

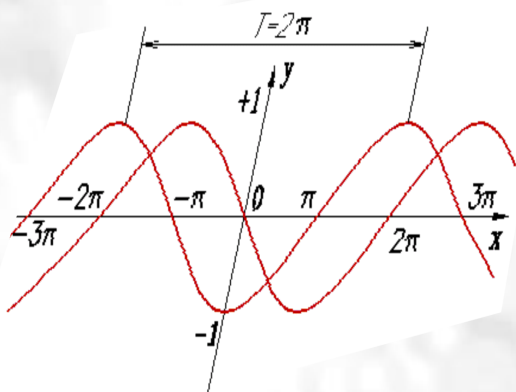
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Т. В. Пивоварук

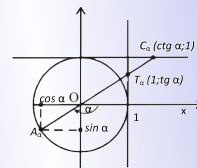
УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Элементарная математика и практикум по решению задач. Тригонометрия

*для студентов заочной формы получения образования
математического факультета*



Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2012



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



1

Закреть

Автор:

Пивоварук Тамара Васильевна – доцент кафедры методики преподавания математики и информатики, кандидат педагогических наук, доцент

Рецензенты:

Кафедра «Высшая математика» учреждения образования
«Брестский государственный технический университет»

И. Н. Климашевская – доцент кафедр математики и дифференциальных уравнений, кандидат физико-математических наук, доцент

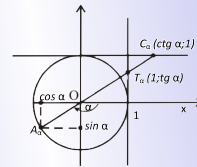
Редактор:

С. Н. Ткач – старший преподаватель кафедры информатики и прикладной математики учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Учебно-методический комплекс предназначен для проведения занятий по дисциплине «Элементарная математика и практикум по решению задач». Его содержание соответствует типовой учебной программе, утвержденной Министерством образования Республики Беларусь в 2008 году, и новым учебным планам специальности 1-02 05 03 «Математика».

Комплекс включает содержание тригонометрического материала программы курса, примерный тематический план, теоретический материал по темам, разработки практических занятий, решение нулевого варианта контрольной работы, задания для контрольной работы, тесты, вопросы к зачёту, список литературы для самостоятельной работы.

Предназначен для студентов заочной формы получения образования математического факультета.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

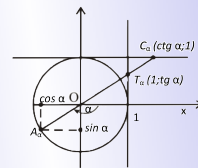


2

Закреть

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
1. Содержание учебного материала	6
2. Примерный тематический план изучения тригонометрии	7
3. Теоретический материал:	9
Тема 1 Тождественные преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции	9
Тема 2 Методы доказательства тригонометрических неравенств	27
Тема 3 Тождественные преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции	40
Тема 4 Решение тригонометрических уравнений, имеющих определенные приемы решения	50
Тема 5 Общие подходы к решению тригонометрических уравнений и их систем	64
Тема 6 Способы решения тригонометрических неравенств и их систем	85
Тема 7 Решение уравнений и неравенств, содержащих $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$	103
Тема 8 Графики тригонометрических функций и уравнений	111
Тема 9 Основные приемы решения тригонометрических уравнений и неравенств с параметрами	126



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

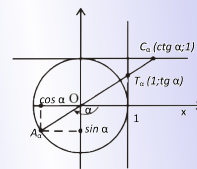
Назад



3

Заккрыть

4. Практические занятия	138
5. Требования к оформлению контрольной работы	144
6. Нулевой вариант контрольной работы	146
7. Задания для контрольной работы	159
7.1 Тождественные преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции	159
7.2 Доказательство тригонометрических тождеств и неравенств	161
7.3 Тождественные преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции	163
7.4 Тригонометрические уравнения	165
7.5 Тригонометрические неравенства	167
7.6 Системы тригонометрических уравнений	169
7.7 Преобразование графиков тригонометрических функций	172
7.8 Уравнения и неравенства с параметрами	174
Приложение 1. Справочные материалы	176
Приложение 2. Функции $y=\sec x$, $y=\operatorname{cosec} x$ и обратные им	186
Приложение 3. Вопросы к зачёту	190
Приложение 4. Тесты	193
Литература	203



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



4

Заккрыть

Предисловие

Учебно-методический комплекс составлен в соответствии с типовой программой по дисциплине «Элементарная математика и практикум по решению задач» для студентов специальностей 1-02 05 01 «Математика»; 1-02 05 03 «Математика. Дополнительная специальность», утвержденной Министерством образования Республики Беларусь 27 июня 2008 года.

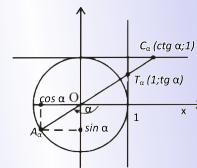
Согласно учебному плану для студентов заочной формы обучения на изучение раздела «Тригонометрия» отводится 12 аудиторных часов, в том числе 4 лекционных, 8 практических; предусмотрены контрольная работа и зачёт.

В работе содержится необходимый теоретический материал и методические рекомендации по его изучению. На задачах различного уровня сложности проиллюстрированы основные методы и приемы их решения, владение которыми поможет формированию профессиональных умений будущего учителя математики.

Для самоконтроля деятельности студентов по главным темам курса предлагаются тестовые задания с ответами.

Комплекс содержит задания для контрольной работы по восьми важнейшим темам курса тригонометрии. Сформулированы требования к оформлению контрольной работы и предложено решение нулевого варианта.

При разработке комплекса использовались учебники по курсу «Практикум по решению математических задач», варианты централизованного тестирования за все предшествующие годы, действующие школьные учебники алгебры.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



5

Заккрыть

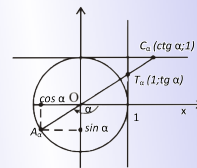
1. Содержание учебного материала

Тема 1. **Тригонометрические функции. Обратные тригонометрические функции и их графики.** Основные тригонометрические функции, их свойства и **графики**. Основные обратные тригонометрические функции, их свойства и **графики**.

Тема 2. **Тождественные преобразования тригонометрических выражений.** Основные тождества и соотношения, связанные с тригонометрическими и **обратными тригонометрическими** функциями. Доказательство тригонометрических **тождеств** и **неравенств**. Применение формул тригонометрии к решению задач.

Тема 3. **Решение тригонометрических уравнений и неравенств.** Формулы решения простейших тригонометрических уравнений. Способы решения тригонометрических неравенств. Различные типы тригонометрических **уравнений**. Применение свойств тригонометрических функций к решению уравнений и неравенств.

Тема 4. **Графики функций и уравнений.** **Графики тригонометрических функций** и уравнений. Основные преобразования графиков **функций** (растяжение, сжатие, параллельный перенос и др.). Построение графиков сложных **функций**.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

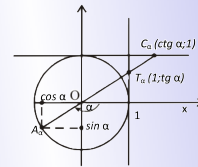


6

Заккрыть

2. Примерный тематический план изучения тригонометрии

	Тематика занятий	ЛК	ПР
	Тригонометрия (12 часов)	4	8
1	Тригонометрические функции. Обратные тригонометрические функции и их графики		2
1.1	Основные тригонометрические функции, их свойства и графики.		
1.2	Основные обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.		
2	Тождественные преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции.	2	
2.1	Тригонометрические тождества и формулы, особенности их применения.		
2.2	Основные способы преобразования тригонометрических выражений.		
2.3	Доказательства тригонометрических тождеств.		
2.4	Методы доказательства тригонометрических неравенств.		
3.	Тождественные преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции.		2
3.1	Понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса и вычисление их значений.		
3.2	Опорные тождества, и схема их доказательства.		
3.3	Доказательство тождеств и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции.		



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

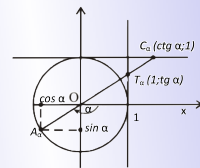
Назад



7

Заккрыть

	Тематика занятий	ЛК	ПР
4	Решение тригонометрических уравнений и их систем.		2
4.1	Простейшие тригонометрические уравнения. Формулы корней.		
4.2	Методы решения основных видов тригонометрических уравнений: однородных уравнений первой, второй и третьей степеней; специальные функциональные замены; теоремы о равносильности; правила и способы отбора корней.		
4.3	Основные приемы решения систем тригонометрических уравнений.		
5.	Способы решения тригонометрических неравенств и их систем.	2	2
5.1	Алгоритмы решения тригонометрических неравенств.		
5.2	Универсальный метод решения неравенств.		
5.3	Нестандартные методы решения тригонометрических неравенств.		
5.4	Решение систем тригонометрических неравенств.		



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



8

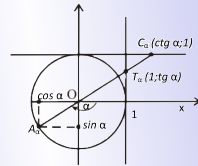
Закреть

Тема 1

Тождественные преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции

План

1. Определение понятий «тригонометрическое выражение», «тождественное преобразование тригонометрического выражения».
2. Основные способы преобразования тригонометрических выражений.
3. Доказательство тригонометрических тождеств.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



9

Закрывать

1. Определение понятий «тригонометрическое выражение», «тождественное преобразование тригонометрического выражения». Основные виды тождественных преобразований тригонометрических выражений.

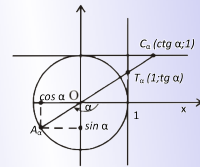
Определение. Тригонометрическим выражением называется выражение, которое содержит переменные под знаком тригонометрических функций.

Например, выражения $\cos x, t - 2 + \cos^2 2t$ являются тригонометрическими. Выражения $\operatorname{tg}^2 2 + 7 \cos \frac{\pi}{8} + 3, y^2 - \cos \frac{12}{13} + 1$, тригонометрическими не являются: первое из них не содержит переменных, второе, хотя и содержит переменную y , но не под знаком тригонометрической функции.

Определение. Замена тригонометрического выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве, называется *тождественным преобразованием* данного выражения на этом множестве.

Все задания на преобразование тригонометрических выражений можно условно разделить на 3 вида:

- найти значение выражения;
- вычислить при заданных условиях;
- найти наибольшее или наименьшее значение функции.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

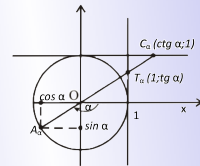


10

Закреть

Выполнению заданий способствуют общие приемы преобразования выражений:

- 1) переход к одному углу;
- 2) переход к одной функции (чаще с использованием тождеств $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$).



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



11

Закрыть

2. Основные способы преобразования тригонометрических выражений.

К основным способам преобразования **тригонометрических выражений** относятся следующие:

2.1 Введение вспомогательного угла.

Выражения вида $a \sin x + b \cos x$ преобразовываются с помощью введения вспомогательного угла.

Суть приема заключается в следующем: разделим и умножим данное выражение на $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$, получим

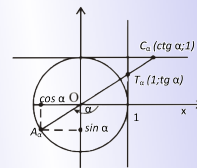
$$\sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right).$$

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$, то существует такой вспомогательный угол ϕ , для которого выполняются равенства

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ либо } \sin \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Значит, выражение запишется в виде:

$$(\cos \phi \sin x + \sin \phi \cos x) \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi) \text{ либо} \\ (\sin \phi \sin x + \cos \phi \cos x) \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \phi).$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



12

Заккрыть

Пример 1.1. Разложите на множители выражение $\sqrt{3} \sin x - \cos x$.

Решение.

В заданном выражении $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, тогда $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$.

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \sin x - \cos x &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \sin x - \sin \frac{\pi}{6} \cos x \right) = \\ &= 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right).\end{aligned}$$

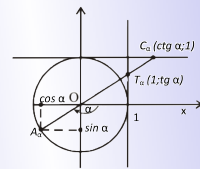
Пример 1.2. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{\sin 170^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 100^\circ}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin 170^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 100^\circ} &= \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \\ &= \frac{2 \left(\frac{1}{2} \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ \right)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2 \sin (30^\circ - 10^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = 4.\end{aligned}$$

Ответ: 4.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



13

Закрыть

2.2 Умножение на выражение, приводящее к синусу двойного аргумента.

Чаще всего так преобразовывают выражения, записанные произведением или суммой косинусов или синусов углов: аргумент каждого множителя (слагаемого), как правило, в 2 раза меньше(больше) аргумента последующего.

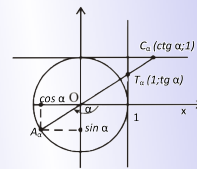
Пример 1.3. Найдите значение выражения

$$8 \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} 8 \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} &= \frac{8 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{4 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right)}{\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = -1 \end{aligned}$$

Ответ: -1.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



14

Закреть

2.3 Деление числителя и знаменателя на тригонометрическое выражение, значение которого отлично от нуля.

Таким приемом преобразовываются выражения вида:

$$\frac{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x}{d \cos^2 x + e \sin x \cos x + f \sin^2 x}$$

Чтобы упростить данное выражение, необходимо умножить и разделить числитель и знаменатель на одно и то же выражение, например, $\cos^2 x \neq 0$ или $\sin^2 x \neq 0$. В результате мы получим выражение, которое содержит только тангенсы или котангенсы углов. Если степень тригонометрического выражения равна k , то соответственно нужно умножить и разделить на $\sin^k x$ или $\cos^k x$.

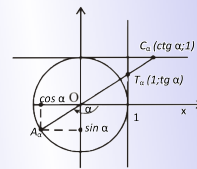
Многие задания, в которых используется данное преобразование, сводятся к нахождению значения выражения при заданных значениях тангенса или котангенса.

Пример 1.4. Вычислите $\frac{5 \sin \alpha + 7 \cos \alpha}{6 \cos \alpha - 3 \sin \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{15}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{5 \sin \alpha + 7 \cos \alpha}{6 \cos \alpha - 3 \sin \alpha} &= \frac{5 \operatorname{tg} \alpha + 7}{6 - 3 \operatorname{tg} \alpha} = \left[\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{15} \right] = \\ &= \frac{5 \cdot \frac{4}{15} + 7}{6 - 3 \cdot \frac{4}{15}} = \frac{20 + 105}{90 - 12} = \frac{125}{78}. \end{aligned}$$

Ответ: $1\frac{47}{78}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



15

Заккрыть

2.4 Выделение полного квадрата.

Данный прием часто используется при нахождении экстремумов функции, а также при преобразовании выражений, содержащих четные положительные степени косинусов и синусов.

Пример 1.5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

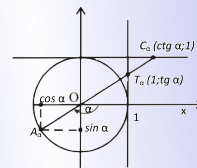
$$y = 9 + 4\sin x - \cos^2 x.$$

Решение.

Заменим $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, выделим полный квадрат и оценим значение полученного выражения:

$$\begin{aligned} y &= 9 + 4\sin x - \cos^2 x = 9 + 4\sin x - (1 - \sin^2 x) = \sin^2 x + 4\sin x + 8 = \\ &= (\sin x + 2)^2 + 4; \\ -1 &\leq \sin x \leq 1, \\ 1 &\leq \sin x + 2 \leq 3, \\ 1 &\leq (\sin x + 2)^2 \leq 9, \\ 5 &\leq (\sin x + 2)^2 + 4 \leq 13. \end{aligned}$$

Ответ: 13;5.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



16

Заккрыть

2.5 Использование тригонометрических формул.

При использовании формул следует помнить, что применение некоторых из них приводит к изменению области определения выражения. Например, переходя к тангенсу по формуле $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, мы сужаем область определения, так как выражение в левой части равенства определено при $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, а в правой части – при $x \neq \pi k$ и $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Осуществляя переход от тангенса к котангенсу, мы расширяем область определения выражения.

При упрощении тригонометрических выражений часто используются формулы тройного аргумента и формула $1 \pm \sin 2x = (\sin x \pm \cos x)^2$.

2.6 Переход к алгебраическим уравнениям.

Пример 1.6. Вычислите $\sin 18^\circ$.

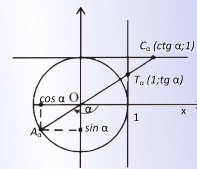
Решение.

1 способ.

$$\begin{aligned}\sin 18^\circ &= \frac{2\sin 18^\circ \cos 18^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ \cos 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ \cos 36^\circ} = \\ &= \frac{\sin 72^\circ}{4\cos (90^\circ - 72^\circ) \cos 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{4\sin 72^\circ \cos 36^\circ} = \frac{1}{4\cos 36^\circ} = \frac{1}{4(1 - 2\sin^2 18^\circ)}.\end{aligned}$$

Введём обозначение $\sin 18^\circ = y$ и получим уравнение

$$4y(1 - 2y^2) = 1, 8y^3 - 4y + 1 = 0,$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



17

Закрывать

$$\left(y - \frac{1}{2}\right) (8y^2 + 4y - 2) = 0,$$

$$y = \frac{1}{2} \text{ или } 8y^2 + 4y - 2 = 0;$$

$$y = \frac{1}{2}; y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}; y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4};$$

$$\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

2 способ.

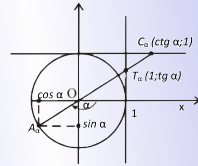
Воспользуемся формулой $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$:

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ &= \frac{2\sin 18^\circ \cos 18^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{\sin (90^\circ - 54^\circ)}{2\cos 18^\circ} = \frac{\cos 54^\circ}{2\cos 18^\circ} = \\ &= \frac{4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{1}{2} (4\cos^2 18^\circ - 3) = \frac{1}{2} (4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3) = \\ &= \frac{1}{2} (1 - 4\sin^2 18^\circ) \end{aligned}$$

Введем обозначение $\sin 18^\circ = y$ и получим уравнение

$$2y = 1 - 4y^2;$$

$$4y^2 + 2y - 1 = 0;$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



18

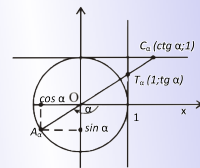
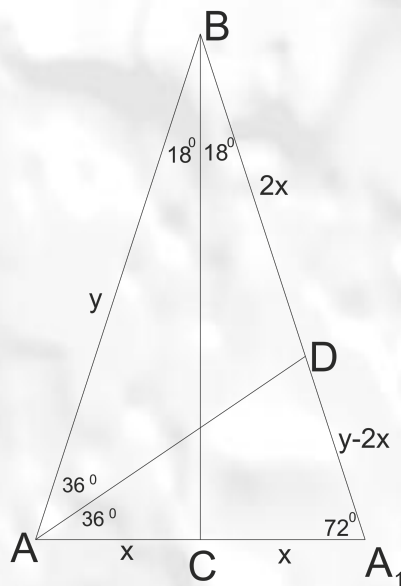
Закрыть

$$y = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \text{ или } y = \frac{-1+\sqrt{5}}{4};$$

$$\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

3 способ (геометрический).

Построим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) с острым углом B , равным 18° , и ему симметричный относительно прямой BC треугольник A_1BC . Проведем биссектрису AD угла A .



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



19

Закреть

Пусть $AC=x$, $AB=y$, тогда $\sin B = \sin 18^\circ = \frac{x}{y}$. Заметим, что ΔA_1AD и ΔADB - равнобедренные, тогда по свойству биссектрисы угла

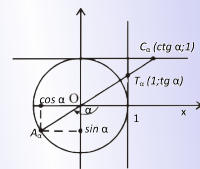
$$\frac{DA_1}{BD} = \frac{AA_1}{AB};$$

$$\frac{y - 2x}{2x} = \frac{2x}{y};$$

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} - 2}{2} = 2\frac{x}{y};$$

$$\frac{1}{\sin 18^\circ} - 2 = 4\sin 18^\circ.$$

В итоге приходим к уравнению $4t^2 + 2t - 1 = 0$, где $t = \sin 18^\circ$ (решение его см. выше).



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



20

Закрыть

3. Доказательство тригонометрических тождеств.

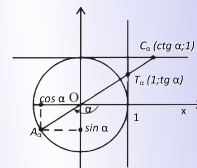
Определение. Тождеством называется равенство, верное при любых допустимых значениях переменных.

Способы доказательства тождеств:

- преобразование выражения, стоящего в левой части тождества, к виду выражения, стоящего в правой части;
- преобразование выражения, стоящего в правой части тождества, к виду выражения, стоящего в левой части;
- преобразование выражений, стоящих в левой правой частях тождества, к выражению одного и того же вида;
- доказательство факта, что разность выражений, стоящих в левой правой частях, равна нулю.

При доказательстве тождеств используются приемы **тождественного преобразования** выражений, указанные выше. Кроме того, полезно использовать следующие методы:

- метод неопределенных коэффициентов;
- методы математического анализа, связанные с понятием производной;
- метод математической индукции.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



21

Заккрыть

Пример 1.7. Докажите, что если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$, то $-2 \sin^3 \alpha - 2 \cos^3 \alpha - 6 \sin \alpha \cos \alpha + 7 \cos \alpha + 7 \sin \alpha - 2 = 2\frac{1}{27}$.

Доказательство.

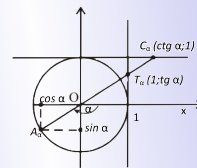
Метод неопределенных коэффициентов основан на том, что левая часть данного выражения представляется как линейная комбинация степеней выражения $\sin \alpha + \cos \alpha$:

$$\begin{aligned} & -2 \sin^3 \alpha - 2 \cos^3 \alpha - 6 \sin \alpha \cos \alpha + 7 \cos \alpha + 7 \sin \alpha - 2 = \\ & = A (\sin \alpha + \cos \alpha)^3 + B (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + C (\sin \alpha + \cos \alpha) + D = \\ & = 2A \sin^3 \alpha - 2A \cos^3 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + (3A + C) \sin \alpha + \\ & \quad + (3A + C) \cos \alpha + B + D . \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях выражения, имеющих одинаковую буквенную часть, и решим систему:

$$\begin{cases} -2A = -2, \\ 2B = -6, \\ 3A + C = 7, \\ B + D = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = -3, \\ C = 4, \\ D = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{Таким образом, } -2 \sin^3 \alpha - 2 \cos^3 \alpha - 6 \sin \alpha \cos \alpha + 7 \cos \alpha + 7 \sin \alpha - 2 = \\ & = (\sin \alpha + \cos \alpha)^3 - 3 (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + 4 (\sin \alpha + \cos \alpha) + 1 = 2\frac{1}{27} . \end{aligned}$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

◀

▶

◀◀

▶▶

22

Закреть

Покажем пример использования свойств непрерывной функции:
непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция постоянна на нем тогда и только тогда, когда ее производная равна нулю в любой точке отрезка $[a, b]$ (или хотя бы интервала (a, b)).

Пример 1.8. Докажите тождество $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$.

Доказательство.

Перенесем $\frac{3}{8} \cos 4\alpha$ в левую часть:

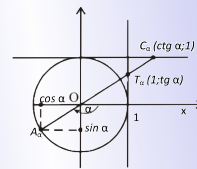
$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - \frac{3}{8} \cos 4\alpha = \frac{5}{8}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - \frac{3}{8} \cos 4\alpha,$$

$D(f) = R$, f — непрерывная функция. Найдём производную:

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \left(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - \frac{3}{8} \cos 4\alpha \right)' = \\ &= 6 \sin^5 \alpha \cos \alpha - 6 \cos^5 \alpha \sin \alpha + \frac{3 \cdot 4}{8} \sin 4\alpha = \\ &= 6 \sin \alpha \cos \alpha (\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha) + \frac{3}{2} \sin 4\alpha = \end{aligned}$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



23

Закрывать

$$\begin{aligned}
 &= 6 \sin \alpha \cos \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \frac{3}{2} \sin 4\alpha = \\
 &= -3 \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \frac{3}{2} \sin 4\alpha = -\frac{3}{2} \sin 4\alpha + \frac{3}{2} \sin 4\alpha = 0
 \end{aligned}$$

Следовательно, рассматриваемая функция постоянна на $\mathbb{R}$ для любого угла α . Пусть $\alpha = 0$, тогда $f(\alpha) = f(0) = 0 + 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$. Таким образом,

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - \frac{3}{8} \cos 4\alpha = \frac{5}{8},$$

откуда получаем исходное тождество.

Проиллюстрируем использование метода математической индукции для доказательства тождеств на следующем примере.

Пример 1.9. Докажите тождество

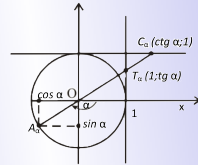
$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha - \dots - 2^n \operatorname{tg} 2^n \alpha = 2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} \alpha, n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство.

1. Проверим истинность равенства при $n=0$, $n=1$.

При $n=0$ тождество примет вид $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha$. Преобразуя правую часть, получим

$$2 \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{2}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



24

Заккрыть

При $n=1$ имеем тождество

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha = 4 \operatorname{ctg} 4\alpha.$$

Преобразуем его левую часть и получим

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha &= 2 \operatorname{ctg} 2\alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha = 2 (\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha) = \\ &= 2 \left(\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \right) = 2 \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = 2 \frac{\cos 4\alpha}{\frac{1}{2} \sin 4\alpha} = 4 \operatorname{ctg} 4\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение доказано при $n=0$ и $n=1$.

