УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Е.П. Гринько

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс для студентов педагогических специальностей

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2015

Кафедра
название кафедры

Автор

Гринько Елена Петровна – кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой методики преподавания математики и информатики УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Редактор

Логвинович Виктор Яковлевич – аспирант кафедры методики преподавания математики и информатики УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Рецензенты:

Кафедра высшей математики УО «Брестский государственный технический университет»

Матысик Олег Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и технологий программирования

Электронный учебно-методический комплекс направлен на формирование системы математических знаний, умений и навыков в области школьной математики, которые будут являться основой повышения качества математической подготовки специалистов и ускорения адаптации к новым условиям учебной работы студентов первого курса педагогических специальностей физико-математических факультетов.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 4
1. ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ 9
2. ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ 33
3. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ 40
4. НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ 49
5. ТРИГОНОМЕТРИЯ 55
6. КООРДИНАТЫ И ФУНКЦИИ 64
7. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ . . 74
8. ПЛАНИМЕТРИЯ 82
9. СТЕРЕОМЕТРИЯ 109
ПРИМЕРНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ 127
ИТОГОВЫЙ ТЕСТ 129

ЛИТЕРАТУРА 130

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основная цель обучения математике в учреждениях общего среднего образования состоит в овладении системой математических знаний, которые необходимы для применения в практической деятельности, для изучения других учебных предметов и продолжения образования.

Учебный материал по математике в средней школе структурируется по семи основным содержательным линиям:

– числа и вычисления;
– выражения и их преобразования;
– уравнения и неравенства;
– координаты и функции;
– геометрические фигуры и их свойства;
– геометрические величины;
– геометрические построения.

Одной из проблем при изучении математических дисциплин студентами педагогических специальностей (будущими учителями математики) является снижение уровня начальной математической подготовки.

В некоторых странах (Германия, Франция, Япония) при чтении математических курсов учитывается то, что студенты первого курса пришли в вуз из средних учебных заведений различного типа и имеют различный уровень математической подготовки.

В колледжах США существуют многочисленные «лечебные» курсы,

позволяющие студентам корректировать математические знания в соответствии с требованиями высшей школы.

Учебно-методический комплекс «Элементарная математика» разработан на основании учебной программы для студентов специальности «Математика и информатика» (рег. номер УД-А.1788/баз., утв. 26.06.2013 г.); содержит тематическое планирование, требования к знаниям студентов, основы теории, образцы решения типовых задач, вопросы и задания для практических занятий (по всем разделам), задачи для самостоятельной работы (по всем разделам), примерные контрольные работы и итоговый тест.

Учебно-методический комплекс «Элементарная математика» направлен на:

– повышение до необходимого уровня базовых математических знаний, умений и навыков студентов;

– преодоление затруднений студентов в учебной деятельности, связанной с усвоением новых математических дисциплин;

– овладение навыками адаптации студентов к условиям вузовской системы обучения.

Цель УМК «Элементарная математика» – формирование системы математических знаний, умений и навыков в области школьной математики, которые будут являться основой повышения качества математической подготовки специалистов и ускорения адаптации к новым условиям учебной работы студентов первого курса.

В процессе изучения курса «Элементарная математика» предполагается реализация следующих **задач** :

– развитие и совершенствование навыков студентов в тождественных преобразованиях выражений путем обобщения традиционного школьного материала;

– овладение методами решения основных видов уравнений, неравенств, и систем уравнений и неравенств, их обобщение, совершенствование и развитие;

– обобщение и углубление знаний о свойствах функций, изученных в школьном курсе математики;

– обобщение и углубление знаний о свойствах геометрических фигур и различных их комбинаций, а также об элементарных методах решения задач, основанных на использовании теорем школьного курса геометрии;

– формирование прочных умений и навыков решения задач школьной математики.

Таблица 1 ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН для дневной формы получения образования

№ п/п	Название разделов и тем	Количество аудиторных часов		
		всего	в том числе	
			лекций	практ. зан.
1.	Числа и вычисления	4	2	2
2.	Выражения и их преобразования	4	2	2
3.	Уравнения и системы уравнений	4	2	2
4.	Неравенства и системы неравенств	4	2	2
5.	Тригонометрия	6	2	4
6.	Координаты и функции	6	2	4
7.	Показательная и логарифмическая функции.	4	2	2
8.	Планиметрия	6	2	4
9.	Стереометрия	6	2	4
10.	Итого	54	18	36

В результате изучения дисциплины студент должен **знать** :

– содержание алгебраического компонента (основные понятия и формулы; методы равносильных преобразований; свойства элементарных функций; основные методы решения задач по алгебре);

– содержание геометрического компонента (основные понятия и формулы; основные методы решения задач по геометрии);

уметь :

– использовать математические понятия и их свойства для доказательства теорем;

– исследовать функции и применять их свойства к решению уравнений и неравенств;

– решать алгебраические и геометрические задачи.

Курс лекций по элементарной математике обобщает основные содержательные линии школьного курса математики, методы решения задач, тесно связан с фундаментальными курсами по высшей математике.

На изучение курса отводится 18 часов лекционных, 36 – практических.

Итоговый контроль знаний осуществляется на зачете (первый семестр).

ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

Натуральные числа – это числа, которые используют при счете предметов. Натуральные числа естественным образом можно расположить в порядке возрастания: каждое следующее натуральное число получается из предыдущего прибавлением единицы.

Единица – наименьшее натуральное число.

Нуль не является натуральным числом.

Натуральный ряд не имеет наибольшего числа.

Из натуральных чисел с помощью знаков арифметических действий и скобок составляют числовые выражения.

Порядок выполнения арифметических действий в числовом выражении следующий: вначале выполняют действия в скобках; внутри любых скобок или в выражении без скобок сначала действия умножения и деления, а потом – сложения и вычитания.

Целыми числами называют натуральные числа, им противоположные, и число нуль.

Определение. Целое число a делится на целое числ $b \neq 0$, если существует целое число q, такое, что $a = bq$ (a - делимое, b - делитель, q - частное).

Свойства делимости целых чисел

1) Всякое целое число, отличное от нуля, делится само на себя.

2) Всякое целое число делится на ± 1.

3) Нуль делится на любое число, кроме нуля.

4) Знак числа не влияет на делимость.

5) Если число a делится на число b, число b делится на число c, то число a делится на число c.

6) Если каждое слагаемое делится на некоторое целое число, то их сумма тоже делится на это число.

7) Если уменьшаемое и вычитаемое делятся на некоторое целое число, то их разность тоже делится на это число.

8) Если сумма двух целых чисел делится на некоторое целое число и одно из слагаемых делится на это число, то и второе слагаемое делится на это число.

9) Если хотя бы один из сомножителей делится на некоторое целое число, то и произведение делится на это число.

10) Если a делится на b и $a \neq 0$, то $|a| \geq |b|$.

Определение. Целое число a **делится с остатком** на целое число $b \neq 0$, если существуют целые числа q и r, такие, что $a = bq + r$ (a - делимое, b - делитель, q - неполное частное, r - остаток), $r < b$.

Теорема. Всякое целое число a однозначно делится с остатком на любое целое число $b \neq 0$.

Всякое целое число, отличное от нуля, имеет конечное число делителей.

Определение. Общим делителем целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (k – на-

туральное число, $k \geq 2$) называется целое число, которое делит каждое из этих чисел (является делителем каждого из этих чисел).

Определение. **Наибольшим общим делителем** целых чисел, хотя бы одно из которых не равно 0, называется общий делитель этих чисел, который больше остальных общих делителей или не меньше всякого общего делителя.

Обозначают НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ или $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Среди общих делителей целых чисел есть число 1. Значит, НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ либо равен 1, либо больше 1. Если НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$=1, то числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называют **взаимно простыми**.

Свойства НОДа целых чисел

1) НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$=НОД$(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|)$.

2)Если a делится на b, то НОД $(a, b) = b$.

3) Если для целых чисел a,b,c,d верно равенство $a = bc + d$, то $(a, b) = (b, d), (a, c) = (c, d)$.

4) НОД $(ba_1, ba_2, \ldots, ba_k) = b \cdot$ НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

5)НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$=НОД$((a_1, a_2, \ldots, a_{(k-1)}), a_k)$.

6) Натуральный общий делитель целых чисел является их НОДом тогда и только тогда, когда его можно представить в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел, то есть $d =$НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \leftrightarrow d = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k$.

7) Натуральный общий делитель целых чисел является их НОДом тогда и только тогда, когда частные от деления этих чисел на этот общий делитель взаимно просты.

8) Общий делитель целых чисел является делителем НОДа этих же чисел.

9) Всякий делитель НОДа целых чисел является общим делителем этих чисел.

Определение. Алгоритмом Евклида для целых чисел a и b ($b \neq 0$) называется процесс последовательного деления a на b, b на первый остаток $r_1 (r_1 \neq 0)$, r_1 - на второй остаток $r_2 (r_2 \neq 0)$ и так далее.

Описать этот процесс можно так: $a = bq_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < |b|$,

$b = r_1 q_2 + r_2$, $0 \leq r_2 < |r_1|$,

$r_1 = r_2 q_3 + r_3, 0 \leq r_3 < |r_2|$ и т.д.

Определение. Число равенств алгоритма Евклида называют длиной алгоритма Евклида.

Теорема. НОД(a,b) равен последнему, отличному от нуля остатку в алгоритме Евклида для этих чисел (a,b – целые числа).

Лемма. Если три целых числа a, b, m связаны равенством a = bq+m, где $0 \leq m < |b|$, то $(a, b) = (b, m)$.

Определение. Общим кратным чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (k – натуральное число, $k \geq 2$) таких, что $a_i \neq 0$ (i изменяется от 1 до k), называется целое число, которое делится на каждое из этих чисел.

Определение. Наименьшее натуральное общее кратное целых чисел,

не равных нулю, называют НОКом этих чисел и обозначают НОК $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ или $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$.

Свойства НОКа целых чисел

1. НОК $(a_1, a_2, \ldots, a_k) =$НОК $(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|)$
2. $[a, b] = \frac{a \cdot b}{(a, b)}$.
3. Всякое общее кратное двух чисел делится на НОК этих чисел.
4. Частные от деления НОКа целых чисел на эти числа есть взаимно простые числа.
5. НОК $(a_1, a_2, \ldots, a_k) =$НОК$((a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}), a_k)$.
6. НОК попарно взаимно простых чисел равен модулю их произведения.
7. НОК $(ba_1, ba_2, \ldots, ba_k) = b \cdot$НОК $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Признаки делимости натуральных чисел

1. Число делится на 2, если последняя цифра в записи числа четная.
2. Число делится на 3, если сумма цифр числа делится на 3.
3. Число делится на 4, если две последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 4.

4. Число делится на 5, если последняя цифра в записи числа 0 или 5.

5. Число делится на 6, если оно четное и делится на 3.

6. Число делится на 8, если три последние цифры в записи числа нули или образуют число, делящееся на 8.

7. Число делится на 9, если сумма цифр числа делится на 9.

8. Число делится на 10, если последняя цифра в записи числа 0.

9. Число делится на 11, если разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах делится на 11.

10. Число делится на 25, если две последние цифры числа 00, 25, 50 или 75.

11. Число делится на 7, 11, 13, если разность между числом, записанным тремя последними цифрами числа и числом, записанным остальными его цифрами, делится, соответственно, на 7, 11, 13.

Простые и составные числа

Определение. Натуральное число p, большее 1, называется простым, если оно имеет только два натуральных делителя: 1 и p.

Определение. Натуральное число называется составным, если оно имеет хотя бы один натуральный делитель, отличный от 1 и самого себя.

Замечание. 1 – не является ни простым, ни составным числом.

Замечание. 2 – единственное четное простое число.

Свойства простых чисел

1. Если простое число p делится на простое число q ($q \neq 0$), то $p = q$.
2. Если a – любое целое число, p – простое число, то, либо a делится на p, либо a и p – взаимно просты.
3. Если произведение целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p.
4. Всякое натуральное число $a \neq 1$ имеет, по крайней мере, хотя бы один простой делитель.

Степенью действительного числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a. *Первой степенью* числа a называется само число a, то есть $a^1 = a$.

В записи $a^n = b$ число a называется *основанием степени*, число n – *показателем степени*, число b – *значением степени*. Вторую степень числа a называют квадратом числа a, третью степень числа a называют

кубом числа a. Вычисление значения степени называют возведением в степень. Нулевая степень любого числа, отличного от 0, равна 1, то есть $a^0 = 1$. Нулевая степень нуля, то есть выражение 0^0, не определяется. Выражение 0^{-n}, не определяется.

Для степеней с любыми показателями справедлива следующие свойства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$
$$a^m : a^n = a^{m-n},$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$
$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m,$$
$$(a : b)^m = a^m : b^m.$$

Процент – это сотая часть единицы. Запись 1% означает 0,01.

Пример 1. Найти указанный процент от заданного числа. Указание. Заданное число умножается на указанное число процентов, а затем произведение делится на 100.

Пример 2. Вклад в банке имеет годовой прирост 6%. Начальная сумма вклада равнялась 10000 долларов. На сколько возрастёт сумма вклада в конце года?

Решение. $10000 \cdot 6 : 100 = 600$ долларов.

Пример 3. Найти число по заданному другому числу и его величине в процентах от искомого числа.

Указание. Заданное число делится на его процентное выражение и результат умножается на 100.

Пример 4. Зарплата в январе равнялась 15 000 000 руб., что составило 7,5% от годовой зарплаты. Какова была годовая зарплата?

Решение. $15\,000\,000 : 7.5 \cdot 100 = 200\,000\,000$ руб.

Пример 5. Найти процентное выражение одного числа от другого.

Указание. Первое число делится на второе и результат умножается на 100.

Пример 6. Завод произвёл за год 40000 автомобилей, а в следующем году – только 36000 автомобилей. Сколько процентов это составило по отношению к выпуску предыдущего года?

Решение. $36000 : 40000 \cdot 100 = 90\%$

Отношение – это частное от деления одного числа на другое.

Пропорция – это равенство двух отношений.

Например, $12 : 20 = 3 : 5$; $a : b = c : d$.

Крайние члены пропорции: 12 и 5 в первой пропорции; a и d – во второй. Средние члены пропорции: 20 и 3 в первой пропорции; b и c – во второй.

Основное свойство пропорции: произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов.

Число, которое можно записать в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное число, называют **рациональным числом**.

Рациональные числа – это числа, которые могут быть записаны в

виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби. Например, $0{,}75=\frac{3}{4}$.

Любое целое число a является рациональным числом, так как его можно записать в виде $\frac{a}{1}$. Например, $6=\frac{6}{1}$

Правильной называется дробь, у которой модуль числителя меньше модуля знаменателя. Дробь, не являющаяся правильной, называется **неправильной**.

Сумма, разность и произведение рациональных чисел тоже рациональные числа. Если делитель отличен от нуля, то частное двух рациональных чисел тоже рациональное число.

Чтобы *сложить рациональные числа* с одинаковыми знаками, складывают их модули и перед суммой ставят их общий знак.

$(+19)+(+23)=42; (-16)+(-307)=-323.$

Чтобы *сложить два рациональных числа с разными знаками* и разными модулями, необходимо поставить знак числа с большим модулем и приписать к нему разность между большим и меньшим модулем.

$(+107)+(-56)=51; (-23,6)+7,5=-16,1.$

Сумма двух противоположных чисел (то есть, с разными знаками и одинаковыми модулями) равна нулю.

$(-2,57)+(+2,57)=0.$

При сложении любого рационального числа и нуля получаем само это число.

Законы сложения положительных чисел (переместительный и сочета-

тельный) справедливы и для рациональных чисел. Применяя их, можно по-разному находить сумму нескольких чисел.

Например, сложение нескольких чисел с разными знаками можно выполнять последовательно: сначала найти сумму первых двух слагаемых, к ней прибавить третье слагаемое и т. д. Но иногда удобнее сложение выполнять таким способом: сложить отдельно все положительные числа и отдельно все отрицательные числа, затем полученные два числа сложить по правилу сложения чисел с разными знаками.

