение. Из условия видно, что x – целое число, следовательно, x^2 – целое и $5x$ – целое; отсюда $[x^2 - 5x] = x^2 - 5x$. Уравнение примет вид:

$$x^2 - 5x = x + 7;$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0;$$

$$x_1 = -1;$$

$$x_2 = 7.$$

Ответ: $-1;\ 7$.

Пример 4.3. Решите уравнение:

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right] = \frac{x-1}{2}.$$

Решение. Введём замену: $\frac{x-1}{2} = a$, где $a \in Z$, отсюда $x - 1 = 2a$; $x = 1 + 2a$.
Уравнение примет вид:

$$[\tfrac{2\cdot(1+2a)-1}{3}] = a, \text{ или } [\tfrac{1+4a}{3}] = a.$$

Используем свойство (1), получим:

$$a \leq \frac{1+4a}{3} < a + 1;$$

$$3a \leq 1 + 4a < 3a + 3;$$

$$\begin{cases} 3a \leq 1 + 4a, \\ 1 + 4a < 3a + 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} a \geq -1, \\ a < 2. \end{cases}$$

Так как $a \in Z$, то $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$;
1) если $a = -1$, то $x = -1$,
2) если $a = 0$, то $x = 1$,
3) если $a = 1$, то $x = 3$.

Ответ: $-1; 1; 3$.

Пример 4.4. Решите уравнение:

$$[x-1] = \left[\frac{x+2}{2}\right].$$

Решение. Введём замену: пусть $[x-1] = a$, $a \in \alpha$, тогда $a \leq x - 1 < a + 1$, откуда $a + 1 \leq x < a + 2$.
Аналогично $[\frac{x+2}{2}] = a$, тогда $a \leq \frac{x+2}{2} < a+1$, откуда $2a \leq x+2 < 2a+2$, $2a - 2 \leq x < 2a$.
Получили систему $\begin{cases} a + 1 \leq x < a + 2, \\ 2a - 2 \leq x < 2a. \end{cases}$
Система не будет иметь решений, если $2a \leq a + 1$ или $2a - 2 \geq a + 2$.
Отсюда $a \leq 1$ или $a \geq 4$.
Следовательно, решение будет при $a = 2$ и при $a = 3$:
1) если $a = 2$, то $\begin{cases} 3 \leq x < 4, \\ 2 \leq x < 4; \end{cases}$ $\quad 3 \leq x < 4$;

2) если $a = 3$, то $\begin{cases} 4 \le x < 5, \\ 4 \le x < 6; \end{cases}$ $\quad 4 \le x < 5.$

Окончательно получим, что $3 \le x < 5$.

Ответ: $[3; 5)$.

Решение неравенств вида $[f(x)] \ge a, (a = const)$, $[f(x)] \ge g(x)$, $[f(x)] \ge [g(x)]$ основано на использовании свойств (1), (2), (5), (6), (7) и следующих утверждений:

1) $[x] \le a \ (\forall a \in R) \iff x < [a] + 1; \qquad (8)$

2) $[x] > a \ (\forall a \in R) \iff x \ge [a] + 1. \qquad (9)$

Пример 4.5. Решите неравенство:

$$\left[\frac{2x+3}{1-x}\right] \le \pi.$$

Решение. Так как $[\pi] = 3$, то $\frac{2x+3}{1-x} < 4$ (согласно свойству 8).
Отсюда $\frac{2x+3}{1-x} - 4 < 0$;

$$\frac{2x+3-4+4x}{1-x} < 0;$$

$$\frac{6x-1}{1-x} < 0;$$

$$x < \frac{1}{6} \text{ или } x > 1.$$

Ответ: $(-\infty; \frac{1}{6}) \cup (1; +\infty)$.

Пример 4.6. Решите неравенство:

$$[2x + \frac{1}{4}] > x - \frac{1}{3}.$$

Решение. Пусть $[2x + \frac{1}{4}] = a$, $a \in Z$, тогда получим систему
$\begin{cases} a > x - \frac{1}{3}, \\ a \leq 2x + \frac{1}{4} < a + 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x < a + \frac{1}{3}, \\ \frac{a}{2} - \frac{1}{8} \leq x < \frac{a}{2} + \frac{3}{8}. \end{cases}$

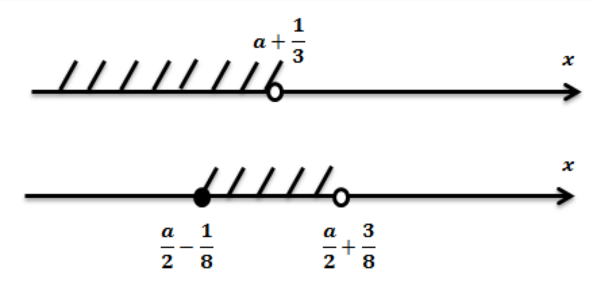


Рис. 4.7.

Рассмотрим следующие случаи:
1) $a + \frac{1}{3} \geq \frac{a}{2} + \frac{3}{8}$, отсюда $\frac{a}{2} \geq \frac{1}{6}$, то есть $a \geq \frac{1}{12}$.
В этом случае решением системы является $[\frac{a}{2} - \frac{1}{8}; \frac{a}{2} + \frac{3}{8})$;
2) если $a + \frac{1}{3} \leq \frac{a}{2} - \frac{1}{8}$, то есть $\frac{a}{2} \leq -\frac{11}{24}$, $a \leq -\frac{11}{12}$, тогда решений нет;

3) если $\frac{a}{2} - \frac{1}{8} < a + \frac{1}{3} < \frac{a}{2} + \frac{3}{8}$, т.е. $\begin{cases} a + \frac{1}{3} > \frac{a}{2} - \frac{1}{8}, \\ a + \frac{1}{3} < \frac{a}{2} + \frac{3}{8}; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{a}{2} > -\frac{11}{24}, \\ \frac{a}{2} < \frac{1}{24}; \end{cases}$

$\begin{cases} a > -\frac{11}{12}, \\ a < \frac{1}{12}; \end{cases}$ тогда решением системы является $[\frac{a}{2} - \frac{1}{8}, a + \frac{1}{3})$.

Получим $\begin{cases} a \geq \frac{11}{12}, \\ \frac{a}{2} - \frac{1}{8} \leq x < \frac{a}{2} + \frac{3}{8}; \end{cases}$ или $\begin{cases} -\frac{11}{12} < a < \frac{1}{12}, \\ \frac{a}{2} - \frac{1}{8} \leq x < a + \frac{1}{3}. \end{cases}$

Например,

при $a = 0$ $\quad \frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{3}$;
при $a = 1$ $\quad \frac{3}{8} \leq x < \frac{7}{8}$;
при $a = 2$ $\quad \frac{7}{8} \leq x < \frac{11}{8}$;
при $a = 3$ $\quad \frac{11}{8} \leq x < \frac{15}{8}$ и т.д.

Ответ: $[-\frac{1}{8}; \frac{1}{3}) \cup [\frac{3}{8}; +\infty)$.

ТЕМА 5
ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

5.1 Основные определения и теоремы

Определение 5.1. *Разложить натуральное число на простые множители — это значит представить его ввиде произведения простых чисел или их степеней.*

Определение 5.2. *Общим делителем нескольких чисел называется число, на которое делится каждое из этих чисел.*

Определение 5.3. *Наибольшим общим делителем нескольких чисел называется наибольшее натуральное число, на которое делится каждое из этих чисел (НОД (a; b)).*
Если НОД $(a; b) = 1$, *то числа a и b взаимно простые.*

Определение 5.4. *Общим кратным нескольких чисел называется число, которое делится на каждое из этих чисел.*

Определение 5.5. *Наименьшим общим кратным нескольких чисел называется наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из этих чисел (НОК (a;b)).*

Теорема 5.1. *Основная теорема арифметики: Любое натуральное число* $n > 1$ *представимо в виде произведения простых множителей,* *причём это представление единственно с точностью до порядка множителей.*

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n;$$

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}.$$

Теорема 5.2. *Если числа a, b, c связаны равенством $a = b \cdot q + c$, $c < b$, то НОД $(a, b) =$ НОД (b, c). В частности, НОД $(a, b) =$ НОД $(a - b, b)$.*

Теорема 5.3. *Точный квадрат либо делится на 4, либо при делении на 2 даёт в остатке 1.*

Теорема 5.4. *Точный квадрат либо делится на 9, либо при делении на 3 даёт в остатке 1.*

Теорема 5.5. *Если разность двух целых чисел равна $2n$, $n \in Z$, то произведение этих чисел, увеличенное на n^2, есть точный квадрат.*

Теорема 5.6. *Натуральное число и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении на 9.*

Теорема 5.7. *Натуральное число и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении на 3.*

Теорема 5.8. *Пусть $r_1 =$ ост $_n(a_1)$, $r_2 =$ ост $_n(a_2)$. Тогда справедливы равенства:*

1) $\text{ост}_n(a_1 + a_2) = \text{ост}_n(r_1 + r_2)$;
2) $\text{ост}_n(a_1 \cdot a_2) = \text{ост}_n(r_1 \cdot r_2)$;
3) $\text{ост}_n(a^n) = \text{ост}_n(r^n)$.

Замечание 5.1. *С доказательством теорем можно ознакомиться в литературе [15, 16].*

5.2 Простые и составные числа. Признаки делимости. Последняя цифра числа

Натуральные числа знали и изучали еще древнегреческие философы более двух тысяч лет назад. Великий греческий философ и математик Платон (427 – 347 лет до н.э.) называл математику «наукой о свойствах чётных и нечётных чисел». Однако не менее важным в математике является деление натуральных чисел на простые и составные.

Определение 5.6. *Простыми называются числа, которые имеют только два делителя: единицу и само себя.*

Например, 2; 3; 5; 7; 11 и т.д.

Заметим, что только одно простое число (число 2) является чётным, а остальные – нечётные. Поисками формулы простого числа занимались многие математики. Так, Эратосфен (II в. до н.э.) изобрёл метод (так называемое «решето Эратосфена»), с помощью которого можно находить простые числа.

Выписав подряд натуральные числа (начиная с 2) надо сначала зачеркнуть все числа, кратные 2, потом – кратные 3, затем – 5, и т. д. Все оставшиеся числа будут простыми.

Однако формула простого числа до сих пор не известна, хотя великий французский математик П. Ферма (1602 – 1665 гг.) считал формулу $F_n = 2^{2^n} + 1$ формулой простых чисел. В самом деле, при $n = 1$, $F_1 = 5$, при $n = 2$, $F_2 = 17$ и т.д. Однако позже показали, что при $n = 6, 7, 8$ и других числа F_n не являются простыми.

Определение 5.7. *Составными называются натуральные числа, имеющие более двух делителей.*

Из определения 1 и определения 2 следует, что число 1 — ни простое, ни составное.

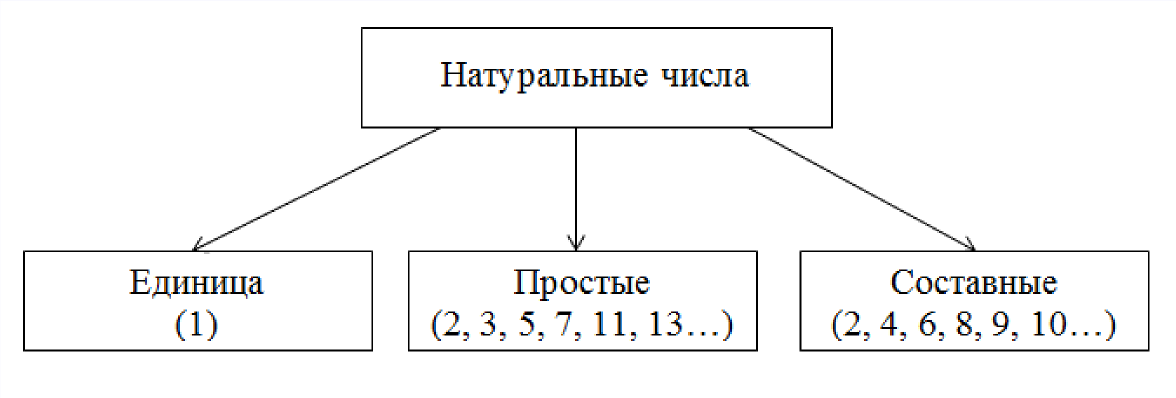


Рис. 5.1.

Признаки делимости:

1) на 2: если натуральное число оканчивается одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8, то оно делится на 2;

2) на 3: если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3;

3) на 5: если натуральное число оканчивается цифрой 0 или цифрой 5, то оно делится на 5;

4) на 7: число $\overline{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0}$ делится на 7, если число $\overline{a_n, \ldots, a_1} - 2a_0$ делится на 7 ($a_0, a_1, \ldots, a_n$ — цифры числа);

5) на 4: число $\overline{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0}$ делится на 4, если число $\overline{a_1, a_0}$ делится на 4;

6) на 8: число $\overline{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0}$ делится на 8, если число $\overline{a_2, a_1, a_0}$ делится на 8;

7) на 10: если натуральное число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10;

8) на 11: число делится на 11, если разность суммы цифр, стоящих на чётных позициях, и суммы цифр, стоящих на нечётных позициях, делится на 11.

5.3 Решение в целых числах (x, y) уравнений вида $ax + by = c$

Рассмотрим общее решение уравнения $ax + by = c$. (1)
Будем считать, что $a > 0$, $b > 0$, $c \geq 0$.

1 случай: если $c = 0$, то уравнение примет вид

$$ax + by = 0. \qquad (2)$$

Пусть НОД $(a; b) = d$, тогда $a = a_1 \cdot d$ и $b = b_1 \cdot d$, где НОД $(a_1; b_1) = 1$. Перепишем уравнение (2) в виде

$$a_1 \cdot d \cdot x + b_1 \cdot d \cdot y = 0;$$

$$a_1 dx = -b_1 \cdot d \cdot y;$$

$$a_1 x = -b_1 y;$$

$$y = -\frac{a_1 x}{b_1}.$$

Так как НОД $(a_1; b_1) = 1$, то x делится на b_1, т.е. $x = b_1 \cdot n$, $n \in Z$. Отсюда $y = -a_1 n$, $n \in Z$. Поэтому $(b_1 \cdot n; -a_1 \cdot n)$ – решение уравнения (2), где $a_1 = \frac{a}{d} = \frac{a}{\text{НОД }(a;b)}$; $b_1 = \frac{b}{d} = \frac{b}{\text{НОД }(a;b)}$.

2 случай: $c > 0$:
1) если НОД $(a; b) = d \neq 1$ и число c не делится на d, то уравнение не имеет решений;

2) если НОД $(a; b) = d$ и $c = d \cdot a$, то, разделив обе части уравнения (1) на d, получим:

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \text{ где НОД } (a_1; b_1) = 1.$$

Поэтому рассмотрим случай, когда НОД $(a; b) = 1$.

Покажем, что если $(x_0; y_0)$ – решение уравнения (1), то формулы $\mathbf{x = x_0 + b \cdot n}$ **и** $\mathbf{y = y_0 - a \cdot n}$, **(*)**, где $n \in Z$ задают все решения данного уравнения.