2. Предположим, что утверждение верно для $n = k, k \geq 1, k \in N$:

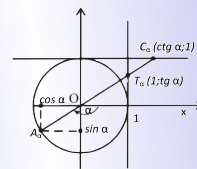
$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha - \dots - 2^k \operatorname{tg} 2^k \alpha = 2^{k+1} \operatorname{ctg} 2^{k+1} \alpha.$$

3. Докажем что утверждение справедливо для $n=k+1$, то есть:

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha - \dots - 2^{k+1} \operatorname{tg} 2^{k+1} \alpha = 2^{k+2} \operatorname{ctg} 2^{k+2} \alpha.$$

Преобразуя левую часть равенства, получим

$$\begin{aligned} &\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha - \dots - 2^{k+1} \operatorname{tg} 2^{k+1} \alpha = \\ &= (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha - \dots - 2^k \operatorname{tg} 2^k \alpha) - 2^{k+1} \operatorname{tg} 2^{k+1} \alpha = \end{aligned}$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



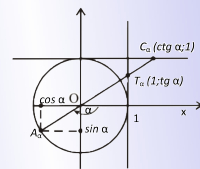
25

Заккрыть

$$\begin{aligned}
 &= 2^{k+1} \operatorname{ctg} 2^{k+1} \alpha - 2^{k+1} \operatorname{tg} 2^{k+1} \alpha = 2^{k+1} (\operatorname{ctg} 2^{k+1} \alpha - \operatorname{tg} 2^{k+1} \alpha) = \\
 &= 2^{k+1} \frac{\cos^2 2^{k+1} \alpha - \sin^2 2^{k+1} \alpha}{\sin 2^{k+1} \alpha \cos 2^{k+1} \alpha} = 2^{k+1} \frac{\cos 2^{k+2} \alpha}{\frac{1}{2} \sin 2^{k+2} \alpha} = 2^{k+2} \operatorname{ctg} 2^{k+2} \alpha.
 \end{aligned}$$

На основании принципа математической индукции заключаем, что утверждение справедливо.

Закрепить материал можно по тестам, данным в приложении.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



26

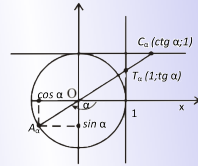
Закрыть

Тема 2

Методы доказательства тригонометрических неравенств

План

1. Понятие «неравенство», методы решения неравенств.
2. Доказательство неравенств методом «от противного», аналитико-синтетическим методом и методом математической индукции.
3. Использование свойств функций для доказательства тригонометрических неравенств.
4. Применение геометрического способа доказательства неравенств.
5. Использование векторного метода доказательства неравенств.
6. Графический метод доказательства неравенств.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



27

Заккрыть

1. Понятие «неравенство», методы решения неравенств.

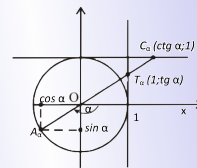
Определение. Под *неравенством* понимают два выражения (числовые и буквенные), соединенные знаками $<, >, \geq, \leq$.

При доказательстве тригонометрических неравенств используются те же приемы, что и при доказательстве алгебраических неравенств.

Вместе с тем в тригонометрии значительно богаче и разнообразнее спектр применяемых математических методов.

К ним относятся:

- метод от противного;
- аналитико-синтетический метод;
- методы математического анализа (ограниченность функций $y = \sin x, y = \cos x$, четность, периодичность, монотонность всех тригонометрических функций на каждом из промежутков их области определения, достаточные признаки экстремума и др.);
- метод математической индукции;
- элементы геометрии;
- векторная алгебра;
- графический метод.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



28

Заккрыть

2. Доказательство неравенств методом «от противного», аналитико-синтетическим методом и методом математической индукции.

Сущность метода от противного состоит в следующем: предполагая противоположное тому, что следует доказать, приходим к противоречию с условием или с известными фактами.

Пример 2.1. Докажите неравенство $\cos \alpha + 3 \cos 3\alpha + 6 \cos 6\alpha \geq -7\frac{3}{16}$.

Доказательство.

Пусть для некоторого α , $\cos \alpha + 3 \cos 3\alpha + 6 \cos 6\alpha < -7\frac{3}{16}$.

Проведем следующие преобразования:

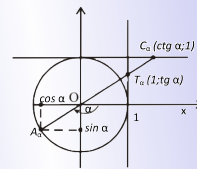
$$\cos \alpha + 3 \cos 3\alpha + 6 (\cos 6\alpha + 1) < -1\frac{3}{16};$$

$$\cos \alpha + 3 (\cos 3\alpha + 4 \cos^2 3\alpha) < -1\frac{3}{16};$$

$$3(4 \cos^2 3\alpha + \cos 3\alpha + \frac{1}{16}) + \cos \alpha < -1;$$

$$3(2 \cos 3\alpha + \frac{1}{4})^2 + \cos \alpha < -1 - \text{ложно.}$$

Значит, предположение неверно. Исходное неравенство доказано.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



29

Заккрыть

Следующее неравенство докажем методом математической индукции.

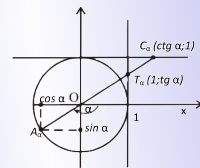
Пример 2.2. Докажите, что $|\sin nx| \leq n|\sin x|$, где $n \in N$.

Доказательство.

1. При $n=1$ неравенство $|\sin x| \leq |\sin x|$ выполняется.
2. Пусть неравенство верно для $n=k$, то есть $|\sin kx| \leq k|\sin x|$.
3. Докажем истинность неравенства для $n=k+1$:

$$\begin{aligned} |\sin(k+1)x| &= |\sin(kx+x)| = \\ &= |\sin kx \cos x + \cos kx \sin x| \leq |\sin kx| |\cos x| + |\cos kx| |\sin x| \leq \\ &\leq |\sin kx| + |\sin x| \leq k|\sin x| + |\sin x| = (k+1)|\sin x|. \end{aligned}$$

Значит, $|\sin nx| \leq n|\sin x|$ при $n \in N$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



30

Закреть

Сущность аналитико-синтетического метода: с помощью преобразований доказываемое неравенство выводят из некоторых известных *опорных* неравенств.

В курсе алгебры рассматривались следующие неравенства:

$$a^2 \geq 0, \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 2, \text{ где } ab > 0;$$

$$ax^2 + bx + c > 0, \text{ где } a > 0, D < 0;$$

$$ax^2 + bx + c < 0, \text{ где } a < 0, D < 0;$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \text{ где } a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0, n \in N \text{ (неравенство Коши)}.$$

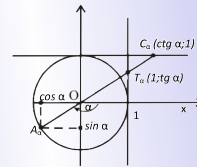
В курсе тригонометрии дополнительно используются неравенства:

$$|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1,$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x (0 < x < \frac{\pi}{2}),$$

$$|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(\text{частный случай } |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}).$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



31

Заккрыть

Пример 2.3. Докажите, что если

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ и } \alpha, \beta, \gamma > 0, \text{ то } \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \geq 6.$$

Доказательство.

Так как $\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} > 0, \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} > 0, \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} > 0$, то применимо **неравенство**

Коши:

$$\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}}} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 6.$$

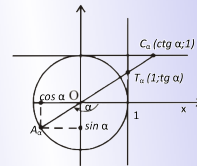
Доказательство неравенства $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$ приводится **ниже**.

Обычно при доказательстве неравенств заданные ограничения на переменные мы использовали в процессе преобразования выражений, входящих в неравенство. Вместе с тем иногда полезно рассуждать, исходя из заданного ограничения, считая его базовым неравенством.

Пример 2.4. Докажите, что $\operatorname{tg} 2x > 2 \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Доказательство.

По условию $0 < x < \frac{\pi}{4}$, поэтому, в силу возрастания функции $y = \operatorname{tg} x$ на заданном промежутке, $0 < \operatorname{tg} x < 1$, а значит,



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



32

Закреть

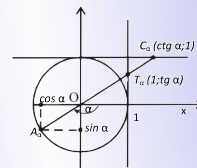
$$0 < \operatorname{tg}^2 x < 1,$$

$$-1 < -\operatorname{tg}^2 x < 0,$$

$$0 < 1 - \operatorname{tg}^2 x < 1.$$

Из последнего неравенства следует, что $\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} > 1$, поэтому

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} > 2 \operatorname{tg} x.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



33

Закреть

3. Использование свойств функций для доказательства тригонометрических неравенств.

Проиллюстрируем использование методов математического анализа для доказательства неравенств: составим функцию, найдем ее экстремум, который позволит оценить выражение, содержащееся в левой или правой частях неравенства.

Пример 2.5. Докажите, что если

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ и } \alpha, \beta, \gamma > 0, \text{ то } \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Доказательство.

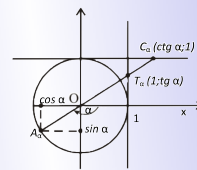
Преобразуем левую часть неравенства следующим образом:

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$\text{так как } \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \leq 1, \sin \frac{\alpha}{2} > 0, \text{ а } \cos \frac{\beta + \gamma}{2} = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x(1 - x)$, где $x = \sin \frac{\alpha}{2}, 0 \leq x \leq 1$, и найдем ее максимум. Это можно сделать, используя производную либо рассматривая график квадратичной функции:

а) функция $f(x) = x(1 - x)$ определена на промежутке $[0; 1]$; производная $f'(x) = 1 - 2x$, $f'(x) = 0$ при $x = \frac{1}{2}$ (критическая точка);



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



34

Заккрыть

находим значение функции в критической точке и на концах промежутка: $f(0) = 0, f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$; значит, наибольшее значение функции равно $\frac{1}{4}$;

б) $f(x) = x(1 - x) = -x^2 + x$: графиком является парабола, ветви которой направлены вниз, поэтому наибольшего значения функция достигает в вершине, то есть при $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$; в этом случае $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Таким образом, $\sin \frac{\alpha}{2}(1 - \sin \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{1}{4}$.

Возвращаясь к **исходному неравенству**, получим:

$$\frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2}(1 - \sin \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Пример 2.6. Докажите, что $-4 \leq \cos 2x + 3 \sin x \leq 2\frac{1}{8}$.

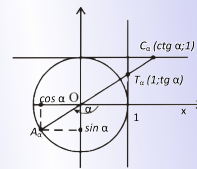
Доказательство.

Преобразуем выражение $\cos 2x + 3 \sin x$, заменив $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$, и введем замену $\sin x = t, |t| \leq 1$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 1 - 2t^2 + 3t$ на отрезке $[-1; 1]$. Найдем критические точки: $f'(t) = -4t + 3, -4t + 3 = 0, t = \frac{3}{4}$ - критическая точка.

Сравним значения функции в критической точке и на концах промежутка: $f(\frac{3}{4}) = 2\frac{1}{8}, f(-1) = -4, f(1) = 2$.

Таким образом $-4 \leq f(t) \leq 2\frac{1}{8}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



35

Закреть

4. Применение геометрического способа доказательства неравенств.

При решении задач данным способом используются свойства геометрических фигур.

Неравенство $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$ можно доказать, используя следующие соображения: так как $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ и $\alpha, \beta, \gamma > 0$, то α, β, γ могут быть углами некоторого треугольника. В таком случае возможно использование различных формул геометрии, устанавливающих соотношения между сторонами и углами треугольника.

Так, по теореме косинусов $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Преобразуем выражение:

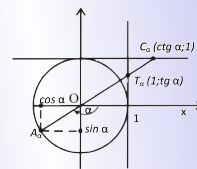
$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) - \frac{a^2}{2bc} \geq \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{a^2}{2bc} = 1 - \frac{a^2}{2bc};$$

$$1 - \cos \alpha \leq \frac{a^2}{2bc}, \quad 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a^2}{2bc}, \quad \text{откуда} \quad \sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Аналогично можно показать, что $\sin \frac{\beta}{2} \leq \frac{b}{2\sqrt{ac}}, \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{c}{2\sqrt{ab}}.$

Перемножим последние три неравенства:

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{abc}{8\sqrt{a^2 b^2 c^2}} = \frac{1}{8}.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



36

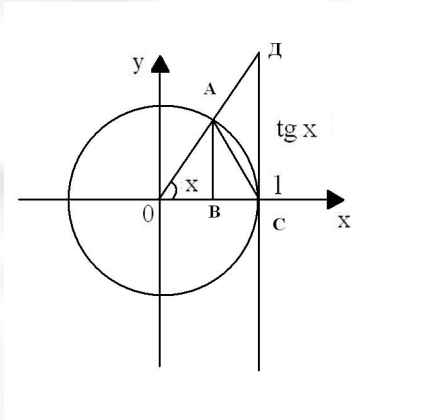
Заккрыть

Проиллюстрируем использование единичной окружности для доказательства следующего тригонометрического неравенства.

Пример 2.7. Докажите, что

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

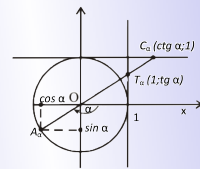
Доказательство. Нарисуем единичную окружность и отметим на рисунке $\angle x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$.



$\angle AOC = x$ – центральный угол, который измеряется длиной дуги AC , $AB = \sin x$, в треугольнике ABC $AB = \sin x < AC < \cup AC = x$.
Итак, $x > \sin x$.

$S_{\text{сектора } AOC} < S_{DOC}$, $\frac{\pi R^2}{2\pi} \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x$, откуда $x < \operatorname{tg} x$.

Следовательно, $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

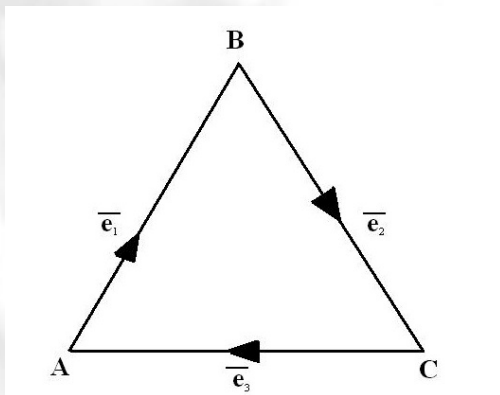


37

Заккрыть

5. Использование векторного метода доказательства неравенств.

Пример 2.8. Докажите, что $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$, где $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

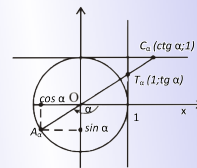


Для доказательства на сторонах треугольника построим единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, суммой их является некоторый вектор $\vec{d} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Возведем в квадрат обе части равенства, тогда

$$\vec{d}^2 = \vec{e}_1^2 + \vec{e}_2^2 + \vec{e}_3^2 + 2\vec{e}_1\vec{e}_2 + 2\vec{e}_2\vec{e}_3 + 2\vec{e}_1\vec{e}_3,$$

$$d^2 = 1 + 1 + 1 + 2\cos(\pi - B) + 2\cos(\pi - A) + 2\cos(\pi - C), d^2 \geq 0,$$

поэтому $3 - 2\cos B - 2\cos A - 2\cos C \geq 0$, откуда $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.



кафедра

методики
преподавания
математики
и информатики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



38

Закреть

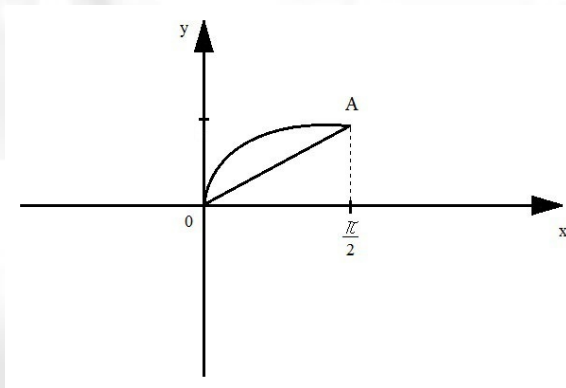
6. Графический метод доказательства неравенств.

Графический метод целесообразно использовать в случаях, когда левая и правая части неравенств являются функциями разных классов.

Пример 2.9. Докажите, что если

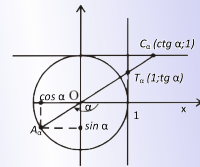
$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \text{ то } \sin x > \frac{2}{\pi}x.$$

Доказательство. Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{2}{\pi}x$ на указанном промежутке:



Из рисунка видно, что $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ для любых $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Во многих случаях используется не один метод, а комбинация методов.



кафедра

методики
преподавания
математики
и информатики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



39

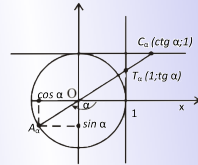
Заккрыть

Тема 3

Тождественные преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции

План

1. Понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса и вычисление их значений.
2. Опорные тождества и схема их доказательства.
3. Тождественные преобразования выражений, содержащих $\arcsin b$, $\arccos b$, $\arctg b$, $\text{arcctg } b$. Доказательство тождеств и неравенств.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



40

Заккрыть

1. Понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса и вычисление их значений.

Определения данных выражений известны из курса математики средней школы.

Кратко данные определения удобно записать следующим образом:

1. $\arcsin b = a, a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \sin a = b, (|b| \leq 1);$

2. $\arccos b = a, a \in [0; \pi]; \cos a = b, (|b| \leq 1);$

3. $\arctg b = a, a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \operatorname{tg} a = b, b \in R;$

4. $\operatorname{arcctg} b = a, a \in (0; \pi); \operatorname{ctg} a = b, b \in R,$

где a - угол.

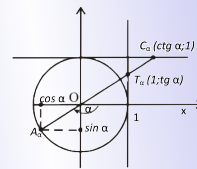
Из определений следует, что $\sin(\arcsin b) = b, \cos(\arccos b) = b,$
 $\operatorname{tg}(\arctg b) = b, \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} b) = b.$

Покажем, как с помощью данных определений можно находить значения выражений, содержащих $\arcsin b, \arccos b, \arctg b, \operatorname{arcctg} b.$

Пример 3.1. Вычислите значение $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Решение. По определению $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = a, a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2},$
отсюда $a = \frac{\pi}{3}.$ Значит, $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



41

Закреть

Пример 3.2. Вычислите значение

$$\arccos \left(\cos \left(-\frac{17\pi}{5} \right) \right).$$

Решение.

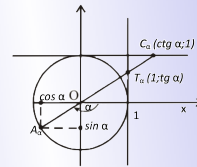
$$\arccos \left(\cos \left(-\frac{17\pi}{5} \right) \right) = a, a \in [0; \pi]; \cos a = \cos \left(-\frac{17\pi}{5} \right),$$

$$\text{Преобразуем } \cos \left(-\frac{17\pi}{5} \right) = \cos \left(-4\pi + \frac{3\pi}{5} \right) = \cos \frac{3\pi}{5}.$$

$$\text{Имеем } \cos a = \cos \frac{3\pi}{5}.$$

Так как $a, \frac{3\pi}{5} \in [0; \pi]$, то $a = \frac{3\pi}{5}$

Ответ: $\frac{3\pi}{5}$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



42

Заккрыть

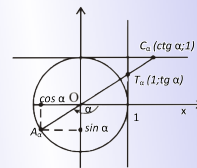
2. Опорные тождества и схема их доказательства.

К опорным тождествам относятся следующие

1. $\arcsin(-x) = -\arcsin x, |x| \leq 1,$
2. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, |x| \leq 1,$
3. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,$
4. $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x,$
5. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, |x| \leq 1,$
6. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$

В сущности, нам нужно доказать равенство двух углов. В таких случаях полезно пользоваться следующей схемой.

1. Ввести обозначения обратных тригонометрических функций, входящих в **тождество**, и записать соответствующие определения.
2. Найти промежуток, которому принадлежат выражения, стоящие в левой и правой частях равенства. На данном промежутке выбрать некоторую монотонную функцию.
3. Установить равенство значений данной функции от обеих частей **тождества**.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



43

Заккрыть

Докажем тождество $\arcsin(-x) = -\arcsin x, |x| \leq 1$.

1) Обозначим $\arcsin(-x) = \alpha, \arcsin x = \beta$, тогда нам нужно доказать равенство $\alpha = -\beta$ (1).

По определению арксинуса $\arcsin(-x) = \alpha, \alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \sin \alpha = -x$; $\arcsin x = \beta, \beta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \sin \beta = x$.

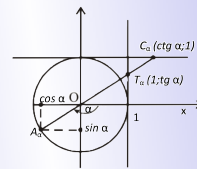
2) Видим, что $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Умножим последнее неравенство на (-1), получим $-\frac{\pi}{2} \leq -\beta \leq \frac{\pi}{2}$. Таким образом, углы α и $-\beta$, стоящие в левой и правой частях равенства (1), принадлежат одному и тому же промежутку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ – промежутку возрастания функции $y = \sin t$.

3) Сравним значения синусов данных углов: $\sin \alpha = -x, \sin \beta = x$, тогда $\sin(-\beta) = -\sin \beta = -x$. Значит, синусы углов α и $-\beta$ равны.

Тем самым доказано равенство углов, и исходное тождество.

Докажем тождество $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, |x| \leq 1$,

Пусть $\arcsin x = a, a \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \sin a = x$ и $\arccos x = b, b \in [0; \pi], \cos b = x$. Видим, что $-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq b \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq a + b \leq \frac{3\pi}{2}$. Однако промежуток $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ не является промежутком монотонности какой-либо из функций, поэтому перенесем одно из слагаемых в правую часть и докажем тождество $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$, равносильное данному, по указанной выше схеме.



кафедра

методики
преподавания
математики
и информатики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

◀

▶

◀◀

▶▶

44

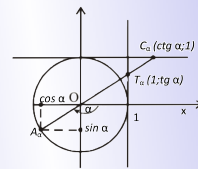
Закрыть

Вместе с тем **это тождество** можно доказать, используя аппарат математического анализа.

Рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ на промежутке $[-1; 1]$, она непрерывна, производная $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Значит, функция $f(x)$ постоянна на указанном отрезке. Вычислим ее значение в любой из его точек, например, в точке $x = 0$:

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Тождество доказано.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



45

Заккрыть

3. Тождественные преобразования выражений, содержащих $\arcsin b$, $\arccos b$, $\operatorname{arctg} b$, $\operatorname{arcctg} b$. Доказательство тождеств и неравенств.

Пример 3.3. Найдите значения функции

$$y = \sin(\operatorname{arctg} x).$$

Решение.

Обозначим $\operatorname{arctg} x = a$, тогда нам нужно найти значение $\sin a$. По определению $\operatorname{arctg} x = a$, $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg} a = x$.

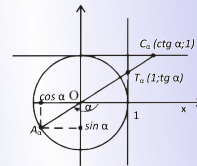
Из формулы $1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$ выразим $\cos a = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (перед корнем стоит знак "+", так как при $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos a > 0$).

Зная, что $\sin a = \operatorname{tg} a \cdot \cos a$, найдем значение $\sin a$:

$$\sin a = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ответ: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Рассмотрим доказательство тождеств, устанавливающих соотношение между обратными тригонометрическими функциями.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



46

Заккрыть

Пример 3.4. Докажите тождество

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2}, \text{ если } 0 < x < 1.$$

Доказательство.

1. Пусть $\arcsin x = \alpha$, $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$; $\sin \alpha = x$;

$$\arccos \sqrt{1 - x^2} = \beta, \beta \in (0; \frac{\pi}{2}) ; \cos \beta = \sqrt{1 - x^2}.$$

Докажем, что $\alpha = \beta$.

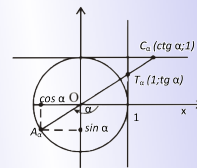
2. Обе части равенства принадлежат промежутку $(0; \frac{\pi}{2})$, на котором монотонны функции $y = \sin t, y = \cos t, y = \operatorname{tg} t, y = \operatorname{ctg} t$.

3. Возьмем, к примеру, значение синуса от обеих частей равенства:

$$\sin \alpha = x, \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - (1 - x^2)} = x; x = x.$$

Тождество доказано.

При доказательстве неравенств необходимо указывать характер монотонности функции, а затем сравнить ее значения от левой и правой частей. Используя свойство соответствующей монотонной функции, делаем вывод об истинности исходного неравенства.