$(+105) + (-4) + (-8) + (+21) + (-7) = (+126) + (-19) = +107.$

Вычитание рациональных чисел зависит от знаков чисел уменьшаемого и вычитаемого.

Чтобы из одного числа вычесть другое, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Например,$-102 - (-80) = -102 + 80 = -22.$

Если уменьшаемое – отрицательное число, а вычитаемое – положительное число, то нужно сложить модули уменьшаемого и вычитаемого и перед полученным результатом поставить знак «–».

Например, $-839 - 71 = -(|-839| + |-71|) = -(839 + 71) = -910.$

Если уменьшаемое – положительное число и вычитаемое – положительное число, то нужно найти разность модулей уменьшаемого и вычитаемого и перед полученным результатом поставить знак «–», если модуль уменьшаемого меньше модуля вычитаемого. Если модуль уменьшаемого равен модулю вычитаемого, то разность равна нулю.

Например,

$0,165 - 0,015 = 0,15$ так как $|0{,}165| > |0{,}015|$,

$1307 - 1307 = 0$ так как $|1\ 307| = |1\ 307|$.

При *умножении двух рациональных чисел* умножаются их абсолютные величины (модули чисел) и перед произведением ставится знак, зависящий от знаков множителей.

При *умножении двух рациональных чисел* умножаются их абсолютные величины (модули чисел) и перед произведением ставится знак, зависящий от знаков множителей.

Знак произведения определяется по таблице знаков:

Первый знак	Второй знак	Знак произведения
$+$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$

Если произведение содержит более двух рациональных чисел, то результат можно определить поэтапно («шаг за шагом»), на каждом этапе вычисляя произведение двух сомножителей. А можно по особому правилу определить знак произведения для всех множителей сразу.

Если в произведении все числа положительные, то модуль их произведения равен произведению модулей всех множителей, а знак произведения – «+».

Если в произведении есть числа положительные и отрицательные, то модуль их произведения равен произведению модулей всех множителей, а знак произведении «+» – при четном количестве отрицательных множителей (минусов) и «–» – при нечетном количестве отрицательных множителей (минусов).

$2 - 13 \cdot 7 \cdot 24 = 4\ 368$

$2 \cdot (-13) \cdot (-7) \cdot 24 = 4\ 368$, так как количество минусов четное;

$(-2) \cdot (-13) \cdot (-7) \cdot 24 = -4\ 368$, так как количество минусов нечетное.

Если при умножении рациональных чисел один или несколько множителей равны 0, то все произведение равно 0.

$2 \cdot 0{,}71 \cdot 172 \cdot 0 \cdot (176 - 176) = 0.$

Частное от деления двух отрицательных чисел есть число положительное. Модуль частного есть частное модулей делимого и делителя.

Например,

$(-81) : (-9) = |-81| : |-9| = 81 : 9 = 9;$

$(-0{,}74) : (-0{,}37) = |-0.74| : |-0{,}37| = 0{,}74 : 0{,}37 = 2$

Частное от деления отрицательного числа на положительное число и положительного числа на отрицательное число есть число отрицательное. Модуль частного есть частное модулей делимого и делителя.

Например,

$(-180) : 3 = -|-180| : |3| = -(180 : 3) = -60$

Рациональные числа, как и другие, *на нуль делить нельзя*. Если делимое нуль, а делитель – рациональное число, то при любом его значении

и знаке частное равно нулю.

Степень любого числа – это произведение одинаковых сомножителей. Количество сомножителей определяет показатель степени.

Четная степень отрицательного числа – число положительное. Нечетная степень отрицательного числа – число отрицательное. Любая степень числа нуль равна нулю.

Основное свойство дроби: значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Десятичная дробь есть результат деления единицы на десять, сто, тысячу и т.д. частей. Эти дроби очень удобны для вычислений, так как они основаны на той же позиционной системе, на которой построены счёт и запись целых чисел. Благодаря этому запись и правила действий с десятичными дробями фактически те же, что и для целых чисел. При записи десятичных дробей нет необходимости отмечать знаменатель, это определяется местом, которое занимает соответствующая цифра. Сначала пишется целая часть числа, затем справа ставится десятичная точка. Первая цифра после десятичной точки означает число десятых, вторая – число сотых, третья – число тысячных и т.д. Цифры, расположенные после десятичной точки, называются десятичными знаками.

Не все обыкновенные дроби можно представить в виде десятичной дроби. Например, если разделить 1 на 3, то получим сначала нуль целых, потом три десятых, а далее при делении все время будет повторяться

в частном цифра 3. Деление никогда не кончится. Здесь речь идет о *бесконечной десятичной дроби.*

Например, $\frac{1}{3}$=0,333...= 0,(3).

Запись 0,(3) называют *периодической дробью.*

***Правило* 1.** Правильная **чистая периодическая дробь** равна обыкновенной, в числителе которой стоит период периодической дроби, а знаменатель состоит из стольких девяток, сколько цифр в периоде.

Например, 0,(373)=373/999.

***Привило* 2.** Правильная **смешанная периодическая дробь** равна обыкновенной, в числителе которой находится разность числа, стоящего до второго периода, и числа, стоящего до первого периода, а в знаменателе – столько девяток, сколько цифр в периоде, и столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Например, $0{,}21(347)=\frac{21347-21}{99\ 900}=\frac{21326}{99\ 900}=\frac{10663}{49950}$.

Если действительное число не является рациональным, то оно **иррациональное число**. Десятичные дроби, выражающие иррациональные числа бесконечны и не периодичны. Множество иррациональных чисел обычно обозначается заглавной латинской буквой I.

Пример 1. Докажите, что число $\sqrt{7}$ является иррациональным.

Решение.

Допустим, что число $\sqrt{7}$ рациональное. Тогда, существуют такие взаимно простые p и q, что $\sqrt{7} = p/q$, откуда получаем $p^2 = 7q^2$. Так как p и q взаимно простые, то p^2, а значит и p делится на 7. Тогда $p = 7k$,

где k – некоторое натуральное число. Отсюда $q^2 = 7k^2 = pk$, что противоречит тому, что p и q взаимно просты. Итак, предположение ложно, значит, число $\sqrt{7}$ иррациональное.

Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b, n-я степень которого равна a.

Число n называется *показателем* степени корня, число a – *подкоренным выражением*, b – *значением арифметического корня n-й степени*. Операция нахождения значения корня называется *извлечением корня*.

Корней чётной степени из отрицательных чисел не существует. Корнем нечётной степени из отрицательного числа a называется такое отрицательное число b, которое при его возведении в эту нечётную степень равно числу a.

Свойства корней

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$, где m, n – натуральные числа
5. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \begin{cases} a, \text{ если } \geq 0, \\ -a, \text{если} a \leq 0. \end{cases}$

Пусть нужно **извлечь квадратный корень** из натурального числа m (без калькулятора), причем известно, что корень извлекается. Чтобы найти результат, иногда удобно воспользоваться следующим **правилом:**

1. Разобьем число m на грани (справа налево, начиная с последней цифры), включив в каждую грань по две рядом стоящие цифры. При этом следует учесть, что если m состоит из четного числа цифр, то в первой (слева) грани будет две цифры; если же число m состоит из нечетного числа цифр, то первая грань состоит из одной цифры. Количество граней показывает количество цифр результата.

2. Подбираем наибольшую цифру, такую, что ее квадрат не превосходит числа, находящегося в первой грани; эта цифра – первая цифра результата.

3. Возведем первую цифру результата в квадрат, вычтем полученное число из первой грани, припишем к найденной разности справа вторую грань. Получится некоторое число A. Удвоив имеющуюся часть результата, получим число a. Теперь подберем такую наибольшую цифру x, чтобы произведение числа (запись означает $10 \times a + x$) на x не превосходило числа A. Цифра x –вторая цифра результата.

4. Произведение числа на x вычтем из числа A, припишем к найденной разности справа третью грань, получится некоторое число B. Удвоив имеющуюся часть результата, получим число b. Теперь подберем такую наибольшую цифру y, чтобы произведение числа на y не превосходило числа B. Цифра y – третья цифра результата.

Следующий шаг правила повторяет 4-й шаг. Это продолжается до тех пор, пока не используется последняя грань.

Пример. Вычислить $\sqrt{138\ 384}$.

Решение. Разобьем число на грани: 13'83'84 — их три, значит, в результате должно получиться трехзначное число. Первая цифра результата 3. Вычтя 9 из 13, получим 4. Приписав к 4 следующую грань, получим A = 483. Удвоив имеющуюся часть результата, то есть число 3, получим a = 6. Подберем теперь такую наибольшую цифру x, чтобы произведение двузначного числа на x было меньше числа 483. Такой цифрой будет 7, так как $67 \cdot 7 = 469$ – это меньше 483, тогда как $68 \cdot 8 = 544$ – это больше 483. Итак, вторая цифра результата 7.

Вычтем 469 из 483, получим 14. Приписав к этому числу справа последнюю грань, получим b = 1484. Удвоив имеющуюся часть результата, то есть число 37, получим B = 74. Подберем теперь такую наибольшую цифру y, чтобы произведение трехзначного числа на y не превосходило 1484. Такой цифрой будет 2, так как $742 \cdot 2 = 1484$. Цифра 2 – последняя цифра результата. В ответе получили 372. Вычисления можно оформить следующим образом:

$$\sqrt{13.83.84} = 372$$

9	
67	483
7	469
742	1484
2	1484
	0

Если корень не извлекается, то после последней цифры заданного числа ставят запятую и образуют дальнейшие грани, каждая из которых имеет вид 00. В этом случае процесс извлечения корня бесконечен; он прекращается, когда достигается требуемая точность.

Рациональные числа и иррациональные числа образуют *множество действительных чисел*. Каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой, которую называют числовой прямой. Для числовых множеств используются обозначения: N – множество натуральных чисел; Z – множество целых чисел; Q – множество рациональных чисел; R – множество действительных чисел.

Для любых действительных чисел a, b, c имеют место следующие равенства:

а) $a + b = b + a$ (**переместительный** закон сложения);

б)$(a + b) + c = a + (b + c)$ (**сочетательный** закон сложения);

в) $(a \times b) = (b \times a)$ (**переместительный** закон умножения);

г) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (**сочетательный** закон умножения);

д) $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ (**распределительный** закон умножения относительно сложения).

Модуль действительного числа – это абсолютная величина этого числа. Обозначается $|a|$. Например, $|6| = 6$, $|-3| = 3$.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Свойства модуля

1) модули противоположных чисел равны $|a|=|-a|$;

2) квадрат модуля числа равен квадрату этого числа $|a|^2 = a^2$;

3) квадратный корень из квадрата числа есть модуль этого числа $\sqrt{a^2} = |a|$;

4) модуль числа есть число неотрицательное $|a| \geq 0$;

5) постоянный положительный множитель можно выносить за знак модуля $|ca| = c|a|$, $c > 0$;

6) если $|a| = |b|$, то $a = \pm\, b$;

7) модуль произведения двух (и более) чисел равен произведению их модулей $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Практическое занятие 1
Контрольно-обучающие вопросы и задания

1. Какие числа называют натуральными; целыми; рациональными; иррациональными; действительными?

2. Назовите важнейшие особенности действий над натуральными числами; над целыми числами; над рациональными числами; над действительными числами.

3. Опишите алгоритм извлечения квадратного корня без калькулятора. Правильно ли извлечен квадратный корень?

$$\sqrt{24.20.64} = 492$$

$$\begin{array}{r|l}
16 & \\
\hline
89 & 820 \\
9 & 801 \\
\hline
982 & 1964 \\
2 & 1964 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

4. Сформулируйте правила обращения бесконечной периодической дроби в обыкновенную.

5. Докажите, что число $\sqrt{2}$ является иррациональным.

6. Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1:2, а другой содержит те же металлы в отношении 2:3. Сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

7. В банке на сберегательную книжку было положено 1640 долларов и в конце года было взято обратно 882 долларов. Еще через год на книжке снова оказалось 882 долларов. Сколько процентов начисляет банк в год?

8. Число 73 разделили на некоторое натуральное число и получили, что неполное частное на 3 больше делителя, а остаток на 7 меньше неполного частного. Найдите делитель.

9. Двузначное число в 4 раза больше суммы и в 1,5 раза больше произведения своих цифр. Найдите это число.

10. Найдите НОД (3599, 4819).

11. Найдите НОК (23, 187, 213).

12. Вычислите:

13. $\frac{-6^2\ +46\cdot 3{,}1+2{,}9\cdot 46}{0{,}1}$;

14. $\frac{-0{,}3\cdot(61-1976:32{,}5)}{0{,}01}$;

15. $5\frac{1}{4} : 3,5 + 0,3 : \frac{3}{85}$;

16. $\frac{25\cdot\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt{6\cdot\sqrt[3]{6}}}{(\sqrt[4]{36}-1)(\sqrt[4]{36}+1)}$;

17. $((\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8})^2+6)((\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8})^2-6)$;

Задания для самостоятельной работы

1. Сформулируйте и докажите признак делимости на 11.

2. Выясните при каких натуральных n число n^4+4 является составным.

3. При каких натуральных n дробь $\frac{3n+4}{5}$ является целым числом?

4. Выясните рационально или иррационально число:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}-\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}.$$

5. Вычислите без калькулятора а) $\sqrt{242\ 064}$; б) $\sqrt{66\ 564}$.

6. Вычислите $\frac{10+0,\ 8(3)-\frac{1}{3}}{1,(3)\ \cdot\ 3{,}57+1{,}68\ \cdot\ \frac{1}{7}}+0{,}63\cdot 30$.

7. Упростите $\frac{3}{\sqrt{7}-2} + \frac{2}{\sqrt{7}-3}$.

8. Упростите $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} \cdot (6 + 4\sqrt{2})$.

9. Сколько простых чисел лежит на отрезке $[0; 31]$?

10. При делении натурального числа n на 3 в остатке получается 2. Чему равен остаток от деления числа $n^2 + 5n$ на 9?

ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3) $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$;
4) $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$;
5) $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$;
6) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
7) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Тождество – это равенство, верное при любых допустимых значениях переменных. Если в данное равенство подставить вместо переменных любые допустимые значения, то должно получиться верное числовое равенство. Тождествами, например, являются свойства действий над числами:

1. $a+b = b+a$;
2. $a+(b+c)=(a+b)+c$;
3. $a \cdot b = b \cdot a$;
4. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
5. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$;
6. $a+0 = a$;

7. $a \cdot 0 = 0$;

8. $a \cdot 1 = a$;

9. $a \cdot (-1) = -a$.

Если два выражения при любых допустимых переменных соответственно равны, то такие выражения называют **тождественно равными**. Ниже представлены несколько примеров тождественно равных выражений:

1) $(a^2)^4$ и a^8;
2) $a \cdot b \cdot (-a^2 b)$ и $-a^3 \cdot b^2$;
3) $((x^3 \cdot x^8) : x)$ и x^{10}.

Всегда можно заменить одно выражение любым другим выражением, тождественно равным первому. Такая замена будет являться тождественным преобразованием. Для того, чтобы **доказать тождество** нужно сделать тождественные преобразования обеих или одной части равенства, и получить слева и справа одинаковые алгебраические выражения.

Например, преобразуем выражение:

$$\frac{x^3 - x}{x^2 - x}$$

Решение.

$$\frac{x^3 - x}{x^2 - x} = \frac{x(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{x(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = (x+1);$$

$$\frac{x^3 - x}{x^2 - x} = (x + 1)\,;$$

где $x \neq 0$ и $x \neq 1$, так как знаменатель не может быть равен нулю.

Пример. Доказать тождество $2t - (17 - (t - 7)) \;=\; 3(t - 8)$.

Решение. Выпишем отдельно левую часть равенства и преобразуем, то есть попытаемся доказать, что она равна правой части.

При раскрытии скобок (обеих) знаки поменяем, так как перед скобками стоит знак минус:

$2t-(17-(t-7)) = 2t-17+(t-7) = 2t-17+t-7 = 3t-24 = 3(t-8)$.
Получили, что $3(t - 8) = 3(t - 8)$.