1. Покажем, что $(x_0 + b \cdot n; y_0 - a \cdot n)$ – решения.
   В самом деле, $a \cdot (x_0 + bn) + b(y_0 - an) = c$;

$$ax_0 + a \cdot b \cdot n + by_0 - a \cdot b \cdot n = c;$$

$$ax_0 + by_0 = c - \text{ верное равенство.}$$

2. Покажем, что других решений нет. Предположим противное, т.е. что есть ещё решение $(x_1; y_1)$, тогда $ax_1 + by_1 = c$ – верное равенство.

   Составим разность двух выражений $ax_1 + by_1 = c$ и $ax_0 + by_0 = c$, получим

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0;$$

$$a(x_1 - x_0) = -b(y_1 - y_0);$$

$$x_1 - x_0 = \frac{-b(y_1 - y_0)}{a}.$$

Так как НОД $(a; b) = 1$, то $-(y_1 - y_0) = a \cdot n$, $n \in Z$, то есть $y_1 = y_0 - an$, аналогично $x_1 = x_0 + bn$, ч.т.д.

Покажем на примере различные способы решения уравнения вида (1).

Пример 5.1. Решите в целых числах уравнение:

$$5x + 7y = 112. \qquad (3)$$

Решение. 1 способ (метод рассеивания). Выразим из уравнения (3) переменную x – переменную с *наименьшим по абсолютной величине* коэфициентом, получим:

$$5x = 112 - 7y;$$

$$x = \frac{112 - 7y}{5} = \frac{110 + 2 - 5y - 2y}{5} = 22 - y + \frac{2 - 2y}{5}.$$

Легко видеть, что x будет принимать целые значения, если значение выражения $\frac{2-2y}{5}$ является также целым, например a_1, т.е. $\frac{2-2y}{5} = a_1$; $2 - 2y = 5a_1$. Полученые уравнения решаем аналогично исходному, т.е. $2y = 2 - 5a_1$; $y = \frac{2-5a_1}{2} = 1 - 2a_1 - \frac{a_1}{2}$. Также $\frac{a_1}{2}$ должно принимать целые значения.

Пусть $\frac{a_1}{2} = a_2$, где $a_2 \in Z$, отсюда $a_1 = 2a_2$. Выражая теперь y и x через a_2, получим: $y = 1 - 2a_1 - a_2 = 1 - 2 \cdot 2a_2 - a_2 = 1 - 5a_2$, $x = 22 - y + a_1 = 22 - (1 - 5a_2) + 2a_2 = 21 + 7a_2$. Таким образом, все решения найдены: $x = 21 + 7n$, $y = 1 - 5n$, $n \in Z$.

2 способ (использование теоремы о взаимно простых числах).

Выразим переменную x через y :
$x = 22 - y + \frac{2(1-y)}{5}$. Так как НОД $(2;5) = 1$, то $(1 - y)$ делится на 5, то есть $1 - y = 5n$, $n \in Z$. Отсюда $y = 1 - 5n$, $n \in Z$.

Найдём x : $x = 22 - y + \frac{2 \cdot 5n}{5} = 22 - (1 - 5n) + 2n = 21 + 7n$, $n \in Z$.

Решения найдены: $x = 21 + 7n$; $y = 1 - 5n$, $n \in Z$.

3 способ. Подберем одну пару чисел, $(x; y)$, являющихся решением уравнения (3). Например, $(7; 11)$.

Так как $(7; 11)$ — решение, то справедливо равенство

$$5 \cdot 7 + 7 \cdot 11 = 112 \qquad (4)$$

Вычтем почленно из равенства (3) равенство (4), получим:

$$5(x - 7) + 7(y - 11) = 0;$$

$$5(x - 7) = -7(y - 11);$$

$$5(x - 7) = 7(11 - y);$$

$$x - 7 = \frac{7}{5}(11 - y).$$

Так как НОД $(7;5)=1$, то $11-y=5n$; $y=11-5n$, $n\in Z$. Отсюда $x-7=\frac{7\cdot 5n}{5}$; $x-7=7n$; $x=7+7n$, $n\in Z$.

Все решения имеют вид $(7+7n;11-5n)$, $n\in Z$.

4 способ (использование алгоритма Евклида).

Решим уравнение $5x+7y=1$ (5) $7=5\cdot 1+2$, откуда $2=7-5\cdot 1$; $5=2\cdot 2+1$, откуда $1=5-2\cdot 2=5-2\cdot(7-5\cdot 1)=5-2\cdot 7+2\cdot 5=$ $=3\cdot 5-2\cdot 7=3\cdot 5+(-2)\cdot 7$. Получили равенство $3\cdot 5+(-2)\cdot 7=1$ (6), откуда $(3;-2)$ – решение уравнения (5).

Чтобы найти решение уравнения (3), умножим обе части равенства (6) на 112:

$$(3\cdot 112)\cdot 5+(-2\cdot 112)\cdot 7=112;$$

$$336\cdot 5+(-224)\cdot 7=112.$$

Следовательно, $(336;-224)$ – решение уравнения (3). Все решения уравнения запишем в виде $(336+7n;-224-5n)$, $n\in Z$.

5 способ (разложение в цепную дробь). Рассмотрим отношение коэфициентов при переменных y и x : $\frac{7}{5}$ и выделим целую часть. Получим $\frac{7}{5}=1+\frac{2}{5}$. Правильную дробь $\frac{2}{5}$ заменим равной ей дробью $\frac{1}{\frac{5}{2}}$, и опять выделим целую часть дроби $\frac{5}{2}$: $\frac{5}{2}=2+\frac{1}{2}$. Получили «цепочку» дробей (или конечную цепную дробь):

$$\frac{7}{5}=1+\frac{2}{5}=1+\frac{1}{\frac{5}{2}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}.$$

«Отбросим» последнее звено этой дроби ($\frac{1}{2}$) и представим получившуюся при этом дробь в виде неправильной: $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Составим разность

$$\frac{3}{2}-\frac{7}{5}=\frac{3\cdot 5-2\cdot 7}{10}=\frac{3\cdot 5+(-2)\cdot 7}{10}=\frac{1}{10}.$$

Отсюда следует равенство $3\cdot 5+(-2)\cdot 7=1$, из которого видно, что пара $(3;-2)$ является решением уравнения (5). Умножив обе части равенства на 112, получим $(336;-224)$ – решение уравнения (3). По формулам (*) найдём все решения:

$$(336+7n;-224-5n),\ n\in Z.$$

Любым из рассмотренных выше способов решите уравнения:
1) $3x+2y=5$;
2) $5x+9y=2015$.

5.4 Китайская задача об остатках

Определение 5.8. *Целые числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если они имеют одинаковые остатки при делении на m (обозначается $a \equiv b(mod\ m)$).*

Теорема 5.9. *Если $m_1, ..., m_n$ – взаимно простые числа, а $r_1, ..., r_n$ – такие числа, что $0 \leq r_i < m_i$ $i = 1, 2, ..., n$; $n \in Z$, то существует такое целое число N, что $N \equiv r_i(mod\ m_i)$ при всех $i = 1, 2, ..., n$) [4].*

Доказательство. Применим индукцию по n. При $n = 1$ теорема очевидна. Пусть она справедлива при $n = k - 1$. Тогда найдётся число M такое, что $M \equiv r_i(mod\ m_i)$, $i = 1, 2, ..., k-1$. Пусть $d = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_{k-1}$. Рассмотрим числа M, $M+d$, ..., $M+d(m_{k-1})$. Т.к. НОД $(d; m_k) = 1$, то среди данных чисел найдётся такое число N, которое при делении на m_k даёт остаток r_k (число N при делении на $m_1, m_2, ..., m_{k-1}$ даёт остатки $r_1, r_2, ..., r_{k-1}$ соответственно).

Следствие 5.1. *Для любых взаимно простых чисел $m_1, ..., m_n$ и остатков $r_1, r_2, ..., r_n$ по модулям $m_1, ..., m_n$ найдутся n последовательных чисел $a, a+1, ..., a+n-1$ таких, что $a \equiv r_1(mod\ m_1)$, $a+1 \equiv r_2(mod\ m_2), ..., a+n-1 \equiv r_n(mod\ m_n)$.*

5.5 Решение в целых числах (x, y) уравнений вида $ax^2 + bxy + cy^2 = d$

Пример 5.2. Решите в натуральных числах уравнение:

$$x^2 - y^2 = 69.$$

Решение. Число 69 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел следующим образом: $69 = 1 \cdot 69 = 3 \cdot 23$. Поэтому решение уравнения сводится к решению двух систем:
$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 69; \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 23; \end{cases}$ поскольку $x - y < x + y$. Решив первую систему методом сложения, получим пару чисел $(35; 34)$; решением второй системы является пара $(13; 10)$. *Ответ:* $(13; 10)$; $(35; 34)$.

Замечание 5.2. Если бы потребовалось найти все целые решения уравнения, то надо было бы дополнительно решить ещё системы:

$$\begin{cases} x - y = 69, \\ x + y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 23, \\ x + y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = -69; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -69, \\ x + y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -3, \\ x + y = -23; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -23, \\ x + y = -3. \end{cases}$$

Пример 5.3. Найдите целые положительные решения уравнения: $x^2 - xy + 2x - 3y = 11$.

Решение. Выполним следующие преобразования:

$$x^2 + 2x - y(x+3) = 11;$$

$$x^2 + 2x - 11 = y(x+3);$$

$$y = \frac{x^2 + 2x - 11}{x+3} \quad (x + 3 \neq 0,\ \text{т.к. } x > 0);$$

$$y = \frac{(x+3)(x-1) - 8}{x+3} = x - 1 - \frac{8}{x+3}.$$

Заметим, что для решения задачи надо, чтобы $(x+3)$ было делителем 8, т.е. $x+3=1$, $x+3=2$, $x+3=4$, $x+3=8$. Откуда $x=-2$; $x=-1$; $x=1$; $x=5$. Числа -2 и -1 – не удовлетворяют условию задачи.

Если $x=1$, то $y=-2<0$; если $x=5$, то $y=3$.

Ответ: $(5;3)$.

Замечание 5.3. *При решении уравнений в целых и натуральных числах можно использовать следующие методы и приёмы:*

- *разложение на множители;*
- *преобразование левой части уравнения в сумму неотрицательных выражений;*
- *использование свойств: чётное+чётное=чётное; нечётное+нечётное=чётное и т.п.;*

- *использование опорных неравенств, например,* $(a-b)^2 \geq 0$, $|a| \geq 0$, $a+\frac{1}{a} \geq 2$ *при* $a>0$ *и др.*

ТЕМА 6
ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

6.1 Использование принципа Дирихле при решении задач на делимость

Известный математик Петер Густав Лежен Дирихле (1805 – 1859) сформулировал принцип («принцип Дирихле»), который эффективен при решении различных типов задач: задач на делимость, задач с геометрическим содержанием и др.

Принцип Дирихле: если множество из N элементов разбито на n непересекающихся частей, не имеющих общих элементов ($N > n$), *то по крайней мере в одной части будет более одного элемента.*

В простой, удобной и шутливой формулировке принцип Дирихле звучит так: *Нельзя посадить трёх кроликов в две клетки так, чтобы в каждой клетке находилось не более одного кролика.*

Покажем использование принципа Дирихле на конкретных примерах.

Пример 6.1. В классе 30 человек. Витя сделал в диктанте больше всех ошибок – 13. Докажите, что по крайней мере 3 ученика сделали ошибок поровну (может быть ни одной).

Доказательство. Разобьём учеников на группы: «0» – те, кто не сделал ни одной ошибки (группы – «клетки», ученики – «кролики»), «1» – те, кто сделал по одной ошибке, и т.д. «13» – только Витя.

Предположим, что никакие 3 ученика не сделали одинаковое количество ошибок, т.е. в каждую группу «0», «1» ,..., «12» попало не больше двух учеников; тогда всего учеников в классе будет не больше чем $13 \cdot 2 + 1 = 27$ (человек). Но $27 < 30$, т.е. оставшиеся учащиеся попадут в какие-то группы (по принципу Дирихле). Следовательно, найдутся 3 ученика, которые сделали одинаковое количество ошибок. Утверждение доказано.

Вопрос 1. Верно ли, что ровно 3 ученика сделали одинаковое количество ошибок?

Нет, возможно, что все ученики, кроме Вити, не сделали ни одной ошибки.

Вопрос 2. Верно ли, что по крайней мере четверо сделали одинаковое количество ошибок?

Нет, например, условию задачи удовлетворяет следующий вариант: по 3 человека сделали 0, 1, 2 ошибки; по 2 человека – 3, 4,..., 12 ошибок и 1 человек – 13 ошибок; итого 30 человек.

Использование принципа Дирихле при решении задач на делимость основано на следующем утверждении: *Среди любых $n+1$ натуральных чисел найдутся два числа, которые при делении на n дают одинаковые остатки (при делении на n остатки могут быть равны* $0, 1, 2, \dots, n-1$).

Из этого следует второе утверждение: *Среди $n+1$ натуральных чисел найдутся два числа таких, что их разность делится на n.*

Пример 6.2. Докажите, что среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на 2013.

Доказательство. Выпишем 2014 чисел, в записи которых только единицы:

$$1, 11, 111, 1111, ..., \underbrace{11...1}_{2013}, \underbrace{11...1}_{2014}.$$

Так как чисел всего 2014, а при делении чисел на 2013 могут быть остатки: $0, 1, 2, ..., 2012$ (всего 2013 остатков), то среди выписанных чисел есть два таких, которые дают одинаковые остатки при делении на 2013. Следовательно, их разность $\underbrace{11...1}_{n} - \underbrace{11...1}_{k} = \underbrace{11...1}_{n-k} \cdot 10^k$. Так как числа 10^k и 2013 – взаимнопростые, то число $\underbrace{11...1}_{n-k}$ делится на 2013.

Утверждение доказано.

Пример 6.3. Можно ли найти такие две (различные) степени числа 7, у которых две последние цифры одинаковы?

Решение. Чтобы доказать, что такие два числа существуют, достаточно показать, что их разность делится на 100.
Выпишем 101 число: $7^2, 7^3, 7^4, ..., 7^{101}, 7^{102}$. При делении на 100 числа могут давать отстатки: 0, 1, 2, 3,..., 99; таких остатков – 100. Так как чисел 101, то согласно принципу Дирихле, по крайней мере у двух из них остатки совпадут, следовательно, их разность будет делиться на 100,

Кафедра методики преподавания математики и информатики

Начало

Содержание

Приложение

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Назад

На весь экран

Закрыть

а значит, две последние цифры у этих чисел будут одинаковы. Можно привести и конкретный пример: $7^2 = 49$; $7^6 = 117649$.

Пример 6.4. Верно ли, что среди любых семи натуральных чисел найдутся три, сумма которых делится на 3?

Решение. При делении на 3 числа могут давать остатки: 0, 1, 2. Таких остатков всего 3, а чисел по условию задачи всего 7, значит, какие-то 3 из них будут давать одинаковые остатки при делении на 3 (по принципу Дирихле). Возможны случаи:

1) $a_1 = 3k$, $a_2 = 3n$, $a_3 = 3m$, где $k, n, m \in Z$; очевидно, что их сумма делится на 3;

2) $a_1 = 3k + 1$, $a_2 = 3n + 1$, $a_3 = 3m + 1$, где $k, n, m \in Z$; заметим, что сумма $a_1 + a_2 + a_3 = 3k + 1 + 3n + 1 + 3m + 1 = 3(k + m + n) + 3$ – также делится на 3;

3) $a_1 = 3k + 2$, $a_2 = 3n + 2$, $a_3 = 3m + 2$, где $k, n, m \in Z$;
$a_1 + a_2 + a_3 = 3(k + m + n) + 6$ – тоже делится на 3.