кафедра

методики
преподавания
математики
и информатики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



47

Заккрыть

Пример 3.5. Докажите, что

$$\operatorname{arctg} \frac{4}{3} > \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

Решение:

1. Введем обозначения:

$$\operatorname{arctg} \frac{4}{3} = \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3};$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{4} = \beta, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4};$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \gamma, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{3};$$

$$\alpha > \beta + 2\gamma$$

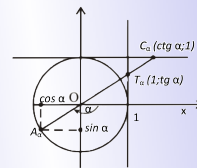
2. Проанализировав промежутки, которым принадлежат выражения в левой и правой частях, приходим к необходимости их сужения:

$$\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right), \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right),$$

тогда

$$0 < \beta < \frac{\pi}{6}, 0 < 2\gamma < \frac{\pi}{3}, 0 < \beta + 2\gamma < \frac{\pi}{2}.$$

Видим, что $\alpha, \beta + 2\gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ - промежутку возрастания для $\sin t, \operatorname{tg} t$, убывание для $\cos t, \operatorname{ctg} t$. Выбираем функцию $y = \operatorname{tg} t$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



48

Заккрыть

3. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{3}$.

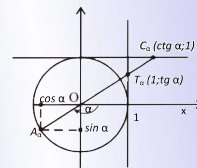
Вычислим

$$\operatorname{tg}(\beta + 2\gamma) = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} 2\gamma}{1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} 2\gamma};$$

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg}^2 \gamma} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}, \text{ тогда } \operatorname{tg}(\beta + 2\gamma) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{16}{13}.$$

Так как $\frac{4}{3} > \frac{16}{13}$, то есть $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg}(\beta + 2\gamma)$, то из возрастания функции $y = \operatorname{tg} t$ следует, что $\alpha > \beta + 2\gamma$.

Неравенство доказано.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



49

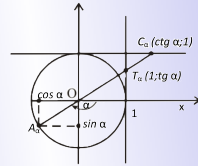
Заккрыть

Тема 4

Решение тригонометрических уравнений, имеющих определенные приемы решения

План

1. Решение простейших тригонометрических уравнений.
2. Решение уравнений вида $f(\alpha) = f(\beta)$, где f — некоторая тригонометрическая функция.
3. Приемы решения однородных уравнений.
4. Уравнения, сводящиеся к однородным.
5. Различные способы решения уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$.
6. Решение уравнений вида $a \sin^m x + b \cos^n x = c$.



кафедра

методики
преподавания
математики
и информатики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



50

Заккрыть

1. Решение простейших тригонометрических уравнений.

К простейшим тригонометрическим уравнениям относятся уравнения вида $\sin x = \alpha$, $\cos x = \alpha$, $\operatorname{tg} x = \alpha$, $\operatorname{ctg} x = \alpha$.

При решении уравнений $\sin x = \alpha$, $\cos x = \alpha$ возможны следующие случаи:

- при $|\alpha| > 1$ – уравнение не имеет корней;
- при $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = -1$ уравнение удобно решать с помощью единичной окружности;
- при $0 < |\alpha| < 1$, то есть $-1 < \alpha < 0$ или $0 < \alpha < 1$ – решение находится соответственно по формулам $x = (-1)^n \arcsin \alpha + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \pm \arccos \alpha + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.1. Решите уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$.

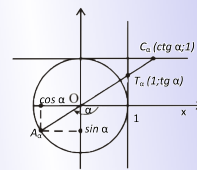
Решение.

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



51

Закрыть

Решения уравнений $\operatorname{tg} x = \alpha$ и $\operatorname{ctg} x = \alpha$ находятся по формулам $x = \operatorname{arctg} \alpha + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \operatorname{arcctg} \alpha + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.2. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение.

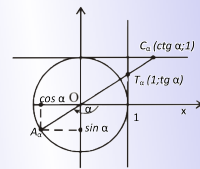
$$x = \operatorname{arcctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



52

Заккрыть

2. Решение уравнений вида $f(\alpha) = f(\beta)$, где f — некоторая тригонометрическая функция.

$$\sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2\pi k, k \in Z, \\ \alpha + \beta = \pi(2n + 1), n \in Z; \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2\pi k, k \in Z, \\ \alpha + \beta = 2\pi n, n \in Z; \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = \pi n, n \in Z.$$

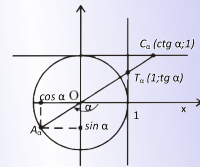
Замечание. Возможен другой способ решения уравнений данного вида: перенести все в левую часть и использовать формулу разности тригонометрических функций.

Пример 4.3.

$$\sin 3x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right).$$

Решение.

$$\text{I способ. } \sin 3x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 2\pi k, \\ 3x + \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \pi(2n + 1) \end{cases} \Leftrightarrow$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



53

Закреть

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n. \end{cases}$$

II способ.

$$\sin 3x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right),$$

$$\sin 3x - \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 0,$$

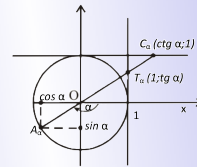
$$2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0,$$

$$\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \text{ или } \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0,$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pi k, \quad k \in Z \text{ или } x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in Z \text{ или } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$; $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $k, n \in Z$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



54

Заккрыть

3. Приемы решения однородных уравнений.

Однородные уравнения решаются делением на $\cos^k x (\sin^k x)$, где k – степень многочлена, стоящего в левой части уравнения, и сводятся к алгебраическим уравнениям заменой $\operatorname{tg} x = t$ ($\operatorname{ctg} x = t$).

Примерами однородных уравнений являются:

1. $a \sin x + b \cos x = 0$ – первой степени.
2. $a \sin^2 x + b \cos x \sin x + c \cos^2 x = 0$ – второй степени.

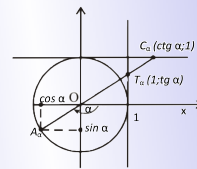
Деление на $\cos^k x (\sin^k x)$, всегда возможно. В противном случае если бы $\cos^k x = 0$, то $\cos x = 0$. При подстановке его в любое однородное уравнение, получили бы $\sin^k x = 0$, а значит, $\sin x = 0$. В этом случае $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству.

Если одно из слагаемых в уравнениях степени большей или равной 2 отсутствует, то их удобнее решать, используя вынесение общего множителя за скобки.

Пример 4.4. Решите уравнение $\sin^2 x + 2 \cos x \sin x - 3 \cos^2 x = 0$.

Решение.

Это однородное уравнение второй степени. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$, равносильное заданному.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

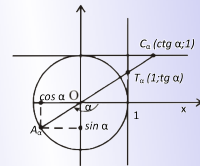


55

Заккрыть

Решим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, откуда $\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = -3$. Это простейшие уравнения, решениями которых являются соответственно $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ или $x = \operatorname{arctg}(-3) + \pi n$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg}(-3) + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



56

Закрыть

4. Уравнения, сводящиеся к однородным.

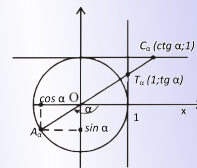
К уравнениям, сводящимся к однородным относятся следующие:

- 1). уравнение вида $a \sin x + b \cos x = c$; сводится к однородному с помощью перехода к половинному аргументу.

$$2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + b \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = c \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right);$$

- 2). уравнение вида $a \sin^2 x + b \cos x \sin x + c \cos^2 x = d$; сводится к однородному заменой $d = d \cdot 1 = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

$$a \sin^2 x + b \cos x \sin x + c \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x).$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



57

Заккрыть

5. Различные способы решения уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$.

Для уравнений данного типа существует четыре «универсальных» способа решения:

I способ. Переход к половинному аргументу (см. выше).

II способ. Введение вспомогательного угла:

Делим обе части на $\sqrt{a^2 + b^2}$, получаем

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

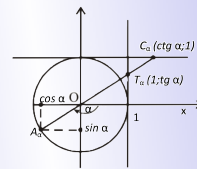
Используя преобразования, находим

$$\sin(x + y) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ или } \cos(x - y) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Решаем простейшее уравнение.

III способ. Использование формул универсальной подстановки:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad x \neq \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



кафедра

методики
преподавания
математики
и информатики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



58

Заккрыть

IV способ. Сведение к системе уравнений.

Вводим замену $\sin x = u$, $\cos x = v$ и решаем систему
$$\begin{cases} au + bv = c, \\ u^2 + v^2 = 1. \end{cases}$$

Каждый из способов имеет свои преимущества и недостатки. Проиллюстрируем первые три способа решения на следующем примере.

Пример 4.5. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 1$.

I способ.

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2};$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0;$$

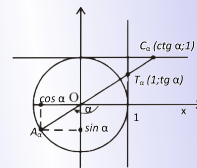
$$2 \sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = 0;$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \text{ или } \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0;$$

$$\frac{x}{2} = \pi k, \quad k \in Z \text{ или } 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0;$$

$$x = 2\pi k, \quad k \in Z, \text{ или } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad k, n \in Z.$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



59

Заккрыть

II способ.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

III способ.

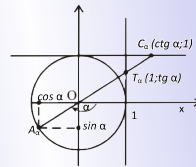
$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 1;$$

$$2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2};$$

$$2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0;$$

$$2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} (\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1) = 0;$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \text{ или } \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0;$$



καφεδρα

методики
преподавания
математики
и информатики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

[Назад](#)



60

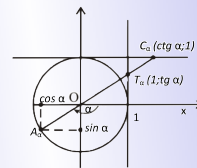
Заккрыть

$$x = 2\pi k, \quad k \in Z \text{ или } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Проверкой убеждаемся, что $x = \pi + 2\pi t, \quad t \in Z$, не является решением уравнения.

Ответ: $2\pi k, \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad k, n \in Z.$

Замечание. При решении одного и того же уравнения ответы могут быть получены в разной форме, однако множества корней совпадают.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



61

Закрыть

6. Решение уравнений вида $a \sin^m x + b \cos^n x = c$.

При решении уравнений данного вида при условии $c > 0, |a| \leq c, |b| \leq c$ при $m, n \in \mathbb{N}$ и $m, n \geq 2$ используется ограниченность функций $y = \sin x, y = \cos x : |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$.

В данном случае заменяем $c = c(\sin^2 x + \cos^2 x)$, группируем полученные слагаемые и выносим общий множитель за скобки:

$$a \sin^m x + b \cos^n x = c(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

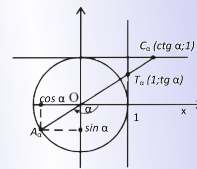
$$\sin^2 x (a \sin^{m-2} x - c) + \cos^2 x (b \cos^{n-2} x - c) = 0.$$

Получим, что $a \sin^{m-2} x - c \leq 0$ и $b \cos^{n-2} x - c \leq 0$ (так как $|a| \leq c, |b| \leq c, |\sin^{m-2} x| \leq 1, |\cos^{n-2} x| \leq 1$), поэтому сумма двух неположительных выражений может равняться нулю тогда, когда каждое из них равно нулю.

Уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \sin^2 x (a \sin^{m-2} x - c) = 0, \\ \cos^2 x (b \cos^{n-2} x - c) = 0; \end{cases} \quad \left\{ \begin{cases} \sin^2 x = 0, \\ a \sin^{m-2} x - c = 0, \\ \cos^2 x = 0, \\ b \cos^{n-2} x - c = 0. \end{cases} \right.$$

Каждое уравнение легко сводится к [простейшим тригонометрическим уравнениям](#).



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



62

Заккрыть

Пример 4.6. Решите уравнение $\sin^3 x + \cos^5 x = 1$.

Решение.

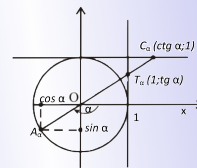
$$\sin^3 x + \cos^5 x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

$$\sin^2 x (\sin x - 1) + \cos^2 x (\cos^3 x - 1) = 0.$$

Поскольку $\sin x - 1 \leq 0$, $\cos^3 x - 1 \leq 0$, то последнее уравнение равносильно системе уравнений
$$\begin{cases} \sin^2 x (\sin x - 1) = 0, \\ \cos^2 x (\cos^3 x - 1) = 0. \end{cases}$$

Решение системы не представляет трудностей.

Ответ: $2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



63

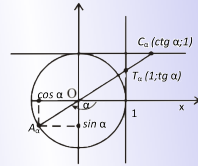
Заккрыть

Тема 5

Общие подходы к решению тригонометрических уравнений и их систем

План

1. Общие подходы к решению тригонометрических уравнений.
2. Особенности решения тригонометрических уравнений.
3. Нахождение системы или совокупности корней уравнений.
4. Основные приемы решения систем тригонометрических уравнений.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



64

Заккрыть

1. Общие подходы к решению тригонометрических уравнений.

1.1 Разложение на множители.

Используем *правило*: произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысл.

Пример 5.1. Решите уравнение $\sin 2x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$.

Решение.

$$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} x = 0;$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z, \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

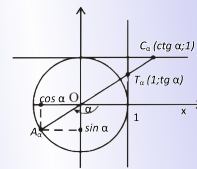
Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$.

Пример 5.2. Решите уравнение $\sqrt{\cos x}(\sin x - 2)(\cos x + 1) = 0$.

Решение.

Видим, что $\sin x - 2 \neq 0$, поэтому

$$\begin{cases} \cos x + 1 = 0, \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \sqrt{\cos x} = 0;$$



кафедра

методики
преподавания
математики
и информатики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



65

Закреть

$$\begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \cos x = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

1.2 Введение новой переменной.

Данный подход удобно использовать в следующих случаях:

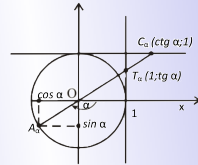
1) если уравнение содержит только одну тригонометрическую функцию $f(x)$ одного и того же аргумента, то вводим замену $t = f(x)$ и решаем соответствующее алгебраическое уравнение;

2) если уравнение содержит синус, косинус и тангенс одного аргумента, то есть уравнение имеет вид $R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x) = 0$, то его можно свести к алгебраическому с помощью формул универсальной подстановки:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad x \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\left[\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \right].$$

3) если уравнение содержит $\sin x \pm \cos x$, $\sin x \cdot \cos x$, то есть имеет вид $R(\sin x \pm \cos x, \sin x \cdot \cos x) = 0$, то вводим замену $t = \sin x \pm \cos x$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



66

Заккрыть

Пример 5.3. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$.

Решение.

Пусть $\sin x + \cos x = t$. Возведем обе части равенства в квадрат и выразим произведение $\sin x \cdot \cos x$: $(\sin x + \cos x)^2 = t^2$, $1 + 2 \sin x \cos x = t^2$, тогда $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Найдя корни алгебраического уравнения $t = 1 + \frac{t^2 - 1}{2}$ и подставив в $\sin x + \cos x = t$, получим уравнение $\sin x + \cos x = 1$. Это уравнение вида $a \sin x + b \cos x = c$, способы решения которого описаны ранее.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2\pi k$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5.4. Решите уравнение $5 - 3 \sin 2x + 2 \sin x - 7 \cos x = 0$.

Решение.

$$5 - 6 \sin x \cos x + 7(\sin x - \cos x) = 0.$$

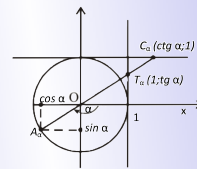
Пусть $\sin x - \cos x = t$, $(\sin x - \cos x)^2 = t^2$, откуда $-2 \sin x \cos x = t^2 - 1$. Подставим полученные выражения в исходное уравнение и получим:

$$5 + 3(t^2 - 1) + 7t = 0,$$

$$3t^2 + 7t + 2 = 0,$$

откуда

$$t = -2 \text{ или } t = -\frac{1}{3}.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



67

Закрывать

Возвращаясь к замене, имеем:

$$\sin x - \cos x = -2 \text{ или } \sin x - \cos x = -\frac{1}{3}.$$

Первое уравнение не имеет корней, решением второго являются значения $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3\sqrt{2}} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3\sqrt{2}} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

1.3 Использование свойств функций.

Чаще всего при данном подходе используются такие свойства, как ограниченность $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, x^2 \geq 0$, монотонность, четность.

Возможны три случая:

1. Обе части уравнения ограничены соответственно снизу и сверху одним и тем же числом.

Пример 5.5. Решите уравнение $1 + 2 \operatorname{ctg}^2 x = \cos 8x$.

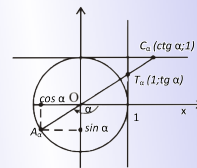
Решение.

Левая часть уравнения $1 + 2 \operatorname{ctg}^2 x \geq 1$ при любых значениях x из области определения котангенса, а правая часть $-\cos 8x \leq 1$. Значит, равенство возможно, если

$$\begin{cases} 1 + 2 \operatorname{ctg}^2 x = 1, \\ \cos 8x = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем $\operatorname{ctg} x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Подставим полученное значение во второе уравнение и вычислим:



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



68

Закреть

$$\cos 8 \left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right) = \cos(4\pi + 8\pi k) = \cos 0 = 1.$$

Получили верное равенство $1 = 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2. Если в уравнении $f(x) = 0$ функция $f(x)$ является возрастающей или убывающей, то значение, равное нулю, она принимает не более одного раза. Соответствующее значение аргумента находится подбором.

3. Если функции, записанные в левой и правой частях уравнения, противоположной монотонности либо одна из них константа, то графики пересекаются не более чем в одной точке. Значит, уравнение имеет не более одного корня.

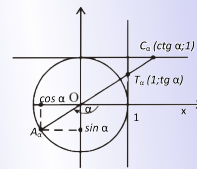
Пример 5.6. Решите уравнение $7 \operatorname{ctg}^{47} x - 3 = 4 \operatorname{tg}^{13} x$ на промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$.

Решение.

Подстановкой в уравнение проверим, что $x = \frac{\pi}{4}$ является корнем уравнения на промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$. На этом промежутке функция $f(x) = 7 \operatorname{ctg}^{47} x - 3$ убывающая, что следует из убывания на промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$ функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = \operatorname{ctg}^{47} x$; функция $g(x) = 4 \operatorname{tg}^{13} x$ — возрастающая, так как возрастающими на промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$ являются функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{tg}^{13} x$.

Таким образом, на промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$ других решений уравнение не имеет, то есть $x = \frac{\pi}{4}$ — единственное решение.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



69

Закреть

2. Особенности решения тригонометрических уравнений.

Главной особенностью решения тригонометрических уравнений является тот факт, что использование многих формул может привести к потере или приобретению корней.

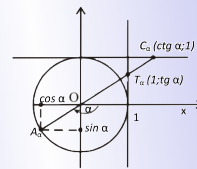
Пример 5.7. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{ctg} x - 1$.

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{2}{\operatorname{tg} x} - 1.$$

Пусть $\operatorname{tg} x = y$. Решив соответствующее алгебраическое уравнение, найдем значение $y = \frac{1}{2}$, откуда $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Вместе с тем решением является $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



70

Заккрыть

Для того чтобы найти множество корней тригонометрического уравнения, принадлежащих некоторому промежутку, необходимо решить двойное неравенство, или, в более простых случаях, использовать метод перебора.

Пусть мы нашли решения некоторого уравнения: $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}n$, $n \in \mathbb{Z}$. Нужно отобрать корни, принадлежащие промежутку $[-\pi; \pi]$. Имеем:

$$-\pi \leq \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}n \leq \pi,$$

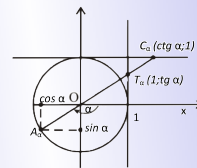
$$-6\pi \leq 4\pi + \pi n \leq 6\pi,$$

$$-10\pi \leq \pi n \leq 2\pi,$$

$$-10 \leq n \leq 2.$$

Подставляя в решение вместо n целые числа из промежутка $[-10; 2]$, получим требуемые корни.

При решении задачи о нахождении количества корней тригонометрического уравнения на заданном промежутке для подсчета их полезно нарисовать не одну, а несколько концентрических окружностей, длина которых соответствует длине заданного промежутка. Затем показать геометрические решения исходного уравнения, которыми являются точки пересечения соответствующей прямой с окружностями.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

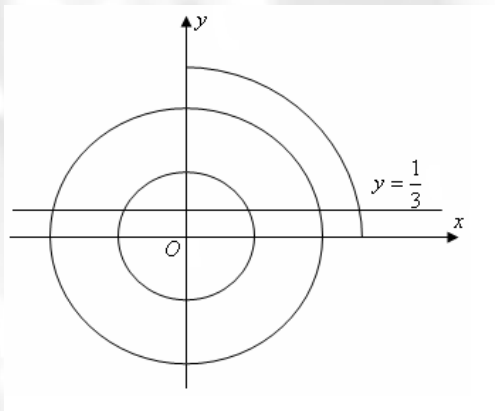


71

Заккрыть

Пример 5.8. Найти число корней уравнения $\sin x = \frac{1}{3}$, принадлежащих промежутку $[0; 4, 5\pi]$.

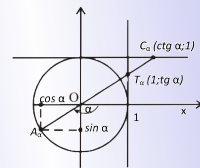
Решение.



Рисуем две концентрические окружности и дугу длиной $0,25$ окружности. Проводим прямую $y = \frac{1}{3}$ и подсчитываем количество точек пересечения ее с окружностями.

Ответ: 5 корней.

Примечание. Данное уравнение можно решить графически.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



72

Заккрыть

3. Нахождение системы или совокупности решений уравнений.

Данная проблема решается тремя способами:

- с помощью единичной окружности;
- с помощью координатной прямой;
- аналитически.

Пример 5.9. Решите уравнение $\sin \frac{5x}{4} + \cos x = 2$.

Решение.

Уравнение имеет корни только в том случае, когда каждое из слагаемых равно 1:

$$\begin{cases} \sin \frac{5x}{4} = 1, \\ \cos x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5}, \quad n \in Z, \\ x = 2\pi m, \quad m \in Z. \end{cases}$$

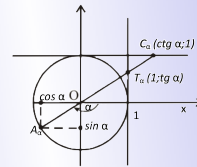
Найдем общие решения двух уравнений аналитически, приравняв правые части:

$$\frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5} = 2\pi m,$$

$$2\pi + 8\pi n = 10\pi m,$$

$$1 + 4n = 5m,$$

$$4n = 4m + m - 1,$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



73

Заккрыть

$$m - 1 = 4l,$$

$$m = 4l + 1, \quad l \in Z.$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$x = 2\pi(4l + 1), \quad l \in Z; \quad x = 2\pi + 8\pi l, \quad l \in Z.$$

Ответ: $2\pi + 8\pi l, \quad l \in Z.$

Пример 5.10. Решите уравнение $\cos 15x = \sin 5x$.

Решение.

Заменим $\cos 15x$ на $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 15x\right)$, перенесем все в левую часть и воспользуемся формулой разности синусов:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 15x\right) - \sin 5x = 0,$$

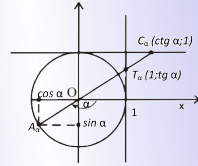
$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 10x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0,$$

$$- \sin\left(10x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ или } \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{10}k, \quad k \in Z \text{ или } x = \frac{3\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n, \quad n \in Z.$$

Проверим, нет ли среди полученных значений повторяющихся. Приравняем правые части и посмотрим, в каком соотношении находятся переменные k и n :

$$\frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{10}k = \frac{3\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n,$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



74

Заккрыть

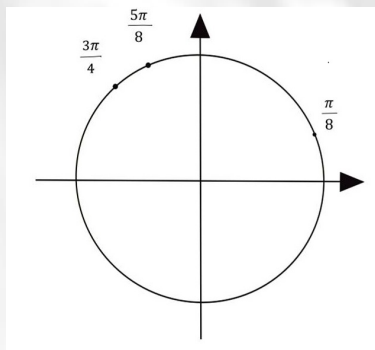
$$\pi + 4\pi k = 6\pi + 8\pi n,$$

$$4k = 8n + 5,$$

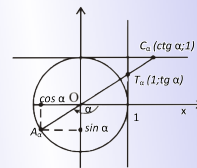
$$k = 2n + 1, 25.$$

Видим, что не существует целых значений n , при которых число k также было бы целым. Значит, повторяющихся значений нет.

Проверка данного факта с помощью единичной окружности либо координатной прямой неудобна, так как придется делить окружность на мелкие части. Однако можно укрупнить решение, например, в 5 раз: $5x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $5x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Отметим данные решения на окружности с учетом того, что наименьшее кратное положительных периодов равно π :



Как видим, повторяющихся решений нет.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

◀

▶

◀◀

▶▶

75

Заккрыть

4. Основные приемы решения систем тригонометрических уравнений.

При решении тригонометрических систем уравнений используются два основных способа:

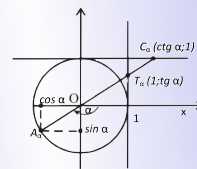
- 1) подстановки;
- 2) алгебраического сложения.

Основными приемами являются:

- возведение обеих частей уравнений в квадрат или куб;
- почленное деление обеих частей уравнения или двух уравнений на одно и то же выражение, отличное от нуля;
- замена неизвестных;
- разложение на множители.