Значит, исходное равенство – тождество.

Одночлен – это произведение двух или нескольких сомножителей, каждый из которых либо число, либо буква, либо степень буквы. Например, $3a^2b^4$, bd^3 ,-17abc – одночлены. Единственное число или единственная буква также могут считаться одночленом. Любой числовой множитель в одночлене называется коэффициентом.

Одночлены называются **подобными**, если они отличаются лишь коэффициентами. Поэтому, если два или несколько одночленов имеют одинаковые буквы или их степени, они подобны. **Степень одночлена** – это сумма показателей степеней всех его букв.

Если среди суммы одночленов есть подобные, то сумма может быть приведена к более простому виду. Эта операция называется **приведением подобных членов**.

Произведение нескольких одночленов можно упростить, если только оно содержит степени одних и тех же букв или числовые коэффициенты. В этом случае показатели степеней складываются, а числовые коэффициенты перемножаются. Например,

$5a\ x^3z^8\ (-7a^3x^3y^2)\ =\ -\ 35a^4x^6y^2z^8\ .$

Частное двух одночленов можно упростить, если делимое и делитель имеют некоторые степени одних и тех же букв или числовые коэффициенты. В этом случае показатель степени делителя вычитается из показателя степени делимого, а числовой коэффициент делимого делится на числовой коэффициент делителя. Например,

$35a^4x^3z^9\ :\ 7ax^2z^6\ =\ 5a^3xz^3\ .$

Многочлен – это алгебраическая сумма одночленов. Степень многочлена есть наибольшая из степеней одночленов, входящих в данный многочлен.

Произведение суммы двух или нескольких выражений на любое выражение равно сумме произведений каждого из слагаемых на это выражение. Например, (p+ q+ r) a = pa+ qa+ ra. Вместо букв p, q, r, a может быть взято любое выражение.

Разложением многочлена на множители называют тождественное преобразование его в произведение нескольких сомножителей.

Частное двух многочленов, записанное с помощью черты деления, называется алгебраической дробью.

Сократить дробь – значит разделить числитель и знаменатель этой

дроби на их общий множитель. Чтобы сократить алгебраические дроби, нужно разложить числитель и знаменатель дроби на множители; сократить одинаковые множители.

Например, сократим дробь: $\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-4b^2}$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель на множители: $\frac{(a+2b)^2}{(a+2b)(a-2b)}$.

Разделим числитель и знаменатель на (a+2b), получим: $\frac{a+2b}{a-2b}$.

Итак, **действия над алгебраическими дробями** выполняются по следущим правилам:

1. Сложение дробей: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$
2. Вычитание дробей: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$
3. Умножение дробей: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$
4. Деление дробей: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$
5. Основное свойство дроби: $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$
6. Возведение дроби в степень: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

Практическое занятие 2
Контрольно-обучающие вопросы и задания

1. Запишите формулы сокращённого умножения.

2. Какие из перечисленных ниже равенств являются тождествами:

а) x – 5 =10; б) $(a^3)^2=a^5$; в) $(a^3)^2=a^6$; г) $a^3 : a^2=a$.

3. Произведите умножение по формулам:

а) $(1+2x^2)^2$; б) $(3ab-1)\cdot(3ab+1)$; в) $(1-a)\cdot(1+a+a^2)$; г) $(y^3-x^2)^3$.

4. При каких значения x следующие дроби не имеют смысла:

а) $\frac{x-1}{x+1}$; б) $\frac{2x}{16-x^2}$; в) $\frac{abc}{(x+a)(x-b)(x+c)}$?

5. Упростите выражения: а) $\frac{a}{a+3}+\frac{10a}{a^2+a-6}:\frac{5}{a-2}$; б) $\frac{a^4+a^2-2}{a^3-a^2+2a-2}$.

6. Сократите дробь: $\frac{x^2-4xy+3y^2}{x^2-5xy+4y^2}$.

7. Выполните сложение, вычитание, умножение и деление дробей: $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3+3xy(x+y)+y^3}$ и $\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$.

8. Упростите выражение: $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$

9. Упростите выражение: $\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$

10. Упростите выражение: $\frac{x+8}{x^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{x}+4}-\frac{x-8}{\sqrt[3]{x^2}+2x^{\frac{1}{3}}+4}$

11. Упростите выражение: $\frac{7\sqrt{x^2-6x+9}}{3-x}-\frac{3\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1}+\frac{\sqrt{-20x-4x^2-24}}{\sqrt{-5x-6-x^2}}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Упростите выражение: $\frac{3a-3b}{4c+4y}:\frac{a^2-b^2}{c^2-y^2-c-y}$

2. Сократить дробь: $\frac{2a^2+ab-b^2}{a+b}$

3. Докажите тождество:

$$\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right)\div\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)+\frac{8a^2}{2a+b}=2a$$

4. Упростите выражение:

$$f\left(a,b,c\right)=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

5. Упростите выражение:

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-6}:\frac{x^2+4x+3}{x^2-4}$$

6. Преобразуйте в многочлен выражение (x - 7)(x - 5) - x(x - 12) и выберите правильный вариант ответа: 1) x^2 - 12x + 35; 2) 35; 3) –14x + 35; 4) $2x^2$ – 14x + 35.

7. Упростите выражение

$f\left(a,b\right)=\sqrt{\frac{a+b^2}{b}+2\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{a+b^2}{b}-2\sqrt{a}}$, где a $\geq$ 0, b > 0.

8. Сократите дробь:

$$\frac{1-6c+y-6cy}{1-12c+36c^2}.$$

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Если два выражения соединены знаком «=», то говорят, что они образуют равенство. Любое верное числовое равенство, а также любое буквенное равенство, справедливое при всех допустимых числовых значениях входящих в него букв, называется *тождеством*.

Например, 1) числовое равенство $4 \cdot 7 + 2 = 30$ есть тождество; 2) буквенное равенство $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ есть тождество, потому что оно справедливо при всех значениях содержащихся в нём букв.

Уравнение – это буквенное равенство, которое справедливо (то есть становится тождеством) только при некоторых значениях, входящих в него букв. Эти буквы называются неизвестными, а их значения, при которых данное уравнение обращается в тождество – **корнями** уравнения. Процедура нахождения всех корней уравнения называется решением.

Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что их нет. Подстановка любого корня вместо неизвестного обращает уравнение в верное числовое равенство (тождество). Два или несколько уравнений называются **равносильными**, если они имеют одни и те же корни.

Например, уравнения $6x - 30 = 0$ и $3x - 12 = 3$ являются равносильными, так как они имеют один и тот же корень 5.

Основные **методы решения уравнений**:

1. Замена одного выражения другим, тождественно равным ему.

Например, уравнение $(3x+2)^2 = 15x+10$ можно заменить следующим равносильным уравнением: $9x^2 + 12x\ 4 = 15x + 10$.

2. Перенос членов уравнения из одной стороны в другую с противоположными знаками.

Так, в предыдущем уравнении мы можем перенести все его члены из правой части в левую со знаком «–»:

$9x^2 + 12x + 4 - 15x - 10 = 0$, после чего получим уравнение:

$9x^2 - 3x - 6 = 0$.

3. Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение (число), отличное от нуля.

4. Возведение обеих частей уравнения в степень или извлечение из обеих частей уравнения корня. Необходимо помнить, что: а) возведение в чётную степень может привести к приобретению посторонних корней; б неправильное извлечение корня чётной степени может привести к потере корней.

Линейным уравнением с одним неизвестным называется уравнение вида: $ax + b = 0$, где a и b – известные числа, а x – неизвестная величина.

Если $a \neq 0$, то решение (корень) уравнения имеет вид: $x = \frac{-b}{a}$.

Если $a = 0$, то возможны два случая: 1) $b = 0$, тогда $0 \cdot x + 0 = 0$. Здесь x может быть любым числом. 2) $b \neq 0$, тогда $0 \cdot x + b = 0$. Здесь нет решений.

Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеют вид:

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f, \end{cases} \quad (1)$$

где a, b, c, d, e, f – заданные числа; x, y – неизвестные. Числа a, b, d, e – коэффициенты при неизвестных; c, f – свободные члены. Решить систему уравнений (1) можно одним из методов:

1. Метод подстановки

Суть метода в следующем:

1) из одного уравнения выражаем одно из неизвестных, например x, через коэффициенты и другое неизвестное $y : x = (c - by)/a$.

2) подставляем во второе уравнение вместо

$x : d\,(\,c - by\,)\,/\,a + ey = f$.

3) решая последнее уравнение, находим

$y = (\,af - cd\,)\,/\,(\,ae - bd\,)$.

4) подставляем это значение вместо y в выражение (2):

$x = (ce - bf)/(ae - bd)$.

2. **Метод сложения или вычитания**

Этот метод состоит в следующем:

1) умножаем обе части 1-го уравнения системы (1) на $(-d)$, а обе части 2-го уравнения на a и складываем их:

$$\begin{cases} -adx - bdy = -cd, \\ adx + aey = af, \end{cases}$$

$$-bdy + aey = -cd + af$$

Отсюда получаем: $y = (af - cd) / (ae - bd)$.

2) подставляем найденное для y значение в любое уравнение системы (1): $ax + b(af - cd) / (ae - bd) = c$.

3) Находим другое неизвестное: $x = (ce - - bf) / (ae - - bd)$.

Квадратное уравнение есть алгебраическое уравнение второй степени: $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – заданные числовые или буквенные коэффициенты, x – неизвестное. Если $a = 0$, то уравнение становится линейным. Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называется *приведенным.*

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находят по формуле:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Если $b^2 - 4ac > 0$, то уравнение имеет два различных корня; если $b^2 - 4ac = 0$, то два равных корня; $b^2 - 4ac < 0$ действительных корней нет. Выражение $b^2 - 4ac$, называется *дискриминантом квадратного уравнения* и обозначается через D.

Теорема Виета. Сумма корней приведенного квадратного уравнения

$x^2+px+q = 0$ равна коэффициенту при первой степени неизвестного,

взятому с противоположным знаком: $x_1+x_2=-p$, а произведение равно свободному члену: $x_1 \cdot x_2 = q$.

Каждый квадратный трехчлен ax^2+bx+c может быть разложен на множители первой степени следующим образом:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 - корни этого уравнения. Решим уравнение $|2-5x^2|=3$.

Решение. Если модуль числа равен 3, то само число равно 3 или -3. Следовательно, уравнение равносильно совокупности:

$2-5x^2=3$ или $2-5x^2=-3 \Leftrightarrow x^2=-1$ или $x^2=1$. Первое уравнение не имеет решений, второе имеет корни ± 1. Ответ. $x=\pm 1$.

Решим еще одно уравнение: $(x-7)^2-|x-7|=30$.

Решение. Поскольку $(x-7)^2=|x-7|^2$, удобно сделать замену

$|x-7|=t$. Получаем: $t^2-t-30=0 \Leftrightarrow t=6$, $t=-5 \Leftrightarrow |x-7|=6$, $|x-7|=-5$. Второе уравнение полученной совокупности не имеет решений (так как модуль не может быть отрицательным). Решениями первого уравнения служат те значения x, которые удалены от точки 7 на расстояние 6, то есть 1 и 13.

Ответ. 1; 13.

Уравнение, содержащее неизвестную в знаменателе, называют **рациональным**.

При решении рационального уравнения необходимо исключать те значения неизвестного, при которых знаменатель обращается в нуль.

Решим уравнение:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=x^2-3x+5$$

Решение. x − 2 ≠ 0. В данном случае левую часть уравнения можно сократить на (x – 2).

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x^2-3x+5; x+2= \ x^2-3x+5; \ x^2+4x-3=0.$$

По теореме Виета: $x_1 = 1, \ x_2 = 3.$

Ответ. 1; 3.

Уравнение, содержащее неизвестную под знаком корня n-ой степени, называется **иррациональным**. Иррациональное уравнение чаще всего решается путём возведения в степень, которую имеет корень, содержащий неизвестную, или заменой неизвестной. При возведении в нечётную степень обеих частей уравнения, получаем уравнение, равносильное исходному. Новое уравнение, получившееся после возведения в чётную степень обеих частей, не всегда равносильно исходному уравнению, поэтому необходимо либо выполнить проверку полученных значений неизвестного путём подстановки в исходное уравнение, либо отбросить корни, не принадлежащие области определения уравнения.

Решим уравнение:

$$\left(x^2-4\right)\sqrt{x+1}=0$$

Решение. Подкоренное выражение $x+1 \geq 0$, то есть $x \geq -1$.

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю: $x^2-4 = 0$ или $x+1 = 0$; откуда $x_1 = -2$,

$x_3 = -1$. $x_2 = 2$, но $x_1 = -2$ не принадлежит ОДЗ. Ответ. – 1; 2

Практическое занятие 3
Контрольно-обучающие вопросы и задания

1. Введите понятие линейного уравнения; корня линейного уравнения.

2. Введите понятие квадратного уравнения, приведенного квадратного уравнения; корня квадратного уравнения.

3. Даны уравнения: а) $2x^2 + 3x - 7 = 0$; б) $x^3 - x - 6 = 0$;

в) $17 - x^2 - x = 0$; г) $x(x-1)(x+2) = 0$; д) $x^2x + 16 = 0$. Ответьте на вопросы: 1) какие уравнения являются квадратными? 2) назовите все коэффициенты в квадратных уравнениях; 3) какие уравнения являются приведенными? 4) как найти корни квадратных уравнений?

4. Составьте квадратное уравнение, имеющее корни 5 и – 7.

5. Решите уравнения: а) $\sqrt{9x^2+7x-6} = -2x$,

б) $|x+1| - 8x = |x-5| + 4$, в) $3x = \frac{8}{x^2+1}$.

6. Найдите квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен - $2 + 7\sqrt{3}$.

7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 5y = 7, \\ 2x + 3y = -8. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{\sqrt{x+y}=7,}{\sqrt{x-y}=8} \end{cases}$

в) $\begin{cases} y + 4x + 13 = 0 \\ 2y - |x| + 5 = 0 \end{cases}$.

8. Найдите все значения a и b при которых уравнение $ax + b = x$ имеет бесконечно много решений.

9. Найдите корни уравнения $\frac{x^2+x-12}{x+4} = x^2 + 10x + 17$.

10. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $(x^2 + x)(x - 1)(x + 2) = 35$.

Задания для самостоятельной работы

1. Решите уравнения:

а) $x^2 - 22x+121 =0$; б) $x^2 - 8x+72=0$; в)$(3x-2)^2=8(x+1)^2 - 100$.

2. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 2x - 3y = 7. \end{cases}$

б)$\begin{cases} x^3 + 2yx^3 = 24, \\ y - 3yx^3 = -23. \end{cases}$

3. Равносильны ли уравнения: $x^2 = 4$ и $x - 2 = 0$?

4. Найдите корни уравнения $x^2 - 7x + 10 = 0$ подбором, используя свойства корней приведенного квадратного уравнения, сформулированные в теореме Виета.

5. Разложите на множители квадратный трехчлен $8x^2 - xy - 7y^2$.

6. Составьте квадратное уравнение по данным его корням: $a + b$ и $a - b$.

7. Найдите p в уравнении $x^2 + px - 5 = 0$, если один из его корней равен - 5.

8. Решите биквадратное уравнение $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$.

9. Решите уравнения:

а) $|x-3| = 4$; б) $|x-1| + |x-2| = 1$;

в) $x^2 - 6x + 6 + |x-6| = 0$; г) $|x^2 - -3x + 3| = |2x - 3|$.

10. Решите уравнения:

а) $\sqrt{x^2 - x + 16} - \sqrt{x^2 - x - 4} = 2$;

б) $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \cdot \log_2(2x - 4) = 0$;

в) $\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}+5} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$;

г) $\sqrt{x + 8 + 2 \cdot \sqrt{x+7}} - \sqrt{x + 19 - 4 \cdot \sqrt{x+7}} = 1$

НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

Два выражения (числовые или буквенные), соединённые одним из знаков: «больше» ($>$), «меньше» ($<$), «больше или равно» ($\geq$), «меньше или равно» ($\leq$) образуют **неравенство** (числовое или буквенное). В зависимости от знака неравенства мы имеем либо **строгие неравенства** ($>$, $<$), либо **нестрогие** ($\geq$, $\leq$). Запись $5a \leq 4b$ означает, что $5a$ либо меньше 4, либо равно ему.