6.2 Принцип Дирихле и его следствие. Задачи геометрического содержания

Аналогом принципа Дирихле в геометрии служат следующие утверждения:

Утверждение 6.1. *Если на отрезке (на окружности) длиной 1 расположено несколько отрезков (дуг), сумма длин которых больше 1, то по крайней мере два (две) из них имеют общую точку.*

Утверждение 6.2. *Если внутри фигуры площади 1 расположено несколько фигур, сумма площадей которых больше 1, то по крайней мере две из них имеют общую точку.*

Пример 6.5. В квадрат со стороной 1 м бросили 51 точку. Докажите что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной $0,2$ м.

Доказательство. Разобьём квадрат на 25 равных квадратиков со стороной $0,2$ м. Применим принцип Дирихле: если бы в каждом квадратике (внутри или на сторонах) было бы не больше двух точек, то всего точек было бы не больше чем $2 \cdot 25 = 50$.

Значит, обязательно найдётся квадратик, в котором 3 точки, что и требовалось доказать.

Пример 6.6. Докажите, что в круге радиуса 1 нельзя выбрать более пяти точек, попарные расстояния между которыми больше 1.

Доказательство. Разобьём круг на 6 равных секторов (с вершиной в центре круга). Тогда в каждый сектор попадает не больше, чем по одной точке (ибо расстояние между любыми двумя точками одного сектора не больше 1). Если бы в каждый сектор попало бы по точке, то нашлись бы две точки, угол между радиус-векторами которых был не больше 60°, и, следовательно, растояние между ними не больше 1. Итак, можно выбрать не более, чем 5 точек.

Утверждение доказано.

Пример 6.7. На плоскости заданы 5 точек с целыми координатами. Докажите, что середина одного из отрезков, соединяющих их, также имеет целые координаты.

Доказательство. Рассмотрим абсциссы данных пяти точек: они могут быть чётными или нечётными. Поэтому будут обязательно 3 точки, у которых абсциссы либо все чётны, либо все нечётны. Из этих трёх точек обязательно найдутся 2 точки (по принципу Дирихле), у которых ординаты обе будут либо чётны, либо нечётны. И в том и в другом случае середина отрезка с концами в этих двух точках будет иметь целые координаты, что и требовалось доказать.

Пример 6.8. Можно ли занумеровать вершины куба числами от 1 до 8 так, чтобы суммы номеров на концах каждого ребра куба были различными?

Решение. Суммы номеров на концах рёбер куба могут принимать значения от 3 $(1+2)$ до 15 $(7+8)$ – т.е. всего 13 различных значений. Покажем, что из сумм 3, 4, 5 и 6 одна получиться не может.
Допустим, что среди сумм есть такие: $1+2=3$; $1+3=4$; $1+4=5$. Тогда 6 получить нельзя, т.к. числа 1 и 5, 2 и 4 находятся на различных рёбрах.
Аналогично, из сумм 12, 13, 14 и 15 одна получиться не может. Поэтому всего различных сумм может быть только 11, а рёбер у куба – 12. Следовательно, по принципу Дирихле, обязательно найдутся 2 одинаковые суммы.

Ответ: нельзя.

Следствие 6.1. *(из принципа Дирихле). Если сумма n чисел равна S, то среди них есть какое-то число, как не большее $\frac{S}{n}$, так и не меньшее, чем $\frac{S}{n}$.*
В самом деле, если бы все числа были больше чем $\frac{S}{n}$, то их сумма была бы больше (меньше) чем S.

Пример 6.9. На плоскости даны 7 прямых, каждые две из которых не паралельны. Докажите, что найдутся две из них, угол между которыми меньше 26°.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что все прямые проходят через одну точку. Если бы все углы между ними были равными, то $\alpha = \frac{180^\circ}{7} = 25\frac{5^\circ}{7}$, т.е. $25^\circ < \alpha < 26^\circ$.

Поэтому по следствию 6.1 из принципа Дирихле, обязательно найдутся две прямые, угол между которыми меньше $26°$. Заметим, что если все 7 прямых не имеют общей точки, то выберем любые две прямые, имеющие общую точку, и через эту точку проведём прямые, паралельные всем остальным прямым. Задача в этом случае сведётся к предыдущей.

Утверждение доказано.

6.3 Обобщённый принцип Дирихле. Олимпиадные задачи, решаемые с использованием принципа Дирихле

Обобщённый принцип Дирихле: Если в n клетках сидит не менее $k \cdot n + 1$ кроликов, то найдётся клетка, в которой сидит более k кроликов.

Пример 6.10. Машинистка, перепечатывая текст в 25 страниц, сделала 102 ошибки. Докажите, что найдётся страница, на которой сделано более четырёх ошибок.

Доказательство. Предположим, что ошибок на каждой странице было не более четырёх, тогда всего ошибок было не более, чем $25 \cdot 4 = 100$, что противоречит условию. Согласно принципу Дирихле, найдётся страница, на которой сделано более четырёх ошибок.

Утверждение доказано.

Пример 6.11. Каждому из 35 ребят дали решить по выбору одну из 17 задач. Верно ли, что среди них всегда найдутся трое, которые решают одну и ту же задачу?

Решение. Предположим, что одну и ту же задачу решали не более двух учеников, тогда все задачи решали не более $17 \cdot 2 = 34$ человек, что противоречит условию.

Ответ: верно.

Замечание 6.1. *Принцип Дирихле связан с такими понятиями как «более» и «менее» (кроликов больше чем клеток).*

Пример 6.12. В районе 7 средних школ. На район выделили 20 компьютеров. Докажите, что при любом распределении между школами, найдутся две школы, которые получат одинаковое число компьютеров (может быть, ни одного).

Доказательство. Предположим, что в каждой школе будет разное количество компьютеров, тогда всего компьютеров будет $0 + 1 + 2+$ $+3 + 4 + 5 + 6 = 21 > 20$, т.е. при «изъятии» одного из компьютеров $(21 - 20 = 1)$ обязательно найдутся 2 школы с одинаковым количеством компьютеров.

Утверждение доказано.

Пример 6.13. Сто книг рапределили между несколькими школьниками. При каком максимальном количестве школьников это можно сделать таким образом, что все они получат разное количество книг?

Решение. Предположим, что было x школьников, каждый из которых получил разное количество книг, то есть $0 + 1 + \ldots + (x - 1) > 100$.
Отсюда $\frac{0+(x-1)}{2} \cdot x > 100$;
отсюда $x(x - 1) > 200$.
Легко видеть, что $x = 15$ $(14 \cdot 15 = 210)$.

Ответ: 15.

ТЕМА 7
ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

7.1 Виды логических задач

«Можно быть уверенным только в одном, что ни в чём нельзя быть уверенным. Если это утверждение истинно, оно тем самым и ложно». Этот *древний парадокс* подчёркивает важность проблемы логики и решения логических задач.

Существуют различные интерпретации понятия «математическая задача»:
1) задача как вопрос (Б.М. Брадис);
2) задача как проблемная ситуация (Ю.М. Колягин);
3) задача как сложный объект, существующий в материальной форме независимо от субъекта, как система (В.И. Крупич);
4) задача как цель (А.М. Матюшин);
5) задача как способ знакового предъявления информации (Л.М. Фридман);
6) задача как цель и как средство обучения (С.А. Гуцанович, А.М. Радьков, А.Б. Василевский).

Анализ учебно-методической литературы (О.И. Мельников, Т.П. Бахтина и др.) показал, что к логическим относятся задачи, характеризую-

щиеся:
1) сложным (запутанным) текстом, предполагающим анализ;
2) многовариативностью решений;
3) сложностью перевода задач на «математический язык» (текстовые условия не переводятся однозначно в систему уравнений; даже при удачном выборе переменных их число превышает число составленных уравнений) [9; 10].

В отличие от определения, типизация логических задач признана и считается устоявшейся:
1) задачи на принцип Дирихле;
2) задачи на инварианты;
3) задачи, решаемые с использованием графов;
4) задачи, решаемые матричным методом;
5) задачи, решаемые с конца;
6) задачи на использование кругов Эйлера;
7) задачи на цветную комбинаторику (раскраски);
8) задачи на числовые зависимости (математические закономерности, метод перебора) [8, 9, 10].

Рассмотрим некоторые виды логических задач и методы их решения.

7.2 Задачи на инварианты: инварианты и делимость; замощения и раскраски; геометрические инварианты

Определение 7.1. *Инвариант (от лат. invarians – не изменяющийся) – отображение f рассматриваемой совокупности M математических объектов, снабженной фиксированным отношением эквивалентности γ, в другую совокупность N математических объектов, постоянную на классах эквивалентности M и γ [10].*

В нашем случае инвариантом некоторого преобразования будем называть величину (или свойство), не изменяющуюся (не изменяющееся) при этом преобразовании.

Задачи на инварианты можно условно разбить на два вида:

- задачи, в которых требуется доказать, что заданная величина (или свойство) есть инвариант при заданных преобразованиях;
- задачи, в которых инвариант используется при решении и не сразу очевиден.

Задачи второго типа сложнее, поскольку их решение предполагает наличие определённого опыта в конструировании инвариант.

Можно выделить некоторые стандартные инварианты:

- остаток от деления на натуральное число (инвариантом можно считать периодическое изменение какой-либо величины);

- выделение части объекта;
- перестановка;
- раскраска определённым образом;
- алгебраическое выражение от данных в задаче;
- геометрический инвариант [10].

Рассмотрим инварианты в задачах на конкретных примерах.

Пример 7.1. В некотором государстве 10 банков. С момента перестройки общества все захотели стать банкирами. Но, по закону, открыть банк можно только путём деления уже существующего банка на 4 новых банка. Через некоторое время министр финансов сообщил президенту, что в стране действует 2016 банков, после чего был уволен за некомпетентность. Что не понравилось президенту?

Решение. В результате превращения одного старого банка в 4 новых, общее количество банков увеличилось на 3. Поэтому в любой момент времени число банков равно $10+3k$, $k \in N$ и остаток от деления числа банков на 3 постоянен (это и есть *инвариант*). Первоначально остаток от деления числа банков на 3 был равен 1 $(10 = 3 \cdot 3 + 1(\text{ост.}))$, а число 2016 при делении на 3 даёт остаток 0, следовательно, ровно 2016 банков в стране образоваться не могло.

Пример 7.2. Можно ли квадрат клетчатой бумаги размером 10×10 разрезать на фигурки, изображенные на рисунке 7.1 ?

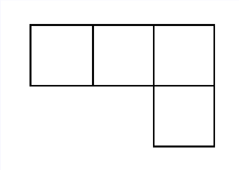


Рис. 7.1.

Решение. Клетки квадрата 10×10 раскрасим в 2 цвета (чёрный и белый) столбиками, через один. Если этот квадрат можно разрезать на фигурки, заданные в условии, то таких фигурок будет 25. Причём каждая фигурка содержит либо 3 белых и одну чёрную клетку (пусть таких фигурок будет m), либо 3 чёрных и 1 белую клетки (пусть их будет n).

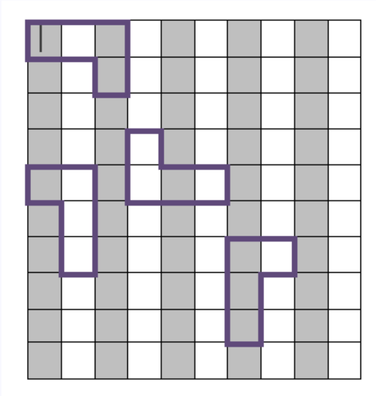


Рис. 7.2.

Тогда $3m+n=50$ (число белых клеток) и $3n+m=50$ (число чёрных клеток). Из этих равенств получим $\begin{cases} 4m+4n=100, \\ 2m-2n=0; \end{cases}$ $\begin{cases} m+n=25, \\ m=n; \end{cases}$ $\begin{cases} 2m=25, \\ m=n, \end{cases}$ $m \notin N$. Следовательно, разрезать квадрат на такие фигурки невозможно.

Ответ: нельзя.

Пример 7.3. Даны шесть чисел: 1; 2; 3; 4; 5; 6. Разрешается за один ход к любым двум из них прибавить по 1. Можно ли все числа сделать равными?

Решение. За каждый ход сумма всех чисел увеличивается на 2. Так как первоначально сумма равна 21 $(1+2+3+4+5+6)$, то она всегда (после каждого хода) будет оставаться нечётной (это инвариант). Если все числа были бы равны между собой и равны n, то их сумма была бы равна $6n$ – чётная. Следовательно, ни за какое количество ходов числа сделать равными.

Ответ: нельзя.

Пример 7.4. Имеется набор из 77 прямоугольных брусков $3 \times 3 \times 1$. Можно ли эти бруски уложить в прямоугольную коробку размером $7 \times 9 \times 11$ (коробка с крышкой)?

Решение. Предположим, что бруски уложены в коробку, то есть полностью её заполняют. Рассмотрим слой коробки толщиной 1, расположенный у грани размером 7×11. Каждый брусок либо целиком располагается внутри этого слоя, либо заполняет три кубика $1 \times 1 \times 1$ из этого слоя, и значит, число кубиков размером $1 \times 1 \times 1$ в слое должно делиться на 3. Но число $7 \cdot 11$ на 3 не делится. Следовательно, нельзя.

Ответ: нельзя.

7.3 Применение графов для решения логических задач: основные понятия теории графов; базовые теоремы; логические задачи, решаемые с помощью графов

Граф (от греч. – пишу). Термин «граф» впервые появился в книге венгерского математика Д. Кенига в 1936 году, хотя начальные важные теоремы о графах восходят к Л. Эйлеру (1707 – 1783).

Определение 7.2. *Графом называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются вершинами графа, а линии – ребрами графа* [4, с. 56].

Определение 7.3. *Количество рёбер, выходящих из данной вершины, называется степенью вершины.*

Определение 7.4. *Вершина графа, имеющая четную степень, называется четной, а вершина графа, имеющая нечетную степень, называется нечетной [4, с. 56].*

Примерами графов могут служить карта дорог, схема метро, чертеж многоугольника, электросхема и др.

Пример 7.5. Можно ли, сделав несколько ходов конями (белыми и чёрными) из положения на рисунке, расположить их так, как показано на рисунке 7.3?

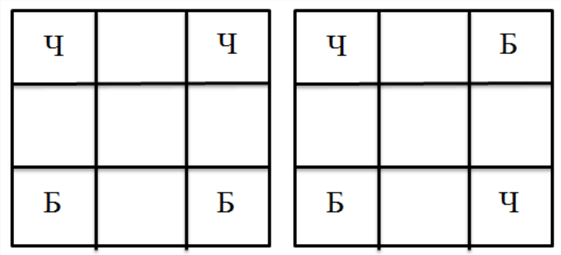


Рис. 7.3.

Решение.