Особенности решения систем тригонометрических уравнений:

- решения простейших уравнений $\sin x = a$; $\cos x = a$ ($|a| \leq 1$) записываются, как правило, в виде совокупности двух семейств;
- для записи решений каждого из уравнений системы употребляются различные параметры (n , k , l и др.);



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



76

Заккрыть

- одно из уравнений системы сводится к уравнению относительно одной переменной.

Пример 5.11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin(x + y) = \frac{1}{2}, \\ \cos(x - y) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Решение.

Решив простейшие уравнения по формулам, придем к системе

$$\begin{cases} x + y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \\ x - y = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \end{cases} \quad (2)$$

откуда находим решение:

$$\begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} + \pi n, \\ y = (-1)^k \frac{\pi}{12} \mp \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} - \pi n. \end{cases} \quad (3)$$

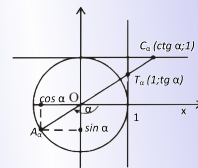
Если решение первого уравнения системы (1) записать в виде совокупности

$$x + y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \quad x + y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,$$

а решение второго – в виде совокупности

$$x - y = \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad x - y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$

то получим совокупность систем:



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



77

Заккрыть

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x - y = \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ x - y = \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x - y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ x - y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \end{cases}$$

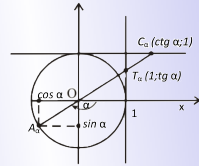
откуда

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5\pi}{24} + \pi(k + n), \\ y_1 = -\frac{\pi}{24} + \pi(k - n); \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{13\pi}{24} + \pi(k + n), \\ y_2 = \frac{7\pi}{24} + \pi(k - n); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{\pi}{24} + \pi(k + n), \\ y_3 = \frac{5\pi}{24} + \pi(k - n); \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{7\pi}{24} + \pi(k + n), \\ y_4 = \frac{13\pi}{24} + \pi(k - n). \end{cases}$$

Эта совокупность семейств представляет собой решение системы (1). Такая запись не столь компактна, как запись решения в виде системы (3), но более наглядна, поэтому, как было отмечено выше, ей отдается предпочтение.

При переходе от системы (1) к системе (2) или к совокупности систем (4) мы использовали для записи решений первого уравнения системы (1)



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



78

Заккрыть

параметр k , а для записи решений второго уравнения системы – другой параметр – n .

Употребление только одного параметра, например k , привело бы к потере решений. Так, в этом случае из первой системы совокупности (4) мы получили бы

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{5\pi}{24} + 2\pi k, \\ y'_1 = -\frac{\pi}{24}. \end{cases}$$

Множество Z'_1 пар вида $(x'_1; y'_1)$ представляет собой подмножество множества Z_1 пар вида $(x_1; y_1)$, где

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5\pi}{24} + \pi(k + n), \\ y_1 = -\frac{\pi}{24} + \pi(k - n). \end{cases}$$

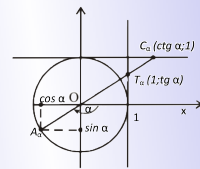
Итак, $Z' \subset Z_1, Z' \neq Z_1$, поэтому все пары $(x; y)$ такие, что $(x; y) \in Z_1 \setminus Z'$ оказываются "потерянными" решениями.

Пример 5.12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x + \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение.

Используя способ подстановки, из первого уравнения выразим $y = \frac{\pi}{3} - x$ и подставим во второе уравнение системы.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



79

Закреть

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x + \sin y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x, \\ \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

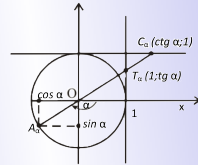
$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x, \\ 2 \sin \frac{x + \frac{\pi}{3} - x}{2} \cos \frac{x - \frac{\pi}{3} + x}{2} = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x, \\ 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x, \\ x - \frac{\pi}{6} = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x, \\ x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ y = \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ y = \frac{\pi}{6} \mp \frac{\pi}{3} - 2\pi k; \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ y = -\frac{\pi}{6} - 2\pi k; \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ y = \frac{\pi}{2} - 2\pi k. \end{cases} \right.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} - 2\pi k\right); \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



80

Закреть

Пример 5.13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 1 - \sin y + \cos y, \\ 3 \sin 2x - 2 \sin 2y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

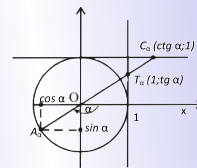
Решение.

Используя тождество $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$ и введя обозначения $\sin x - \cos x = u$, $\sin y - \cos y = v$, сведем данную тригонометрическую систему к алгебраической:

$$\begin{cases} -u = 1 - v, \\ 3(1 - u^2) - 2(1 - v^2) = \frac{3}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} v = 1 + u, \\ 12u^2 - 8v^2 - 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 1 + u, \\ 12u^2 - 8(1 + u)^2 - 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 1 + u, \\ 4u^2 - 16u - 9 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} v = 1 + u, \\ u = \frac{8 \pm 10}{4}; \end{cases}$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



81

Закрывать

$$\begin{cases} v = 1 + u, \\ \begin{cases} u = \frac{9}{2}, \\ u = -\frac{1}{2}; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} u = \frac{9}{2}, \\ v = \frac{11}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} u = -\frac{1}{2}, \\ v = \frac{1}{2}; \end{cases} \end{cases}$$

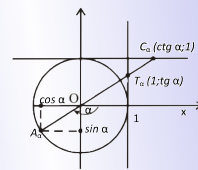
$$\begin{cases} \begin{cases} \sin x - \cos x = \frac{9}{2}, \\ \sin y - \cos y = \frac{11}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x - \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \sin y - \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Так как $|\sin x - \cos x| \leq \sqrt{2} < \frac{9}{2}, |\sin y - \cos y| \leq \sqrt{2} < \frac{11}{2}$, то первая система уравнений из последней совокупности имеет пустое множество решений. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x - \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \sin y - \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \\ \sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \pi n, n \in Z, \\ y = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \pi n; \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \pi k\right), n, k \in Z.$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



82

Закрыть

Пример 5.14. Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 4 \sin x - 2 \sin y = 3, \\ 2 \cos x - \cos y = 0. \end{cases}$$

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \sin y = \sin x, \\ \frac{1}{2} \cos y = \cos x. \end{cases}$$

Возведя в квадрат оба уравнения этой системы и сложив их, будем иметь:

$$\frac{9}{16} + \frac{3}{4} \sin y + \frac{1}{4} \sin^2 y + \frac{1}{4} \cos^2 y = 1,$$

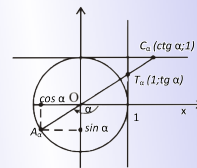
откуда

$$\sin y = \frac{1}{4}, y = (-1)^n \arcsin \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Из уравнения $\sin x = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \sin y$ с учетом того, что $\sin y = \frac{1}{4}$, получим $\sin x = \frac{7}{8}, x = (-1)^p \arcsin \frac{7}{8} + \pi p, p \in \mathbb{Z}$.

Возведение в квадрат могло привести к появлению посторонних решений, поэтому проверим полученные значения x и y .

Первое уравнение исходной системы при этих значениях тождественно выполняется. Проверим второе уравнение. При $p = 2k$ и $n = 2m$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



83

Закреть

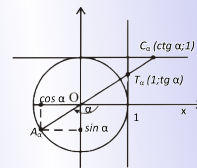
$\cos x$ и $\cos y$ положительны, а при $p = 2k + 1, n = 2m + 1$ отрицательны. Поскольку по условию $2 \cos x = \cos y$, то знак $\cos x$ и $\cos y$ должны совпадать. В итоге исходная система имеет следующие решения:

$$x_1 = \arcsin \frac{7}{8} + 2\pi k, y_1 = \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi m, k, m \in Z,$$

$$x_2 = -\arcsin \frac{7}{8} + \pi(2m + 1), y_2 = -\arcsin \frac{1}{4} + \pi(2m + 1), k, m \in Z.$$

Ответ:

$$\left(\arcsin \frac{7}{8} + 2\pi k; \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi m \right), \\ \left(-\arcsin \frac{7}{8} + \pi(2k + 1); -\arcsin \frac{1}{4} + \pi(2m + 1) \right), k, m \in Z.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



84

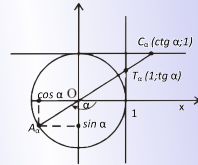
Заккрыть

Тема 6

Способы решения тригонометрических неравенств и их систем

План

1. Алгоритмы решения простейших тригонометрических неравенств.
2. Способы решения сложных тригонометрических неравенств (сведение к системам неравенств, метод интервалов, использование свойств функций).
3. Решение систем тригонометрических неравенств.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



85

Заккрыть

1. Алгоритмы решения простейших тригонометрических неравенств.

К простейшим тригонометрическим неравенствам относятся неравенства вида $\sin x > a$ ($\sin x < a$, $\sin x \geq a$, $\sin x \leq a$), $\cos x > a$ ($\cos x < a$, $\cos x \geq a$, $\cos x \leq a$), $\operatorname{tg} x > a$ ($\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x \geq a$, $\operatorname{tg} x \leq a$), $\operatorname{ctg} x > a$ ($\operatorname{ctg} x < a$, $\operatorname{ctg} x \geq a$, $\operatorname{ctg} x \leq a$).

Простейшие неравенства решаются двумя способами: с помощью единичной окружности или графически.

Для решения неравенств первым способом удобно пользоваться следующими определениями.

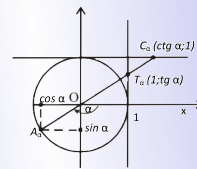
Определение. Синусом угла α называется ордината точки A_α единичной окружности, $\sin \alpha = y_\alpha$.

Определение. Косинусом угла α называется абсцисса точки A_α единичной окружности, $\cos \alpha = x_\alpha$.

Определение. Тангенсом угла α называется ордината точки, полученной при пересечении прямой OA_α с линией тангенсов (касательной к окружности, проходящей через точку $A_0(1; 0)$).

Определение. Котангенсом угла α называется абсцисса точки, полученной при пересечении прямой OA_α с линией котангенсов (касательной к окружности, проходящей через точку $A_{\frac{\pi}{2}}(0; 1)$).

На основании данных определений можно сформулировать алгоритм решения любого вида простейших неравенств. Приведем пример алгоритма решения неравенств $\sin x < a$ ($|a| < 1$) и $\operatorname{tg} x < a$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

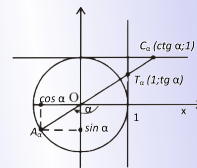


86

Закреть

Алгоритм решения неравенства $\sin x < a$ ($|a| < 1$).

1. Сформулируйте определение синуса числа x на единичной окружности.
2. Нарисуйте единичную окружность.
3. На оси ординат отметьте точку с координатой a .
4. Через данную точку проведите прямую, параллельную оси OX , и отметьте точки пересечения ее с окружностью.
5. Выделите дугу окружности, все точки которой имеют ординату, меньшую a .
6. Укажите направление обхода (против часовой стрелки) и запишите ответ, добавив к концам промежутка период функции $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



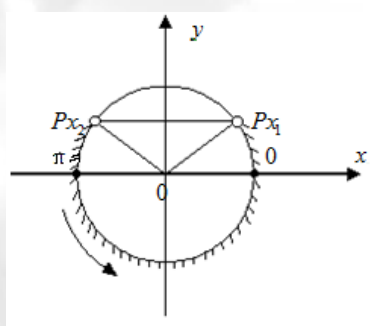
87

Закрыть

Пример 6.1. Решите неравенство $\sin x < \frac{1}{2}$.

Решение.

По определению $\sin x$ - ордината точки единичной окружности. Нарисуем единичную окружность, на оси ординат отметим точку с координатой $\frac{1}{2}$. Проведем прямую, параллельную оси OX , отметим две точки Px_1 и Px_2 пересечения ее с окружностью. Точки, ординаты которых меньше $\frac{1}{2}$, заполняют открытую дугу Px_2Px_1 .

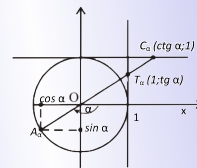


$$x_2 = \pi - \arcsin x_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6};$$

$$x_1 = 2\pi + \arcsin x_1 = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}.$$

Учитывая периодичность синуса, получим ответ.

Ответ: $(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{13\pi}{6} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



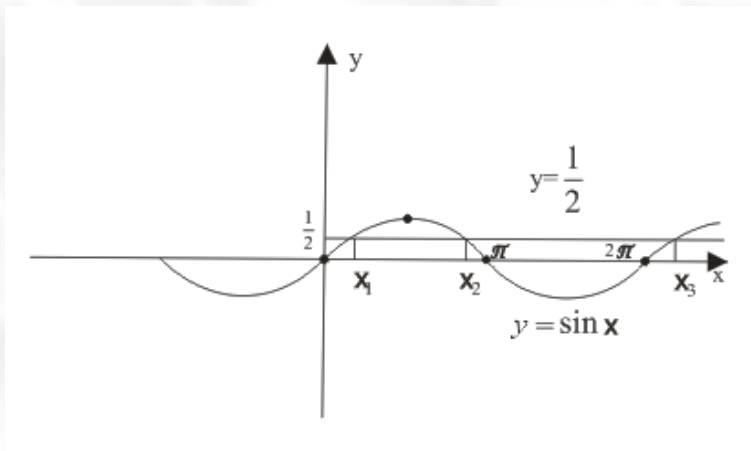
88

Закреть

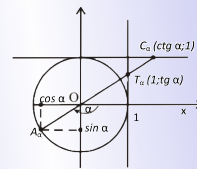
Замечание. Ответ можно записать по-другому: если $x_1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то $x_2 = -\pi - \arcsin \frac{1}{2} = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$; в этом случае ответом будет промежуток $(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решим данное неравенство графически.

Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$.



Чтобы найти точки пересечения графиков функций, решим уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$ и выберем значения, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$; $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



89

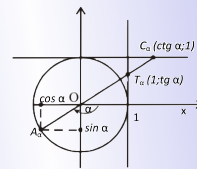
Закреть

Значения функции $y = \sin x$ расположены ниже значений функции $y = \frac{1}{2}$ на промежутках $[0; \frac{\pi}{6}]$ и $[\frac{5\pi}{6}; 2\pi]$. Очевидно, что для записи решения удобнее выбирать отрезок $[x_1; x_3]$, равный по длине периоду 2π , где $x_3 = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$ (длины отрезков $[0; x_1]$ и $[2\pi; x_3]$ равны). С учетом периода функции $y = \sin x$ получим ответ.

Ответ: $(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{13\pi}{6} + 2\pi n)$, $n \in Z$.

Алгоритм решения неравенства $\operatorname{tg} x < a$.

1. Сформулируйте определение тангенса числа x на единичной окружности.
2. Нарисуйте единичную окружность.
3. Проведите линию тангенсов и на ней отметьте точку с ординатой a .
4. Соедините данную точку с началом координат и отметьте точку пересечения полученного отрезка с единичной окружностью.
5. Выделите дугу окружности, все точки которой имеют на линии тангенсов ординату, меньшую a .
6. Укажите направление обхода и запишите ответ с учетом области определения функции, добавив период πn , $n \in Z$ (число, стоящее в записи слева, всегда меньше числа, стоящего справа).



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



90

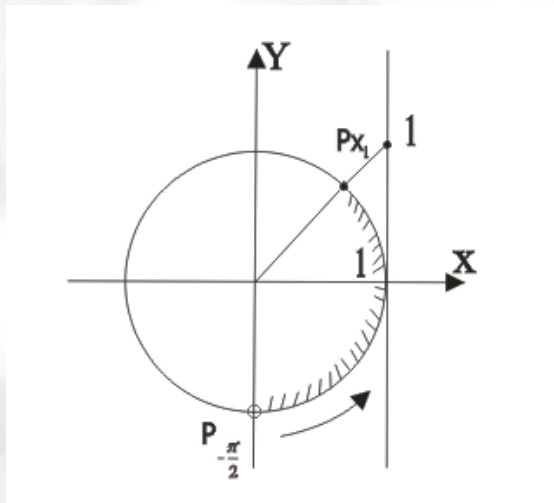
Закреть

Пример 6.2. Решите неравенство $\operatorname{tg} x \leq 1$.

Решение.

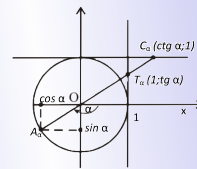
По определению $\operatorname{tg} x$ - ордината точки линии тангенсов.

Построим единичную окружность и линию тангенсов. Отметим на линии тангенсов точку с ординатой 1 и соединим ее с началом координат, при пересечении с окружностью получим точку Px_1 . Так как период тангенса равен πn , то достаточно найти решения неравенства на промежутке $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.



$$x_1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n]$, $n \in Z$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

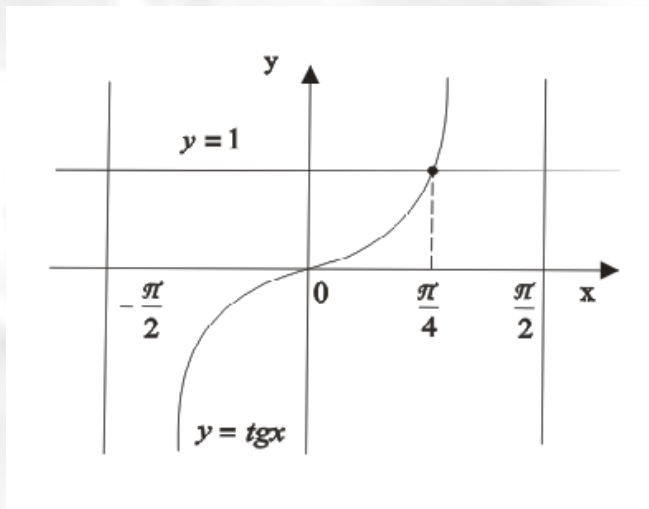
Назад



91

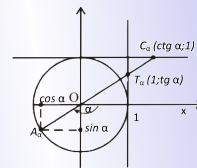
Закреть

Графическое решение неравенства выглядит следующим образом. Строим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$ на промежутке $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.



Для нахождения точки пересечения графиков решаем уравнение $\operatorname{tg} x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4}$. На рисунке видно, что значения функции $y = \operatorname{tg} x$ меньше значений функции $y = 1$ на промежутке $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4})$. Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, записываем ответ.

Ответ: $(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



92

Заккрыть

2. Способы решения сложных тригонометрических неравенств (сведение к системам неравенств, метод интервалов, использование свойств функций).

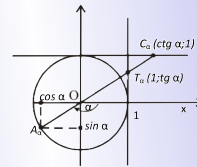
Решение более сложных неравенств сводится к решению простейших с помощью методов и приемов, указанных в теме 1.

Кроме того, при решении неравенств, левая часть которых является функцией $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)$ - непрерывной на некотором интервале и обращающейся в нуль в конечном числе точек этого интервала, удобно использовать метод интервалов. При использовании метода интервалов нули функции отмечаются на координатной прямой либо единичной окружности, причем на окружности это сделать удобнее, так как легче увидеть симметричные относительно начала координат либо осей точки, совпадающие точки, что облегчает запись ответа. Вместе с тем следует помнить, что решение неравенств с помощью окружности возможно, если наименьшее общее кратное основных периодов тригонометрических функций $f_i(x) (i = 1, \dots, n)$, то есть период функции $f(x)$, не больше 2π .

Пример 6.3. Решите неравенство $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x \geq 0$.

Решение.

Так как наименьшее общее кратное основных периодов функций, входящих в произведение, равно 2π , то есть наименьший положительный период непрерывной функции $f(x) = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x$ равен 2π , то



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

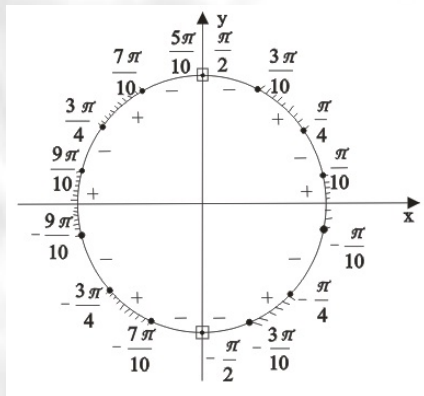


93

Закреть

решим неравенство методом интервалов на промежутке $[-\pi; \pi]$.

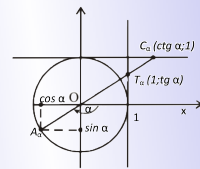
Найдем нули функции: $\cos x = 0$ при $x = \pm \frac{\pi}{2}$; $\cos 2x = 0$ при $x = \pm \frac{\pi}{4}$; $\pm \frac{3\pi}{4}$; $\cos 5x = 0$ при $x = \pm \frac{\pi}{10}$; $\pm \frac{3\pi}{10}$; $\pm \frac{5\pi}{10}$; $\pm \frac{7\pi}{10}$; $\pm \frac{9\pi}{10}$. Отметим точки на единичной окружности и найдем знак функции $f(x)$ в каждом из полученных промежутков:



Заметим, что, как и в курсе алгебры, наличие "двойных" точек говорит о том, что слева и справа от данной точки функция имеет одинаковые знаки, в остальных случаях знаки чередуются.

В данном случае удобно найти значение функции в точке $x = 0$ на промежутке $(-\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{10})$ и затем расставить знаки в остальных интервалах. Ответ записывается с учетом симметричности решений и периодичности функции.

Ответ: $[-\frac{\pi}{10} + \pi n; \frac{\pi}{10} + \pi n] \cup [\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{10} + \pi n] \cup [\frac{7\pi}{10} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n], n \in \mathbb{Z}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



94

Закреть

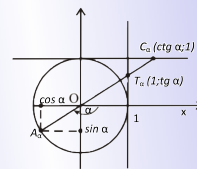
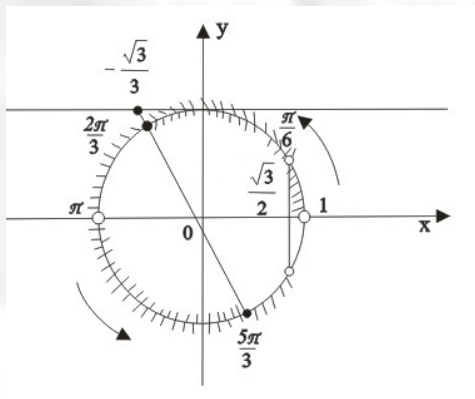
3. Решение систем тригонометрических неравенств.

Системы тригонометрических неравенств удобнее решать с помощью единичной окружности. Геометрическим решением системы будет пересечение дуг, соответствующих решениям каждого из неравенств в отдельности. При этом необходимо учитывать, что пересечение решений находится на промежутке, длина которого равна наименьшему общему кратному периодов функций, входящих в систему.

Пример 6.4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{ctg} x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Решение.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



95

Заккрыть

Учитывая разные периоды входящих в неравенство функций, найдем геометрическое решение каждого из них на промежутке $(0; 2\pi)$: дуга, соответствующая множеству решений первого неравенства выделена штриховкой снаружи окружности, второго – внутри.

Ответ: $(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n] \cup (\pi + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$.

Проиллюстрируем возможности применения различных способов решения неравенств на следующем примере.

Пример 6.5. Решите неравенство $\cos 4x + \cos 2x < 0$.

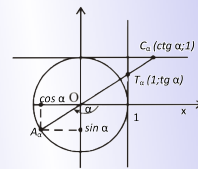
Решение.