Решить неравенство – значит найти границы, внутри которых должны находиться неизвестные, так чтобы неравенство было тождественным.

Решить систему неравенств – значит найти границы, внутри которых должны находиться неизвестные, так чтобы все неравенства, входящие в систему, были тождественны одновременно.

Основные свойства неравенств

1. Если $a < b$, то $b > a$; или если $a > b$, то $b < a$.

2. Если $a > b$, то $a + c > b + c$; или если $a < b$, то $a + c < b + c$. То есть, можно прибавлять (вычитать) одно и то же число к обеим частям неравенства.

3. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c\ b + d$. То есть, неравенства одного смысла (с одинаковым знаком $>$ или $<$) можно почленно складывать. Заметим, что неравенства одного смысла нельзя почленно вычитать одно из другого, так как результат может быть неверным.

4. Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$. Или, если $a < b$ и $c > d$, то $a - c < b - d$. То есть, неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать одно из другого, и брать знак неравенства, являющегося уменьшаемым.

5. Если $a > b$ и $m > 0$, то $ma > mb$ и $a/m > b/m$. То есть, обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число. Неравенство при этом сохраняет свой знак.

6. Если a > b и m < 0, то ma < mb и a/m < b/m . То есть, обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число. Неравенство при этом меняет свой знак на обратный.

Некоторые **важные неравенства**:

1. Модуль суммы меньше или равен сумме модулей.

2. $a+\frac{1}{a} \geq 2$ (a – положительно). Равенство будет только при $a = 1$.

3. Среднее геометрическое не больше среднего арифметического, то есть $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, ($a$ и b – положительны). Равенство достигается только при $a = b$.

Существует несколько основных **методов доказательства неравенств**, среди которых:

1) использование известного или ранее доказанного неравенства;

2) оценка знака разности между частями неравенства;

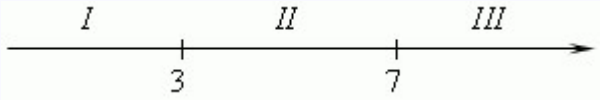
3) доказательство от противного.

Два неравенства, содержащие одни и те же неизвестные, называются *равносильными*, если они справедливы при одних и тех же значениях

этих неизвестных. Такое же определение используется для равносильности двух систем неравенств.

Рассмотрим важнейший метод, часто используемый при решении неравенств. Это **метод интервалов**.

Решим неравенство: $(x-3)(x-5) < 2(x-3)$. Перенесём все члены неравенства в левую часть: $(x-3)(x-5) - 2(x-3) < 0$, разложим на множители: $(x-3)(x-7) < 0$. Определим знак произведения в левой части неравенства в различных числовых интервалах. Вся числовая прямая корнями $x = 3$ и $x = 7$ делится на три интервала:



В интервале I ($x < 3$) оба сомножителя отрицательны, следовательно, их произведение положительно; в интервале II ($3 < x < 7$) первый множитель $(x-3)$ положителен, а второй $(x-7)$ отрицателен, поэтому их произведение отрицательно; в интервале III ($x > 7$) оба сомножителя положительны, следовательно, их произведение также положительно. Теперь остаётся выбрать интервал, в котором произведение отрицательно. Это интервал II, следовательно, решение неравенства: $3 < x < 7$.

Чтобы **решить систему неравенств**, необходимо решить каждое из них, и совместить их решения. Это совмещение приводит к одному из двух возможных случаев: либо система имеет решение, либо нет.

Решим систему неравенств: $\begin{cases} 3x+5<2x+9, \\ 2x-7>x-1. \end{cases}$

Решение первого неравенства $x<4$, а второго $x>6$. Следовательно, система неравенств не имеет решения.

Решим неравенство: $2|x-4|+|3x+5| \geq 16$.

Решение. Разбираем три случая расположения x относительно точек $-\frac{5}{3}$ и 4.

1) $x \geq 4$. Имеем: $2(x-4)+3x+5 \geq 16$, $x > \frac{19}{5}$. Полученное неравенство выполняется при всех рассматриваемых x ≥ 4. Иными словами, все числа из промежутка $[4; +\infty)$ являются решениями нашего неравенства.

2) $-\frac{5}{3} \leq x < 4$. Имеем в данном случае: $2(4-x)+3x+5 \geq 16$, $x \geq 3$. Следовательно, решение исходного неравенства есть множество $[3; 4)$.

3) $x < -\frac{5}{3}$. Имеем: $2(4-x)-3x-5 \geq 16$, $x \leq -\frac{13}{5}$. Так как $-\frac{13}{5} < -\frac{5}{3}$, то все значения x из полученного промежутка $(-\infty, -\frac{13}{5}]$ служат решениями исходного неравенства.

Объединим множества решений, полученные в трёх рассмотренных случаях и получим окончательный ответ: $(-\infty, -\frac{13}{5}] \cup [3; +\infty)$.

Практическое занятие 4
Контрольно-обучающие вопросы и задания

1. Что называют неравенством?

2. Сформулируйте основные свойства неравенств.

3. Перечислите основные методы решения неравенств.

4. Решите неравенство $5x - 7 \geq 7x - 5$.

5. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 3x + 5 < 2x + 9, \\ 2x - 7 > x - 6. \end{cases}$

6. Решите неравенство $(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-100) > 0$ методом интервалов.

7. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{(x^2-11x+28)(x+5)^2}{x^2-6x+8} \leq 0$.

8. Найдите количество натуральных решений неравенства $2x - 5 \leq \frac{169}{2x-5}$.

9. Решите неравенства: а) $|x+7| < 4$; б) $|x+5| + |2x-3| < 10$; в) $\big|\,|2x-3| - 7\big| > 6$; г) $\frac{|x^3+x-1|-|x^3-x+1|}{|x-1|-|x+1|} \geq 0$.

10. Решите неравенство:

$$\sqrt{2x-3} - 3 + x \geq 0.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Решите неравенства:

а) $(2x-3)(5x+2) - (2x-3)(5x-2) \geq 0$;

б) $x^2+14x+49 \leq (x-3)^2$;

в) $6x^2 - |x| - 2 \leq 0$;

г) $2|x-4| + |3x+5| > 16$;

д) $|x^2 - 8x + 2| - x^2 > 2x + 2$;

е) $|x^2 - 3x + 1| < x - 2$.

2. Найти наименьшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{2}{3}(x-7) < \frac{3x-20}{9}, \\ 3x - \frac{2x-13}{11} > 2. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\frac{2x-1}{4} + \frac{x+3}{3} \leq 0$$

4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} |x+5| < 12, \\ \sqrt{x+3} \geq \sqrt{10-x} \end{cases}$$

5. Найти все целые решения системы

$$\begin{cases} 5x - x^2 \geq 0, \\ \frac{x}{3} - 2x < -4 \end{cases}$$

6. Решить неравенство $(x+3) \cdot (x^2 - 2\text{x} + 1) > 0$.

7. Решите неравенство $2|x+1| > x + 4$.

8. Решите неравенство: $\frac{(7-x)(6-x)}{x+1} \leq 0$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Дан прямоугольный треугольник.

Синус острого угла прямоугольного треугольника – это отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинус – это отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенс – это отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенс – это отношение прилежащего катета к противолежащему.

Все тригонометрические функции **периодические**. Причём sin и cos имеют наименьший (главный) период $T = 2\pi$ и общий период $2\pi k$, где

k – любое целое число. У $tg\alpha$ и $ctg\alpha$ наименьший период равен π, а общий πk, где k – целое число.

Функции $sin\alpha$, tg и ctg – **нечётные**; то есть $sin\ (-\alpha) = -\ sin\alpha$, $tg\ (-\alpha) = -\ tg\alpha$, $ctg\ (-\alpha) = -\ ctg\alpha$; $cos\alpha$ – **чётная** функция, то есть $cos\ (-\alpha) = cos\alpha$;

Знаки тригонометрических функций

I четверть – положительны $sin\alpha$, $cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$;

II четверть – положителен только $sin\alpha$, отрицательны $cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$;

III четверть – положительны $tg\alpha$, $ctg\alpha$, отрицательны $sin\alpha$, $cos\alpha$;

IV четверть – положителен $cos\alpha$, а $sin\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$ – отрицательны.

Тригонометрические тождества функций одного аргумента

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1;$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}; \quad ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha};$$

$$tg\alpha \times ctg\alpha = 1;$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}; 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha};$$

$$cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha} = \frac{ctg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha}; sin^2\alpha = \frac{1}{1 + ctg^2\alpha} = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}.$$

Формулы приведения

α	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

Для выполнения тождественных преобразований необходимо знать следующие формулы:

1. Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta \pm cos\alpha \cdot sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sin\alpha \cdot sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}.$$

2. Формулы двойного аргумента

$$\sin(2\alpha) = 2sin\alpha \cdot cos\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha};$$

$$\cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sin^2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha};$$

$$\mathrm{tg}\,(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

3. Формулы половинного аргумента

$$sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - cos2a)};\ cosa = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + cos2a)};\ tga = \pm\sqrt{\frac{1 - cos2a}{1 + cos2a}}.$$

4. Формулы понижения степени

$$sin^2a = \frac{1 - cos2a}{2};\ cos^2a = \frac{1 + cos2a}{2}.$$

5. Формулы преобразования суммы в произведения

$$sina \pm sin\beta = 2sin\frac{a \pm \beta}{2} \cdot cos\frac{a \mp \beta}{2};$$

$$cosa + cos\beta = 2\ cos\frac{a + \beta}{2} \cdot cos\frac{a - \beta}{2};$$

$$cosa - cos\beta = -2\ sin\frac{a + \beta}{2} \cdot sin\frac{a - \beta}{2};$$

$$tga \pm tg\beta = \frac{\sin(a \pm \beta)}{cosa \cdot cos\beta}.$$

6. Формулы преобразования произведений в суммы

$$sina \cdot sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\left(a-\beta\right) \ -\cos\left(a+\beta\right)\ \right];$$

$$cosa \cdot cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\left(a-\beta\right) \ +\cos\left(a+\beta\right)\ \right];$$

$$sina \cdot cos = \frac{1}{2}\left[\sin\left(a-\beta\right) \ +\sin\left(a+\beta\right)\ \right].$$

7. Определения обратных тригонометрических функций

$$sinx = a,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \mathrm{arcsin}a\ ; \mathrm{arcsin}\left(-a\right) = -\mathrm{arcsin}\left(a\right)\ ;$$

$$cosx = a,\ x \in [0;\pi] \Leftrightarrow x = \mathrm{arccos}a\ ; \mathrm{arccos}\left(-a\right) = \pi - \mathrm{arccos}\left(a\right)\ ;$$

$$tgx = a,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = \mathrm{arctg}a\ ; \mathrm{arctg}\left(-a\right) = -\mathrm{arctg}\left(a\right)\ ;$$

$$ctgx = a,\ x \in (0;\pi) \Leftrightarrow x = \mathrm{arcctg}a\ ; \mathrm{arcctg}\left(-a\right) = \pi - \mathrm{arcctg}\left(a\right)\ .$$

8. Тригонометрические уравнения

$sinx = a,\quad a \in [-1;1]$. Решение: $x = (-1)^k arcsina + \pi k,\ k \in Z$;

$cosx = a,\quad a \in [-1;1]$. Решение: $x = \pm arccosa + 2\pi k,\ k \in Z$;

$tgx = a,\quad a \in R$. Решение: $x = arctga + \pi k,\ k \in Z$;

$ctgx = a,\quad a \in R$. Решение: $x = arcctga + \pi k,\ k \in Z$.

Значения тригонометрических функций стандартных углов

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком тригонометрической функции, называется **тригонометрическим**.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

Основные методы решения тригонометрических уравнений

1) алгебраический метод (метод замены переменной и подстановки);

2) разложение на множители;

3) приведение к однородному уравнению. Чтобы решить однородное уравнение, надо:

а) перенести все его члены в левую часть;

б) вынести все общие множители за скобки;

в) приравнять все множители и скобки к нулю;

г) скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на cos (или sin) в старшей степени;

д) решить полученное алгебраическое уравнение относительно tg;

4) переход к половинному углу;

5) введение вспомогательного угла;

6) преобразование произведения в сумму;

7) универсальная подстановка.

Решим уравнение: $cos^2x + sin\,x \cdot cos\,x = 1$.

Решение. $cos\,^2x + sin\,x \cdot cos\,x - sin^2x - cos\,^2x = 0$,

$$sin\,x \cdot cos\,x - sin\,^2x = 0, \quad sin\,x\,(\,cos\,x - sin\,x\,) = 0.$$

Следовательно, $sin\,x = 0$ или $cos\,x - sin\,x = 0$. Отсюда $x_1 = \pi n$, n – целое число; tgx $= 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, где k – целое число.

При решении систем тригонометрических уравнений мы используем те же методы, что и в алгебре (замены, подстановки, исключения и т.д.), а также известные методы и формулы тригонометрии.

Практические занятия 5 и 6
Контрольно-обучающие вопросы и задания

1. Найдите значение $sin\alpha$, если $cos\alpha = 0{,}8$ и принадлежит 4-ой четверти.

2. Вычислите: $cos^2\frac{31\pi}{50} + sin^2\frac{31\pi}{50}$.

3. Упростите выражение: $\frac{1-sin^4-cos^4a}{2sin^4a} + 1$

4. Решите уравнения:

а) $cos\ 2x\ -\ cos\ 8x\ +\ cos\ 6x\ =\ 1.$

б) $3\sin 2x\ \ 2\ x\ +\ 4\sin x\ \ x\cdot\cos x\ \ x\ +\ 5\cos 2x\ =\ 2\ x\ =\ 2.$

в) $2\ sin\ 2x\ \cdot\ sin\ 6x\ =\ cos\ 4x.$

г) $3\ sin\ x\ -\ 4\ cos\ x\ =\ 3.$

5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \mathrm{x+y}=\dfrac{\pi}{3}, \\ \sin\mathrm{x}+\sin\mathrm{y}=1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin\mathrm{x}\cdot\cos\mathrm{y}=0,25, \\ \sin\mathrm{y}\cdot\cos\mathrm{x}=0,75. \end{cases}$

6. Решите уравнение:

$arcsinx^2+\arccos(2x+3)\ =\frac{\pi}{2}.$

7. Сколько решений имеет уравнение

$5sin^2x+\sqrt{3}\cdot\sin x\ \cdot\cos x\ +6\ cos^2x=5$ на промежутке $(-3\pi;3\pi)$?

8. Вычислите:

$$\frac{\sin 91^\circ-\sin 1^\circ}{9\sqrt{2}\cos 46^\circ-\sqrt{2}\sin 44^\circ}.$$

9.Решите уравнение: $tg^3x=\frac{1}{cos^2x}-tgx$

10. Упростите выражение: $sin^2a\cdot\left(cos^4a+sin^4a+tg^2a+2sin^2a\cdot cos^2a\right).$

11. Вычислите:

а) $\arcsin\left(\sin\frac{71\pi}{4}\right)$; б) $\arccos\left(\cos\frac{35\pi}{4}\right)$; в) $\mathrm{arc}tg\left(\mathrm{tg}\frac{29\pi}{4}\right)$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти значение $25sin^2$x cosx , если $tgx = 0,75$ и x принадлежит 1-ой четверти.

2. Вычислите без калькулятора

$$cos^2 45^\circ - sin^2 45^\circ.$$

3. Вычислите

$$sin\frac{19\pi}{34}cos\frac{\pi}{17} - cos\frac{19\pi}{34}sin\frac{\pi}{17}.$$

4. Приведите значение аргумента $sin\frac{23\pi}{14}$ к I четверти.

5. Решите уравнение $3\ ctg\ x\ - \cos 2x\ = 1\ + 2\sin 2x$.