Занумеруем клетки доски так, как показано на рисунке 7.4. Каждой клетке таблицы сопоставим точку на плоскости, и если из одной

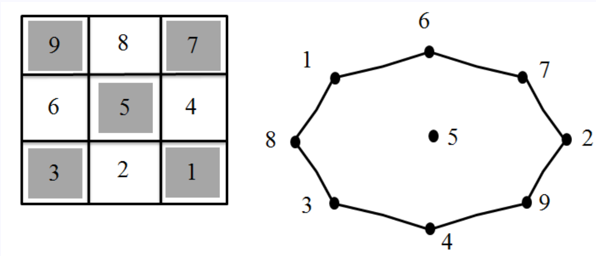


Рис. 7.4.

клетки можно попасть в другую ходом коня, то соединим соответствующие точки линией. Заметим, что порядок следования коней не изменится, и поэтому переставить коней требуемым образом невозможно.

Ответ: нельзя.

При решении многих задач полезна следующая теорема:

Теорема 7.1. *Число нечётных вершин любого графа чётно [4, с. 56].*

Пример 7.6. В турнире принимают участие 15 шахматистов. Может ли так быть, чтобы в некоторый момент каждый их них сыграл ровно 7 партий?

Решение. Предположим, что это возможно и рассмотрим граф, в котором вершины – это шахматисты, а рёбра – сыгранные партии. Тогда получим граф, у которого 15 нечётных (7) вершин, что противоречит теореме 1. Следовательно, не может быть, чтобы каждый из шахматистов в некоторый момент сыграл ровно 7 партий.

Ответ: не может.

Определение 7.5. *Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро один раз, называется Эйлеровым.*

Из определения следует, что Эйлеров граф должен иметь не более двух нечётных вершин. Впервые это было установлено в связи с решением задачи о кенигсбергских мостах.

Пример 7.7. Дан кусок проволоки длиной 120 см.

1. Можно ли не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?

2. Какое наименьшее число раз придётся сломать проволоку, чтобы изготовить требуемый каркас?

Решение. 1. Подсчитаем количество нечётных вершин у куба. Их всего 8. А граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, должен иметь не более двух нечётных вершин, следовательно, нельзя. Таких кусков нужно не менее четырёх. Следовательно, можно 3 раза сломать проволоку.

Определение 7.6. *Граф, называется связным, если любые две его вершины могут быть соединены путем, то есть последовательностью рёбер, каждое следующее из которых начинается в конце предыдущего.*

Несвязный граф состоит из нескольких «кусков». Эти «куски» называются компонентами связности графа. Каждая компонента связности является связным графом.

Теорема 7.2. *Граф является* **Эйлеровым** *тогда и только тогда, когда он связен и имеет не более двух нечётных вершин.*

Пример 7.8. Можно ли не отрывая карандаш от бумаги, и не проводя по одной линии дважды, нарисовать:

а) квадрат с диагоналями;

б) правильный пятиугольник с диагоналями?

Решение. а) Изобразим квадрат с диагоналями и возле каждой точки поставим число — степень вершины.

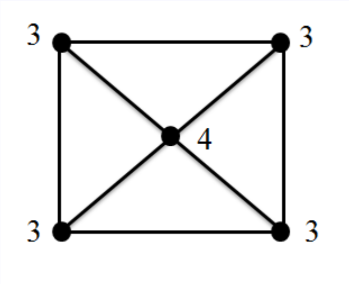


Рис. 7.5.

Так как количество нечётных вершин — 4, то нельзя.

б) Изобразим правильный пятиугольник.

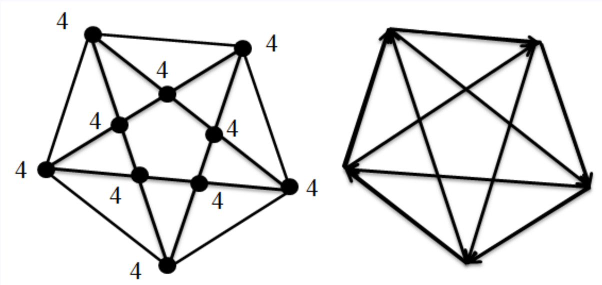


Рис. 7.6.

Количество нечётных вершин — 0, следовательно, можно. Решение показано стрелками.

7.4 Матричный метод решения логических задач

Для решения некоторых видов логических задач удобно составлять таблицы – матрицы. Матрица $m \times n$ – таблица, содержащая m строк и n столбцов. Любое из направлений по столбцам и строкам называется *входом*. Будем называть элемент матрицы *совместным*, если к нему можно подойти хотя бы с одного входа. Если этого сделать нельзя, такой элемент назовём *несовместным*. Применение матричного метода сводится к последовательному заполнению таблицы, то есть к поиску совместных и несовместных элементов в соответствии с условием задачи.

Пример 7.9. Электрик, монтажник и инженер, фамилии которых Лампочкин, Проводков и Конструкторов летели рейсом из Москвы в Минск. Из разговора, который они вели в самолёте, выяснилось, что:
1) Лампочкин и инженер собирались работать на строительстве;
2) электрик и Конструкторов живут в Минске;
3) Проводков моложе, чем монтажник;
4) Конструкторов старше, чем инженер.
Сможете ли Вы по этим данным определить фамилии инженера и электрика?

Решение. Составим матрицу 3×3, в которой буквы Л, П, К – начальные буквы фамилий, а э, м, и – первые буквы профессий (рис. 7.7).

Из утверждения (1) следует, что клетку Л–и можно заштриховать; по утверждению (2) можно заштриховать клетку э–К; по утверждению

	Э	М	И
Л	+	—	
П			
К		+	

Рис. 7.7.

(3) – клетку м—П, а по утверждению (4) – клетку и—К. Таким образом, в нижней строке осталась пустая клетка, в которой поставим «+», что означает: фамилия монтажника – Конструкторов, т.е. в клетке Л—м можно поставить «—», а в клетке Л—э – «+». Это значит, что электрик – это Лампочкин, и следовательно, инженер – Проводков.

Пример 7.10. Перед вами 3 островитянина: Ох, Ах, Ух. Представьте, что они сказали:

1. Ах: «Мы все лжецы»;

2. Ох: «Ровно один из нас лжец».

1) Можно ли определить, кто такой Ох – рыцарь или лжец?
2) Можно ли определить, кто такой Ух?

Решение. Составим матрицу 3×3.

	Ах	Ох	Ух
1	Л	Р	Р
2	Л	Л	Р
3	Л	Р	Л

Рис. 7.8.

Заметим, что Ах – лжец, т.к. если бы он был рыцарь, то не смог сказать «мы все лжецы». Тогда среди них есть хотя бы один рыцарь. В матрице расставим буквы «л» и «р», рассматривая возможные случаи.

Из матрицы видно, что ситуация (3) невозможна, так как если бы Ох был рыцарем, а Ух — лжецом, то Ох не мог сказать: «Ровно один из нас лжец».

Возможны только ситуации (2) и (1), поэтому невозможно определить, кем является Ох — рыцарем или лжецом, а Ух — является рыцарем в любом случае.

7.5 Задачи «на стратегии». Основные виды и методы решения

Математические игры характеризуются тем, что в них заранее можно определить исход игры. В таких задачах вопрос, как правило, формулируется так: кто и как выиграет при правильной игре, т.е. при наилучшей стратегии обеих игроков.
Для того чтобы обеспечить игроку победу в игре (или по крайней мере свести игру к ничьей), используются следующие идеи:

- *Соответствие.* Наличие удачного ответного хода (симетрия, дополнение числа до определённого числа (или суммы), разбиение на пары).
- *Решение с конца.* Последовательно определяются позициии, выигрышные и проигрышные для начинающего игрока.
- *Передача хода.* Если мы можем воспользоваться стратегией противника, то наши дела не хуже, чем у него. Например, выигрыш (или ничья) обеспечивается, когда можно по своему желанию попасть в некоторую позицию либо заставить противника попасть в нее.

Пример 7.11. На доске записаны 10 единиц и 10 двоек. За один ход разрешается стереть 2 любые цифры, и если они будут одинаковы, записать 2, а если разными — записать 1. Если последняя оставшаяся на доске цифра 1, то выиграл первый игрок, а если 2 — то выиграл второй.

Решение. Заметим, что четность числа единиц на доске после каждого хода не изменяется (это инвариант). Поскольку вначале единиц было четное число (10), то после очередного хода на доске может остаться четное количество единиц, то есть одна единица остаться не может. Следовательно, выигрывает второй игрок.

Пример 7.12. Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски так, чтобы слоны не били друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Решение. Используем осевую симметрию. За ось симметрии примем горизонтальную (или вертикальную) прямую, разбивающую доску 8×8 на две прямоугольные 4×8. Тогда какой бы ход не сделал первый игрок, второй игрок должен обязательно ходить симметрично относительно этой прямой, тем самым он обеспечивает себе выигрыш.

Пример 7.13. Двое играют в игру: из кучки камней в 50 штук можно взять любое количество камней от 1 до 5 за один ход. Выиграет тот, кто возьмёт последний камень. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Первый игрок выиграет, если будет придерживаться следующей стратегии: он должен взять 2 камня, а затем брать всегда столько комней, чтобы в сумме с соперником было 6 штук (если второй игрок взял 2 камня, то первый должен взять 4 камня).

7.6 Задачи на «маршруты» и «мосты» (использование теории графов, задачи исторического содержания)

Пример 7.14. Схема мостов города Кенигсберга изображена на рисунке. Можно ли совершить прогулку, пройдя по каждому мосту ровно один раз?

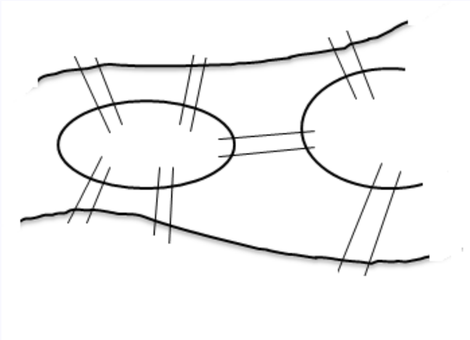


Рис. 7.9.

Решение. Пусть вершины графа — это участки суши, а мосты — рёбра графов. Заметим, что каждая вершина графа (их 4) нечетна: имеет степень либо 3, либо 5. А количество нечётных вершин не должно быть больше двух. Противоречие. Следовательно, нельзя.

Ответ: нельзя.

Пример 7.15. *Задача Леонарда Эйлера:* Можно ли совершить прогулку по городу, план которого показан на рисунке, пройдя только один раз по каждому из пятнадцати мостов?

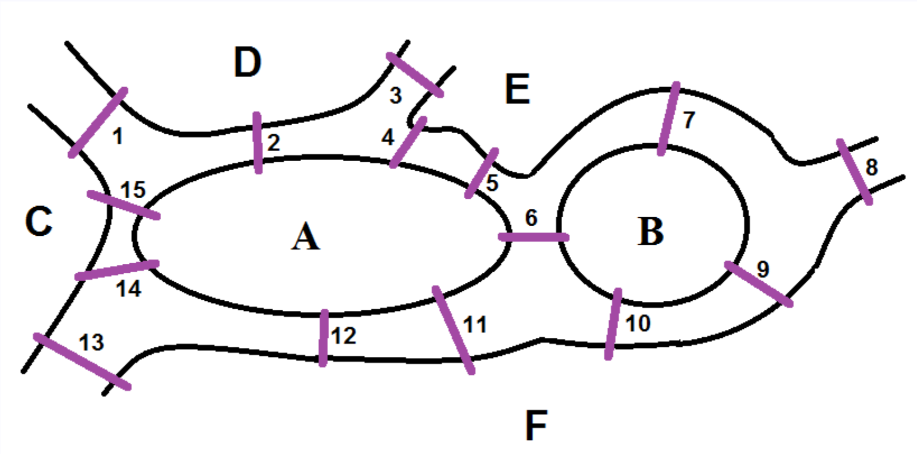


Рис. 7.10.

Решение. Изобразим план города в виде графа (рис 7.11).

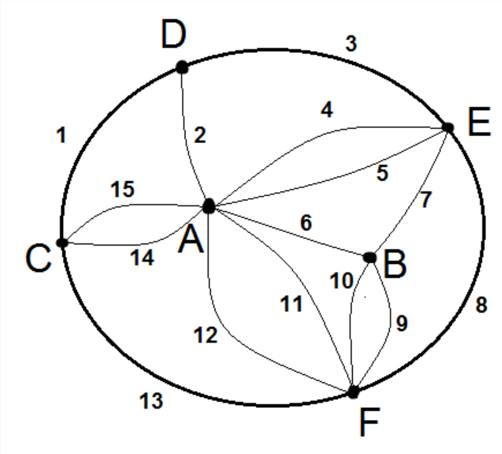


Рис. 7.11.

Заметим, какие степени имеет каждая вершина графа $A(8)$, $B(4)$, $C(4)$, $D(3)$, $E(5)$, $F(6)$. Так как только 2 вершины графа нечетные (D и E), то по теореме Эйлера можно совершить такую прогулку, причем обход должен начинаться в одной из точек, а заканчиваться в другой.

Ответ: можно.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ПРАВДОПОДОБНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

1. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \sqrt{x+16} + \sqrt{20-x}$.
   Указание. Используйте неравенство Коши-Буняковского.

   Ответ: $6\sqrt{2}$.

2. Решите уравнение $x^2 + x - 1 + \sqrt{x - x^2 + 1} = x^2 - x + 2$.
   Указание. Используйте функциональную замену.

   Ответ: 1.

3. Докажите неравенство $\sqrt{5x+7} + \sqrt{13-5x} < \frac{13}{2}$.

   Указание. Используйте неравенство Коши-Буняковского.

4. Решите уравнение $(16x^{2014} + 1) \cdot (y^{2014} + 1) = 16 \cdot (xy)^{1007}$.
   Указание. Используйте неравенство Коши.

   Ответ: $(\sqrt[1007]{\frac{1}{4}}; 1); (-\sqrt[1007]{\frac{1}{4}}; -1)$.

5. Решите систему

   (a) $\begin{cases} 4xy \cdot (2x^2 - 1) = 1, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+y+z=\sqrt{13}, \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{9+z^2}=7; \end{cases}$

Указание. (а) Используйте тригонометрическую подстановку; (б) Используйте векторный метод.

Ответ: (a) $(cos\frac{\pi}{8}; sin\frac{\pi}{8})$; $(cos\frac{5\pi}{8}; sin\frac{5\pi}{8})$; $(cos\frac{3\pi}{8}; -sin\frac{3\pi}{8})$; $(cos\frac{7\pi}{8}; -sin\frac{7\pi}{8})$;
(b) $(\frac{\sqrt{13}}{6}; \frac{\sqrt{13}}{3}; \frac{\sqrt{13}}{2})$.

Домашнее задание:

1. Решите уравнение $x + \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{2} \cdot (2x^2 - 1)$.
   Указание. См. пример 1.4.

   Ответ: $cos\frac{3\pi}{4}$; $cos\frac{\pi}{12}$.

2. Найдите наибольшее значение функции
   $f(x) = \sqrt{3 - 4cos^2 x} + \sqrt{7 - 4sin^2 x}$.
   Указание. См. пример 1.10.

   Ответ: $2\sqrt{3}$.

3. Решите систему $\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1, \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = \sqrt{7}. \end{cases}$

   Ответ: нет решений.

4. Докажите, что для всех $x \in [-1; 1]$ справедливо неравенство
   $\left(2x \cdot \sqrt{1 - x^2} + 2x^2 - 1\right)^2 \leq 2$.
   Указание. Используйте тригонометрическую подстановку
   $x = cos\alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ПРАВДОПОДОБНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

1. Найти значение выражения $sin(arctg\frac{3}{4} + arccos\frac{3}{5})$.