I способ. Заменим сумму функций произведением $2 \cos 3x \cos x < 0$. Решим совокупность систем неравенств:

$$\begin{cases} \cos 3x > 0, \\ \cos x < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos 3x < 0, \\ \cos x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 3x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi n < 3x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}, \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases}$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

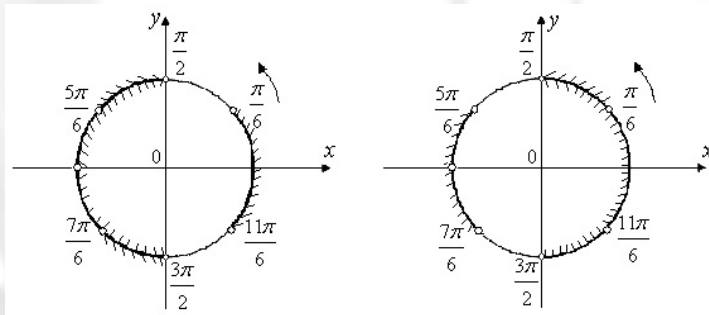
Приложение

Назад

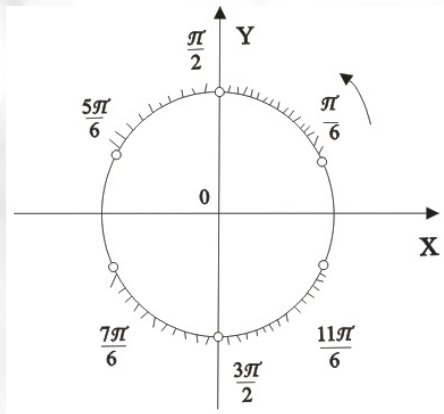


96

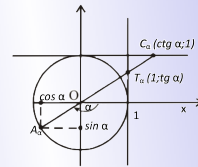
Закрыть



Объединим полученные пересечения также с помощью единичной окружности:



Ответ: $(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n) \cup (\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



97

Заккрыть

II способ. Перейдем к одному аргументу и решим квадратное неравенство относительно $\cos 2x$:

$$\cos 4x + \cos 2x < 0,$$

$$2 \cos^2 x - 1 + \cos 2x < 0.$$

Пусть $\cos 2x = a$, $|a| \leq 1$, тогда

$$2a^2 + a - 1 < 0;$$

$$2(a + 1)(a - \frac{1}{2}) < 0;$$

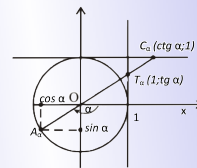
$$-1 < a < \frac{1}{2},$$

оно удовлетворяет условию $|a| \leq 1$

Вернемся к замене. Нам нужно решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \cos 2x > -1, \\ \cos 2x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Обозначим } 2x = t : \begin{cases} \cos t > -1, \\ \cos t < \frac{1}{2} \end{cases}$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

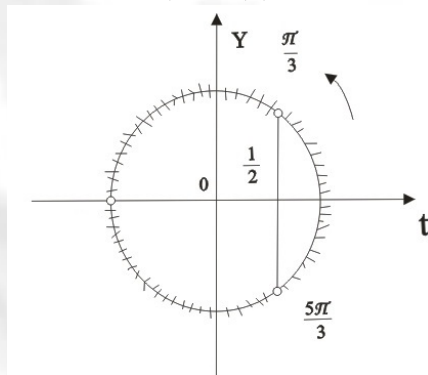
Назад



98

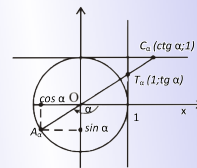
Заккрыть

Найдем решения с помощью единичной окружности:



$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \pi + 2\pi n, \\ \pi + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \pi + 2\pi n, \\ \pi + 2\pi n < 2x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \\ \frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ \frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n, \end{array} \right.$$

Ответ: $(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n) \cup (\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n), n \in \mathbb{Z}.$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



99

Заккрыть

III способ. Заменяем сумму функций произведением и решаем неравенство методом интервалов.

$$\cos 4x + \cos 2x < 0,$$

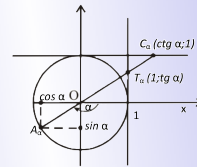
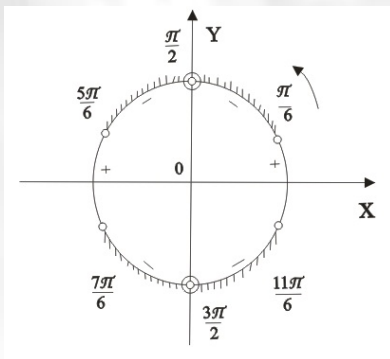
$$\cos 3x \cos x < 0.$$

Функция $f(x) = \cos 3x \cos x$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}$. Найдём нули функции:

$$\cos 3x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Нарисуем окружность и нанесем нули функции:



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



100

Закрыть

Найдем значение функции в точке $x = 0$ на промежутке $(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6})$, оно положительно. В остальных интервалах чередуем знаки с учетом того, что $x = \pm\frac{\pi}{2}$ являются "двойными" точками.

Ответ: $(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n) \cup (\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Эффективность использования "функционального подхода" при решении неравенств можно проследить при решении следующего примера.

Пример 6.6. Решите неравенство

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x \geq 2 + 3 \cos^2(2x + \frac{\pi}{6}).$$

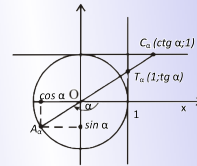
Решение.

Разделим обе части неравенства на 2 и в левой части перейдем к вспомогательному углу, получим:

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}) \geq 1 + \frac{3}{2} \cos^2(2x + \frac{\pi}{6}).$$

Так как $|\sin(x + \frac{\pi}{3})| \leq 1$, то неравенство выполняется только в случае, когда

$$\begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1, \\ \cos(2x + \frac{\pi}{6}) = 0. \end{cases}$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

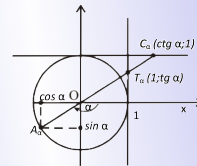


101

Закрывать

откуда находим значение $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



102

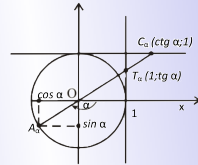
Закреть

Тема 7

Решение уравнений и неравенств, содержащих $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arcctg} x$

План

1. Приемы решения тригонометрических уравнений, содержащих $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arcctg} x$.
2. Схема решения неравенств, содержащих $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arcctg} x$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



103

Закреть

1. Приемы решения тригонометрических уравнений, содержащих $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\text{arcctg } x$.

При решении уравнений и неравенств есть возможность сузить промежутки, которым принадлежат соответствующие решения, за счет нахождения общей области определения входящих в них функций (условимся говорить, области определения уравнения или неравенства). Затем находятся значения произвольно выбранной монотонной функции от обеих частей, решается полученное уравнение или неравенство. При решении уравнений осуществляется проверка полученных корней непосредственной подстановкой в уравнение.

Пример 7.1. Решите уравнение $2 \arcsin x = 2 \arccos 2x$.

Решение.

I способ.

1. Вводим обозначения и находим область определения уравнения:

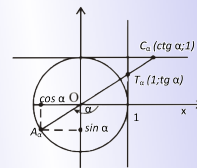
$$\arcsin x = a, a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \sin a = x, (|x| \leq 1);$$

$$\arccos 2x = b, b \in [0; \pi], \cos b = 2x, |2x| \leq 1.$$

Значит, $|x| \leq 0,5$. Как видим, корни должны принадлежать промежутку $[-0,5; 0,5]$.

2. Найдем значение косинуса от обеих частей: $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a = 1 - 2x^2$, $\cos b = 2x$.

Решим квадратное уравнение $1 - 2x^2 = 2x$, получим корни: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < -0,5$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



104

Закрыть

3. Проверим, является ли корнем $x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, подставив данное выражение в исходное уравнение:

$$2 \arcsin \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} = \arccos (-1 + \sqrt{3}). \quad (*)$$

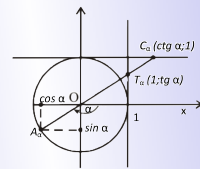
Фактически нам нужно доказать тождество по ранее данной схеме.

Так как $0 < 2 \arcsin \frac{-1+\sqrt{3}}{2} < \pi$ и $0 < \arccos (-1 + \sqrt{3}) < \pi$ (то есть левая и правая часть принадлежит промежутку $(0; \pi)$ - промежутку монотонности функции $y = \cos t$), значения косинуса от обеих частей равны, то равенство (*) справедливо.

II способ.

Разделим обе части уравнения на 2: $\arcsin x = \frac{1}{2} \arccos 2x$. В этом случае $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \frac{1}{2} \arccos 2x \leq \frac{\pi}{2}$. Равенство возможно, если каждая из его частей принадлежит промежутку $[0; \frac{\pi}{2}]$, тогда $x \in [0; 1]$. Найдем значение косинуса левой и правой частей и решим соответствующее уравнение:

$$\begin{aligned} \cos (\arcsin x) &= \sqrt{1-x^2}, \\ \cos \left(\frac{1}{2} \arccos 2x \right) &= \sqrt{\frac{1+2x}{2}}. \\ \sqrt{1-x^2} &= \sqrt{\frac{1+2x}{2}}, \end{aligned}$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



105

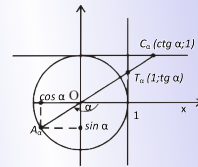
Закреть

$$1 - x^2 = \frac{1 + 2x}{2},$$

$$2x^2 + 2x - 1 = 0,$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Так как $x \geq$, то корнем является значение $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.
Ответ: $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



106

Закреть

2. Схема решения неравенств, содержащих $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arctg} x$.

При решении неравенств мы сравниваем значения функции от обеих частей неравенства. Если функция является возрастающей на области определения, то знак неравенства сохраняется, в противном случае - меняется на противоположный.

Пример 7.2. Решите неравенство $\arcsin(x - 1) < \arcsin(2 - x)$.

Решение.

1. Введем обозначения:

$$\arcsin(x - 1) = a, a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \sin a = x - 1, |x - 1| \leq 1;$$

$$\arcsin(2 - x) = b, b \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \sin b = 2 - x, |2 - x| \leq 1.$$

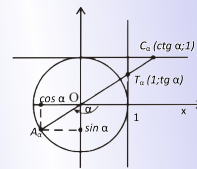
Полученные решения должны удовлетворять системе
$$\begin{cases} |x - 1| \leq 1, \\ |2 - x| \leq 1. \end{cases}$$

2. На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \sin t$ возрастает, значения синуса от обеих частей равны соответственно $(x - 1)$ и $(2 - x)$, поэтому $x - 1 < 2 - x$.

Решение найдем, решив систему

$$\begin{cases} |x - 1| \leq 1, \\ |2 - x| \leq 1, \\ x - 1 < 2 - x. \end{cases}$$

Ответ: $[1; 1,5)$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



107

Заккрыть

Пример 7.3. Решите неравенство $\arcsin x > \arccos x$.

Решение.

1. Введем обозначения:

$$\arcsin x = a, a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \sin a = x, |x| \leq 1;$$

$$\arccos x = b, b \in [0; \pi], \cos b = x, |x| \leq 1.$$

Область определения неравенства - промежуток $[-1; 1]$.

2. Так как не существует функции, монотонной в трех четвертях, то разобьем область определения неравенства на два промежутка:

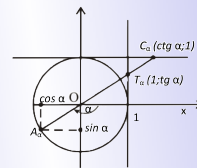
а) $-1 \leq x < 0$, тогда $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\arccos x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ - неравенство не выполняется;

б) $0 \leq x \leq 1$ - I четверть, функция $y = \sin x$ возрастает, поэтому $\sin a > \sin b$; $\sin a = x$ по условию, $\sin b = \sqrt{1 - \cos^2 b} = \sqrt{1 - x^2}$.

Решим неравенство $x > \sqrt{1 - x^2}$, учитывая, что $0 \leq x \leq 1$.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

Иногда полезно построить графики функций, входящих в неравенство, затем рассмотреть различные промежутки области определения неравенства и на каждом из них сравнить значения функций.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



108

Заккрыть

Пример 7.4. Решите неравенство $2 \arcsin x > \operatorname{arctg} x$.

Решение.

Построим графики функций $y = 2 \arcsin x$ и $y = \operatorname{arctg} x$ и сравним их значения на области определения неравенства - промежутке $[-1; 1]$.

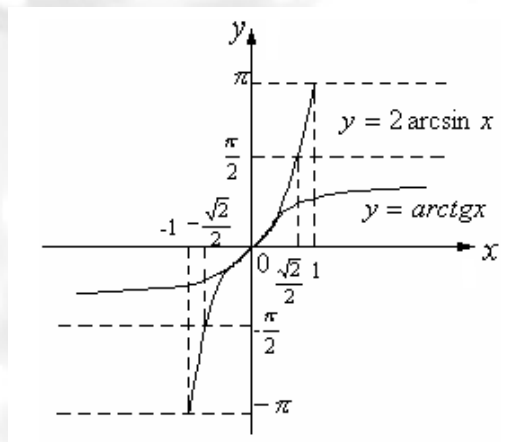
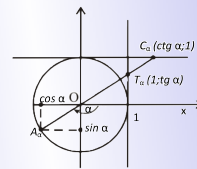


График функции $y = 2 \arcsin x$ пересекает прямую $y = \frac{\pi}{2}$ в точке $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($2 \arcsin x_0 = \frac{\pi}{2}$; $\arcsin x_0 = \frac{\pi}{4}$, отсюда $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$).

Из рисунка видно, что

при $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1$, $\frac{\pi}{2} \leq 2 \arcsin x \leq \pi$, $0 \leq \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, а значит, неравенство выполняется;

при $-1 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\pi \leq 2 \arcsin x \leq -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < 0$, а значит, неравенство не выполняется.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



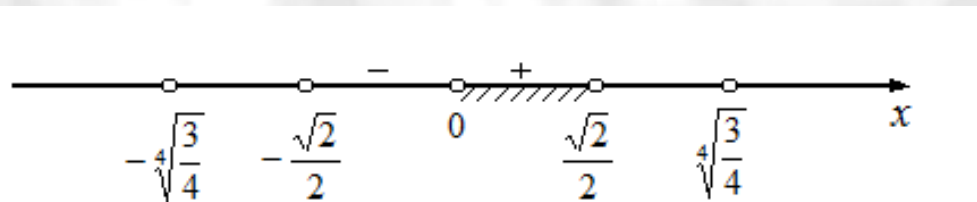
109

Заккрыть

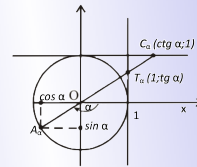
Осталось рассмотреть случай, когда $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$:
 $-\frac{\pi}{2} < 2 \arcsin x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$. Таким образом, обе части уравнения принадлежат одному и тому же промежутку возрастания функции $y = \sin t$. Получаем неравенство, равносильное исходному: $\sin(2 \arcsin x) > \sin(\operatorname{arctg} x)$, откуда

$$2x\sqrt{1-x^2} > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow x \left(2(1-x^4)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) > 0.$$

Последнее неравенство решается методом интервалов: на промежутке $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ отмечаем нули соответствующей функции и определяем ее знаки в полученных интервалах:



Объединяем полученный промежуток $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ с промежутком $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.
 Ответ: $(0; 1]$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



110

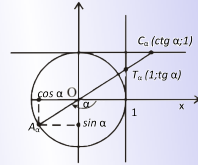
Заккрыть

Тема 8

Графики тригонометрических функций и уравнений

План

1. Основные преобразования графиков тригонометрических функций.
2. Построение графика функции вида $y = Af(\omega x + a) + b$ где f – некоторая тригонометрическая функция.
3. Построение графиков сложных функций.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



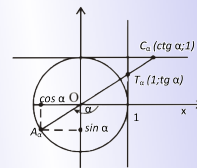
111

Закрыть

1. Основные преобразования графиков тригонометрических функций.

Пусть задана тригонометрическая функция $y = f(x)$, график которой нам известен. Преобразования, которые необходимы для построения графиков тригонометрических функций $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = f(kx)$ ($k > 0$), $y = kf(x)$ ($k > 0$), $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, аналогичны преобразованиям алгебраических функций. Перечислим их:

1. График функции $y = f(x + a)$ может быть получен перемещением вдоль оси Ox графика функции $y = f(x)$ на $|a|$ единиц (вправо при $a < 0$, влево при $a > 0$).
2. График функции $y = f(x) + a$ может быть получен перемещением вдоль оси Oy графика функции $y = f(x)$ на $|a|$ единиц (вниз при $a < 0$, вверх при $a > 0$).
3. График функции $y = -f(x)$ может быть получен из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси Ox .
4. График функции $y = f(-x)$ может быть получен из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси Oy .



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

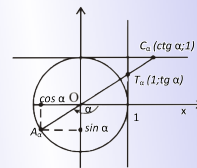
Назад



112

Заккрыть

5. График функции $y = f(kx)$ может быть получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием его вдоль оси Ox в k раз при $k > 1$ и растяжением вдоль оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз при $0 < k < 1$; в этом случае период заданной функции $T_0 = \frac{T}{k}$, где T - период функции $y = f(x)$.
6. . График функции $y = kf(x)$ может быть получен из графика функций $y = f(x)$ растяжением его вдоль оси Oy в k раз при $k > 1$ и сжатием его вдоль оси Oy в $\frac{1}{k}$ раз при $0 < k < 1$.
7. График функции $y = |f(x)|$ может быть получен из графика функций $y = f(x)$ отображением части графика, расположенного ниже оси абсцисс, симметрично относительно этой оси.
8. Функция $y = f(|x|)$ - чётная, потому строим график функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$ и отображаем эту часть графика, симметрично относительно оси Oy .



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



113

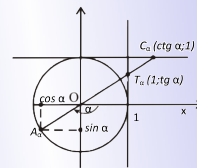
Заккрыть

Пример 8.1. Постройте график функции $y = \sin 4x$.

Решение.

Сначала изобразим график функции $y = \sin x$ и сожмём его к оси ординат в 4 раза.

Для уточнения графика функций $y = \sin 4x$ можно найти наименьший положительный период функции $T = \frac{\pi}{2}$, а из уравнения $\sin 4x = 0$ – точки пересечения графика с осью Ox : $x = \frac{\pi k}{4}, k \in Z$. Затем определить точки максимума и минимума: $\sin 4x = 1$ при $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$, а $\sin 4x = -1$ при $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

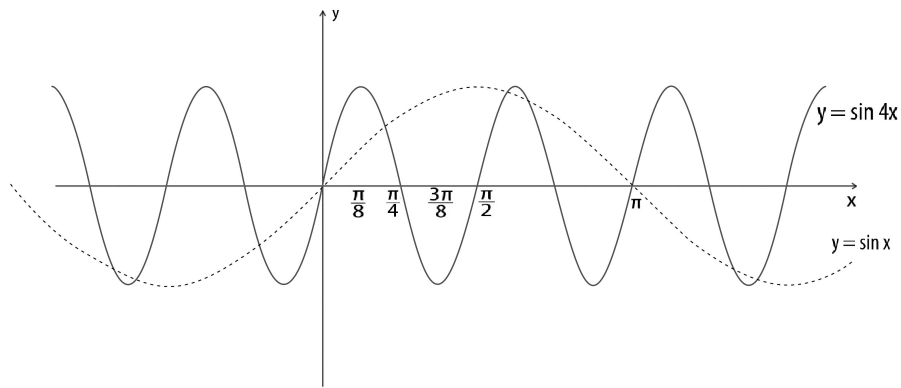
Приложение

Назад



114

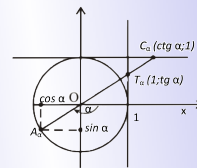
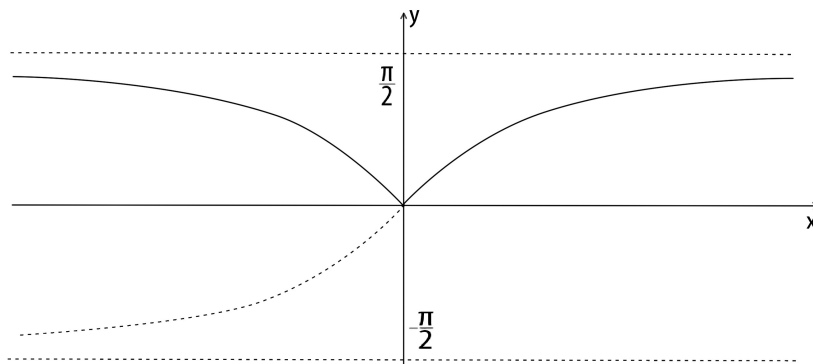
Заккрыть



Пример 8.2. Постройте график функции $y = \operatorname{arctg} |x|$.

Решение.

Построим график функции $y = \operatorname{arctg} x$ при $x \geq 0$ и отобразим его симметрично относительно оси Oy .



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



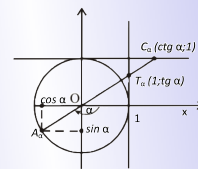
115

Закрыть

2. Построение графика функции вида $y = Af(\omega x + a) + b$ где f – некоторая тригонометрическая функция.

Построение графика данной функции проводится в порядке, обратном указанном ниже этапам упрощения вида функции.

Порядок упрощения вида функции	Порядок построения графика
$y = Af(\omega(x + \frac{a}{\omega})) + b$	Сдвиг графика на $ b $ единиц вдоль оси Oy .
$y = Af(\omega(x + \frac{a}{\omega})) \uparrow$	Сдвиг графика на $ \frac{a}{\omega} $ единиц вдоль оси Ox .
$y = Af(\omega x) \uparrow$	Отражение графика симметрично относительно оси абсцисс при $A < 0$.
$y = A f(\omega x) \uparrow$	Сжатие или растяжение графика вдоль оси ординат.
$y = f(\omega x) \uparrow$	Отражение графика симметрично относительно оси ординат при $\omega < 0$.
$y = f(\omega x) \uparrow$	Сжатие или растяжение графика вдоль оси абсцисс.
$y = f(x) \uparrow$	



кафедра

методики
преподавания
математики
и информатики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



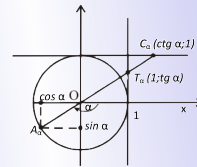
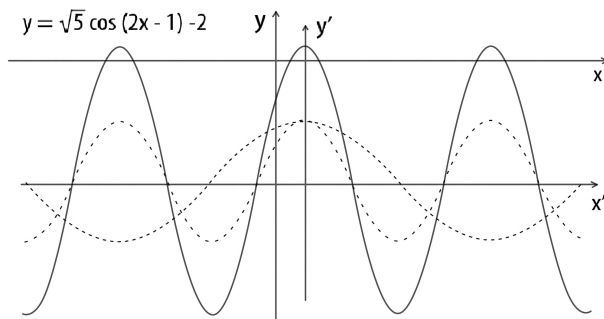
116

Заккрыть

Пример 8.3. Постройте график функции $y = \sqrt{5} \cos(2x - 1) - 2$.

Решение.

Запишем заданную функцию в виде $y = \sqrt{5} \cos(2(x - \frac{1}{2})) - 2$. Последовательно построим графики функций $y = \cos x$, $y = \cos 2x$, $y = \sqrt{5} \cos 2x$, $y = \sqrt{5} \cos 2(x - \frac{1}{2})$, $y = \sqrt{5} \cos(2(x - \frac{1}{2})) - 2$, используя элементарные построения, описанные в п.2 лекции. График имеет вид:



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



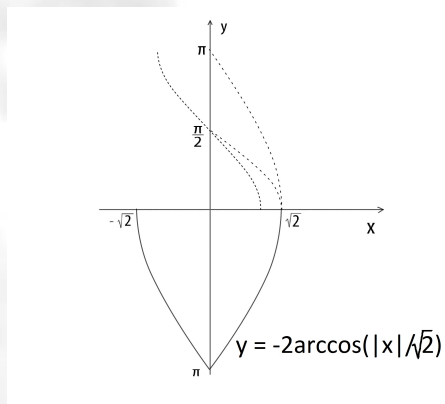
117

Заккрыть

Пример 8.4. Постройте график функции $y = -2 \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}|x|)$.

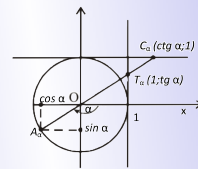
Решение.

Строим график функции $y = \arccos x$, затем $y = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}x)$,
 $y = 2 \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}x)$, $y = -2 \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}x)$ при $x \geq 0$, $y = -2 \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}|x|)$.
 График заданной функции приведён ниже.



Замечание 1. Частным случаем рассматриваемой функцией является функция $y = A \sin(\omega t + a)$, $A > 0$, $\omega > 0$. Прямолинейные движения точки, совершаемые по данному закону, называют гармоническими колебаниями.

Замечание 2. Вместо сдвига графиков функции вдоль осей полезно использовать параллельный перенос начала системы координат в точку с координатами $(-a; b)$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



118

Закрыть

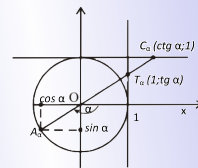
3. Построение графиков сложных функций.

Рассмотрим графики функций, представляющих линейные комбинации и суперпозиции (наложения) тригонометрических функций.

Пример 8.5. Постройте график функции $y = \sqrt{\sin x}$.

Решение.