6. Найдите $tg^2x\ +\ ctg^2x$, если $tgx\ +\ ctgx = 2$.

7. Найти значение выражения $\frac{2-2sin^2x}{1-cos2x} + tgx \cdot ctgx$ при $x = \frac{3\pi}{2}$.

8. Вычислите:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - arcsin\frac{1}{4}\right)$; б) $\cos\left(\pi + \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$;

в) $arcctg\ 0 - arcctg\ (-1) - arctg\ (-1)$.

9. Найдите наименьший положительный корень уравнения $4cos\ 6x\ \cdot\ cos\ 2x + 2sin^2 4x - 4 = 0$.

10. Решите уравнение $arcsin(1\ - \cos 2x\ ) = x$.

КООРДИНАТЫ И ФУНКЦИИ

Две взаимно перпендикулярные прямые OX и OY образуют систему координат, называемых **декартовыми координатами**.

Прямые OX и OY называются **осями координат**. Ось OX называется осью **абсцисс**, ось OY – осью **ординат**. Точка O называется **началом координат**. На осях координат выбирается произвольный масштаб.

Каждой точке на плоскости соответствует пара чисел (x, y), и наоборот, каждой паре чисел (x, y) соответствует одна точка на плоскости.

Функция y=f(x) – соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется единственное число y из множества E. x– аргумент функции, y – значение функции; D или D(f) – область определения функции; это совокупность всех значений x, для которых можно вычислить значение функции. E или E(f) – область значений функции; это совокупность всех значений, которые может принимать выражение f(x).

График функции y=f(x) – множество точек (x,y) на координатной плоскости, где x принимает все возможные значения из D(f), а y=f(x).

Чтобы представить функцию y = f (x) в виде графика, нужно:

1)записать ряд значений функции и её аргумента в таблицу:

2)перенести координаты точек функции из таблицы в систему коорди-

x	x_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	y_4	$\dots$	y_n

нат, отметив в соответствии с выбранным масштабом значения абсцисс на оси X и значения ординат на оси Y. В результате в системе координат будет построен ряд.

3) соединяя точки плавной кривой, получаем график заданной функциональной зависимости.

График четной функции симметричен относительно оси OY.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

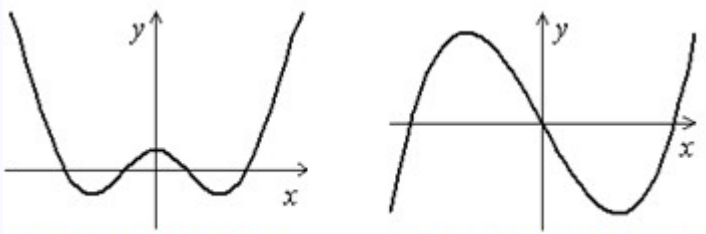


График четной функции. График нечетной функции.

Нули функции – значения x такие, что f(x)=0.

Интервалы знакопостоянства – множества значений аргумента,

при которых значения функции только положительны или только отрицательны.

Функция **возрастает** на множестве X, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то есть, если $x_1<x_2$, то $f(x_1)<f(x_2)$.

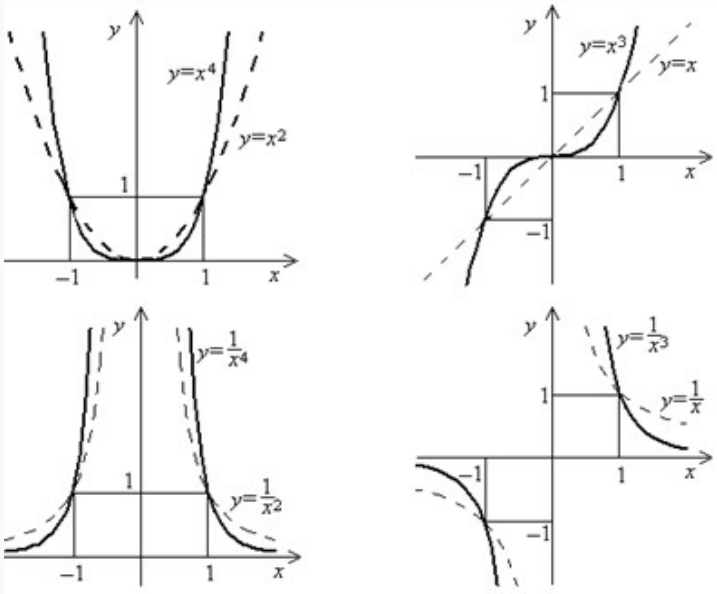
Функция **убывает** на множестве X, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то есть, если $x_1<x_2$, то

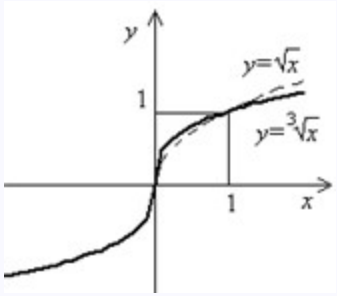
$f(x_1)>f(x_2)$.

Основные элементарные функции

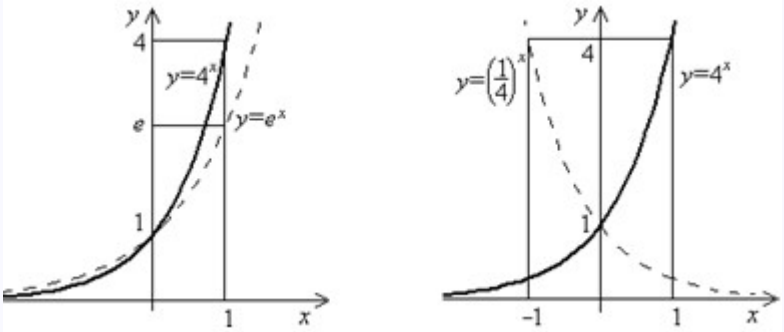
а) линейная $= ax + b$ (прямая пропорциональность $y = ax$).
График – прямая.
б)обратная пропорциональность $y=\frac{k}{x}$.
График – гипербола.
в)квадратичная функция $y = ax^2+bx+c$, где a, b, c – постоянные.
График – парабола.

г)степенная функция $y = ax^n$, где a, n – постоянные.

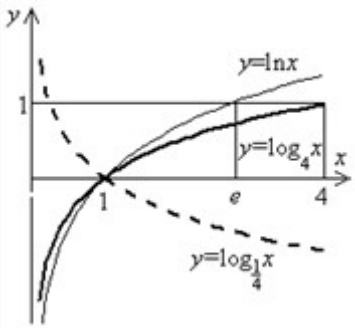




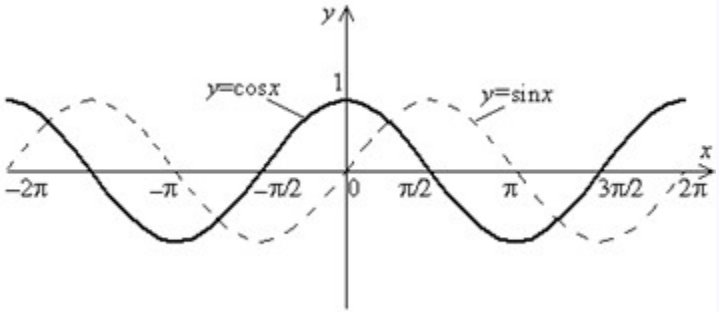
д)показательная функция y = a, a >0, a≠1.



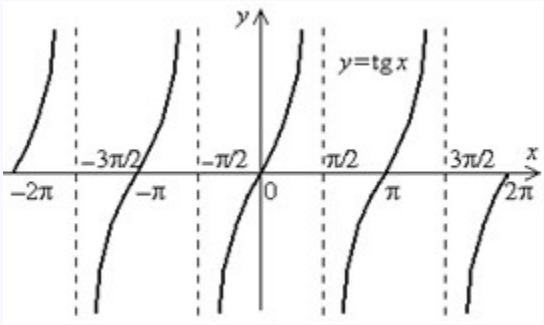
е)логарифмическая функция $y=\log_a x$, a >0, a≠1.



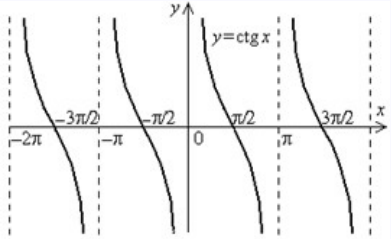
ж)тригонометрические функции
y=sin x, y=cos x



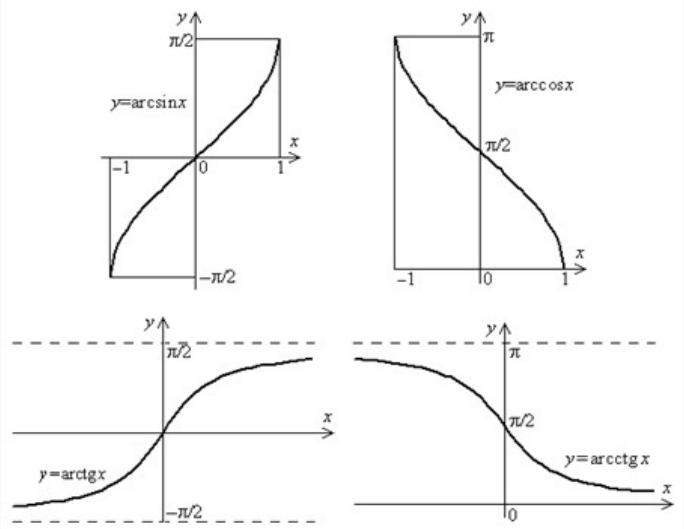
y=tgx



y=ctgx



з)обратные тригонометрические функции y=arcsin x, y=arccos x, y=arctg x, y=arcctg x



Практические занятия 7 и 8 Контрольно-обучающие вопросы и задания

1.График какой функции является возрастающим:

а) $y = -\sqrt{x}$; б) $y = x^3 - 27$; в) $y = 2^{-x}$?

2. Парабола $y = 2x^2 - (a - 3)x + a + 3$ проходит через начало координат. Найдите абсциссу вершины параболы.

3. В каких точках график функции $f(x) = x^2 - 3$ пересекает прямую $y(x) = x - 1$?

4. При каких значениях k прямые $-kx + 7y = -13$ и $14y - 3x + 5 = 0$ параллельны?

5. Найдите точки пересечения прямой $y = 5 + x$ с осями координат.

6. Найдите нули функции $y = (x + 1)\cdot(x - 2)$.

7. Найти область значений функции

$$y = \frac{2 - 5\,cosx}{3}$$

8. Найдите сумму целых значений функции $y = 3 - 2\sin x$.

9. Найти область определения функции

$$y = \frac{3}{x^2 + x}$$

10. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{2^{2x-3} - 1}$$

11. Найдите область определения функции

$$y = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}.$$

12. Графиком квадратичной функции является парабола с вершиной в точке A(0; 2), проходящая через точку B(2; – 6). Задайте эту функцию формулой.

13. Найдите g (x) , если f (x) = 2x – 3, g (f (x)) = x. Вычислите g(1).

14. Найдите область определения функции

$$f\,(x) = \sqrt{2^{3x+1} - 16}$$

Задания для самостоятельной работы

1. Укажите области значения функций: а) y=–3sinx; б) y=0,7cos3x; в) y=$2tg\frac{x}{2}$.

2. Укажите функцию, которая возрастает на всей области определения. 1) y= – $x^{0,5}$; 2) y=1 – e^{-x}; 3) y=ctg2x; 4) y=|–x|.

3. При каких значениях a графики функций y = 3x – $4x^3$ и y = a имеют единственную общую точку?

4. Найдите длину промежутка области значений функции

$$y = \sqrt{2}\ sinx + \sqrt{2}\ cosx$$

5. Найдите середину промежутка области значений функции

$$y = cosx + |cosx|.$$

6. Найдите наибольшее целое значение выражения 2t, где t – число, принадлежащее области значений функции $y = cos2x \cdot tg2x$.

7. Укажите точки пересечения графиков функций y = 2x + 4 и y = – 2x.

8. В каких точках график функции f (x) = $3x^2+6x$ пересекает прямую y = 6 – x?

9. Укажите функцию с областью значений $(0; +\infty)$:

1) $y = -x^{\frac{1}{5}}$; 2) $y = tgx$; 3) $y = 3^{-x}$; 4) $y = -x^{\frac{1}{3}}$.

10. Найдите g(f(x)), если f(x) $=\frac{1}{x-1}$, g(x)=2x+1. Вычислите g(f(2)).

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Функция $y = a^x$, где a – положительное постоянное число, называется **показательной функцией**.

Аргумент x принимает любые действительные значения; в качестве значений функции рассматриваются только положительные числа. Основные характеристики и **свойства показательной функции**:

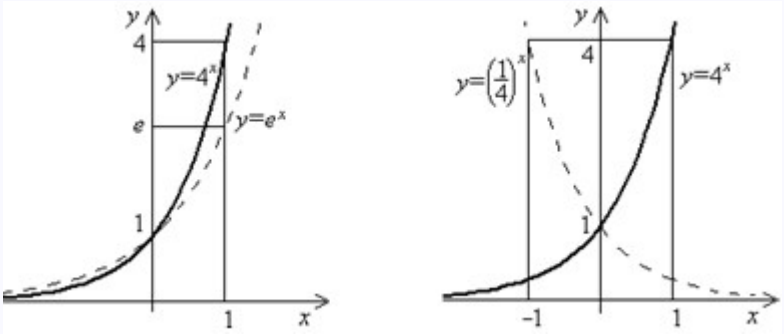
– область определения функции: $x \in R$;

– область значений: $y > 0$;

– функция монотонна: возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$;

– функция неограниченная, всюду непрерывная, непериодическая;

– нулей функция не имеет.



Функция $y = \log_a x$, где a – постоянное положительное число, не равное 1, называется **логарифмической.** Основные характеристики и

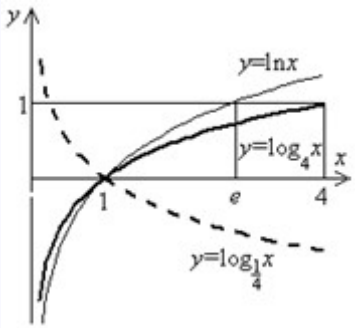
свойства логарифмической функции:

– область определения функции: $x > 0$, а область значений: $y \in R$;

– это монотонная функция: она возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$;

– функция неограниченная, всюду непрерывная, непериодическая;

– у функции есть один нуль: $x = 1$.



Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется такой показатель степени c, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b. Записывают: $c = \log_a b$, что означает $a^c = b$. **Основное логарифмическое тождество**: $a^{\log_a b} = b$.

Свойства логарифмов

1) $\log_a 1=0$;

2) $\log_a a=1$;

3) $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$;

4) $\log_a \frac{x}{y}=;\log_a x-\log_a y$;

5) $\log_a x^p= p\cdot\log_a x$;

6) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ – переход к новому основанию.

Десятичным логарифмом называется логарифм, основание которого равно 10. Обозначаются символом lg: $\log_{10} b = \lg b$.

Натуральным логарифмом называется логарифм, основание которого равно числу e. Натуральный логарифм обозначаются символом ln: $\log_e b = \ln b$.

Рассмотрим **методы решения показательных и логарифмических уравнений.**

Решим уравнение $6^{2-x}=6^{3-2x}$. Решение. $6^{2-x}=6^{3-2x}$; $2 - x = 3 - 2x$; $x = 1$. Ответ. 1.

Укажем целое решение уравнения

$$\frac{x}{2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{x^2} 16}$$

Решение. Так как правая часть уравнения есть показательная функция, то $\frac{x}{3}> 0$, то есть $x > 0$ и, поскольку x^2 – основание логарифма, то $x \neq 1$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию x^2:

$$\log_{x^2}\frac{x}{3} = \log_{x^2}\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{x^2}16}$$

К правой части уравнения применим 5-е свойство логарифмов:

$$\log_{x^2}\frac{x}{3} = \log_{x^2}16 \ \cdot \log_{x^2}\frac{4}{3},$$

$$\frac{1}{2}\log_x\frac{x}{3} = \frac{1}{2}\log_x 4 \ \cdot \log_x\frac{4}{3}; \quad \log_x\frac{x}{3} - \log_x 4 \ \cdot \log_x\frac{4}{3} = 0 \ .$$

К обеим частям уравнения применим 4-е свойство логарифмов, сгруппируем и разложим на множители, получим:

$(1 - \log_x 4)(1+\log_x 4 - \log_x 3)=0$,

$1 - \log_x 4=0$ или $1+\log_x 4 - \log_x 3=0$.