   Указание. См. пример 1.14.

   Ответ: $\frac{63}{65}$.

2. Решите уравнение и соответствующие неравенства

   (a) $|x-1| + |x-3| = 2$;

   (b) $|x-1| + |x-3| < 2$;

   (c) $|x-1| + |x-3| > 2$;

   (d) $|x-1| + |x-3| \leq 2$;

   (e) $|x-1| + |x-3| \geq 2$.

   Ответ:

   (a) $[1;3]$;

   (b) $\emptyset$;

   (c) $(-\infty;1) \cup (3;+\infty)$;

(d) $[1;3]$;

(e) R.

3. Найдите значение выражения $xy+yz$ из системы $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y^2+z^2=16, \\ y^2=xz, \end{cases}$

учитывая, что $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Указание. Используйте геометрический метод.

Ответ: 6.

4. Решите систему

$$\begin{cases} 3x+4y=26, \\ \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}=10. \end{cases}$$

Указание. Используйте геометрический метод.

Ответ: $(2;6)$.

5. Найдите все положительные решения системы

$$\begin{cases} x+y+z+t=6, \\ \sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y}^2+\sqrt{9-z^2}+\sqrt{16-t^2}=8. \end{cases}$$

Ответ: $(\frac{3}{5};\frac{6}{5};\frac{9}{5};\frac{12}{5})$.

6. Найдите наименьшее значение функции
$$f(x;y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13}.$$
Ответ: $\sqrt{34}$.

7. Положительные числа a, A, b, B, c, C таковы, что $a + A = b + B = c + C = k$.
Докажите, что справедливо неравенство $a \cdot B + b \cdot C + c \cdot A < k^2$.
Указание. Постройте равносторонний треугольник и используйте метод площадей.

Домашнее задание:

1. Найдите $cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$, если известно, что $sin\alpha = \frac{5}{13}$.
   Указание. См. пример 1.13.
   Ответ: $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{12}{5}$.
2. Найдите значение выражения $sin(arctg\frac{3}{4} + arctg\frac{12}{5})$.
   Указание. См. пример 1.14.
   Ответ: $\frac{\pi}{2}$.
3. Решите геометрическим методом уравнение $|x-1| + |x-3| = 7$.
   Ответ: $-1,5$; $5,5$.
4. Для всех положительных значений x, y, z, являющихся решением системы
   $$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x^2 + xz + z^2 = 9, \\ y^2 + yz + z^2 = 16. \end{cases}$$
   Найдите значение выражения $xy + xz + yz$.
   Указание. См. пример 1.18.
   Ответ: $3\sqrt{5}$.
5. Вычислите $sin 738^\circ$.
   Указание. См. пример 1.16.
   Ответ: $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД В ПОИСКЕ РЕШЕНИЙ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

1. Найдите все действительные решения уравнения
   $3x^2+3y^2-4xy+6x+6y+18=0.$

   Ответ: $(-3;-3)$.

2. Решите систему $\begin{cases} y-|x-2y+1|=3, \\ |y|+|y-2|+(y-4)^2=5. \end{cases}$

   Ответ: $(5;3)$.

3. Решите уравнение $log_2(1+\sqrt{x})=log_3 x$.

   Ответ: 9.

4. Решите уравнение $cos^2(x\cdot sinx)=1+log_5^2(\sqrt{x^2+x+1})$.
   Указание. Используйте метод мажорант.

   Ответ: 0.

5. Найдите все действительные решения уравнения
   $\sqrt{-x^2-4x-3}+\sqrt{-x^2-4x+5}=4+\sqrt{-x^2-8x-12}.$
   Указание. См. пример 2.3.

   Ответ: -2.

6. Решите уравнение
$sin^2(\pi \cdot (x+y)) + 3 = \sqrt{6y - y^2} \cdot cos^2(x+y) + 3sin^2(x+y)$.
Указание. Используйте метод мажорант.

Ответ: $(n-3; 3), n \in Z$.

7. Решите уравнение
$(26 + 15\sqrt{3})^x - 51 \cdot (7 + 4\sqrt{3})^x - 50(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 51$.
Указание. Используйте метод функциональной замены.

Ответ: $-3; 3$.

8. Найдите значение выражения $4 \cdot S$, где S – сумма действительных корней уравнения $(8x+7)^2 \cdot (x+1) \cdot (4x+3) = 15$.

Ответ: -7; $S = -\frac{7}{4}$.

9. Найдите значение выражения $n \cdot S$, где n – количество, S – сумма корней уравнения $x^2+x-9-2\sqrt{x^2+x}+4\sqrt[4]{x^2+x} = 6(2\sqrt[4]{x^2+x}-1)$.

Ответ: -2; $n = 2$; $S = -1$.

10. Найдите количество действительных корней уравнения
$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = 0$.

Ответ: $\varnothing$.

Кафедра методики преподавания математики и информатики

Домашнее задание:

1. Решите уравнение

   (a) $3\sqrt[3]{3x+2} - 2^{1-2x} + 11 = 0$;

   (b) $\sqrt{3-x} = log_5(x-3)$.

   Указание. Используйте метод мажорант.

   Ответ:

   (a) -1;

   (b) нет корней.

2. Решите уравнение

   (a) $x^4 + x^2 - 2x\sqrt{x^2-12} - 12 = 0$;

   (b) $\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + log_5^2 = 0$.

   Указание. Используйте функциональный подход.

   Ответ:

   (a) 2;

   (b) $\varnothing$

3. Решите уравнение

(a) $sin\frac{\pi}{x^2+6x+13} = \frac{log_3|x|+log_{|x|}3}{2\sqrt{2}}$;

(b) $(x^2 - 2x + 3) \cdot (y^2 + 6x + 12) = 6$.

Ответ:

(a) -3;

(b) $(1; -3)$.

4. Решите неравенство $log_{\frac{1}{2}}(1 + x) + arccos(x + y^2) \leq -1$.

Ответ: $(1; 0)$.

ЭВРИСТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ПРИ РЕШЕНИИ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

1. Постройте график функции $y = 3 \cdot |f(f(x))| + 1$, если $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

   Ответ: $x \neq 1$; $y = 3|x| + 1$.

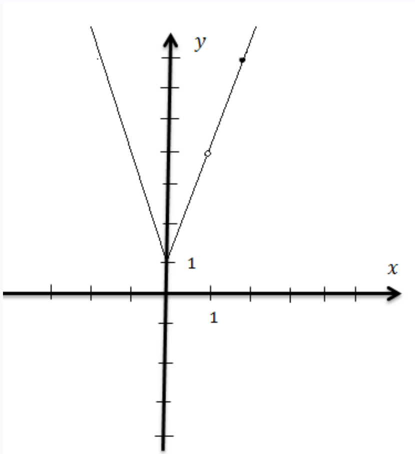


Рис. 7.12.

2. Существует ли квадратичная функция, удовлетворяющая для любых действительных значений x уравнению
$f(x+1)+f(2-x)=(x+1)^2$?
Указание. См. пример 3.1. *Ответ:* нет.

3. Известно, что $f(x)$ – нечётная, периодическая функция с периодом $T=4$ и $f(x)=x^4-2x^3$, $\forall x\in[0;2]$.
Найдите сумму $f(1)+f(2)+\ldots+f(150)$.

Ответ: -1.

4. Функция $f(x)$ определена для всех действительных значений x и удовлетворяет условию $2\cdot f(x)+f(1-x)=x^2$
Найдите $f(x)$.
Указание. См. пример 3.3.

Ответ: $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$.

5. Решите уравнение $f(x)+f(\frac{1}{1-x})=x$, $x\neq 0$, $x\neq 1$.

Ответ: $f(x)=\frac{x^3-x+1}{2x(x-1)}$.

6. Найдите значение выражения $a+b+c$ для функции $f(x)=\frac{ax+b}{x+c}$, если известно, что $D(f)=R\backslash\{-2\}$; $E(f)=R\backslash\{1\}$, и график функции $f(x)$ пересекает ось Ox при $x=2$.

Ответ: $a+b+c=1$ $(a=1;\ b=-2;\ c=2)$.

7. Функция $f(x)$ для всех натуральных значений x удовлетворяет уравнению $f(x+1) = f(x) + 2x + 1$. Найдите $f(2015)$, если $f(0) = 0$.

Указание. См. пример 3.4.

Ответ: $f(2015) = 2015^2$.

Домашнее задание:

1. Найдите $f(f(1))+1$, если $f(x)=\begin{cases}2x+1, x<-2,\\ -x-5, x\geq -2.\end{cases}$

   Ответ: -11.

2. Решите уравнение $f(x)+3x\cdot f(\frac{1}{x})=2x^2$ для всех допустимых значений x.
   Указание. См. пример 3.3.

   Ответ: $f(x)=\frac{3}{4x}-x^2,\ \ x\neq 0$.

3. Найдите квадратичную функцию $f(x)$, удовлетворяющую при всех действительных значениях x уравнению
   $f(1-x)-f(2-x)=-2x+7$.
   Указание. См. пример 3.1.

   Ответ: $f(x)=-x^2-4x+c,\ c=const$.

4. Решите уравнение $f(x+3)-f(x-2)=3x+1$.
   Указание. См. пример 3.1.

   Ответ: такой функции не существует.

5. Функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(\frac{a+2b}{3})=\frac{f(a)+2f(b)}{3}$, где $a\in N, b\in N$. Найдите $f(2015)$, если $f(1)=1,\ f(4)=7$.

   Ответ: $f(2015)=4029$.

ЦЕЛАЯ И ДРОБНАЯ ЧАСТЬ ЧИСЛА

1. Постройте графики функций:
a) $y = [4x]$;
b) $y = \{3x\}$;
c) $y = [x^2]$.
Ответ:

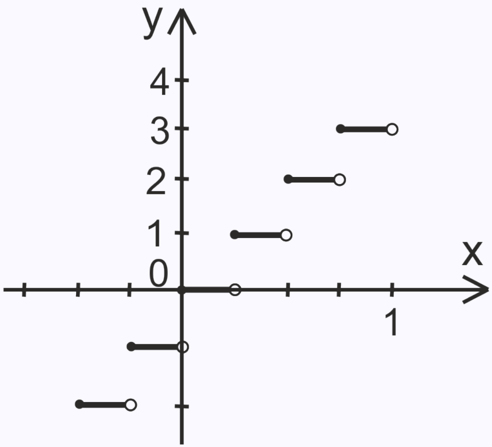


Рис. 7.13. (а)

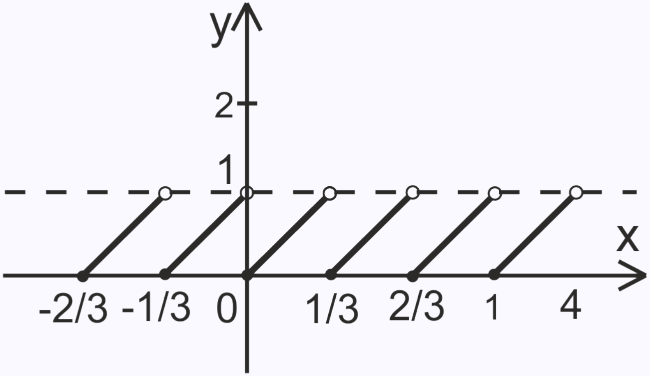


Рис. 7.14. (b)

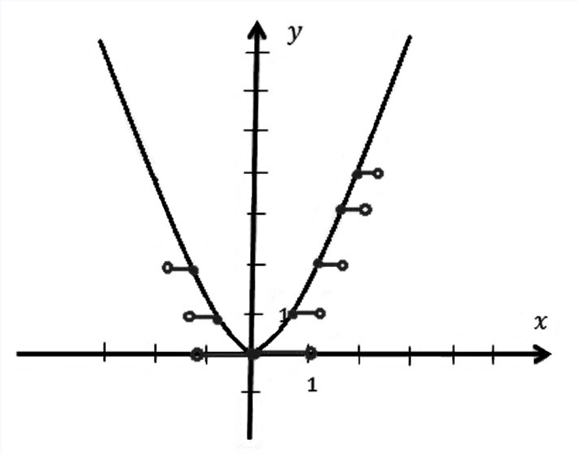


Рис. 7.15. (c)

2. Решите уравнение $2 + 3[x] = 4x$.

Указание. См. пример 4.2.

Ответ: $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{4}$; 2.

3. Решите уравнение $[\frac{2x+3}{4}] = \frac{4x-1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$; 1.

4. Решите уравнение $20 \cdot [x] + 15 \cdot x = 2015$.

Ответ: нет решений.

5. Решите уравнение: $tg[x] \cdot tg\{x\} = 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

6. Найдите значение выражения: $[\frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \ldots + \frac{2^{99}}{99!} + \frac{2^{100}}{100!}]$.

Ответ: 6.

7. Решите уравнение $[\frac{2x+3}{4}] = [\frac{4x-1}{3}]$.

Указание. См. пример 4.3.

Ответ: $[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}) \cup [1; 1\frac{3}{4}]$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

1. На доске записано число 8^{2015}. У него вычисляется сумма цифр, у полученного числа вновь вычисляется сумма цифр и т.д., до тех пор, пока не получится однозначное число. Что это за число?
   Ответ: число 8.

2. Пусть $S(n)$ – сумма цифр в десятичной записи натурального числа n. Существуют ли такие натуральные числа n, что:
   1) $n - S(n) = 3 \cdot 2010$;
   2) $n - S(n) = 3 \cdot 2011$?
   Указание. Используйте теоремы 5.5 и 5.6.

   Ответ: 1) да, например, 6040, 6041, ..., 6049.
   2) нет.

3. *Три различных действительных числа удовлетворяют следующему условию: квадрат любого из них равен сумме числа 1 и произведения двух других чисел. Какому числу может равняться сумма трех попарных произведений этих чисел?*
   Ответ: -1.

4. *Решите в целых числах уравнение:* $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3$ *[7].*
Ответ: $(1;1;1);(-1;-1;1);(-1;1;-1);(1;-1;-1)$.

5. *Решите задачу.*
Шли 40 мышей, несли 40 грошей.
Две мыши поплоше, несли по 2 гроша,
Немало мышей — вообще без грошей.
Большие совсем — тащили по 7,
А остальные — несли по 4.
Сколько мышей шли без грошей?
Ответ: 32.

6. Алёна умножила на 13 день своего рождения и на 12 — номер месяца этого дня. Сумма полученных произведений оказалась равна 378. Какого числа и в каком месяце день рождения Алёны?
Указание. Составьте неопределенные уравнения
Ответ: 18 декабря.

7. Найдите все решения уравнения $x^2-2y^2=1$ в простых числах.
Указание. См. пример 5.2.
Ответ: $(3;2)$.

8. Найдите все целые решения уравнения $x^4-y^4-2x^2+6y^2=13$.
Ответ: $(2;1)$; $(-2;-1)$; $(-2;1)$; $(2;-1)$.

Домашнее задание:

1. У числа 7^{2015} вычислили сумму цифр; у полученного числа вновь вычислили сумму и т. д. до тех пор, пока не получится однозначное число. Найдите это число.
   Ответ: 4.