Областью определения функции являются все значения аргумента, при которых $\sin x \geq 0$, то есть $x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$; $T = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Построим график функции на отрезке $[0; \pi]$. На промежутке $[0; \frac{\pi}{2}]$ $y = \sin x$ возрастает от 0 до 1, на $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ - убывает от 1 до 0, значит, на указанных промежутках соответственно возрастает и убывает функция $y = \sqrt{\sin x}$. Так как $0 < x < 1$, то $x < \sqrt{x}$, поэтому $\sin x < \sqrt{\sin x}$. Находим точки пересечения с осью Ox : $(0;0)$, $(\pi,0)$, с осью Oy : $(0;0)$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

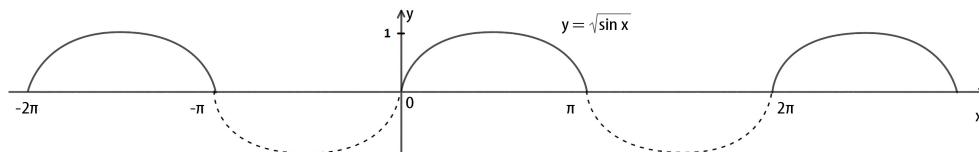
Приложение

Назад



119

Заккрыть

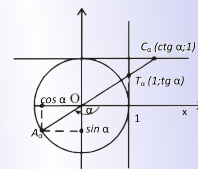
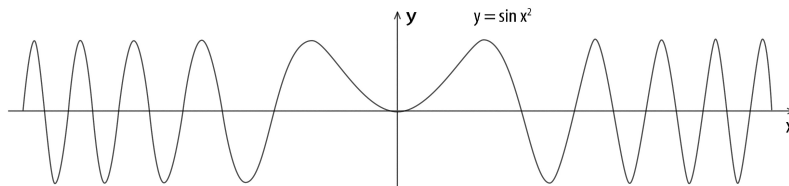


Пример 8.6. Постройте график функции $y = \sin x^2$ (кривую Френеля).

Решение.

Область определения функции $D(y) = (-\infty; +\infty)$. На промежутке $[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$ ($\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1,25$) функция $y = x^2$ возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, поэтому функция $y = \sin x^2$ будет возрастать от 0 до 1; на промежутке $[\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \sqrt{\pi}]$, ($\sqrt{\pi} \approx 1,77$) $y = x^2$ возрастает от $\frac{\pi}{2}$ до π , а заданная функция убывает от 1 до 0; на промежутке $[\sqrt{\pi}; \sqrt{\frac{3\pi}{2}}]$, ($\frac{3\pi}{2} \approx 2,25$) функция $y = x^2$ возрастает от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, а исходная - убывает от 0 до -1 и т.д. Найдём точки пересечения с осями: $Oy - (0;0)$; $Ox - (0;0), (\sqrt{\pi}; 0), (-\sqrt{\pi}; 0), (\sqrt{2\pi}; 0), (-\sqrt{2\pi}; 0), \dots, (\sqrt{k\pi}; 0), (-\sqrt{k\pi}; 0)$.

Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} = 0$, то расстояние между соседними точками пересечения графика с осью абсцисс при $k \rightarrow \infty$ стремится к 0. График функции изображён на рисунке:



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



120

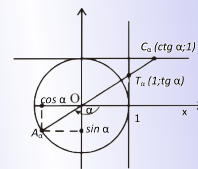
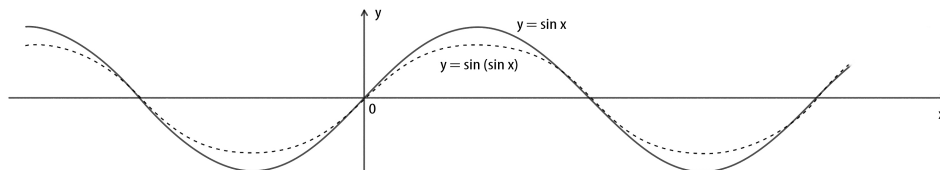
Заккрыть

Пример 8.7. Постройте график функции $y = \sin(\sin x)$.

Решение.

Область определения функции $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Так как $D(y)$ симметрична относительно 0 и $f(-x) = \sin(\sin(-x)) = \sin(-\sin x) = -\sin(\sin x) = -f(x)$, то функция является нечётной. Данная функция периодическая, $T = 2\pi n$. Промежутки возрастания и убывания функции $y = \sin x$ являются соответственно промежутками возрастания и убывания данной функции. На промежутке $[0; \frac{\pi}{2}]$ синус возрастает от 0 до 1, а заданная функция - от 0 до $\sin 1 \approx 0,84$; на промежутке $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ синус убывает от 1 до 0, а исходная функция - от $\sin 1$ до 0. Построим график на отрезке $[0; \pi]$ и отразим симметрично относительно начала координат. Построенный график перемещаем через период.

Строим график:



кафедра

методики
преподавания
математики
и информатики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

[Назад](#)



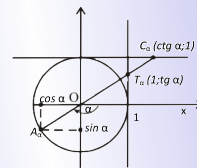
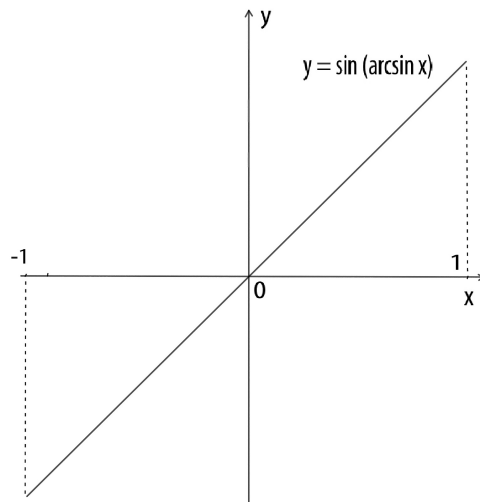
121

Закреть

Пример 8.8. Постройте график функции $y = \sin(\arcsin x)$.

Решение.

По определению $\arcsin x = \alpha$, $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\sin \alpha = x$. Значит, $D(y) = [-1; 1]$ и $\sin(\arcsin x) = x$. Строим график функции $y = x$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



122

Закрыть

Пример 8.9. Постройте график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

Решение.

Область определения функции $D(y) = (-\infty; +\infty)$, по определению $\arcsin(\sin x) = y$, $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\sin y = \sin x$.

Решим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}\sin x - \sin y &= 0, \\ 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} &= 0, \\ \sin \frac{x-y}{2} = 0 \text{ или } \cos \frac{x+y}{2} &= 0\end{aligned}$$

$$\sin \frac{x-y}{2} = 0,$$

$$\frac{x-y}{2} = \pi n, n \in Z,$$

$$y = x - 2\pi n, n \in Z,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x - 2\pi n \leq \frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

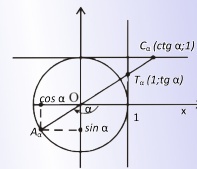
$$\cos \frac{x+y}{2} = 0,$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,$$

$$y = -x + \pi(2k + 1), kn \in Z,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -x + \pi(2k + 1) \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



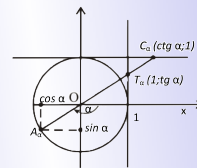
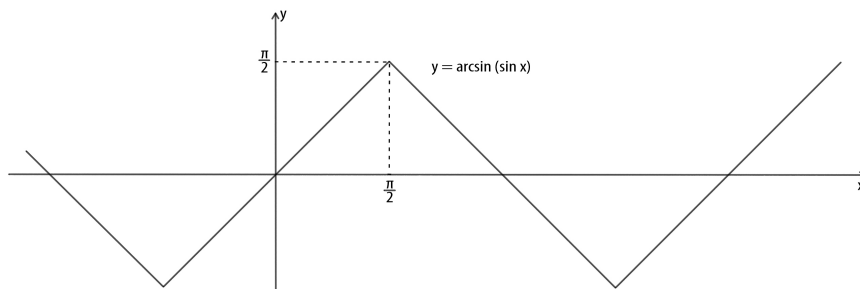
123

Заккрыть

Таким образом, алгебраически данная функция y может быть задана:

$$\left[\begin{array}{l} x - 2\pi n, \text{ если } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \\ -x + \pi(2k + 1), \text{ если } \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z. \end{array} \right.$$

График функции изображён на рисунке:



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



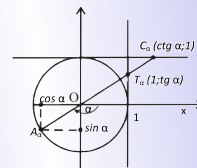
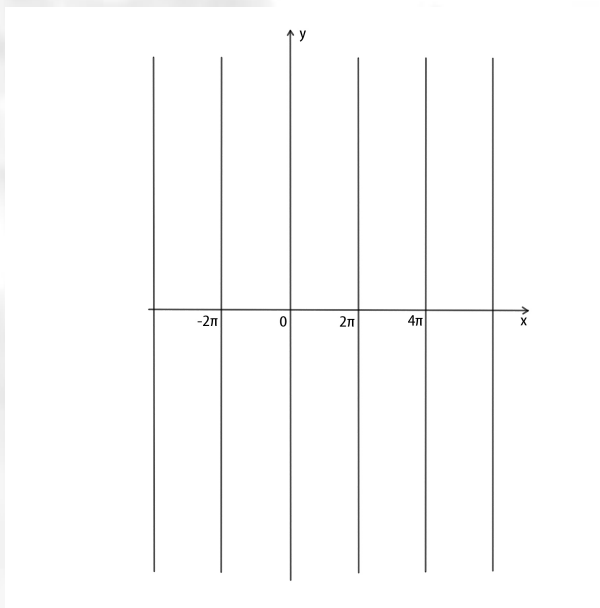
124

Закреть

Пример 8.10. Постройте график уравнения, $\cos x = 1$.

Решение.

Решим уравнение $\cos x = 1$, $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Аргументы точек графика принимают его все значения $y \in \mathbb{R}$. График уравнения имеет следующий вид.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



125

Закрыть

Тема 9

Основные приемы решения тригонометрических уравнений и неравенств с параметрами

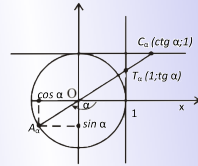
Параметр (в переводе с греческого "отмеривающий") – величина, численное значение которой не указано, но считается известным и заданным на некотором числовом множестве.

Решение задач с параметрами во многом зависит от требований, которые могут быть следующими:

- решить уравнение или неравенство;
- найти, при каких значениях параметра уравнение или неравенство не имеют решений, имеют ограниченное число решений либо решения принадлежат какому-либо промежутку.

Рассмотрим подходы к решению нескольких видов тригонометрических уравнений и неравенств:

- простейшие уравнения и неравенства;
- линейные уравнения относительно входящих в них тригонометрических функций;
- квадратные уравнения относительно входящих в них тригонометрических функций;



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



126

Закрывать

- неравенства, левая часть которых представляет произведение линейных множителей относительно некоторых тригонометрических функций.

Так как параметр – число, то решение простейших уравнений и неравенств зависит от области определения и множества значений соответствующих тригонометрических функций.

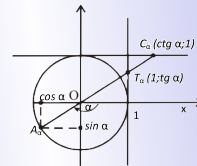
Пример 9.1. Решите уравнение $\sin x = a$.

Решение.

Если $|a| \leq 1$, то решение находится по известной формуле:
 $x = (-1)^k \arcsin a + \Pi k, k \in Z$.

Если $|a| > 1$, то уравнение решений не имеет.

Ответ: $(-1)^k \arcsin a + \Pi k, k \in Z$, если $|a| \leq 1$;
 $\emptyset$, если $|a| > 1$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



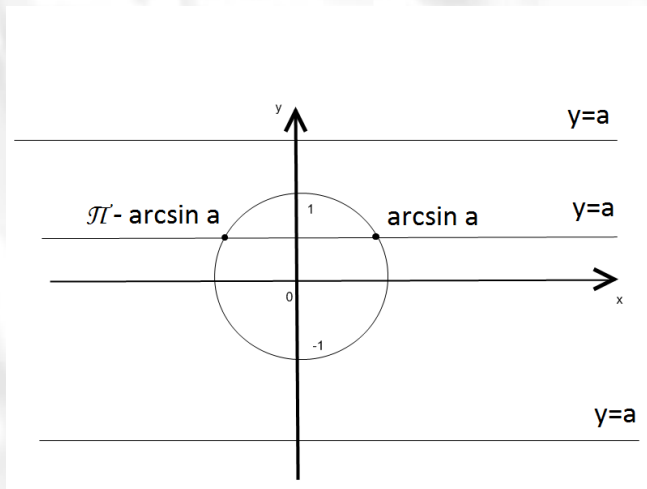
127

Заккрыть

Пример 9.2. Решите неравенство $\sin x > a$.

Решение.

Нарисуем единичную окружность и покажем все возможные случаи расположения прямой $y=a$:

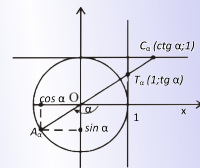


Очевидно, что если $a < -1$, то решением является множество всех действительных чисел; если $-1 \leq a < 1$, то $x \in (\arcsin a + 2\pi k, \pi - \arcsin a + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$; если $a \geq 1$, то решений нет.

Ответ: $\mathbb{R}$, если $a < -1$,

$(\arcsin a + 2\pi k, \pi - \arcsin a + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, если $-1 \leq a < 1$;

$\emptyset$, если $|a| \geq 1$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



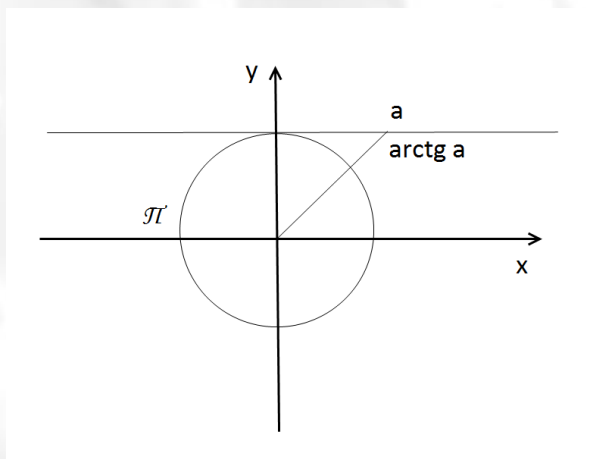
128

Заккрыть

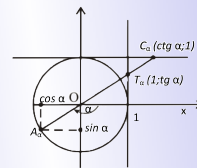
Пример 9.3. Решите неравенство $\operatorname{ctg} x \leq a$.

Решение.

Рисуем единичную окружность, проводим линию котангенсов и находим решения неравенства. Так как a может принимать любые значения из множества действительных чисел, то его решение не отличается от решения в случае, когда a являлось конкретным числовым значением:



Ответ: $[\operatorname{arctg} a + \pi k, \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



129

Закрыть

Пример 9.4. Решите уравнение $(5a - 1) \cos x = 2a + 3$.

Решение.

Если $5a - 1 \neq 0$, то $\cos x = \frac{2a+3}{5a-1}$. Данное простейшее уравнение имеет корни, если $|\frac{2a+3}{5a-1}| \leq 1$. Решением его являются значения $a \in (-\infty; -\frac{2}{7}] \cup [\frac{4}{3}; +\infty)$. В этом случае $x = \pm \arccos \frac{2a+3}{5a-1} + 2\pi k, k \in Z$. Если же $|\frac{2a+3}{5a-1}| > 1$, то есть $a \in (-\frac{2}{7}; \frac{1}{5}) \cup (\frac{1}{5}; \frac{4}{3})$, то уравнение решений не имеет.

Если $5a - 1 = 0$ ($a = \frac{1}{5}$), то уравнение примет вид $0x = 3\frac{2}{5}$ и корней не имеет.

Ответ: $\pm \arccos \frac{2a+3}{5a-1} + 2\pi k, k \in Z$, если $a \in (-\infty; -\frac{2}{7}] \cup [\frac{4}{3}; +\infty)$;
 $\emptyset$, если $a \in (-\frac{2}{7}; \frac{4}{3})$.

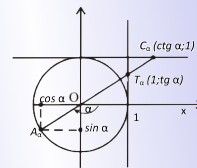
Пример 9.5. Найдите значения параметра a , при которых уравнение $\cos^2 x + (a^2 - a) \sin x - a^3 + 2a^2 - 1 = 0$ не имеет корней.

Решение.

Заменив $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и приведя подобные слагаемые, получим уравнение $\sin^2 x - (a^2 - a) \sin x + a^3 - 2a^2 = 0$.

Найдем дискриминант уравнения $D = (a^2 - 3a)^2 \geq 0$. Рассмотрим два случая:

1) если $D=0$, то $a = 0$ или $a = 3$. Так как $\sin x = \frac{a^2-a}{2}$, то при $a=0$ получаем уравнение $\sin x = 0$, оно имеет корень; при $a = 3$ – уравнение $\sin x = 3$, которое не имеет корней;



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



130

Заккрыть

2) если $D > 0$, то $a \neq 0$ и $a \neq 3$; в этом случае $\sin x = a$ или $\sin x = a^2 - 2a$; данные уравнения не имеют решений при следующих условиях:

$$\begin{cases} |a| > 1, \\ |a^2 - 2a| > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} a > 1, \\ a < -1, \end{cases} & \begin{cases} \begin{cases} a^2 - 2a - 1 > 0, \\ a^2 - 2a + 1 < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} (a - (1 - \sqrt{2}))(a - (1 + \sqrt{2})) > 0, \\ (a - 1)^2 < 0. \end{cases} \end{cases}$$

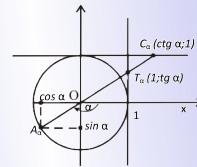
Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1 + \sqrt{2}; +\infty)$.

Пример 9.6. Решите неравенство $a(\sin x + \cos x)^2 > (1 - a) \cos 2x$.

Решение.

Возведем в квадрат выражение $\sin x + \cos x$, применим формулу двойного аргумента для $\cos 2x$, приведем подобные слагаемые и получим неравенство

$$\sin^2 x + 2a \sin x \cos x + (2a - 1) \cos^2 x > 0.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



131

Закрыть

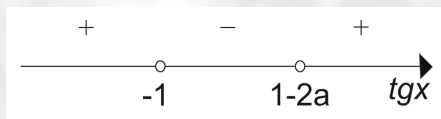
Разделим обе части данного неравенства на $\cos^2 x \neq 0$ и решим неравенство $\operatorname{tg}^2 x + 2a \operatorname{tg} x + 2a - 1 > 0$. Найдем дискриминант соответствующего уравнения: $D = 4(a - 1)^2 \geq 0$. Возможны два случая:

1) $D=0$ при $a=1$: $(\operatorname{tg} x + 1)^2 > 0$, оно справедливо при $\operatorname{tg} x \neq -1$, откуда $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) $D>0$ при $a \neq 1$: корнями трехчлена будут $\operatorname{tg} x = -1$ или $\operatorname{tg} x = 1 - 2a$.

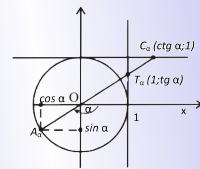
Необходимо решить неравенство $(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - (1 - 2a)) > 0$, для чего используем метод интервалов. Решения неравенства зависят от взаимного расположения значений -1 и $1 - 2a$ на координатной прямой:

а) -1 лежит левее $1 - 2a$, то есть $-1 < 1 - 2a, a < 1$,



$\operatorname{tg} x < -1$ или $\operatorname{tg} x > 1 - 2a$.

Находим объединение решений данных неравенств с помощью единичной окружности:



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

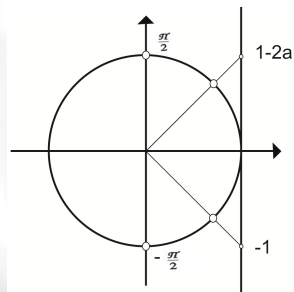
Приложение

Назад



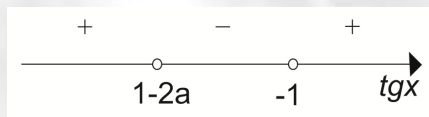
132

Заккрыть



$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \cup (\operatorname{arctg}(1 - 2a) + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in Z.$$

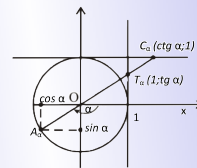
б) если -1 лежит правее $1 - 2a$, то есть $-1 > 1 - 2a, a > 1$,



$$\operatorname{tg} x < 1 - 2a \text{ или } \operatorname{tg} x > -1.$$

В этом случае $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \operatorname{arctg}(1 - 2a) + \pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$

Проверим, являются ли решения уравнения $\cos x = 0$ решениями исходного уравнения. Подстановка значений $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ в неравенство подтверждает, что они являются корнями исходного неравенства.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



133

Закреть

Ответ:

$$\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \cup \left(\arctg(1 - 2a) + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in Z, \text{ если } a < 1;$$

$$\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n, \arctg(1 - 2a) + \pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in Z, \text{ если } a > 1;$$

$$R \setminus -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \text{ если } a = 1.$$

Пример 9.7. Решите неравенство

$$a \sin^2 x + (2a^2 + a) \cos x - a^3 - a^2 + a > 0.$$

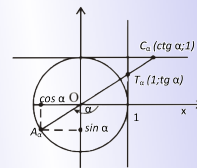
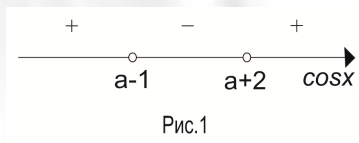
Решение.

Заменим $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, приведем подобные слагаемые и разложим левую часть неравенства на множители:

$a(\cos x - (a - 1)) \cdot (\cos x - (a + 2)) < 0$. Решим неравенство методом интервалов. При любых значениях a $a + 2 > a - 1$, поэтому на координатной прямой точка $a + 2$ будет расположена правее точки $a - 1$.

Необходимо рассмотреть три случая:

$$1) a > 0, (\cos x - (a - 1)) \cdot (\cos x - (a + 2)) < 0:$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



134

Заккрыть

$$\begin{cases} a - 1 < \cos x < a + 2. \\ -1 \leq \cos x \leq 1. \end{cases}$$

Так как $a > 0$, то число 1 расположено на координатной прямой левее $a + 2$, а число -1 – левее $a - 1$. Относительно взаимного расположения чисел 1 и $a - 1$ возможны два случая:

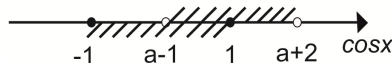


Рис.2

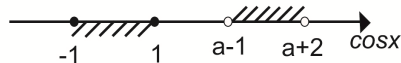


Рис.3

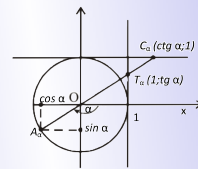
Если $a - 1 < 1$ (Рис.2), то есть $0 < a < 2$, то система равносильна неравенству $a - 1 < \cos x \leq 1$, решением которого является промежуток $(-\arccos(a - 1) + 2\pi k; \arccos(a - 1) + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если же $a - 1 \geq 1$ (Рис. 3), то есть $a \geq 2$, то система решений не имеет.

2) $a < 0$. Разделим обе части на a и решим неравенство $(\cos x - (a - 1)) \cdot (\cos x - (a + 2)) > 0$. Решением его (Рис. 1) будет решения совокупности систем:

$$\begin{cases} \cos x < a - 1, \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos x > a + 2, \\ -1 \leq \cos x \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, что при $a < 0$ число -1 лежит правее $a - 1$:



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



135

Закреть

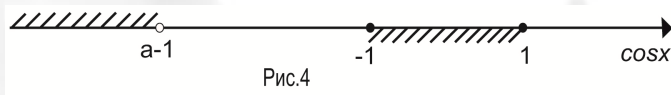


Рис.4

поэтому первая система решений не имеет.

Решение второй системы зависит от расположения на координатной прямой чисел -1 и 1 . Возможны следующие случаи:

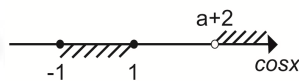


Рис.5

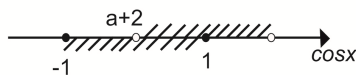


Рис.6

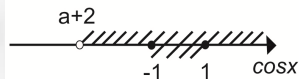


Рис.7

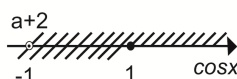
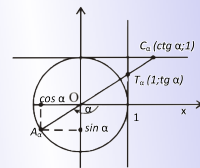


Рис.8

а) $1 \leq a + 2$ (Рис. 5), то есть $-1 \leq a < 0$, то решений не будет;

$$\text{б) } \begin{cases} 1 > a + 2, \\ -1 < a + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} a < -1, \\ a > -3, \end{cases}$$

откуда $-3 < a < -1$ (Рис. 6). Вторая система совокупности будет равносильна неравенству $a + 2 < \cos x \leq 1$, решением его является промежуток $(-\arccos(a + 2) + 2\pi k; \arccos(a + 2) + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$;



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



Заккрыть

$$\text{в) } \begin{cases} 1 > a + 2, \\ -1 > a + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} a < -1, \\ a < -3, \end{cases}$$

откуда $a < -3$ (Рис. 7). Система равносильна неравенству $-1 \leq \cos x \leq 1$, решением которого является множество $\mathbb{R}$;

$$\text{г) } \begin{cases} 1 > a + 2, \\ -1 = a + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} a < -1, \\ a = -3, \end{cases}$$

откуда $a = -3$ (Рис. 8). Система равносильна неравенству $-1 < \cos x \leq 1$, решением его является $\mathbb{R} \setminus \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

3) $a = 0$. Подставив в исходное неравенство $a=0$, получим неверное числовое неравенство $0 < 0$. В этом случа неравенство не имеет решений.