Из первого уравнения получаем $x = 4$, из второго $x = 0{,}75$. Все найденные значения неизвестного входят в область допустимых значений уравнения, то есть являются его корнями. Выбираем только целое решение.

Ответ. 4.

Решим показательное неравенство:

$$2^{10x-5} \geq \frac{1}{16}.$$

Решение.

$$2^{10x-5} \geq \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^{10x-5} \geq 2^{-4} \Leftrightarrow 10x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -0,4$$

Ответ. $[-0{,}4; +\infty)$.

Рассмотрим логарифмическое неравенство:

$$\log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2+5x+1\right) < 0$$

Решение. $\log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2+5x+1\right) < 0 \quad \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2+5x+1\right) < \log_{\frac{1}{5}} 1 \Leftrightarrow$ $2x^2+5x+1 > 1 \Leftrightarrow 2x^2+5x > 0 \Leftrightarrow x\cdot(2x+5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{5}{2} \\ x > 0. \end{cases}$

Ответ. $(-\infty; -2{,}5) \cup (0; +\infty)$.

Практическое занятие 9
Контрольно-обучающие вопросы и задания

1. Перечислите основные свойства показательной функции.
2. Перечислите основные свойства логарифмической функции.
3. Постройте графики функций: а) $y = \log_2 x$; б) $y = \log_{0,5} x$;
в) $y = 3$; г) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
4. Запишите основные свойства логарифмов.
5.Найдите область определения функций:
а) $y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7} - 1}$.
б) $y = \log_5(x^2 - 4)$.
6. Сколько натуральных значений может принять функция
$y=\log_2(4 - x^2)$ на всей области определения?
7. Решите уравнения:
а) $5^{2x-3}=5$; б) $9^x-5\cdot 3^{x+1}+54=0$; в) $2^{3x+1}-2^{2x}=2^{x+1}-1$; г) $(0,5)^{2+1}=0,125$;
д) $\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x = 10$.
8. Решите уравнения: а) $\lg(3+2\lg(1+x))=0$; б) $\log_2(54-x^3)=3\log_2 x$;
в) $\log_3|x+1|=1$; г) $\ln(x^2+2x-3)=\ln(x-3)$.
9. Решите неравенства: а) $7^{x+1} - 7^x < 42$; б) $\frac{1}{27} \leq 3^{2\ --}\ ?\ 27$;
в) $\frac{4^x+3\cdot 2^x\ -4}{x^2+x+3}<0$.
10. Решите неравенства:
а) $lg(x-2) + lg(x-5) < lg4$; б)$\log_{9x}3x\ + \log_{3x^2}9x^2 \leq \frac{5}{2}$;

в) $\frac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)} > \frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{\log_2(x-1)} < \frac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Решите уравнения:

а) $\frac{1}{3^x+2} = \frac{1}{3^{x+1}}$;

б) $3^{lgx^2} - 4 \cdot 3^{lgx} + 3 = 0$;

в) $15^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 5^{4x-4}$.

2. Решите уравнения: $\log_9(x-1) + \log_{\sqrt{3}}\frac{1}{x-1} = \log_{\frac{1}{9}}27$;

$\log_5 x - 2\log_{\frac{1}{5}}2 - 4\log_{25}3 = 0$.

3. Укажите все пары (x, y) положительных чисел x и y, удовлетворяющих системе $\begin{cases} x^{|6y-4x|} = y^2 0, \\ y^{|6y-4x|} = x^5. \end{cases}$

4. Решите неравенства:

а) $\frac{1}{3}^{2x-9} \leq 243^{x^3-1}$;

б) $\frac{6}{5}^{x^2-9} > \frac{25}{36}^{3x+6}$;

в) $49^{9+4x^2-11x} < \frac{1}{7}^{2x+x^2-3}$;

г) $\frac{4}{3}^{8-x^2+2x} \geq \frac{9}{16}^{1-x^3}$.

5. Укажите наименьшее значение функции $y=\log_2(x^2 - 4x + 12)$.

6. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=3^{2x-1}$ на промежутке $[-3; 1]$.

7. Вычислите $\log_4 7 \cdot \log_{49}27 \cdot \log_9 64$.

8. Вычислите

$$\frac{\lg(7-4\sqrt{3})}{\lg(2-\sqrt{3})}.$$

9. Решите уравнения:

а) $\log_3 x + \log_3(x+3) = \log_3(x+24)$,

б) $\log_4(x^2-4x+1) - \log_4(x^2-6x+5) = -{}^1/_2$,

в) $\log_2 x + \log_3 x = 1$,

г) $2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$,

д) $16^{log_4(1-2x)} = 5x^2 - 5$.

10. Решите неравенства:

а) $\log_3(x^2-x) \geq \log_3(x+8)$;

б) $\log_{\frac{x+2}{x-3}}(5-x) > \log_{\frac{x+2}{x-3}}(4-x)$;

в) $\log_{0,2}(5-x) > \log_{0,2}\frac{2}{x-2}$;

г) $\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right) < 1$;

д) $\log_2(\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)) > 0$.

ПЛАНИМЕТРИЯ

Треугольник – это геометрическая фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой (вершин треугольника) и трёх отрезков с концами в этих точках (сторон треугольника).

Сумма углов треугольника равна 180°.

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним, и больше любого внутреннего, с ним не смежного.

Длина каждой стороны треугольника больше разности и меньше суммы длин двух других сторон.

В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол.

Треугольники называются **равными**, если у них соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны. У равных треугольников все соответствующие элементы равны (стороны, углы, высоты, медианы, биссектрисы, средние линии и т.д.). В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, а против равных углов – равные стороны.

Первый признак равенства треугольников: если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников: если сторона и при-

лежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Третий признак равенства треугольников: если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Подобными называются треугольники, у которых соответствующие стороны пропорциональны.

Два треугольника подобны, если:

Два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника.

Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, и углы, образованные этими сторонами, равны.

Стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого.

У подобных треугольников соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны.

Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Прямая, пересекающая две стороны треугольника, и параллельная третьей, отсекает треугольник, подобный данному.

Три средние линии треугольника делят его на четыре равных тре-

угольника, подобные данному, с коэффициентом подобия ?.

Медианой треугольника называется отрезок, который соединяет вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, делящей медианы в отношении 2:1, считая от вершины.

Медиана делит треугольник на два равновеликих (с равными площадями) треугольника.

Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

Биссектрисой треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противолежащей стороне. Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке, находящейся внутри треугольника, равноудалённой от трёх его сторон, которая является центром окружности, вписанной в данный треугольник. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую углу сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам. Биссектрисы внутреннего и смежного с ним внешнего угла перпендикулярны. Биссектриса внешнего угла треугольника делит (внешне) противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противолежащую сторону или на продолжение стороны. Высоты треугольника пересекаются в одной точке,

которая называется **ортоцентром** треугольника. Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам.

Серединный перпендикуляр – это прямая, которая проходит через середину стороны треугольника перпендикулярно к ней. Три серединных перпендикуляра треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около данного треугольника. Точка пересечения биссектрисы угла треугольника с серединным перпендикуляром противолежащей стороны лежит на окружности, описанной около данного треугольника.

Окружность называется **вписанной** в треугольник, если она касается всех его сторон. Точки касания вписанной окружности сторон треугольника отсекают от его сторон три пары равных между собой отрезков.

Радиус вписанной в треугольник окружности – расстояние от её центра до сторон треугольника:

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$$

$$r = \frac{\alpha\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}};$$

$$r = (p - a) \cdot tg\ \frac{A}{2};$$

$$r = \frac{1}{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}};$$

$$r = \frac{S^2}{r_a r_b r_c}.$$

Окружность называется **описанной** около треугольника, если она проходит через все его вершины. Радиус описанной окружности:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C};$$

$$R = \frac{p}{4\cos\frac{A}{2}\ \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}};$$

$$R = \frac{r}{4\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}};$$

$$R = \frac{r_a + r_b + r_c - r}{4};$$

$$R = \frac{bc}{2h_a};$$

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Треугольник называется **равнобедренным**, если у него две стороны равны. Равные стороны называют боковыми сторонами, а третью – основанием равнобедренного треугольника.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является и биссектрисой, и высотой.

Основные формулы для равнобедренного треугольника:

$$a^2 = 2b^2(1 - \cos a); b = \frac{a}{2\cos\beta};$$

$$S = (p - b)\sqrt{p\,(p - a)\,};$$

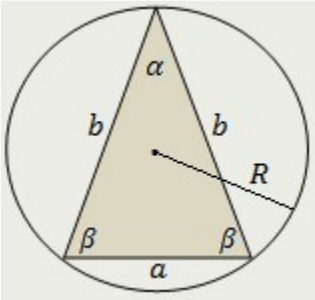
$$S = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{4b^2 - a^2};$$

$$S = \frac{b^2}{2} \cdot \sin a;$$

$$r = \frac{a\ sin^2\ \frac{\beta}{2}}{\cos\frac{a}{2}};$$

$$R = \frac{b^2}{2h_a}.$$

Треугольник, у которого все стороны равны называется **равносторонним или правильным** треугольником. Центры вписанной и описанной окружностей правильного треугольника совпадают. Все углы



равностороннего треугольника равны. Каждая медиана равностороннего треугольника совпадает с биссектрисой и высотой, которые проведены из той же вершины:

Треугольник называется **прямоугольным**, если у него есть прямой угол. Стороны, прилежащие к прямому углу, называются катетами, противолежащая прямому углу – гипотенузой.

Прямоугольные треугольники равны, если у них равны:

два катета;

катет и гипотенуза;

катет и прилежащий острый угол;

катет и противолежащий острый угол;

гипотенуза и острый угол.

Подобие прямоугольных треугольников устанавливают по:

одному острому углу;

из пропорциональности двух катетов;

из пропорциональности катета и гипотенузы.

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

В прямоугольном треугольнике гипотенуза всегда больше любого из катетов. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

Медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

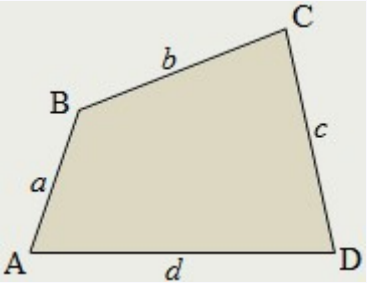
Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит данный треугольник на два треугольника, подобные данному.

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Коэффициент пропорциональности равен диаметру описанной окружности.

Четырёхугольником называется фигура, которая состоит из четырёх точек (вершин) и четырёх отрезков (сторон), которые последовательно соединяют вершины. При этом никакие три из данных точек не

должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться.



Четырёхугольник называется *выпуклым*, если он расположен в одной полуплоскости относительно прямой, которая содержит любую из его сторон.

Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°:

Не существует четырёхугольников, у которых все углы острые или все углы тупые.

Каждый угол четырёхугольника всегда меньше суммы трёх остальных углов.

Каждая сторона четырёхугольника всегда меньше суммы трёх остальных сторон.

Площадь произвольного выпуклого четырёхугольника равна:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cdot cos^2 \frac{A+C}{2}};$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cdot cos^2 \frac{B+D}{2}}.$$

Диагоналями четырёхугольника называются отрезки, соединяющие его противолежащие вершины.

Диагонали выпуклого четырёхугольника пересекаются, а невыпуклого – нет.

Площадь произвольного выпуклого четырёхугольника:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\varphi \ .$$

Четырёхугольник называется **описанным** около окружности (описанным), если существует такая окружность, которая касается всех его сторон, тогда сама окружность называется вписанной.

Четырёхугольник является описанным тогда и только тогда, кода суммы его противолежащих сторон равны.

Площадь описанного четырёхугольника: $S = pr$, где r – радиус вписанной окружности, p – полупериметр четырёхугольника.

Площадь описанного четырёхугольника:

$$S = \sqrt{abcd} \cdot \sin\frac{A+C}{2} \text{ или } S = \sqrt{abcd} \cdot \sin\frac{B+D}{2} \ .$$

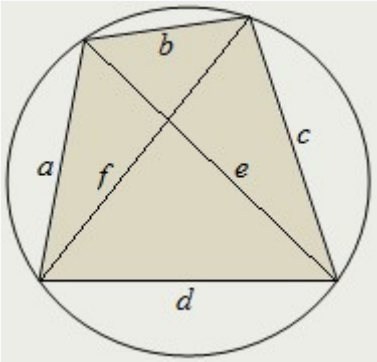
Центр вписанной в четырёхугольник окружности является точкой пересечения биссектрис всех четырёх углов этого четырёхугольника.

Четырёхугольник называется **вписанным** в окружность (вписанным), если существует окружность, проходящая через все его вершины, тогда сама окружность называется описанной около четырёхугольника.

Выпуклый четырёхугольник является **описанным** тогда и только тогда, когда сумма его противолежащих углов равна 180°.

Центр описанной около четырёхугольника окружности является точкой пересечения всех четырёх серединных перпендикуляров сторон этого четырёхугольника.

Первая теорема Птолемея. Выпуклый четырёхугольник тогда и только тогда является вписанным, когда выполняется равенство: $ef = ac + bd$.



Вторая теорема Птолемея. Выпуклый четырёхугольник тогда

и только тогда является вписанным, когда выполняется равенство:

$$\frac{e}{f} = \frac{ab + dc}{ad + bc}.$$

Радиус окружности, описанной около четырёхугольника:

$$R = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{(ab + cd)(ad + bc)(ac + bd)}{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}.$$

Площадь вписанного четырёхугольника:

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

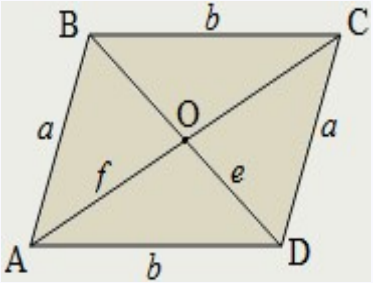
Диагонали выпуклого четырёхугольника разбивают каждый его угол на два угла. Углы, опирающиеся на одну сторону, называются связанными углами.

Выпуклый четырёхугольник является вписанным тогда и только тогда, когда у него есть хотя бы одна пара равных связанных углов. У вписанного четырёхугольника любые два связанных угла равны.

Если четырёхугольник одновременно является описанным и вписанным, то его площадь:

$$S = \sqrt{abcd};$$

Параллелограммом называется четырёхугольник, противолежащие стороны которого попарно параллельны: AB||CD, BC||AD.



У параллелограмма противолежащие стороны равны и противолежащие углы равны.

Сумма любых двух соседних углов параллелограмма равна 180°.

Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Каждая диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника:

Две диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника.

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Признаки параллелограмма

Если у четырёхугольника противолежащие стороны попарно равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

Если у четырёхугольника две противолежащие стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

Четырёхугольник, диагонали которого в точке пересечения делятся пополам – параллелограмм.

Если у четырёхугольника противолежащие углы попарно равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

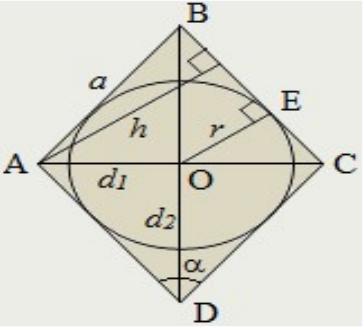
Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, проведённый из вершины параллелограмма к не прилежащей стороне.

Площадь параллелограмма можно определить:

$S = ah_a = \mathrm{bh}_b$; $\mathrm{S} = \mathrm{ab}\cdot\sin\gamma$.