2. Пусть $S(n)$ – сумма цифр в десятичной записи натурального числа n. Найдите все такие числа n, для которых выполняется условие $n + S(n) = 2011$.
   Указание. См. теоремы 5.5 и 5.6.
   Ответ: 1991.

3. Числа x, y, z, среди которых нет равных, удовлетворяют равенствам $x^2 - x - y = y^2 - y - z = z^2 - z - x$. Найдите численное значение выражения $(x + y) \cdot (y + z) \cdot (z + x)$.
   Ответ: -1.

4. Решите в целых числах уравнение $xy - x - y = 0$ [7].
   Ответ: $(0; 0); (2; 2)$.

5. Решите в целых числах уравнение $x^2 - y^2 = 91$.
   Указание. См. пример 5.2.

Ответ: $(46; 45)$; $(46; -45)$; $(-46; -45)$; $(-46; 45)$; $(-10; -3)$; $(-10; 3)$; $(10; 3)$; $(10; -3)$.

6. Может ли квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами иметь дискриминант равный 23?
Ответ: нет.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

1. 34 пасажира едут в автобусе, который делает всего 9 остановок, причём новые пасажиры ни на одной из них не входят. Докажите, что найдутся 2 остановки, на которых выйдет одинаковое количество пасажиров (возможно, ни одного).
   Указание. Рассмотрите сумму $0 + 1 + 2 + \ldots + 8 = 36 > 34$.

2. В чёрном ящике лежат 100 шаров: 28 красных, 20 зелёных, 12 жёлтых, 20 синих, 10 белых и 10 чёрных. Какое наименьшее число шаров надо вытащить, чтобы среди них оказалось 15 шаров одинакового цвета?
   Ответ: 75.

3. Можно ли 60 монет разложить по двенадцати кошелькам так, чтобы любые два из них содержали разное количество монет (может быть, ни одной)?
   Указание. См. пример 6.13. Рассмотрите сумму $0 + 1 + \ldots + 11 = 66 > 60$.
   Ответ: нет.

4. Можно ли найти такие две (различные) степи числа 4, у которых три последние цифры одинаковы?

Указание. См. пример 6.3. Рассмотрите числа $4^4, 4^5, \ldots, 4^{1004}$ и остатки от деления этих чисел на 1000.
Ответ: да.

5. Докажите, что существует натуральное число последние цифры которого 2016 и которое делится на 2014.
Указание. Рассмотрите остатки от деления чисел 2016, 20162016, $\ldots$, $\underbrace{2016\ldots2016}_{2015 \text{ повторений}}$ на 2014.

6. В прямоугольнике 3×4 расположено 6 точек. Верно ли, что среди них найдутся 2 точки, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$?
Ответ: верно, разрежьте фигуру так, как показано на рисунке, и примените принцип Дирихле.

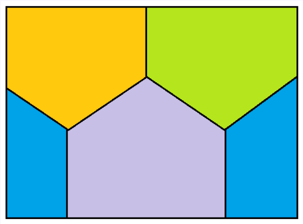


Рис. 7.16.

7. Прямоугольник размером 20×30 разбит на клетки размером 1×1. Можно ли провести прямую, пересекающую по внешним точкам 50 клеток данного прямоугольника?
Указание. подсчитайте количество внутренних линий (вертикальных и горизонтальных).
Ответ: нет.

8. Кот Базилио пообещал Буратино, что откроет ему «Великую тайну», если тот составит магический квадрат 6×6 из чисел $0; +1; -1$ так, чтобы все суммы по по строкам, по столбцам и по диагоналям были различны. Помогите Буратино справиться с заданием.
Указание. Рассмотрите сколько различных сумм из указаных чисел можно составить и используйте принцип Дирихле.

9. На плоскости дано 6 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждые 2 точки соединены отрезком одного из двух цветов: красным или зелёным. Докажите, что при этом образуется хотя бы один прямоугольник с вершинами в заданных точках, стороны которого имеют одинаковый цвет.
Указание. Рассмотрите количество отрезков, выходящих, например, из точки A_1.

Домашнее задание:

1. В чёрном ящике лежат 4 красных и 2 зелёных шара. Какое наименьшее количество шаров надо вытащить, чтобы среди них оказался 1 красный и 1 зелёный шар?
   Ответ: 5.

2. Какому минимальному числу школьников можно раздать 200 конфет так, чтобы среди них при любом распределении нашлись двое, которым конфет достанется поровну (возможно ни одной)?
   Указание. См. пример 6.13.

   Ответ: 21.

3. В кубе, ребро которого равно 13, выбрано 2015 точек. Можно ли в этот куб поместить кубик с ребром 1 так, чтобы внутри него не было ни одной выбранной точки?
   *Указание.*Разбейте куб на $13^3 = 2197$ единичных кубиков.
   Указание. См. утверждения 6.1 и 6.2.

   Ответ: да.

4. В прямоугольнике 5×6 закрасили 19 клеток. Докажите, что в нем можно выбрать квадрат 2×2, в котором закрашено не менее 3-х клеток.
   Указание. Разбейте прямоугольник на 6 частей так, как показано

на рисунке 7.17, рассмотрите квадратики 2×2. См. утверждение 6.2

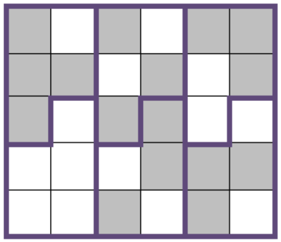


Рис. 7.17.

5. В квадрате ABCD находится 5 точек. Докажите, что между какими-то двумя из них расстояние не превосходит $\frac{AC}{2}$.
Указание. Проведите через центр квадрата прямые, параллельные его сторонам.

6. 10 студентов математиков составили 35 задач для математической олимпиады. Известно, что среди них были студенты, которые составили по 1, по 2 и по 3 задачи. Верно ли, что среди них есть студент (по меньшей мере, один), который составил не менее 5 задач?

Указание. Рассмотрите равенство
$29 = 35 - 1 - 2 - 3 = 7 \cdot 4 + 1.$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены знаки «$+$» и «$-$» так, как показано на рисунке 7.18.

$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$+$	-	$+$
$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$+$	$+$	$+$

Рис. 7.18.

За один ход разрешается менять все знаки в одной строке или одном столбце на противоположные. Можно ли с помощью таких операций получить в таблице все знаки «$+$»?
Указание. Используйте инвариант. Рассмотрите правый верхний квадрат 2×2 и обратите внимание на количество знаков «$-$» после каждого хода.
Ответ: нет.

2. Хулиган Вовочка разрывает школьную стенгазету. За один раз он разрывает любой из получившихся кусков на 6 частей. Может ли

он в какой-то момент времени получить 2013 кусков?
Указание. Рассмотрите инвариант $1+5k$, $k \in N$, то есть количество кусков после каждого хода.
Ответ: нет.

3. В стране под названием «Цифра» есть 9 городов с названиями «1», «2», «3», «4», «5», «6», «7», «8», «9». Путешественник обнаружил, что 2 города соединены между собой авиалинией в том и только том случае, если двузначное число, образованное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Может ли путешественник добраться из города «1» в город «9»?
   Указание. Постройте граф и рассмотрите возможные маршруты.
   Ответ: нет.

4. Иван, Дмитрий и Степан преподают различные предметы (химию, биологию, физику) в школах Москвы, Киева и Минска. Известно, что:
   1) Иван работает не в Москве, а Дмитрий – не в Минске;
   2) москвич преподаёт не физику;
   3) тот кто работает в Минске, преподаёт химию;
   4) Дмитрий преподаёт не биологию. Кто какой предмет преподаёт и в каком городе?
   Ответ: Степан – биология – Москва;
   Иван – химия – Минск; Дмитрий – физика – Киев.

5. Сколько нулей будет записано в конце произведения: 1) всех нечётных натуральных чисел от 1 до 30;
2) всех чётных натуральных чисел от 1 до 30;
3) всех натуральных чисел от 1 до 30;
4) всех натураоьных чисел от 1 до 50?
Ответ: 1) 0; 2) 3; 3) 7; 4) 12.

6. На «чудо-яблоне» растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать с нее 2 плода. Если сорвать 2 банана или 2 ананаса, то вырастет ещё 1 ананас, а если сорвать 1 банан и 1 ананас, то вырастет 1 банан. После срыва всех плодов остался 1 плод. Можно ли узнать какой он, если известно, сколько бананов и ананасов росло первоначально?
Указание. Используйте инвариант

Ответ: если число бананов было чётным, то оставшийся плод – ананас; если число бананов было нечётным, то останется банан.

7. Площадка перед домом выложена 40 квадратными плитками. Со временем некоторые плитки треснули и было решено покрыть площадку заново.

В магазине оказались только прямоугольные плитки размером 1×2. Можно ли покрыть площадку двадцатью такими плитками?
Указание. Раскрасьте площадку в шахматном порядке.

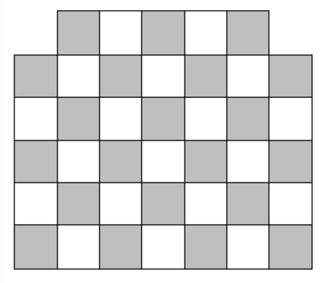


Рис. 7.19.

Ответ: нет.

8. На доске записано несколько знаков «+» и «−». Разрешается стереть любые 2 знака и написать вместо них «+», если они одинаковы, и «−», если они разные. Докажите, что последний на доске знак не зависит от порядка, в котором производились стирания.
   Указание. Используйте инвариант. Четность количества минусов не изменяется. Поэтому останется «+», если число минусов было чётно.

9. Из шахматной доски 8×8 вырезали две противоположные угловые клетки. Докажите, оставшуюся фигуру нельзя разрезать на прямоугольники размером 1×2.

Указание. Раскрасьте доску в шахматном порядке в чёрный и белый цвета.

10. Каждое из чисел x_1, $x_2, \ldots,$ x_n равно либо 1, либо -1, причём $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \ldots + x_{n-1} \cdot x_n + x_n \cdot x_1 = 0$. Верно ли, что число n кратно 4?
Ответ: да.

Домашнее задание:

1. Два хулигана разрывают две школьные стенгазеты. За один раз один хулиган разрывает любой из получившихся кусков на 4 части, а второй – на 7. Может ли в некоторый момент времени получиться 2014 кусков?
   Указание. Рассмотрите инвариант $3n + 1 + 6k + 1$,
   где $n \in N$, $k \in N$.
   Ответ: нет.

2. В стозначном числе 12345678901234567890...1234567890 вычеркнули все цифры на нечётных местах. В полученном пятидесятизначном числе снова вычеркнули все цифры на нечётных местах и т.д. до того момента, пока не останется одна цифра. Какая она?
   Ответ: 4.

3. В классе 30 человек. Может ли быть так, чтобы у девяти из них было по 3 друга в этом классе, у одиннадцати – по 4 друга, а у десяти человек – по 5 друзей?
   Указание. Подсчитайте количество нечётных вершин графа.
   Ответ: нет.

4. Футбольный мяч сшит из тридцати двух лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскуток граничит только с белыми, а каждый белый – с тремя чёрными и

тремя белыми лоскутками. Сколько лоскутков белого цвета?
Ответ: 20.

5. Кузнечик прыгает на 1 см, затем прыгает 3 см в том же или в противоположном направлении, затем на 5 см в том же или противоположном направлении и т.д. Может ли он после 57-го прыжка оказаться в исходной точке?
Указание. Сумма $(\pm 1) + (\pm 3) + (\pm 5) + \ldots + (\pm 57)$ нечётна.
Ответ: нет.

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. По окружности расставлены 15 красных и 15 синих фишек. Начиная с определённой фишки, отсчитывается подряд 8 фишек, а девятая снимается, и т.д. до тех пор, пока на окружности не останется 15 фишек. Как разместить на окружности фишки и с какой надо начинать отсчёт, чтобы снятыми оказались все синие фишки?
Ответ: 4 к, 5 *с*, 2 к, 1 *с*, 3 к, 1 *с*, 1 к, 2 *с*, 2 к, 3 *с*, 1 к, 2 *с*, 2 *с*, 1 к.
Отсчёт идёт с первой из четырёх красных фишек.

2. Встретились 3 друга – певец Белоус, художник Рыжий и поэт Черняк. «Интересно, что у одного из нас волосы светлые, у другого – чёрные, а у третьего – рыжие», – сказал черноволосый. «Но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии», – ответил ему Рыжий. Какого цвета волосы у певца?
Указание. Составьте матрицу.

   Ответ: певец – Белоус – волосы чёрные.

3. Маша, Лида, Женя и Катя умеют играть на разных инструментах (рояле, виолончели, гитаре, скрипке), но каждая только на одном. Они же владеют разными иностранными языками (английским, немецким, французским, испанским), но каждая только одним. Известно, что:

1) девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански;
2) Лида не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка;
3) Маша не играет ни на скрипке, ни на рояле и не знает английского языка;
4) девушка, говорящая по-немецки, не играет на виалончели;
5) Женя знает французский язык, но не играет на скрипке.

Кто на каком инструменте играет и какой иностранный язык знает?

Указание. Составьте матрицу

Ответ: Маша – гитара – испанский язык;
Лида – рояль – немецкий язык;
Женя – виолончель – французский язык;
Катя – скрипка – английский язык.

4. Двое играют в игру: из кучи камней в 35 штук можно взять любое количество камней от 1 до 4 за один ход. Выиграет тот, кто возьмёт последний камень. Кто выиграет: первый или второй игрок?
   Ответ: II игрок.

5. Жители пяти домов поссорились друг с другом и, чтобы не встречаться у колодцев, решили поделить колодцы так, чтобы хозяин каждого дома ходил по «своей» тропинке.

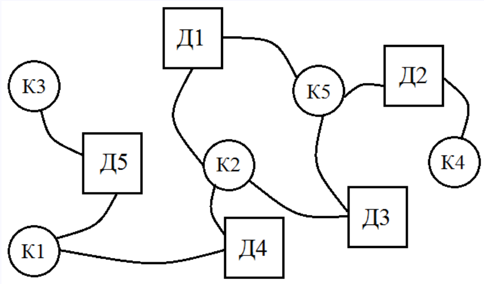


Рис. 7.20.

Удастся ли им это сделать?
Указание. Постройте граф.

6. Каждая вершина правильного шестиугольника соединяется с каждой из вершин красным или синим отрезком. Всегда ли найдётся треугольник со сторонами одного цвета?
Указание. Используйте то, что из пяти отрезков хотябы 3 одного цвета.
Ответ: да.

7. Ладья стоит на шахматной доске 8×8 на поле a_1. За один ход её можно сдвинуть на любое число клеток вправо или вверх. Выиграет

тот, кто поставит её на поле $h8$. Кто выиграет при правильной игре?
Ответ: II игрок.

8. На рисунке изображён план подвала из 10 комнат.

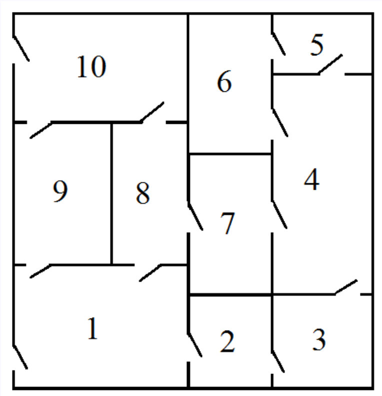


Рис. 7.21.