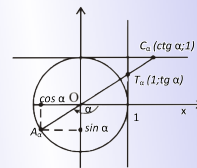
Ответ: $\mathbb{R}$, если $a < -3$;

$\mathbb{R} \setminus \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, если $a = -3$;

$(-\arccos(a+2) + 2\pi k; \arccos(a+2) + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$, если $-3 < a < -1$;

$(-\arccos(a-1) + 2\pi k; \arccos(a-1) + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$, если $0 < a < 2$;

$\emptyset$, если $-1 \leq a \leq 0$ или $a \geq 2$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



137

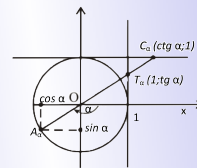
Заккрыть

4. Практические занятия

Практическое занятие №1

Тема. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции, их свойства и графики

1. Сформулируйте свойства и постройте графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ [2, гл.3].
2. Покажите различные способы нахождения периода функции [2, с.198-202; 13, с.28].
3. Сформулируйте свойства и постройте графики функций $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$ [Приложение 2].
4. Постройте графики функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ и сформулируйте их свойства [14, §32].
5. Изучите следующую информацию:
 - а) Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют общий период T , то функции $f_1(x) \pm f_2(x)$ являются периодическими функциями с периодом T .
 - б) Если f – произвольная функция, а $\phi(x)$ – периодическая функция с периодом T , то сложная функция $f(\phi(x))$ также является периодической с периодом T .



кафедра

методики
преподавания
математики
и информатики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



138

Заккрыть

в) Для того чтобы периодические функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ с периодами соответственно T_1 и T_2 имели общий период T (число T должно нацело делиться на T_1 и T_2), необходимо и достаточно, чтобы отношение $\frac{T_1}{T_2}$ было рациональным числом.

г) Если $y = f(x)$ – периодическая функция с периодом T , то $y = f(px)$ – периодическая функция с периодом $\frac{T}{p}$.

6. Расскажите, какие из данных теоретических положений использовались при решении следующего примера.

Пример. Найдите период и наименьший положительный период указанной функции

$$y = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x.$$

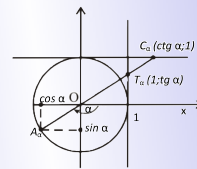
Решение.

Функция является периодической с периодом $T = \pi n$. Преобразуем формулу:

$$\begin{aligned} y = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \\ &= \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} = 2 \operatorname{ctg} 2x. \end{aligned}$$

Период функции равен $\frac{\pi n}{2}$, а наименьший положительный период равен $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



139

Заккрыть

Решите самостоятельно.

1. Определите знак числа $\sin 10^\circ + \cos 10^\circ$

Ответ.

2. Исследуйте функцию $y = \sin \frac{x^2 - x}{x - 1}$ на чётность и нечётность.

Ответ.

3. Исследуйте на периодичность функцию $y = 2 \sin x + 3 \cos 5x$.

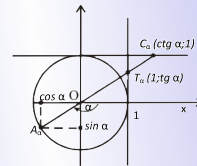
Ответ.

4. Расположите в порядке убывания: $\cos \frac{33\pi}{2}$, $\cos 29\pi$, $\sin \frac{73\pi}{2}$.

Ответ.

5. Сравните $\operatorname{ctg} 3$ и $\operatorname{ctg}(-5, 5)$.

Ответ.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



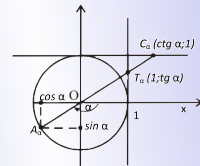
140

Заккрыть

Практическое занятие №2

Тема. Решение тригонометрических уравнений

1. Назовите типы уравнений, имеющих определенные приемы решения. Дайте характеристику каждого приема и возможностей его применения. [Тема 4]
2. Выполните тестовые задания по теме [Приложение 4]



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



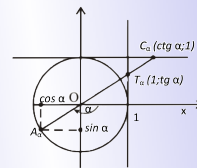
141

Заккрыть

Практическое занятие №3

Тема. Тождественные преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции

1. Дайте определения понятий арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса. [Тема 3]
2. Назовите основные опорные тождества, содержащие обратные тригонометрические функции.
3. Перечислите этапы доказательства тождеств и неравенств, содержащие обратные тригонометрические функции.
4. Выполните задания из учебного пособия [5]:
 - а) №№1142–1156;
 - б) №№1076–1080;
 - в) №№1174–1180.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



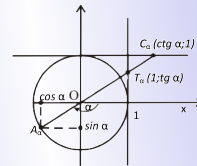
142

Заккрыть

Практическое занятие №4

Тема. Способы решения тригонометрических неравенств

1. Сформулируйте алгоритмы решения простейших неравенств.
2. Расскажите о методах решения более сложных тригонометрических неравенств.
3. Выполните тестовые задания по теме [Приложение 4]



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



143

Закрыть

5. Требования к оформлению контрольной работы

1. Контрольная работа оформляется в обычной школьной тетради в клеточку.

2. На обложке должно быть указано, по какому разделу "Элементарная математика и ПРЗ" написана контрольная работа, курс и год обучения, Ф.И.О. студента полностью.

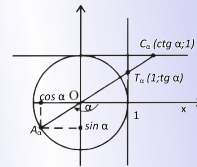
Образец.

Контрольная работа

по элементарной математике и ПРЗ(тригонометрия)
студента ... курса заочной формы обучения
математического факультета
БрГУ имени А.С. Пушкина
Иванова Ивана Ивановича.

... учебный год

3. На каждой странице тетради должны быть отведены поля, которые предназначены для замечаний преподавателя.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



144

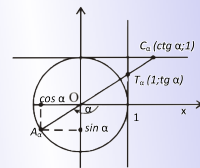
Заккрыть

4. Решение заданий записывается в порядке, указанном преподавателем, в скобках записывается номер задания в соответствующем задачнике или пособии.

5. Требования и содержания заданий переписываются.

6. В решении должны быть даны необходимые пояснения и записаны используемые формулы.

7. Обязательная запись ответа.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



145

Заккрыть

6. Нулевой вариант контрольной работы

1. Найти значение выражения $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$.

Решение.

Преобразуем произведение первых двух множителей в сумму:

$$\begin{aligned}\sin 20^\circ \sin 40^\circ &= \frac{1}{2}(\cos(40^\circ - 20^\circ) - \cos(40^\circ + 20^\circ)) = \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) = \\&= \frac{1}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{4}. \\ \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

По формулам приведения $\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$.

$$\begin{aligned}\text{Имеем: } \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ &= \left(\frac{1}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 10^\circ = \\&= \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 20^\circ \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{8} \cos 10^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}(\cos 30^\circ + \cos 10^\circ) - \frac{\sqrt{3}}{8} \cos 10^\circ = \\&= \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8} \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{8} \cos 10^\circ = \frac{3}{16}.\end{aligned}$$

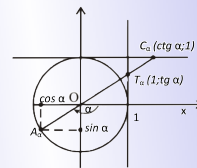
Ответ: $\frac{3}{16}$.

2. Доказать неравенство $\frac{1}{4} \leq \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha \leq 1$.

Решение.

Используем формулу суммы кубов: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ для выражения $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$.

$$\begin{aligned}\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \\&- \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha) = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - \\&- 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha.\end{aligned}$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



146

Закреть

Оценим полученное выражение:

$$\begin{aligned}0 &\leq \sin^2 \alpha \leq 1, \\ -\frac{3}{4} &\leq -\frac{3}{4} \sin^2 \alpha \leq 0, \\ \frac{1}{4} &\leq 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \leq 1.\end{aligned}$$

Значит, $\frac{1}{4} \leq \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha \leq 1$, что и требовалось доказать.

3. Найти значение выражения $\operatorname{arccctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arccctg} \frac{2}{3}$.

Решение.

По определению:

$$\begin{aligned}\operatorname{arccctg} \frac{1}{5} &= \alpha, \alpha \in (0; \pi), \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{5}; \\ \operatorname{arccctg} \frac{2}{3} &= \beta, \beta \in (0; \pi), \operatorname{ctg} \beta = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

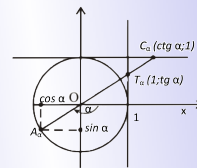
Вычислим $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, для этого используем формулу

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Известно, что $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{5}$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{2}{3}$. Следовательно, по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \text{ найдем значения } \operatorname{tg} \alpha = 5, \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{5 + 1,5}{1 - 5 \cdot 1,5} = \frac{6,5}{-6,5} = -1.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



147

Закрыть

Чтобы найти угол $(\alpha + \beta)$, определим, в какой четверти он расположен. С этой целью сузим промежутки, которым по определению принадлежали углы α и β : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, так как значения их тангенсов положительны. В этом случае $0 < \alpha + \beta < \pi$. Однако тангенс имеет отрицательное значение, поэтому $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi$. Значит, $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ. $\frac{3\pi}{4}$.

4. Решить уравнение $4(\sin 3x \cdot \sin x)^2 - \sin 3x = 5$.

Решение.

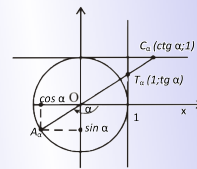
Так как $|\sin x| \leq 1$, то решение возможно при условии

$$\begin{cases} (\sin 3x \cdot \sin x)^2 = 1, \\ \sin 3x = -1. \end{cases}$$

Решим данную систему. Подставим $\sin 3x = -1$ в первое уравнение. Имеем:

$$\begin{cases} \sin^2 x = 1, \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin 3x = -1, \end{cases}$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



148

Закрыть

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \end{cases}$$

Найдем решение первой системы аналитически, приравняв правые части:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} + 2\pi k &= -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \\ 3\pi + 12\pi k &= -\pi + 4\pi n, \\ 3 + 12k &= -1 + 4n, \\ n &= 3k + 1. \end{aligned}$$

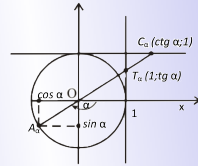
Подставляем полученное выражение во второе уравнение первой системы:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi(3k+1)}{3}; \\ x &= \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{aligned}$$

Итак, решением первой системы является $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Аналогично решим вторую систему:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} + 2\pi k &= -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \\ -3\pi + 12\pi k &= -\pi + 4\pi n, \\ -3 + 12k &= -1 + 4n, \end{aligned}$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



149

Закрыть

$$4n = 12k - 2,$$

$$2n = 6k - 1.$$

Видим, что в левой части равенства записано четное число, в правой – нечетное. Равенство невозможно, то есть не существует целых значений k , при которых n также было бы целым. Значит, система не имеет решений.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

5. Решить неравенство $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x < -3$.

Решение.

Заменим

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

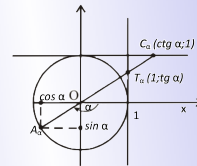
и приведем слагаемые в левой части к общему знаменателю:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} < -3,$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} < -3,$$

$$\frac{1}{\sin x \cos x} < -3,$$

$$\frac{1 + 3 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} < 0.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



150

Закрыть

Так как $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, то

$$\frac{1 + \frac{3}{2} \sin 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} < 0,$$

$$\frac{2 + 3 \sin 2x}{\sin 2x} < 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 3 \sin 2x < 0, \\ \sin 2x > 0 \end{array} \right. \quad \cup \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 + 3 \sin 2x > 0, \\ \sin 2x < 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2x < -\frac{2}{3}, \\ \sin 2x > 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin 2x > -\frac{2}{3}, \\ \sin 2x < 0, \end{array} \right.$$

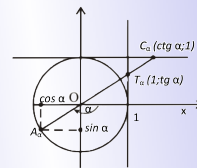
$$-\frac{2}{3} < \sin 2x < 0.$$

Пусть $2x = t$. Решим неравенство $-\frac{2}{3} < \sin t < 0$ с помощью единичной окружности:

$$\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k < t < 2\pi k \quad \text{или} \quad \pi + 2\pi k < t < \pi + \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k,$$

$$-\arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k < 2x < 2\pi k \quad \text{или} \quad \pi + 2\pi k < 2x < \pi + \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k,$$

$$-\frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} + \pi k < x < \pi k \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} + \pi k.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

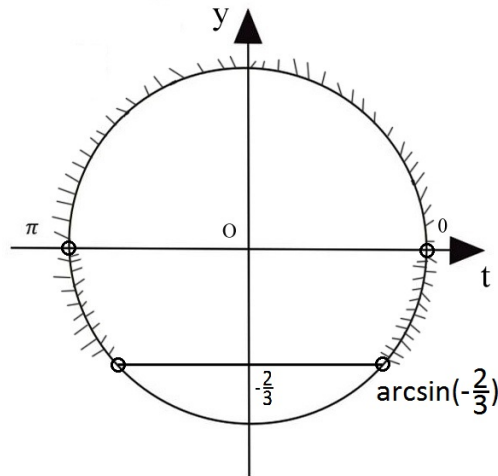
Приложение

Назад



151

Закреть



Ответ: $(-\frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} + \pi k; \pi k) \cup (\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} + \pi k), k \in \mathbb{Z}.$

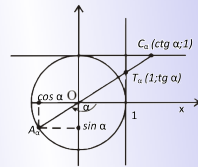
Возможен другой способ решения : заменим $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, перенесем (-3) в левую часть, приведем к общему знаменателю и решим неравенство методом интервалов.

II способ.

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + 3 < 0,$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x} < 0,$$

$$\frac{(\operatorname{tg} x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2})(\operatorname{tg} x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2})}{\operatorname{tg} x} < 0,$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

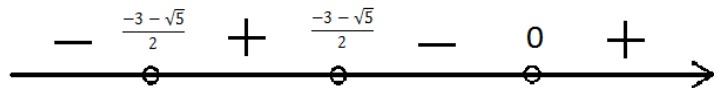


152

Закреть

Пусть $\operatorname{tg} x = t$:

$$\frac{(t - \frac{-3-\sqrt{5}}{2})(t - \frac{-3+\sqrt{5}}{2})}{1} < 0,$$



$$t < \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{-3+\sqrt{5}}{2} < t < 0,$$

$$\operatorname{tg} x < \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{-3+\sqrt{5}}{2} < \operatorname{tg} x < 0.$$

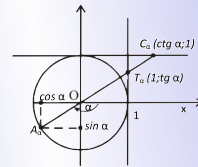
Решаем каждое неравенство с помощью единичной окружности:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \operatorname{arctg} \frac{-3-\sqrt{5}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

или

$$\operatorname{arctg} \frac{-3+\sqrt{5}}{2} + \pi n < x < \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} \frac{-3-\sqrt{5}}{2} + \pi k\right) \cup \left(\operatorname{arctg} \frac{-3+\sqrt{5}}{2} + \pi n; \pi n\right), \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

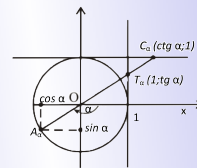
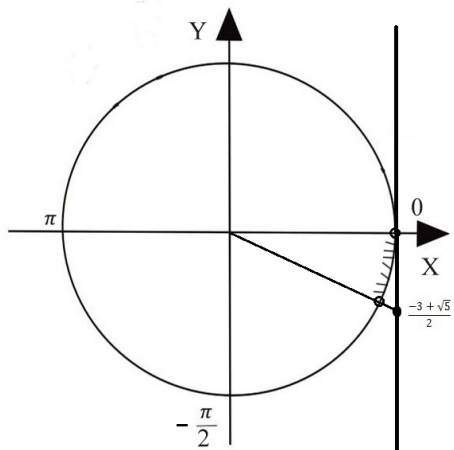
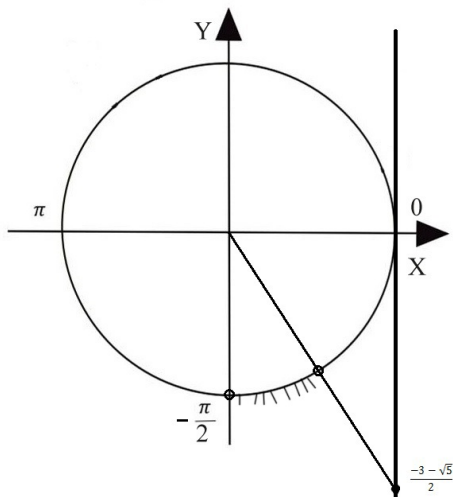
Приложение

Назад



153

Закрыть



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



154

Закреть

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{ctg} y = 3. \end{cases}$$

Решение.

Во втором уравнении системы перейдем к тангенсам углов по формуле $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{tg} y} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} y = 2 - \operatorname{tg} x, (*) \\ \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{2 - \operatorname{tg} x} = 3. \end{cases}$$

Решим второе уравнение полученной системы.

$$\frac{2 - \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg} x (2 - \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x (2 - \operatorname{tg} x)} = 0,$$

$$\begin{cases} 3 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 2 = 0, \\ \operatorname{tg} x (2 - \operatorname{tg} x) \neq 0; \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x = \frac{2}{3}.$$

Подставим полученные значения в уравнение (*) и решим совокупность систем уравнений.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} y = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{2}{3}, \\ \operatorname{tg} y = \frac{4}{3}; \end{cases}$$

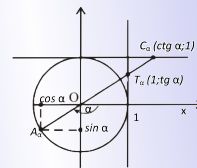
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi k, \\ y = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi n. \end{cases}$$

Ответ: $(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi n), (\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi k; \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi n), n, k \in Z$.

7. Построить график функции $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$.

Решение.

Эту функцию удобнее свести к функции вида $y = A \sin(\omega x + a)$, используя метод введения вспомогательного угла: $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



155

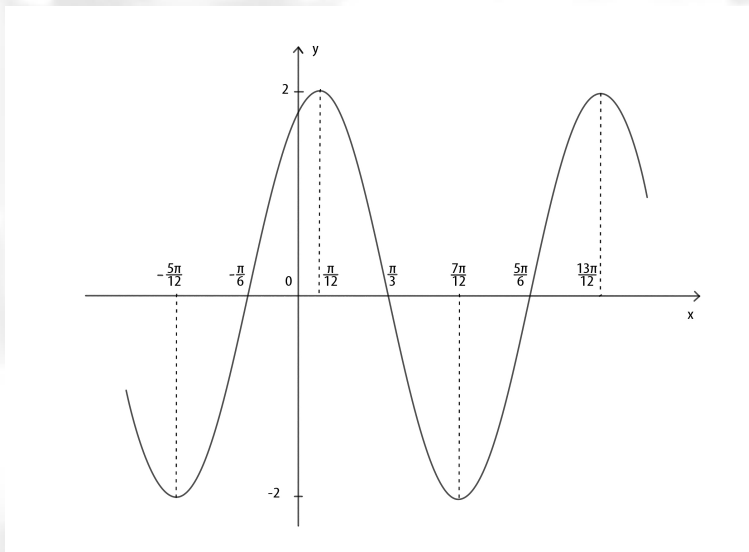
Заккрыть

Наименьший положительный период этой функции равен π .

Точки пересечения графика с осью абсцисс найдём, решив уравнение $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Точки максимума функции: $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = 1$ при $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Точки минимума функции: $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = -1$ при $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

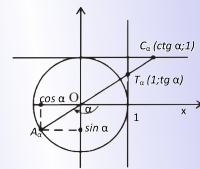


8. Решить уравнение с параметром $\sin^4 x + \cos^4 x - a \sin(4x + \pi) = 0$.

Решение.

Представим уравнение в виде

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + a \sin 4x = 0,$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



156

Закрыть

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x + a \sin 4x = 0.$$

Перейдем к аргументу $2x$, заменив

$$1 = \sin^2 2x + \cos^2 2x, \quad \sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x.$$

$$\sin^2 2x + \cos^2 2x - \frac{1}{2} \sin^2 2x + 2a \sin 2x \cos 2x = 0,$$

$$\frac{1}{2} \sin^2 2x + 2a \sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x = 0,$$

$$\sin^2 2x + 4a \sin 2x \cos 2x + 2 \cos^2 2x = 0.$$

Это однородное уравнение второй степени, разделим его обе части на $\cos^2 2x \neq 0$:

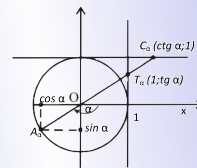
$$\operatorname{tg}^2 2x + 4a \operatorname{tg} 2x + 2 = 0,$$

$$D = 16a^2 - 8.$$

Будут иметь место три случая.

1) $D < 0$; то есть $16a^2 - 8 < 0$, $a^2 < \frac{1}{2}$, $|a| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$; в этом случае уравнение корней не имеет.