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Диагонали ромба пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами его углов.



В любой ромб можно вписать окружность с центром в точке пересечения его диагоналей.

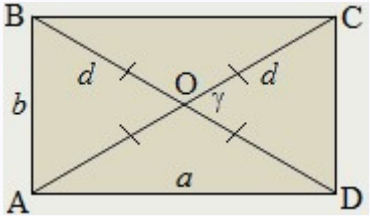
Радиус окружности, вписанной в ромб, можно вычислить:

$$r = \frac{h}{2};\ r = \frac{d_1 d_2}{4a};\ r = \sqrt{BE \cdot EC}.$$

Площадь ромба можно определить:

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}; S = a^2 \cdot \sin a\ ; S = ah; S = 2ar.$$

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

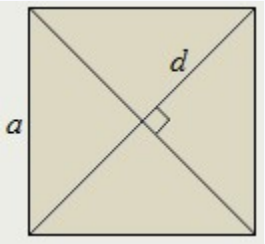


Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся на четыре равных отрезка.

Площадь прямоугольника можно определить:

$$S = ab;\ S = \frac{1}{2}d^2 \cdot sin\ \gamma.$$

Около любого прямоугольника можно описать окружность с центром в точке пересечения его диагоналей и радиусом, который равен половине диагонали.



Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Диагонали квадрата равны и перпендикулярны. Сторона и диагональ квадрата связаны соотношениями: $a = \frac{d}{\sqrt{2}}; d = a\sqrt{2}$.

Площадь квадрата:

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

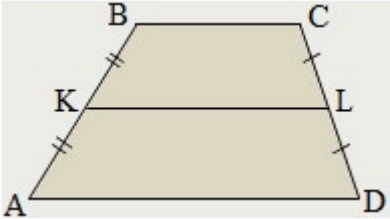
Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны.

Параллельные стороны называются основаниями трапеции, непараллельные – боковыми сторонами.

Высота трапеции – перпендикуляр, проведённый из произвольной точки одного основания трапеции к прямой, содержащей другое основание трапеции.

Средней линией (первой средней линией) трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Центром вписанной в трапецию окружности является точка пересечения биссектрис внутренних углов трапеции.



Боковые стороны трапеции видны из центра окружности, вписанной в данную трапецию, под прямым углом.

Радиус вписанной в трапецию окружности можно определить:

$$r = \frac{h}{2}; r = \sqrt{AK \cdot KB}; r = \sqrt{CL \cdot LD}.$$

Равнобокой называется трапеция, у которой AB=CD.

У равнобокой трапеции диагонали равны, углы при основании равны, сумма противолежащих углов равна 180°.

Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая.

Стороны и диагональ равнобокой трапеции связаны соотношением:

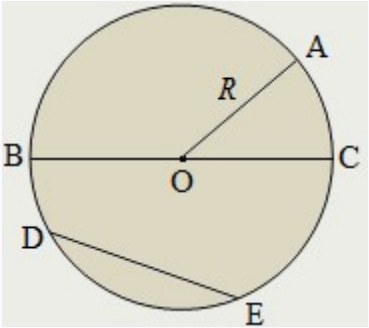
$$d^2 = ab + c^2.$$

Трапеция называется **прямоугольной**, если одна из её боковых сторон перпендикулярна основаниям.

Площадь трапеции можно определить:

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot sin\ \gamma$ или $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Окружностью называется замкнутая плоская кривая, все точки которой одинаково удалены от данной точки (центра окружности), которая лежит в той же плоскости, что и кривая.



Отрезок R, который соединяет центр окружности с любой её точкой (а также длина этого отрезка), называется **радиусом.**

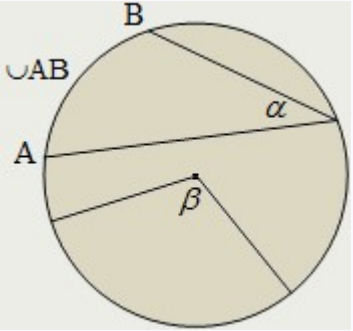
Отрезок DE, который соединяет какие-либо две точки окружности, называется **хордой.**

Хорда BC, проходящая через центр окружности, называется **диаметром**.

Дуга – это часть окружности, расположенная между двумя её точками.

Вписанным углом α, называется угол, образованный двумя хордами, имеющими общий конец.

Центральным углом β, называется угол, образованный двумя радиусами.



Диаметр – наибольшая хорда данной окружности. Наименьшей хорды окружности не существует.

Параллельные хорды отсекают на окружности равные дуги.

Прямая, которая лежит в одной плоскости с окружностью и имеет с ней только одну общую точку, называется **касательной** к этой окружности.

Прямая, которая перпендикулярна диаметру окружности и проходит через его конец, является касательной к этой окружности.

Касательная окружности перпендикулярна диаметру и радиусу, проведённым в точку касания.

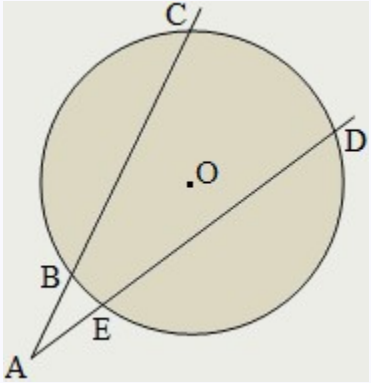
Отрезки касательных, проведённые из одной точки, равны.

Углы, образованные касательными, проведёнными из одной точки, и прямой, проходящей через центр окружности и эту точку, равны.

Прямая, которая пересекает окружность в двух различных точках, называется **секущей**.

Если через точку M вне окружности проведена секущая к ней, то произведение расстояний от точки M до точек пересечения с окружностью равно квадрату длины отрезка касательной, проведённой из точки M к окружности: $MB \cdot MC = MA^2$.

Угол, образованный двумя секущими, равен полуразности дуг, заключенных между его сторонами и $AB \cdot AC = AE \cdot AD$.



Угловой величиной дуги называется величина соответствующего ей центрального угла.

Угловая величина дуги обладает следующими свойствами

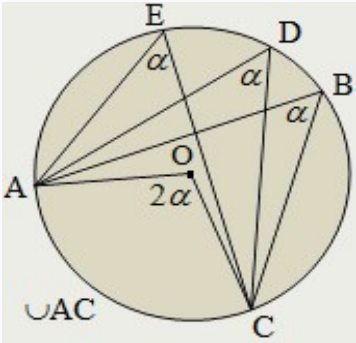
Угловая величина дуги неотрицательна.

Равные дуги имеют равные угловые величины.

Если две дуги одной окружности (или равных окружностей) имеют равные угловые величины, то они равны.

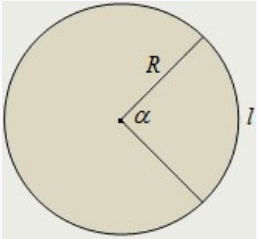
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, и равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.



Вписанный угол, опирающийся на полуокружность (диаметр), является прямым.

Длиной окружности называется общая граница периметров вписанных и описанных правильных многоугольников при неограниченном увеличении числа их сторон.



Отношение длины окружности к длине её диаметра одинаково для всех окружностей и обозначается греческой буквой π.

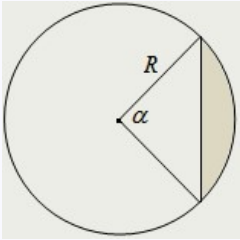
Длина окружности: $L = 2\pi R$.

Длина дуги окружности, выраженной в радианной мере, равна произведению числа её радиан на радиус окружности.

Площадь круга: $S = \pi \cdot R^2$.

Площадь сектора: $S = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot R^2$.

Площадь сегмента: $S = \frac{1}{2} \cdot (\alpha - -sin\ \alpha) \cdot R^2$.



Практические занятия 10-11
Контрольно-обучающие вопросы и задания

Повторите теоретический материал по следующим темам:

1. Смежные, вертикальные, внутренние накрест лежащие, внутренние односторонние, соответственные углы.

2. Теорема Фалеса

3. Треугольник

Виды треугольников

Признаки равенства (в том числе и для прямоугольных треугольников)

Признаки подобия (в том числе и для прямоугольных треугольников). Площади подобных фигур

Теорема Пифагора

Теорема косинусов

Теорема синусов

Неравенство треугольника

Формулы для вычисления площади треугольника

Высота, биссектриса, медиана треугольника

Замечательные точки треугольника

Вычисление замечательных отрезков в треугольниках.

4. Выпуклые многоугольники

Параллелограмм, квадрат, прямоугольник, ромб, трапеция (определения, свойства и признаки)

Формулы для вычисления площади каждого из этих многоугольников

Условия, при которых выпуклый четырёхугольник можно вписать в окружность (описать около окружности)

Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника

5.Окружность, хорды, касательные. Определения и свойства. Внутренний и центральный угол окружности, соотношения между ними.

Решите задачи:

1. АВСД – прямоугольник со сторонами АВ=4, ВС=8; М и Т – точки, лежащие соответственно на сторонах ВС и АД так, что ВМДТ – ромб. Найдите площадь ромба.

2. Точки С и Д лежат на окружности по одну сторону от хорды АВ. Найдите градусную меру угла АДВ, если угол АСВ равен 74^0.

3. В треугольнике АВС проведена прямая ВД так, что угол ВАС равен углу ДВС, ВС=3, АВ=7,2. Найдите длину отрезка ВД, если АД=8.

4. Высота, проведенная из вершины В острого угла ромба АВСД к стороне АД, пересекает прямую, содержащую диагональ АС в точке Н и образует с не угол, косинус которого равен 0,8. Найдите площадь ромба S, если известно, что около треугольника НОВ можно описать окружность радиуса 2,5 (О – точка пересечения диагоналей ромба). В ответ запишите значение выражения 2S.

5. Окружность радиусом $2\sqrt{3}$ вписана в ромб АВСД и касается сто-

роны АД в точке К, причем АК$=\sqrt{3}$. Найдите площадь ромба.

6. В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 проведена окружность, центр которой лежит на гипотенузе. Окружность касается катетов. Найдите длину меньшего из отрезков, на которые центр окружности делит гипотенузу.

7. Из точки А к окружности проведены касательная АВ и секущая АС, проходящая через центр окружности О. Точки Ви С принадлежат окружности, АВ$=\sqrt{21}$, ОС$=2$. Найдите АС.

8. Углы треугольника пропорциональны числам 3, 5, 7. Найдите эти углы.

9. Радиус окружности равен 13. На каком расстоянии от центра окружности находится хорда длины 24.

10. В трапецию вписана окружность. Расстояние от центра этой окружности до вершины верхнего основания равно 15; до вершины нижнего 20. Чему равна площадь трапеции?

11. Чему равна площадь круга, описанного около правильного шестиугольника со стороной 2?

12. В прямоугольнике ABCD биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M и делит ее на отрезки BM$=6$, MC$=4$. Чему равна площадь прямоугольника?

Задания для самостоятельной работы

1. Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию. Чему

равен наибольший угол, если величина наименьшего 200?

2. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна 15, а один из острых углов равен 600. Чему равна длина меньшего катета?

3. Один из углов прямоугольного треугольника равен 300, а высота, проведенная к гипотенузе, равна 9. Найдите длину гипотенузы.

4. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13, а катеты относятся как 2 : 3. Чему равна площадь треугольника?

5. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если его основание равно 18, а площадь 1

6. Основание треугольника равно 22, боковые стороны 13 и 19. Чему равна медиана, опущенная на основание?

7. Площадь треугольника ABC равна 48. Точка D лежит на стороне AC, деля ее в отношении AD:DC=1:7. Найдите площадь треугольника ABD.

8. Высота правильного треугольника равна 18. Найдите диаметр вписанной в него окружности.

9. По разные стороны от центра окружности проведены две параллельные хорды длин 12 и 16. Чему равен радиус окружности, если расстояние между хордами равно 14?

10. Площадь параллелограмма равна 120, а его высоты 8 и 12. Найдите периметр параллелограмма.

11. В равнобедренной трапеции основания равны 4 и 6, боковая сто-

рона равна 5. Чему равна сумма длин диагоналей?

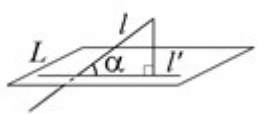
12. Периметр ромба равен 52, а сумма длин диагоналей 34. Чему равна его площадь?

13. Во сколько раз площадь круга больше площади вписанного в него квадрата?

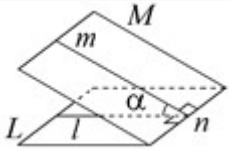
14. Какой правильный многоугольник имеет внутренний угол 144^0?

СТЕРЕОМЕТРИЯ

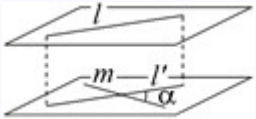
Эта команда



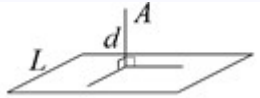
Угол между прямой l и плоскостью L – это угол между прямой l и ее проекцией на плоскость l'.



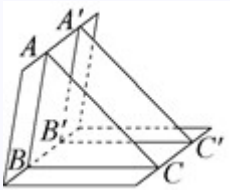
Угол между плоскостями L и M – это угол между прямыми l и m, лежащими в этих плоскостях, такими, что $l \perp n$ и $m \perp n$(линейный угол).



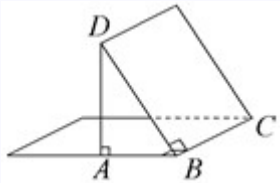
Угол между скрещивающимися прямыми l и m, лежащими в параллельных плоскостях, равен углу между проекцией l' прямой l на плоскость, где лежит прямая m, и прямой m.



Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.



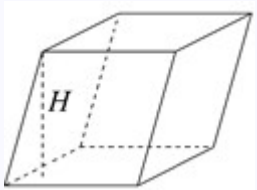
Признак параллельности плоскостей: Если AB||A'B' и BC||B'C', то плоскости ABC и A'B'C' параллельны.



Теорема о трех перпендикулярах. Прямая BC, лежащая в плоскости ABC, перпендикулярна наклонной DB, тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ее проекции на плоскость AB.

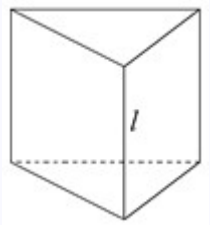
Призма – это многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани – параллелограммами, имеющими общие стороны с этими

многоугольниками. Эти параллелограммы называются боковыми гранями призмы, а оставшиеся два многоугольника называются ее основаниями.



Объем наклонной призмы: $V = S_{\text{осн}} \cdot \text{H}$, где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания призмы.

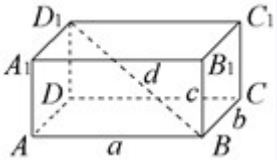
Площадь поверхности призмы: $S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$, где $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности, равная сумме площадей всех граней.



Прямая призма – призма, боковое ребро которой перпендикулярно основанию. Объем: $\text{V}=\text{S}_{\text{ОСН}} \cdot \text{l}$.

Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}}=\text{P} \cdot \text{l}$, где P – периметр основания.

Правильная призма – прямая призма, основание которой – правильный многоугольник.



Параллелепипед – призма, основание которой – параллелограмм. Все грани параллелепипеда являются параллелограммами.

Прямоугольный параллелепипед – призма, все грани которой – прямоугольники.

Свойства диагоналей: $AC_1=BD_1=CA_1=DB_1=d$; $d^2=a^2+b^2+c^2$.

Объем: $V=abc$. **Площадь поверхности**: $S=2\cdot(ab+ac+bc)$.

Куб – призма, все грани которой – квадраты ($a=b=c$). Куб является параллелепипедом и обладает всеми его свойствами.

$d=\sqrt{3}a$; $V=a^3$; $S=6a^2$.

Задача 1. Чему равна полная поверхность прямой треугольной призмы, если ее высота равна 50, а стороны основания 13, 37 и 40?