Можно ли пройти через все двери всех комнат, запирая каждый раз ту дверь, через которую Вы проходите?

Ответ: да, посчитайте количество нечётных вершин графа.

Домашнее задание:

1. Три внука – Антон, Василий и Сергей – изучают разные иностранные языки: немецкий, французский, английский. На вопрос дедушки , о том, кто из них какой язык изучает они ответили, что Антон изучает английский, Василий – не английский, а Сергей не немецкий. Оказалось, что только одно из этих утверждений истинно, а два остальные ложны. Кто какой зык изучает?
   Ответ: Василий – английский язык;
   Сергей – французский язык;
   Антон – немецкий язык.

2. На спортивных состязаниях спортсмены с номерами «1», «2», «3», «4» заняли первые четыре места причём ни один из них не занял места, совпадающего с его номером. Оказалось, что номер спортсмена, занявшего IV место, совпадает с номером места того спортсмена, чей номер есть номер места спортсмена с номером «2». Спортсмен с номером «3» занял не I место. Какое место занял каждый спортсмен?
   Ответ: I место - спортсмен «2»;
   II место - спортсмен «4»;
   III место - спортсмен «1»;
   IV место - спортсмен «3».

3. Двое по очереди ломают шоколадку 6×10. За один ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Можно ли определить, кто проиграет: первый или второй игрок?
Ответ: выиграет всегда I игрок.

4. Двое играют в игру: из кучи камней в 35 штук можно взять любое количество камней от 1 до 3 за один ход. Выиграет тот, кто возьмёт последний камень. Кто выиграет: первый или второй игрок?
Ответ: выиграет первый игрок, если возьмёт за I ход 3 камня.

5. Таракан забрался в банку из под сахара. Банка имеет форму куба. Сможет ли он последовательно обойти все 12 рёбер куба, не проходя дважды по одному ребру?
Указание. Подсчитайте число нечётных вершин графа.
Ответ: нет.

6. В стране 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого, возможно, переезжая через другие города, т.е. что граф дорог связен.
Указание. Рассмотрите два любых города и покажите, что можно указать не менее 16-ти городов.

7. Можно ли нарисовать граф, изображённый на рисунке, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз? Ответ объясните.

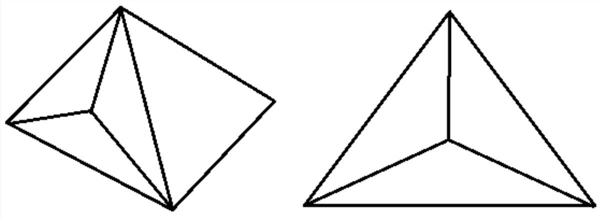


Рис. 7.22. а, б.

Ответ: а. да; б. нет.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 10

ОБОБЩЕНИЕ. ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ УСВОЕНИЯ КУРСА

Вопросы для повторения

1. Неравенство Коши и суть его использования при решении уравнений, неравенств и систем [тема 1.2].

2. Основные свойства векторов, используемые при решении уравнений, неравенств и систем [тема 1.4].

3. Суть функционального подхода в процессе решения уравнений, неравенств и систем [тема 2.1; 2.2; 2.3].

4. Определение понятия «функциональное уравнение» и основные теоремы используемые при решении функциональных уравнений [тема 3.1; 3.2].

5. Определение целой и дробной части числа и основные теоремы, используемые при решении задач [тема 4.1].

6. Построение графиков функций $y = k[x]$; $y = k\{x\}$; $y = [kx]$; $y = k[x]$; $y = \{kx\}$, где $k \in R$ [тема 4.2].

Задачи

1. Решите уравнение $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-8)=10x^2$.
   Ответ: $\frac{11+\sqrt{89}}{2}$; $\frac{11-\sqrt{89}}{2}$.

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3, \\ 2x+y=7. \end{cases}$
   Ответ: $(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3})$; $(2; 3)$.

3. Решите уравнение $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}=x^2-x+2$.
   Ответ: 1.

4. Докажите неравенство $\sqrt{5x+7}+\sqrt{13-5x}<\frac{13}{2}$.
   Указание. Воспользуйтесь неравенством Коши-Буняковского.

5. Докажите неравенство $\sqrt[5]{5-\sqrt[5]{x}}+\sqrt[5]{5+\sqrt[5]{x}}\le 2\sqrt[5]{5}$.
   Указание. Воспользуйтесь неравенством Бернулли.

6. Решите систему $\begin{cases} x+y+z+t=6, \\ \sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{9-z^2}+\sqrt{16-t^2}=8. \end{cases}$.
   Ответ: $(0,6;\ 1,2;\ 1,8;\ 2,4)$.

7. Решите уравнение $2+[6x]=\frac{10x-1}{2}$.
   Ответ: $-\frac{19}{10}$; $-\frac{7}{10}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{17}{10}$; $\frac{29}{10}$.

8. Решите уравнение $[\frac{x+3}{4}] = [\frac{2x-6}{3}]$.
Ответ: $[4,5;\ 5) \cup [6;\ 7,5)$.

9. Решите уравнение $[x+1] = 4 + 2\{x\}$.
Ответ: 3; 4,5.

10. Решите уравнение $4 + 5[x] = 6x$.
Ответ: $-\frac{1}{6}; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{7}{3}; \frac{19}{6}; 4$.

11. Найдите $f(x)$, если известно, что $f(x+1) = x^2 + 2x + 2$.
Ответ: $f(x) = x^2 + 1$.

12. Известно, что $g(x) = 2 - x$; $f(g(x)) = 5 - 4x$. Найдите $f(x)$.
Ответ: $f(x) = 4x - 3$.

13. Решите уравнение $2 \cdot f(x+1) + f(3-x) = 4x + 11$.
Ответ: $f(x) = 4x - 3$.

14. Решите уравнение $3f(x+3) - f(5-x) = \frac{8x-52}{3}$.
Ответ: $f(x) = \frac{2}{3}x - 10$.

15. Найдите $f(x)$, если известно, что $f(\frac{3x+1}{x-2}) = x^2 + x + 1$.
Ответ: $f(x) = \frac{7(x^2-x+1)}{x-3^2}$.

Кафедра методики преподавания математики и информатики

ОБОБЩЕНИЕ. ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ УСВОЕНИЯ КУРСА

Вопросы для повторения

1. Определение простого и составного числа; признаки делимости на 2; на 3; на 4; на 5; на 7; на 8; на 9; на 11 [тема 5.2].
2. Основные теоремы теории делимости чисел [тема 5.1].
3. Методы решения в целых числах уравнений вида $ax + by = c$ и суть каждого из них [тема 5.3].
4. Принцип Дирихле, следствие из принципа Дирихле и обобщённый принцип Дирихле [тема 6.1; 6.2; 6.3].
5. Понятие «инвариант» основные инварианты в задачах [тема 7.2].
6. Понятия «граф», «связный граф», «Эйлеров граф»; основные теоремы теории графов [тема 7.3].
7. Понятие «матрица», виды матриц, суть матричного метода решения логических задач [тема 7.4].
8. Основные виды и методы решения задач «на стратегии» [тема 7.5].

Задачи

1. В школе 30 классов и 995 учеников. Докажите, что в ней имеется класс, в котором не менее 34-х учеников.
   Указание. Используйте метод от противного и принцип Дирихле.

2. Сколько существует способов составления отрезка длиной 3 м из отрезков длиной 7 см и 12 см?
   Указание. Составьте и решите уравнение в целых числах. *Ответ:* 4 способа.

3. В одном ящике лежат 15 синих шаров и 12 белых шаров. За один ход разрешается взять или 3 синих шара или 2 белых шара. Выигрывает тот, кто берёт последние шары. Кто выиграет при правильной игре?
   Ответ: выиграет I игрок.

4. Если двузначное число разделить на некоторое целое число, то в частном получится 4, а в остатке 6. Если же в делимом поменять местами цифры, а делитель оставить прежним, то в частном получится 3, а в остатке 9. Найдите первоначальное двузначное число.
   Ответ: 12.

5. Решите уравнение $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$ в целых числах.
   Ответ: $(5; 2); (-1; -2); (-5; -2); (1; 2)$.

6. Петя последовательно выписывает все целые числа, начиная с 21 так, что каждое следующее число меньше предыдущего на 4, а Вася, глядя на очередное число, подсчитывает сумму всех выписанных к этому моменту чисел. Какая из найденных Васей сумм окажется ближайшей к числу 55?
Ответ: 56.

7. Можно ли, прогуливаться по парку и его окресностям так, чтобы перелезть через каждый забор ровно 1 раз?

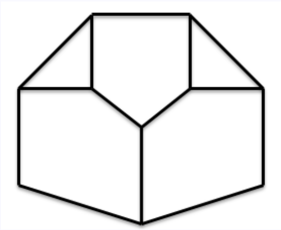


Рис. 7.23. план парка

Указание. Подсчитайте степень каждой вершины графа.

8. Три друга – Владимир, Игорь и Сергей преподают математику, физику и литературу в школах Бреста, Минска и Гродно. Владимир работает не в Минске, Игорь – не в Бресте, брестчанин преподаёт

литературу, минчанин — физику, Игорь — не математику. Кто в каком городе работает и какой предмет преподаёт?
Указание. Используйте граф.

Ответ: Владимир — Брест — литература;
Игорь — Гродно — физика;
Сергей — Минск — математика.

9. На каждой стороне шестиугольника вначале записали некоторые числа. Затем записали в каждой вершине шестиугольника сумму двух соседних чисел и стёрли все числа на сторонах и одно число в вершине шестиугольника.

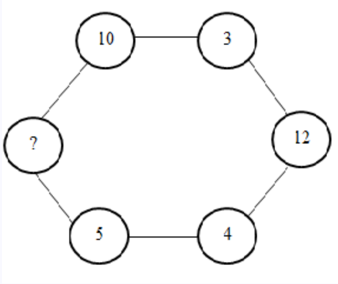


Рис. 7.24.

1) Можно ли узнать, какое число было записано в вершине?

2) Можно ли восстановить числа, которые были записаны на сторонах шестиугольника?

Ответ: 1) 20; 2) нет.

10. За один ход число, написанное на доске, разрешается либо заменить на удвоенное, либо стереть у него последнюю цифру. Вначале на доске написано число 456. Можно ли из него получить число 14?

    Ответ: $456 \to 45 \to 90 \to 9 \to 18 \to 36 \to 72 \to 7 \to 14$.

11. На доске записаны числа 1, 2, 3,..., 2014. За один ход разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность. В результате многократного выполнения таких действий на доске окажется записанным одно число. Может ли это число быть равно 0?

    Указание. Инвариант – количество нечётных чисел.

    Ответ: нет.

12. Из цифр 2; 3; 4;...; 9 составили два натуральных числа. Каждая цифра использовалась один раз. Могло ли одно из этих чисел оказаться вдвое больше другого?

    Указание. Используйте признак делимости на 3.

    Ответ: нет.

13. С двумя различными натуральными числами выполняют следующие действия: 1) находят их сумму; 2) из большего числа вычитают

меньшее; 3) находят произведение двух данных в условии чисел; 4) большее число делят на меньшее. Сумма результатов всех четырёх действий равна 243. Найдите все числа, удовлетворяющие условию задачи.
Ответ: 54 и 2; 24 и 8.

14. Какое число стоит на 2015-м месте в числовой последовательности: 1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4;...?
Указание. Составьте уравнение в целых числах.
Ответ: 63.

15. Известно, что числа 1020 и 1127 при делении на некоторое натуральное число a дают одинаковые остатки. Найдите число a.
Ответ: 107.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 12

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 0

1. В городе N от каждой площади отходит ровно 11 улиц, соединяющих площади. Докажите, что число площадей чётно, а число всех улиц делится на 11.
   Решение. Рассмотрим граф, в котором вершины – площади города N, а рёбра – улицы города N.
   Согласно теореме (число нечётных вершин графа чётно) имеем, что число площадей $2n$, $n \in N$, $n \geq 2$. Следовательно, количество рёбер $\frac{2n \cdot 11}{2} = 11n$, т.е. делится на 11.

2. Двое по очереди ставят королей в клетки доски 7×7 так, чтобы короли не били друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?
   Решение. Выиграет всегда перый игрок, если будет придерживаться следующей стратегии: вначале поставит короля в центральную клетку доски, а затем будет повторять ходы второго игрока симметрично относительно этой центральной клетки.

3. Найдите $f(2015)$, Если известно, что $f(0) = 0$ и $f(x+1) = f(x) + 2x + 1$ при всех действительных значениях x.

Решение. Запишем следующие равенства:

при $x = 0: f(1) = f(0) + 2 \cdot 0 + 1;$

при $x = 1: f(2) = f(1) + 2 \cdot 1 + 1;$

при $x = 2: f(3) = f(2) + 2 \cdot 2 + 1;$

. . . .

при $x = n - 1: f(n) = f(n-1) + 2 \cdot (n-1) + 1.$

Сложив записанные равенства почленно, получим:

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = f(0) + f(1) + \ldots + f(n-1) +$$

$$+ 2 \cdot (0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1)) + 1 \cdot n.$$

Приведём подобные слагаемые, получим:

$$f(n) = 2 \cdot \frac{0 + (n-1)}{2} \cdot n + n;$$

$$f(n) = n^2.$$

В самом деле, если $f(n) = n^2$, то $f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. С другой стороны, $f(x) + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, т.е. равенство $f(x+1) = f(x) + 2x + 1$ справедливо. Следовательно, $f(2015) = 2015^2 = 4060225$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = \sqrt{13}, \\ \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+4} + \sqrt{z^2+9} = 7. \end{cases}$

Решение. (I способ) Рассмотрим векторы $\vec{a}(x;1)$, $\vec{b}(y;2)$ и $\vec{c}(z;3)$, тогда $\vec{f} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ и вектор $\vec{f}(\sqrt{13}, 6)$. Найдем длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{f}$; $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+1}$; $|\vec{b}| = \sqrt{y^2+4}$; $|\vec{c}| = \sqrt{z^2+9}$; $|\vec{f}| = 7$.
Заметим, что выполняется равенство $7 = |\vec{f}| = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| =$ $= |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$, что возможно тогда и только тогда, когда $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}$, т.е. справедливы равенства: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. Отсюда $y = 2x$; $z = 3x$. Имеем: $x + 2x + 3x = \sqrt{13}$; $6x = \sqrt{13}$; $x = \frac{\sqrt{13}}{6}$; $y = \frac{\sqrt{13}}{3}$; $z = \frac{\sqrt{13}}{2}$. *Ответ:* $(\frac{\sqrt{13}}{6}; \frac{\sqrt{13}}{3}; \frac{\sqrt{13}}{2})$.

Решение. (II способ – геометрический) Рассмотрим прямоугольные треугольники с катетами x и 1, y и 2, z и 3. Выстроим их так, как показано на рисунке 7.25. Тогда длина гипотенузы каждого из треугольников будет соответственно равна $\sqrt{x^2+1}$; $\sqrt{y^2+4}$; $\sqrt{z^2+9}$.
Заметим, что длины катетов треугольника ABC равны $x + y + z =$ $= \sqrt{13}$ и $1 + 2 + 3 = 6$. Т.е. длина $BC = \sqrt{(\sqrt{13})^2 + 6^2} = 7$. По условию задачи, $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+4} + \sqrt{z^2+9} = 7$, следовательно, точки B, M, N и C лежат на одной прямой.