Решение. Периметр основания призмы равен $P=13+17+40=90$. Площадь боковой поверхности $S_{бок}= 90\cdot50=4500$. Площадь основания найдем по формуле Герона. Его полупериметр $p=45$,

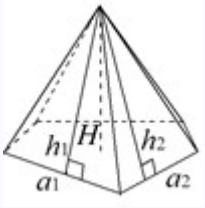
$$S_{осн}=\sqrt{45(45-13)(45-37)(45-40)}=\sqrt{45\cdot32\cdot8\cdot5}=240.$$

$$S_{\text{пп}} = 2 \cdot 240 + 4500 = 4980.$$

Ответ. 4980.

Пирамида – это многогранник, основание которого – многоугольник, а остальные грани – треугольники, имеющие общую вершину.

По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырёхугольные и т. д.



Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

Площадь поверхности:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} Ph = \frac{1}{2} nah$$

.

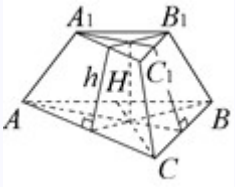
Правильная n-угольная пирамида – пирамида, в основании которой лежит правильный n-угольник, а высота проходит через центр основания. Все боковые ребра правильной пирамиды равны. Все боковые грани – равные между собой равнобедренные треугольники. Высота

h боковой грани называется апофемой. Правильная треугольная пирамида, все ребра которой равны, называется **тетраэдром**.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды:

$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}Ph = \frac{1}{2}nah$, где P – периметр основания.

Усеченной пирамидой называется многогранник, у которого вершинами служат вершины основания и вершины ее сечения плоскостью, параллельной основанию.



Свойства усеченной пирамиды

1. Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники.

2. Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции.

3. Боковые ребра правильной усеченной пирамиды равны и одинаково наклонены к основанию пирамиды.

4. Боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные между собой равнобедренные трапеции и одинаково наклонены к основанию пирамиды.

5. Двугранные углы при боковых ребрах правильной усеченной пирамиды равны.

Плоскость ABC параллельна плоскости $A_1B_1C_1$. Грани ABC и $A_1B_1C_1$ – основания усеченной пирамиды; h – апофема (в правильной пирамиде).

Объем:

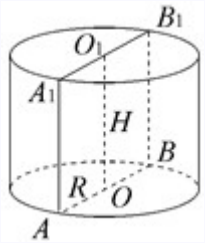
$V = \frac{H}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$, где S_1 и S_2 – площади оснований.

Площадь боковой поверхности: $S = S_1 + S_2 + S$.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды:

$S_{\text{бок}} = \frac{h}{2}\left(P_1 + P_2\right)$, где P_1 и P_2 – периметры оснований.

Цилиндр – это тело вращения, которое получается при вращении прямоугольника вокруг его стороны.



OO_1 – ось цилиндра; A_1ABB_1 – осевое сечение.

Объем: $V = \pi R^2 H$.

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH.$$

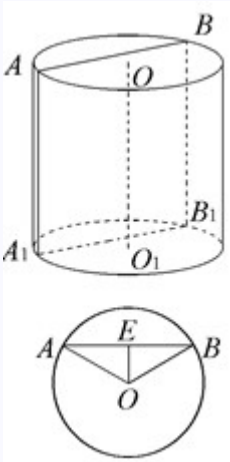
Площадь поверхности:

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi RH.$$

Задача 2. Осевое сечение цилиндра – квадрат со стороной 50. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 7 от нее.

Решение.

Высота и диаметр цилиндра равны 50, его радиус равен 25. Поскольку плоскость параллельна оси OO_1, то она пересекает боковую поверхность цилиндра по прямым AA_1 и BB_1, параллельным OO_1 и перпендикулярным основаниям. Таким образом, сечение, площадь которого требуется



найти, представляет собой прямоугольник, стороны AA_1 и BB_1 которого равны 50.

Расстояние от оси цилиндра до плоскости AA_1B равно длине перпендикуляра OE, опущенного из точки O на прямую AB. Чтобы вычислить длину AB, рассмотрим верхнее основание подробнее. является высотой и, следовательно, медианой равнобедренного треугольника AOB. Таким образом, AE=EB.

В прямоугольном треугольнике OEB гипотенуза OB является радиусом цилиндра и равна 25; катет OE равен 7 по условию задачи. Найдем катет EB:

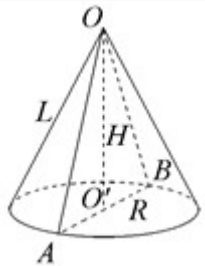
$$EB = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24.$$

Отсюда AB=2·24=48.

Площадь сечения AA_1B_1B равна 48·50=2400.

Ответ. 2400.

Конус – это тело, которое состоит из круга (основания конуса) и точки, не лежащей в плоскости этого круга (вершины конуса) и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются образующими конуса. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.



L – образующая конуса; OO_1 – ось конуса; $\triangle AOB$ - осевое сечение; $\angle AOB$ -угол раствора конуса.

Объем:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

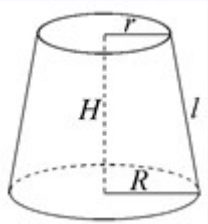
Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = \pi R L.$$

Площадь поверхности:

$$S = \pi R^2 + \pi R L$$

Усеченным конусом называется часть конуса, расположенная между его основанием и плоскостью α, перпендикулярной оси конуса.



Объем:

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$$

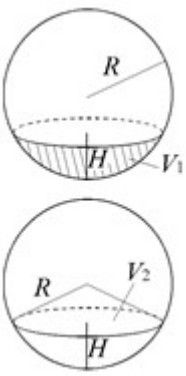
Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = \pi\,(R + r)\,l.$$

Площадь поверхности:

$$S = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi\,(R + r)\,l.$$

Геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от одной и той же точки(центра), называется **сферой**, или шаровой поверхностью.



Геометрическое тело, ограниченное шаровой поверхностью, называется **шаром**.

Объем шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Площадь сферы:

$$S = 4\pi R^2.$$

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая плоскостью.

Объем шарового сегмента:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi H^2 (3R - H).$$

Площадь сферического сегмента:

$$S = 2\pi RH.$$

Шаровым слоем называется часть шара, заключенная между двумя параллельными плоскостями.

Шаровым сектором называется часть шара, состоящая из шарового сегмента и конуса с вершиной в центре шара и основанием, совпадающим с основанием шарового сегмента (шаровой сегмент меньше полушара).

Объем шарового сектора:

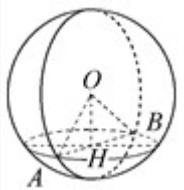
$$V_2 = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Площадь боковой поверхности сектора:

$$V_{\text{бок}} = \pi R\sqrt{2RH - H^2}.$$

Задача 3. Шар, радиус которого равен 13, пересечен плоскостью на расстоянии 10 от центра. Найдите площадь сечения.

Решение.



Проведем осевое сечение шара плоскостью, перпендикулярной той, которая дана в условии задачи. Две плоскости пересекаются по прямой

AB. Искомое сечение является окружностью, диаметр которой равен длине отрезка AB. В плоскости AOB опустим перпендикуляр OH из точки O на прямую AB. Поскольку плоскости перпендикулярны, длина OH и есть расстояние от точки O до заданной плоскости, то есть OH=10.

Рассмотрим прямоугольный треугольник OHB. Его гипотенуза OB является радиусом сферы и равна 13. Найдем катет HB:

$$HB = \sqrt{169 - 100} = \sqrt{69}.$$

Поскольку OH – высота равнобедренного треугольника AOB, то O – середина AB, то есть радиус сечения. Таким образом, площадь сечения равна:

$$S_{\text{сеч.}} = \pi(\sqrt{69})^2 = 69\pi.$$

Ответ: 69π.

Практические занятия 12-13
Контрольно-обучающие вопросы и задания

1. Какое из следующих утверждений верно?

а) любые четыре точки лежат в одной плоскости; б) любые три точки не лежат в одной плоскости; в) любые четыре точки не лежат в одной плоскости; г) через любые три точки проходит плоскость; д) через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна.

2. Сколько общих точек могут иметь две различные плоскости?

а) 2; б) 3; в) несколько; г) бесконечно много; д) бесконечно много или ни одной.

3. Какое из следующих утверждений верно?

а) если две точки окружности лежат в плоскости, то вся окружность лежит в этой плоскости; б) прямая, лежащая в плоскости треугольника, пересекает две его стороны; в) любые две плоскости имеют только одну общую точку; г) через две точки проходит плоскость и притом только одна; д) прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она пересекает две прямые, содержащие стороны треугольника.

4. Выберите верное утверждение.

а) если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая также параллельна данной плоскости; б) если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то другая прямая также пересекает эту плоскость; в) если две прямые параллельны третьей прямой, то они пересекаются; г) если прямая и плоскость не имеют общих точек, то прямая лежит в плоскости; д) прямая и плоскость называются скрещивающимися, если они не имеют общих точек.

5. Прямые a и c скрещиваются с прямой b. Что можно сказать о прямых a и c?

а) параллельны или пересекаются; б) скрещиваются или параллельны; в) взаимное расположение определить точно нельзя; г) пересекаются или скрещиваются; д) совпадают.

6. Из точки M к плоскости α проведены две наклонные, длины которых 18см и 2см. Их проекции на эту плоскость относятся как 3 : 4. Найдите расстояние от точки M до плоскости α.

а) 6см; б) 30см; в) 6см; г) 3см; д) 2см.

7. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания равна 14, боковое ребро равно 3. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону AB под углом 30^0 к основанию.

8. Каждое боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 3, а плоский угол при ее вершине равен 90^0. Найдите объем пирамиды.

9. Металлический шар весом 4 переплавили в конус. Найдите высоту конуса, если известно, что площадь его боковой поверхности в $\sqrt{3}$ раз больше площади основания.

10. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 21, а синус угла наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\frac{4\sqrt{3}}{7}$. Через сторону основания проведена плоскость, перпендикулярная противолежащему боковому ребру. Найдите площадь образовавшегося сечения.

11. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6, а длина бокового ребра равна 9. Найдите объем пирамиды.

12. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь его осевого сечения равна 12.

Задания для самостоятельной работы

1. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами, равными 5 и 12. Высота призмы равна 8. Найдите полную поверхность призмы.

2. В прямой треугольной призме основания равны 36, 29 и 25, а полная поверхность призмы 1620. Найдите высоту призмы.

3. Стороны основания прямой треугольной призмы равны 10, 17 и 21, а ее боковое ребро равно меньшей из высот основания. Найдите объем призмы.

4. Сумма длин всех ребер куба равна 48. Чему равна площадь всех его граней?

5. В прямом параллелепипеде проведено сечение через диагональ нижнего основания и середину непересекающегося с этой диагональю бокового ребра. Расстояние от плоскости сечения до вершины нижнего основания, не лежащей в плоскости сечения, равно 5см. Площадь сечения равна 10см^2. Найти объём параллелепипеда.

6. Ребра треугольной пирамиды длины 4, 5 и 9 взаимно перпендикулярны. Чему равен объем пирамиды?

7. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 3 см, а площадь боковой поверхности 80 см^2. Найти объём пирамиды.

8. В правильной треугольной пирамиде высота равна 4, а апофема равна 5. Найдите сторону основания пирамиды.

9. Высота и радиус основания цилиндра равны, соответственно, 9 и 6. Концы отрезка AB, длиной $\sqrt{113}$, лежат на окружностях верхнего и нижнего оснований. Найдите расстояние от оси цилиндра до отрезка AB.

10. Радиус основания конуса равен 6, а образующая составляет с плоскостью основания угол, равный 30^0. Найдите расстояние от центра основания до образующей.

11. Из точки M вне шара проведена касательная AM к его поверхности. Кратчайшее расстояние от этой точки до поверхности шара равно 6, а до центра шара 15. Найдите длину AM.

12. Стороны треугольника, равные 10, 10 и 12 касаются поверхности шара Найдите радиус шара, если расстояние от центра шара до плоскости треугольника равно 4.

13. Как относятся объемы куба и описанного около него шара?

14. Расстояние от точки K до каждой из вершин квадрата ABCD равно 4см. Найдите расстояние от точки K до плоскости ABC, если AB = 2см.

15. Какое из следующих утверждений неверно?

а) перпендикуляр и наклонная, выходящие из одной точки, имеют равные длины;

б) проекцией прямой на плоскость является точка или прямая;

в) наклонные разной длины, проведенные к плоскости из одной точки, имеют проекции разных длин;

г) прямая, проведенная к плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна к ее проекции;

д) расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется расстоянием между параллельными плоскостями.

ПРИМЕРНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Примерные контрольные работы
Контрольная работа (алгебра)

1. Найдите корень уравнения:

$$\frac{2x}{x+4} + \frac{27}{2x^2+7x-4} = \frac{6}{2x-1} + 1$$

2. Сократите дробь:

$$\frac{y^2-49}{y^2-5y-14}$$

3. Найдите область определения функции: $= \sqrt{\frac{x^2-9}{4-3x-x^2}}$.

4. Известно, что $\log_b 8$ =c, $\log_a 81$ = a и a=27. Найдите b.

5. Найдите число корней уравнения 5-3 sin2x +7sinx -7 cosx =0, принадлежащих отрезку [- π; 1,5 π].

6. Найдите сумму целых решений системы неравенств:

$$\begin{cases} 6 - 2x < 3(x-1) \\ 6 - \frac{x}{2} \geq x \end{cases}$$

Контрольная работа (геометрия)

1. В равнобедренной трапеции большее основание равно 27, боковая сторона равна 17, угол между ними . Найдите меньшее основание.

2. Две окружности радиусов 16 и 9 касаются внешним образом в точке A. К окружностям проведена общая внешняя касательная BC, где B и C – точки касания. Общая касательная, проведенная через точку A, пересекает BC в точке K. Найдите длину AK.

3. Высота правильной треугольной призмы 12 см, а высота основания 5 см. Найдите: а) площадь полной поверхности призмы, б) объем призмы.

4. Радиус основания конуса равен 3 м, а высота 4 м. Найдите объём конуса, образующую и площадь осевого сечения.

5. Объём цилиндра равен 96π см^3, площадь его осевого сечения 48см^2. Найдите площадь сферы, описанной около цилиндра.

6. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC, в котором AB=AC=20. Сторона AC=24, длина диагонали B_1C=30. Найти: а) высоту призмы; б) синус угла наклона B_1C к плоскости ABC; в) косинус угла наклона B_1C к грани AA_1C_1C; г) площадь сечения призмы плоскостью AB_1C; д) тангенс угла наклона этого сечения к плоскости основания; е) расстояние между прямыми AA_1 и B_1C.

ЛИТЕРАТУРА

1. Василевский, А.Б. Актуальные проблемы дифференцированного обучения / А.Б. Василевский, Л.Н. Рожина, Н.А. Цыркун, и др.: Под ред. Л.Н. Рожиной. – Минск.: Нар. асвета, 1992. – 191 с.

2. Ананчанка, К. А. Агульная методыка выкладання матэматыкі ў школе : вуч. дапаможнік / К. А. Ананчанка. – Мінск : Універсітэцкае, 1997. – 94 с.

3. Атанасян, Л. С. Геометрия : учеб. пособие : в 2 ч. / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – М. : Просвещение, 1986. – Ч. 1 – 336 с.

4. Атанасян, Л.С. Геометрия : учеб. пособие : в 2 ч. / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – М. : Просвещение, 1987. – Ч. 2 – 352 с.

5. Василевский, А.Б. Обучение решению задач по математике / А.Б. Василевский. – Минск : Выш. шк., 1998. – 192 с.

6. Действующие учебники и учебные пособия по математике для средней школы.

7. Метельский Н.В. Дидактика математики. – Минск: Изд-во БГУ, 1982–254 с.

8. Погорелов, А.В. Геометрия : учеб. пособие / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1983. – 288 с.

9. Рогановский, Н.М. Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие / Н.М. Рогановский. – Минск : Выш. шк., 1990. – 267 с.

10. Столяр, А.А. Педагогика математики : учеб. пособие / А.А. Столяр. – Минск : Выш. шк., 1986. – 414 с.