Из подобия треугольников: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. Отсюда, $y = 2x$; $z = 3x$. Подставляя y и z в первое уравнение системы, получим $x = \frac{\sqrt{13}}{6}$;

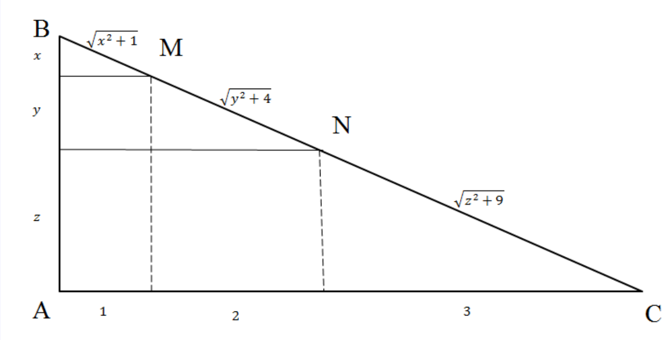


Рис. 7.25.

$y = \frac{\sqrt{13}}{3}$; $z = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Ответ: $(\frac{\sqrt{13}}{6}; \frac{\sqrt{13}}{3}; \frac{\sqrt{13}}{2})$.

Замечание 7.1. *Если предположить, что x, y и z разных знаков, то отрезки следует откладыватьв противоположных направлениях.*

5. Решите уравнение $[tgx] = 2cos^2x$.
Решение. Заметим, что $0 \le 2cos^2x \le 2$ и, следовательно, $0 \le [tgx] \le 2$. Возможны следующие случаи:

(a) $[tgx] = 0$; тогда $2cos^2x = 0$; $cosx = 0$. Но, если, $cosx = 0$,

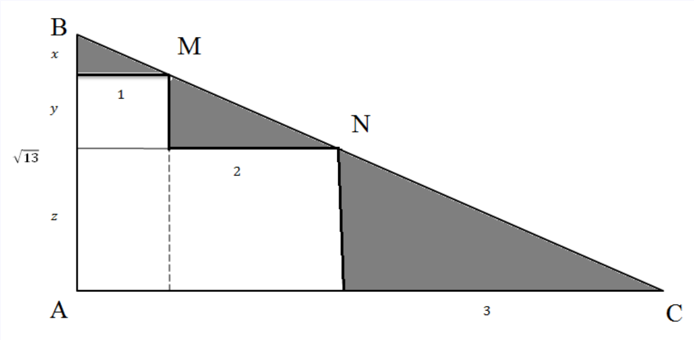


Рис. 7.26.

то функция $y = tgx$ определена, следовательно, уравнение не имеет решений;

(b) $[tgx] = 1$; тогда, $2cos^2x = 1$; $\quad cos^2x = \frac{1}{2}$; $cosx = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $cosx = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Отсюда $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$, или $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$, или $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$, или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi l$, $l \in Z$. Заметим, что если $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi l$ то $[tgx] = -1$. Поэтому, решениями уравнения являются $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ и $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $k, m \in Z$.

(c) $[tgx] = 2$; тогда $2cos^2x = 2$; $cos^2x = 1$, $cosx = 1$ или $cosx = -1$, но в этих случаях $sinx = 0$, т.е. $tgx = 0$

и $[tgx] = 0$ — противоречие.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ и $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$ $k, m \in Z$.

Замечание 7.2. *Эти множества решений можно записать в общем виде:* $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

1. Численные неравенства

Неравенство Коши: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n \cdot \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$,
где $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \ldots, a_n \geq 0$.

Неравенство Коши-Буняковского: $(x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n)^2 \leq$

$\leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$, где $n \geq 2$ и $x_i \in R$, $y_i \in R$.

Неравенство Бернулли: Если $x > -1$ и $n \in N$, то $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

2. Основные тригонометрические формулы

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ x \in R;$

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1,\ x \neq \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z;$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ form1

$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi n,\ n \in Z;$

$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x;$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$

$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1;$

$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x;$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2};\qquad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2};$$

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y;$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y;$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y;$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y;$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};$$
$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2};$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\sin\frac{x+y}{2}$$

3. Векторы

Если $\overrightarrow{a}\ (a_1;a_2)$, то $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$;

$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|\le|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$;

$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|\le|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$;

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

4. Графики функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$

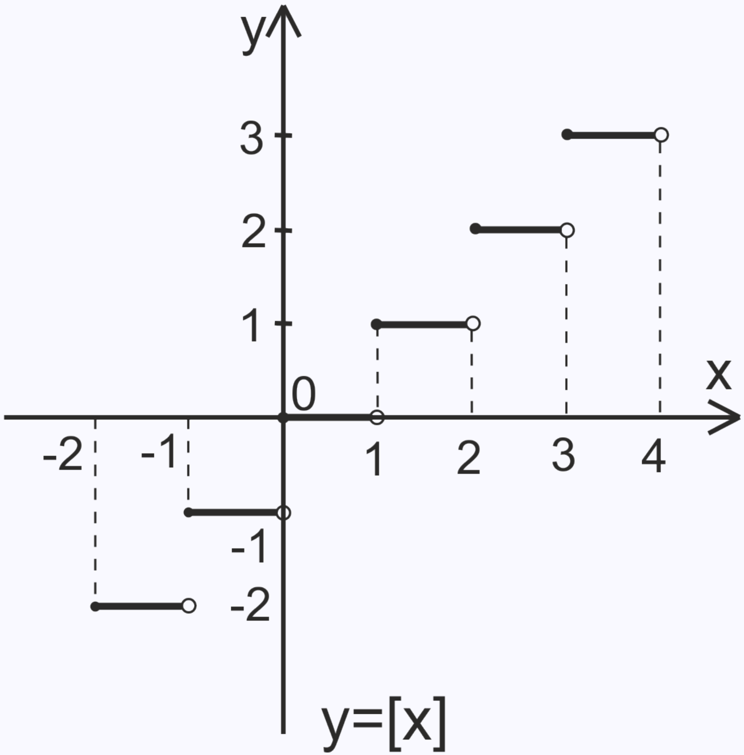


Рис. 7.27.

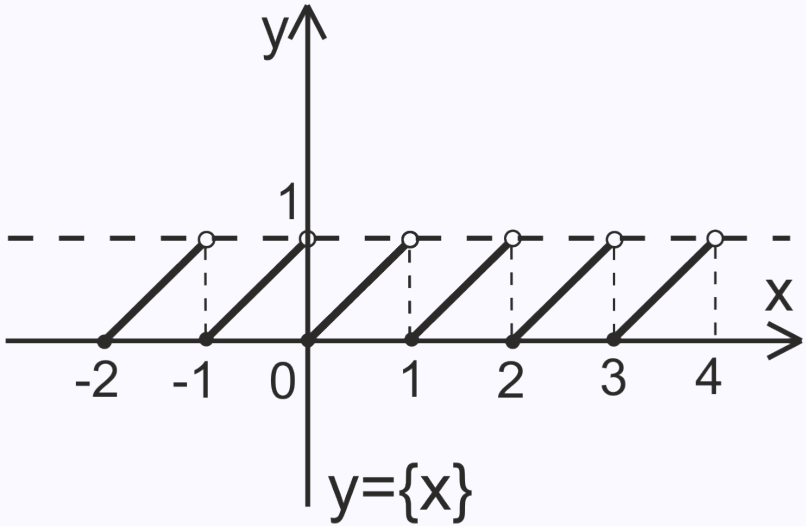


Рис. 7.28.

Свойства целой и дробной части числа

1. $[x] \leq x < [x] + 1;$

2. $x = [x] + \{x\}$

3. $0 \leq \{x\} < 1;$

4. $[x + n] = [x] + n, \forall x \in R, \forall n \in Z;$

5. $[x+y] \geq [x]+[y], \forall x \in R, \forall y \in Z$;

6. если $[x]=[y]$, то $|x-y|<1$;

7. если $x<y$, то $[x] \leq [y]$.

Делимость чисел

Если $a=b\cdot q+c$, где $c<b$, то НОД $(a,b)=$ НОД (b,c).

Если $r_1=$ ост $_n(a_1)$ и $r_2=$ ост $_n(a_2)$, то справедливы равенства:
а) ост $_n(a_1+a_2)=$ ост $_n(r_1+r_2)$;
б) ост $_n(a_1\cdot a_2)=$ ост $_n(r_1\cdot r_2)$;
в) ост $_n(a^n)=$ ост $_n(r^n)$.

Принцип Дирихле

Если множество из N элементов разбито на n непересекающихся частей, не имеющих общих элементов (N>n), то по крайней мере в одной части будет более одного элемента.

Принцип Дирихле в геометрии: Если на отрезке (окружности) длиной 1 расположено несколько отрезков (дуг), сумма длин которых больше 1, то по крайней мере два (две) из них имеют общую точку.

Следствие из принципа Дирихле: Если сумма n чисел равна S, то среди них есть какое-то число, как не больше чем $\frac{S}{n}$, так и не меньшее, чем $\frac{S}{n}$.

Вопросы и примерные задания для подготовки к экзамену

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ:

1. Понятие «тригонометрическая подстановка» и условия ее использования при решении уравнений, неравенств и систем.
2. Неравенство Коши (для двух, трёх и n слагаемых). Условия использования неравенства при решении задач.
3. Неравенство Коши-Буняковского. Основные формулы, виды задач, решаемых с использованием неравенства.
4. Неравенство Бернулли; обобщённое неравенство Бернулли.
5. Суть векторного метода решения задач (свойства векторов, используемых при решении уравнений, неравенств и систем).
6. Функциональный подход в поиске решения нестандартных задач (свойства функции, используемые при решении).
7. Понятие о функциональных уравнениях. Основные теоремы, используемые при решении функциональных уравнений.
8. Понятие целой и дробной части числа. Основные свойства.
9. Графики функций $y = [x]$, $y = k[x]$, $y = [kx]$.

10. Графики функций $y = \{x\}$, $y = k\{x\}$, $y = \{kx\}$.

11. Делимость чисел. Основные определения и теоремы.

12. Простые и составные числа. Решето Эратосфена. Признаки делимости на 4; 8; 11.

13. Решение в целых числах $(x; y)$ уравнения $ax + by = c$.

14. Принцип Дирихле. Использование принципа Дирихле при решении задач на делимость.

15. Принцип Дирихле в геометрии. Следствие из принципа Дирихле.

16. Основные понятия теории графов; базовые теоремы; Эйлеров граф.

17. Игровые стратегии при решении математических задач. Основные виды задач и методы их решения.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ:

1. В таблице 3×3 одна из клеток закрашена чёрным цветом, остальные – белым. Можно ли, перекрашивая целиком некоторые строчки или целиком некоторые столбцы, добиться того, чтобы все клетки стали белого цвета?
   Указание. Используйте игровые стратегии.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{2x+17} + \sqrt{32-2x}$.
   Указание. Используйте численные неравенства или векторы.

3. Найдите все целые положительные решения уравнения $x^2 - xy + 2x - 3y = 11$.
   Указание. Используйте функциональные уравнения

4. Найдите все функции, определенные на множестве $(-\infty; 1) \bigcup (1; +\infty)$, удовлетворяющие соотношению $(x-1) \cdot f(\frac{x+1}{x-1}) - f(x) = x$.

5. Существуют ли две степени числа 14, последние три цифры которых одинаковы?
   Указание. Используйте инвариант

Тест (Проверь свои знания)

К тесту можно перейти по следующей ссылке Тест.

Литература

1. Барабанов, Е.А. Задачи заключительного тура Минской городской математической олимпиады школьников : пособие для учащихся общеобразоват. учреждений / Е.А. Барабанов [и др.]. – Минск : Бел. ассоц. «Конкурс», 2006. – 304 с.

2. Бахтина, Т.П. Математикон. Много задач хороших и разных : пособие для учащихся / Т.П. Бахтина. – Минск : Бел. ассоц. «Конкурс», 2013. – 272 с.

3. Вакульчик, П.А. Нестандартные и олимпиадные задачи по математике : пособие для учащихся общеобразоват. учреждений / П.А. Вакульчик. – Минск : Универсал Пресс, 2004. – 352 с.

4. Горбачев, Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике : пособие для учащихся общеобразоват. учреждений / Н.В. Горбачев. – М. : МЦМНО. 2004. – Ч. 3. – 560 с.

5. Дуванова, В.С. Готовимся к олимпиаде : пособие для студ. пед. спец-тей мат. факультетов : в 3 ч. / В.С. Дуванова, С.В. Селивоник. – Брест : БрОИПК и ПРР и СО 2002. – Ч. 1. – 48 с.

6. Дуванова, В.С. Готовимся к олимпиаде : пособие для студ. пед. спец-тей мат. факультетов : в 3 ч. / В.С. Дуванова, С.В. Селивоник. – Брест : БрГУ имени А.С. Пушкина, 2001. – Ч. 2. – 90 с.

7. Дуванова, В.С. Готовимся к олимпиаде : пособие для студ. пед. спец-тей мат. факультетов / В.С. Дуванова, С.В. Селивоник. – Брест : БрГУ имени А.С. Пушкина, 2002. – Ч. 3. – 76 с.

8. Дуванова, В.С. Методы решения логических задач в курсе математики 5–6 классов : пособие для студ. пед. спец-тей мат. факультетов : в 2 ч. / В.С.Дуванова, И.В. Решеткина, С.В. Селивоник. – Брест : БрГУ имени А.С. Пушкина, 2004. – Ч. 1. – 83 с.

9. Дуванова, В.С. Методы решения олимпиадных задач по математике в 8—9 классах : учебно-методическое пособие / В.С.Дуванова, С.В. Селивоник. – Брест : БрГУ имени А.С. Пушкина, 2014. – 168 с.

10. Дуванова, В.С. Нестандартные задачи по математике для учащихся 5—6 классов : учебно-методическое пособие / В.С. Дуванова, С.В. Селивоник. – Брест : БрГУ имени А.С. Пушкина, 2010. – 76 с.

11. Кот, В.И. Математика вне урока : пособие для учащихся учреждений общего сред-него образования с русским и белорусским языками обучения / В.И. Кот, Ю.В. Сильванович. – Минск : Бел. ассоциация «Конкурс», 2011. – 352 с.

12. Кот, В.И. Реши, если силен, или подружись с математикой : пособие для учащихся общеобразоват. учреждений / В.И. Кот. – Минск : Бел. ассоц. «Конкурс», 2012. – 336 с.

13. Литвиненко, В.Н Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригономет-рия : учеб.пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – М. : Просвещение, 1991. – 352 с.

14. Математика : Энциклопедия / Под ред. Ю.В. Прохорова. – М. : Большая Российская энциклопедия, 2003. – 845 с.

15. Супрун, В.П. Математика для старшеклассников: задачи повышенной сложности : пособие для учащихся общеобразоват. школ, гимназий, лицеев, колледжей / В.П. Супрун. – Минск : Аверсэв, 2002. – 160 с.

16. Супрун, В.П. Математика для старшеклассников: нестандартные методы решения задач : пособие для учащихся общеобразоват. учреждений / В.П. Супрун. – Минск : Аверсэв, 2003. – 254 с.

17. Фомин, А.А. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады : пособие для учащихся общеобразоват. учреждений / сост. А.А. Фомин, Г.М. Кузнецова. – Минск : Дрофа, 2003. – 160 с.