2) $D = 0$; $16a^2 - 8 = 0$, $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; уравнение будет иметь 1 корень $\operatorname{tg} 2x = \frac{-4a}{2}$; $\operatorname{tg} 2x = -2a$, откуда $2x = \operatorname{arctg}(-2a) + \pi k$,
 $x = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2a + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



157

Заккрыть

3) $D > 0$; то есть $16a^2 - 8 > 0$, $|a| > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$;
уравнение будет иметь корни

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{-4a - \sqrt{16a^2 - 8}}{2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{-4a + \sqrt{16a^2 - 8}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 2x = -2a - \sqrt{4a^2 - 2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} 2x = -2a + \sqrt{4a^2 - 2};$$

$$2x = \operatorname{arctg}(-2a - \sqrt{4a^2 - 2}) + \pi k \quad \text{или} \quad 2x = \operatorname{arctg}(-2a + \sqrt{4a^2 - 2}) + \pi n;$$

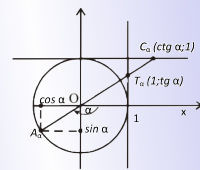
$$x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-2a - \sqrt{4a^2 - 2}) + \frac{\pi}{2} k \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-2a + \sqrt{4a^2 - 2}) + \frac{\pi}{2} n.$$

Ответ: $\emptyset$, при $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$-\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2a + \frac{\pi}{2} k$, $k \in Z$ при $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-2a - \sqrt{4a^2 - 2}) + \frac{\pi}{2} k$, $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-2a + \sqrt{4a^2 - 2}) + \frac{\pi}{2} n$,

$k, n \in Z$ при $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



158

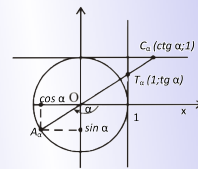
Закрыть

7. Задания для контрольной работы

7.1 Тождественные преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции

Найти значения выражений:

1. $6 \operatorname{tg} \frac{227\pi}{6} + 4 \sin \frac{994\pi}{3} - 2 \cos \frac{679\pi}{6}$. *Ответ.*
2. $\frac{1 + \sin 1235^\circ - \cos 1015^\circ}{2 \cos^2 675^\circ}$. *Ответ.*
3. $\sqrt{\frac{1 + \sin 260^\circ}{1 + \sin 100^\circ}}$. *Ответ.*
4. $\sin^3 \frac{23\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} + \cos^3 \frac{23\pi}{24} \sin \frac{\pi}{24}$. *Ответ.*
5. $\sqrt{\operatorname{tg} \frac{13\pi}{10} - \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{2}}$. *Ответ.*
6. $\frac{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}{-2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$ при $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,5$. *Ответ.*
7. $\operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{3\pi}{4} \right)$ при $\sin \alpha = -0,8$ и $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$. *Ответ.*
8. $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$. *Ответ.*
9. $\frac{\sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha}$ при $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. *Ответ.*
10. $\frac{10 + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{5 - 3 \cos^2 \alpha}$ при $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$. *Ответ.*



кафедра

методики
преподавания
математики
и информатики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



159

Заккрыть

11. $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$ при $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$. *Ответ.*

12. $\cos 4\alpha$ при $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,5$. *Ответ.*

13. $\cos^2 \alpha$ при $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. *Ответ.*

14. $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$. *Ответ.*

15. $\frac{\sin 91^\circ - \sin 1^\circ}{9\sqrt{2} \cos 46^\circ + \sqrt{2} \sin 44^\circ}$. *Ответ.*

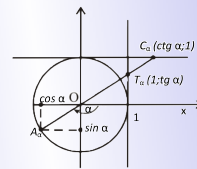
16. $\sin^6 \frac{\pi}{8} + \cos^6 \frac{9\pi}{8}$. *Ответ.*

17. $2 \sin \alpha + \cos \alpha$ при $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ и $\sin \alpha < 0$. *Ответ.*

18. $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ при $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ и $\operatorname{tg} \alpha < 0$. *Ответ.*

19. $\frac{1}{\cos 105^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\sin 285^\circ}$. *Ответ.*

20. $\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \sin 160^\circ$. *Ответ.*



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



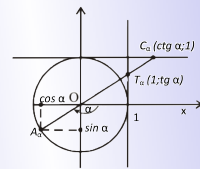
160

Заккрыть

7.2 Доказательство тригонометрических тождеств и неравенств

Доказать тождества:

1. $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2};$
2. $\sin \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{2};$
3. $\operatorname{ctg} 20^\circ \operatorname{ctg} 40^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ \operatorname{ctg} 80^\circ = \frac{1}{3};$
4. $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2};$
5. $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8};$
6. $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{5} = -\frac{1}{4};$
7. $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2};$
8. $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ = \frac{1}{2};$
9. $\operatorname{tg} \frac{\pi}{9} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{9} = \sqrt{3};$
10. $\frac{1-4\sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ} = 1.$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

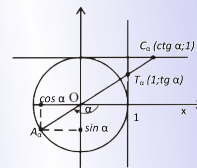


161

Закрыть

Доказать неравенства:

1. $\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha \leq 2$;
2. $\sqrt{2} \cos 5\alpha + \sqrt{2} \sin 5\alpha \leq 2$;
3. $3\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2} + 3 \cos \frac{\alpha}{2} \leq 6$;
4. $2 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \leq 3$;
5. $2 \sin^4 \alpha + 2 \cos^4 \alpha \leq 2$;
6. $\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha \geq -2$;
7. $\sqrt{2} \cos 5\alpha + \sqrt{2} \sin 5\alpha \geq -2$;
8. $3\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2} + 3 \cos \frac{\alpha}{2} \geq -6$;
9. $2 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \geq 2$;
10. $2 \sin^4 \alpha + 2 \cos^4 \alpha \geq -6$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



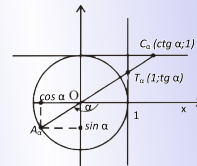
162

Заккрыть

7.3 Тождественные преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции

Найти значение выражений:

1. $\sin \left(2 \arccos \frac{3}{5} \right)$. *Ответ.*
2. $\cos \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{9} \right)$. *Ответ.*
3. $\sin \left(\operatorname{arctg} (-\sqrt{8}) \right)$. *Ответ.*
4. $\sin (3 \cdot \arcsin 1 + \arcsin 0, 8)$. *Ответ.*
5. $\sin (6 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \arccos 0, 6)$. *Ответ.*
6. $\operatorname{ctg} (4 \cdot \arccos 0 + 2 \cdot \operatorname{arctg} 2)$. *Ответ.*
7. $\cos \left(300 \cdot \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$. *Ответ.*
8. $\sin \left(200 \cdot \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$. *Ответ.*
9. $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3)$. *Ответ.*
10. $\operatorname{tg} \left(\arccos \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) + \frac{\pi}{2} \right)$. *Ответ.*
11. $\cos \left(\arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$; *Ответ.*
12. $\sin \left(\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$. *Ответ.*



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



163

Заккрыть

13. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{25\pi}{4}\right)\right)$. *Ответ.*

14. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right)$. *Ответ.*

15. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{5}\right) - \frac{5\pi}{2}\right)$. *Ответ.*

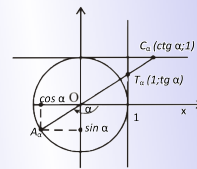
16. $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{3\pi}{2}\right)$. *Ответ.*

17. $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 3\pi\right)$. *Ответ.*

18. $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctg} 1 + \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$. *Ответ.*

19. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$. *Ответ.*

20. $\arcsin(-1) + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\arccos(-1) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$. *Ответ.*



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



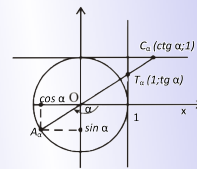
164

Заккрыть

7.4 Тригонометрические уравнения

Решите уравнение:

1. $5 \sin^2 x + 8 \cos x + 1 = |\cos x| + \cos^2 x$. *Ответ.*
2. $2 \cos x - 3 \sin x - |\sin x| = 0$. *Ответ.*
3. $3 \sin^2 2x - 2 - 0,5 |\sin 4x| = 0$. *Ответ.*
4. $\cos 2x + \cos 6x = |\cos 4x|$. *Ответ.*
5. $\cos 4x - \sin 5x = 2$. *Ответ.*
6. $3 \cos 4x - 5 \sin 3x = 8$. *Ответ.*
7. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \cos(x - \frac{\pi}{4})$. *Ответ.*
8. $\frac{13}{\cos(x + \frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2, 4)} = 5 \sin x + 12 \cos x$. *Ответ.*
9. $7 \cos 4x - 3 \sin 4x = \alpha$. *Ответ.*
10. $\sin^4 \frac{4x}{5} + \cos^4 \frac{4x}{5} = \alpha$. *Ответ.*
11. $\sin 2x + 3 \sin x = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. *Ответ.*
12. $\frac{\sin 4x \cos 2x}{\cos^2 x} = 6 \sin 2x \operatorname{tg}(\pi + x)$. *Ответ.*



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



165

Заккрыть

13. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$. *Ответ.*

14. $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = 2 \operatorname{ctg} x$. *Ответ.*

15. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$. *Ответ.*

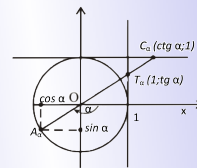
16. $\cos^6 x + \sin^6 x = 4 \sin^2 2x$. *Ответ.*

17. $6 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$. *Ответ.*

18. $\sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin x} = \cos x$. *Ответ.*

19. $\sqrt{2 \cos^2 x - \sin 2x + 3 \sin^2 x} = \sqrt{3} \cos x$. *Ответ.*

20. $\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} = 1$. *Ответ.*



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



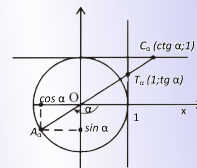
166

Закрыть

7.5 Тригонометрические неравенства

Решить неравенства:

1. $\sin \frac{4x}{3} \cos \frac{2\pi}{9} - \cos \frac{4x}{3} \sin \frac{2\pi}{9} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$. *Ответ.*
2. $\sin \frac{6x}{5} \cos \frac{12\pi}{7} + \cos \frac{6x}{5} \sin \frac{12\pi}{7} > -\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Ответ.*
3. $\sin(3x - \frac{6\pi}{5}) \cos(5x - \frac{7\pi}{5}) + \cos(\frac{6\pi}{5} - 3x) \sin(5x - \frac{7\pi}{5}) < \frac{1}{2}$. *Ответ.*
4. $\sin(2x - \frac{3\pi}{8}) \cos(\frac{5\pi}{8} - 7x) - \cos(\frac{3\pi}{8} - 2x) \sin(7x - \frac{5\pi}{8}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Ответ.*
5. $20 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x > -0,3125$. *Ответ.*
6. $20 \sin \frac{x}{8} \cos \frac{x}{8} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} \cos x \cos 2x \leq -\frac{5\sqrt{2}}{16}$. *Ответ.*
7. $\sin(5x - \frac{7\pi}{3}) \cos(\frac{7\pi}{3} - 5x) \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$. *Ответ.*
8. $\frac{1}{2}(\cos(4x - \frac{\pi}{4}) - \cos(4x + \frac{\pi}{4})) < \frac{\sqrt{2}}{4}$. *Ответ.*
9. $\sin(\frac{5x}{6} + \frac{4\pi}{3}) - \sin(\frac{4\pi}{3} - \frac{5x}{6}) > (-\frac{2}{\sqrt{2}})^{(-1)}$. *Ответ.*
10. $4 \sin^2 x - 3 < 0$. *Ответ.*
11. $25 \sin^2 x - 10 \sin x - 3 \geq 0$. *Ответ.*
12. $\sin x + |\sin x| > 2 \sin \frac{5\pi}{6}$. *Ответ.*
13. $\cos(\frac{13\pi}{6} - 9x) \cos(3x - \frac{11\pi}{6}) - \sin(9x - \frac{13\pi}{6}) \sin(\frac{11\pi}{6} - 3x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Ответ.*



кафедра

методики
преподавания
математики
и информатики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



167

Заккрыть

14. $\cos x \geq \cos^2 x$. *Ответ.*

15. $3 \cos^2 x + 10 \cos x + 3 \geq 0$. *Ответ.*

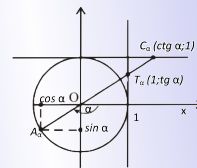
16. $\frac{2 \operatorname{tg}(3,5x + \frac{3\pi}{14})}{1 - \operatorname{tg}^2(3,5x + \frac{3\pi}{14})} > -\frac{1}{\sqrt{3}}$. *Ответ.*

17. $\operatorname{ctg}^2 x > \operatorname{ctg}^3 x$. *Ответ.*

18. $\frac{1 - \operatorname{ctg}^2(4x - \frac{3\pi}{8})}{2 \operatorname{ctg}(4x - \frac{3\pi}{8})} \leq -1$. *Ответ.*

19. $3 \operatorname{tg}^2 x - 3 < 0$. *Ответ.*

20. $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x - 6 > 0$. *Ответ.*



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



168

Закрыть

7.6 Системы тригонометрических уравнений

Решить системы уравнений:

1.
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x + \sin y = 1. \end{cases} \text{ Ответ.}$$

2.
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x - \cos y = -0,5. \end{cases} \text{ Ответ.}$$

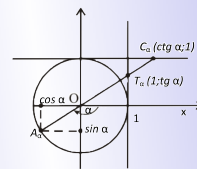
3.
$$\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}. \end{cases} \text{ Ответ.}$$

4.
$$\begin{cases} \sin(x + y) = 0,5, \\ \cos(x - y) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \text{ Ответ.}$$

5.
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{ctg} y = 3. \end{cases} \text{ Ответ.}$$

6.
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \text{ Ответ.}$$

7.
$$\begin{cases} x + y = \frac{7\pi}{3}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1,5. \end{cases} \text{ Ответ.}$$



кафедра

методики
преподавания
математики
и информатики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



169

Закрыть

$$8. \begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{2}, \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 1. \end{cases} \text{Ответ.}$$

$$9. \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x \cos y = 0, 5. \end{cases} \text{Ответ.}$$

$$10. \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = -\frac{1}{3}. \end{cases} \text{Ответ.}$$

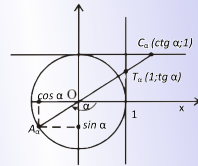
$$11. \begin{cases} x - y = 195^\circ, \\ \frac{\sin x}{\sin y} = -\frac{\sqrt{6}}{3}. \end{cases} \text{Ответ.}$$

$$12. \begin{cases} x - y = -30^\circ, \\ \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases} \text{Ответ.}$$

$$13. \begin{cases} \cos x + \sin y = \frac{1}{2}, \\ \cos x - \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases} \text{Ответ.}$$

$$14. \begin{cases} 2 \sin x + 5 \cos 2y = \frac{3}{2}, \\ 3 \sin x + 2 \cos 2y = \frac{5}{2}. \end{cases} \text{Ответ.}$$

$$15. \begin{cases} \sin x \sin y = 0, 25, \\ \cos x \cos y = 0, 75. \end{cases} \text{Ответ.}$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



170

Закрыть

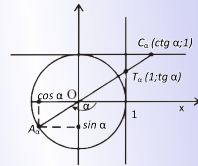
$$16. \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases} \text{Ответ.}$$

$$17. \begin{cases} \sqrt{2}y + \sqrt{12} \operatorname{ctg} x = 2, \\ 2\sqrt{2}y + \sqrt{27} \operatorname{ctg} x = 1. \end{cases} \text{Ответ.}$$

$$18. \begin{cases} 4y + \sqrt{3} \cos x = -0,5, \\ 28y + 4\sqrt{3} \cos x = 1. \end{cases} \text{Ответ.}$$

$$19. \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ 4 \sin y - 6\sqrt{2} \cos x = 5 + 4 \cos^2 y. \end{cases} \text{Ответ.}$$

$$20. \begin{cases} 4\sqrt{3} \cos x + 2 \sin y = 7, \\ 2\sqrt{3} \cos x + 6 \sin y = 3 + 12 \sin^2 x. \end{cases} \text{Ответ.}$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



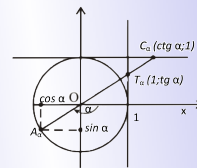
171

Закрыть

7.7 Преобразование графиков тригонометрических функций

Изобразить графики функций (вспомогательные построения должны быть показаны на рисунке):

1. $y = \sin x \cos 2x - \cos x \sin 2x$;
2. $y = -\cos(-x) - 2$;
3. $y = -\sin(x - \frac{\pi}{4})$;
4. $y = -\cos(x + 1,5) - 0,5$;
5. $y = 5 \sin(x - 1)$;
6. $y = 3 \cos(3x + \frac{\pi}{6}) + 1$;
7. $y = \sin(|x| + 2)$;
8. $y = |\cos |x| - 2| + 2$;
9. $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$;
10. $y = \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x) + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x)}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} + x) + \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - x)}$;
11. $y = 2 \operatorname{tg}(\frac{x}{2} - 1)$;



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



172

Закрыть

$$12. y = |2 \operatorname{tg} x - 4|;$$

$$13. y = 2 \operatorname{tg}(|x| - 1);$$

$$14. y = (\sqrt{\operatorname{tg} x})^2;$$

$$15. y = \operatorname{tg}(-2x) \operatorname{ctg} 2x;$$

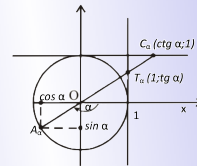
$$16. y = \operatorname{ctg}(x - 2) + 3;$$

$$17. y = 3 \operatorname{ctg}(|x| - 2);$$

$$18. y = |2 \operatorname{ctg}(|x| + 4)|;$$

$$19. y = (\sqrt{\operatorname{ctg} x})^2;$$

$$20. y = \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 2x.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



173

Закрыть

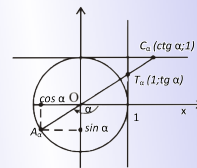
7.8 Уравнения и неравенства с параметрами

При каких значениях параметра a имеют решения уравнения:

1. $5 \sin 2x - 6 \cos 2x = a$;
2. $3 \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - a \cos(\frac{\pi}{6} + 2x) = 4$;

Решить уравнения:

3. $\sin^4 \frac{4x}{5} + \cos^4 \frac{4x}{5} = a$;
4. $\sin^4 x + \cos^4 x - a \sin(4x + \pi) = 0$;
5. $a - \cos(\pi - x) + \sin \frac{\pi+x}{2} = 0$;
6. $\sin^4 2x + \cos^4 2x + \sin 4x = a$;
7. $a \sin x + b \cos x = a \sin 2x - b \cos 2x$;
8. $\sin^2 \frac{x}{2} + a \sin^2 x = \frac{1}{2}$;
9. $(3 - a) \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - (a + 3) = 0$;
10. $4 \cos^2 x + 2 \cos x + a - 1 = 0$;
11. $\cos 2x - \cos 4x = a \sin x$;
12. $12 \sin x + 4\sqrt{3} \cos(\pi + x) = a\sqrt{3}$;



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



174

Закрывать

Решить неравенства:

13. $\cos x \leq a;$

14. $\operatorname{tg} x \geq a;$

15. $\operatorname{tg} x < a;$

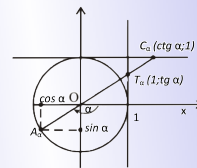
16. $\cos(ax + b) < c, a \neq 0;$

17. $\operatorname{ctg}(ax - b) \geq c, a \neq 0;$

18. $\cos x > a;$

19. $(2a - 1) \sin x = 5a + 2;$

20. $\operatorname{ctg} x > a.$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



175

Заккрыть

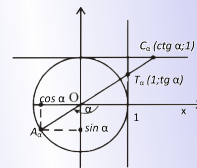
Справочные материалы

$\sin \alpha$ — ордината точки A_α единичной окружности.

$\cos \alpha$ — абсцисса точки A_α единичной окружности.

$\operatorname{tg} \alpha$ — ордината точки T_α линии тангенсов.

$\operatorname{ctg} \alpha$ — абсцисса точки C_α линии котангенсов.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

Тригонометрические тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Правила применения формул приведения

1) **Правило знака:** в правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии, что угол α принадлежит I четверти.

2) **Правило названий:** если в левой части формулы угол равен $(\frac{\pi}{2} \pm \alpha)$ или $(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha)$, то синус меняется на косинус, тангенс — на котангенс; если угол равен $(\pi \pm \alpha)$ или $(2\pi - \alpha)$, то название выражения сохраняется.

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



176

Заккрыть

Формулы сложения

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

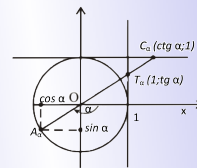
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



177

Закрывать

Формулы половинного угла

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2};$$

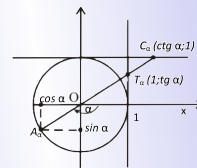
$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha};$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



178

Закрыть

Формулы двойного и тройного углов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

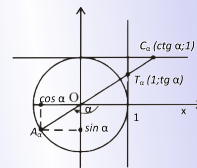
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



179

Заккрыть

Формулы преобразования суммы(разности) в произведение

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

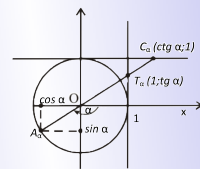
$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



180

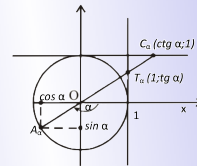
Закрывать

Формулы преобразования произведения в сумму (разность)

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

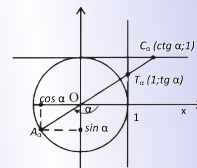


181

Закреть

Графики тригонометрических функций

Синус и косинус



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

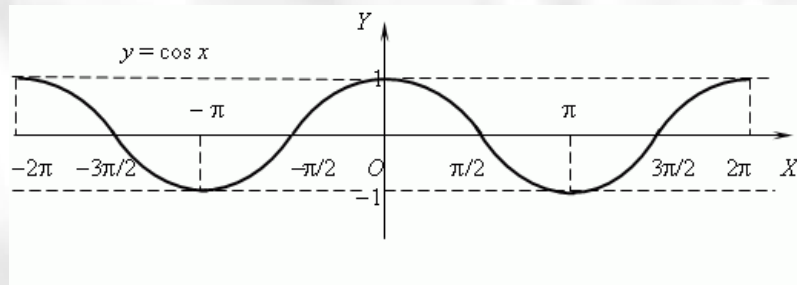
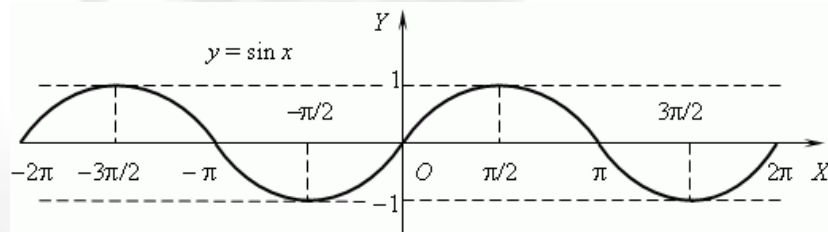
Приложение

Назад

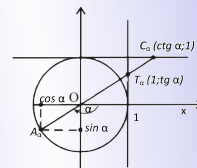


182

Закреть



Арксинус и арккосинус



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

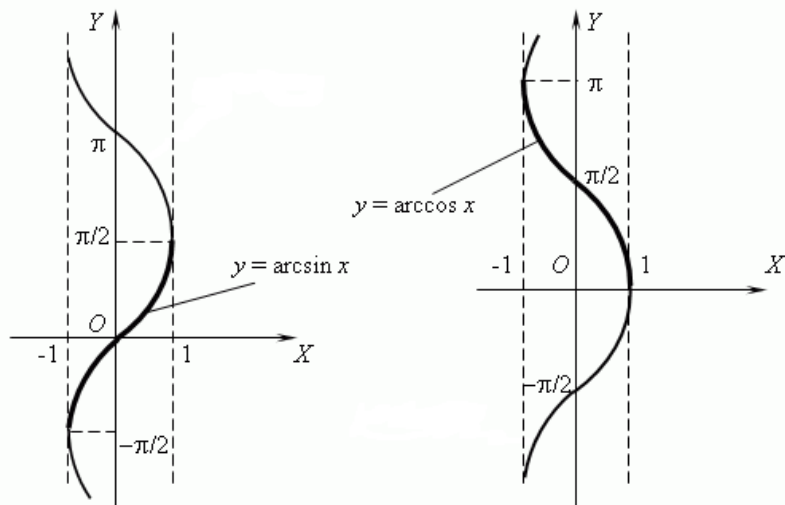
Приложение

Назад

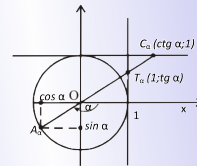


183

Закрывать

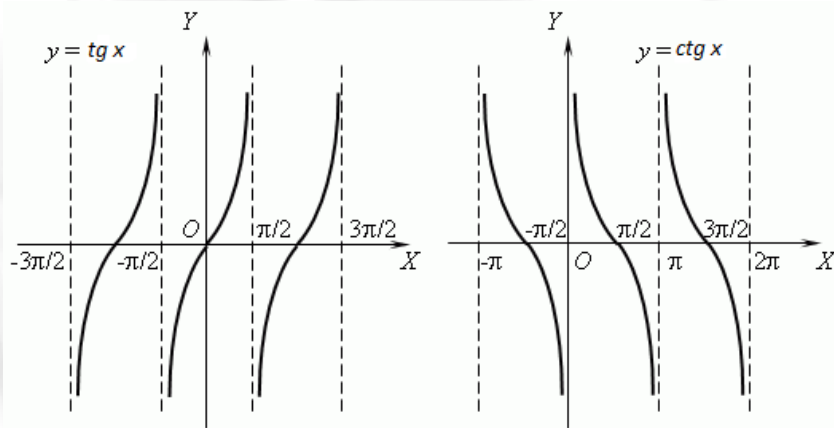


Тангенс и котангенс



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

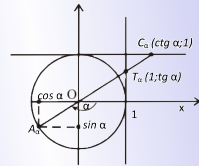
Назад



184

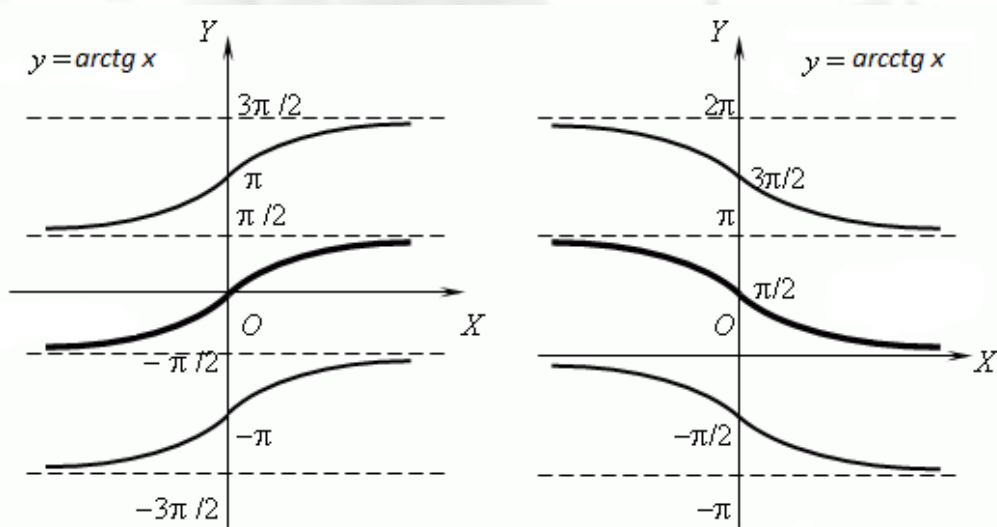
Закреть

Арктангенс и арккотангенс



кафедра

методики
преподавания
математики
и информатики



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



185

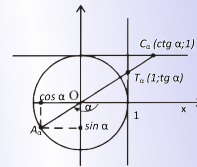
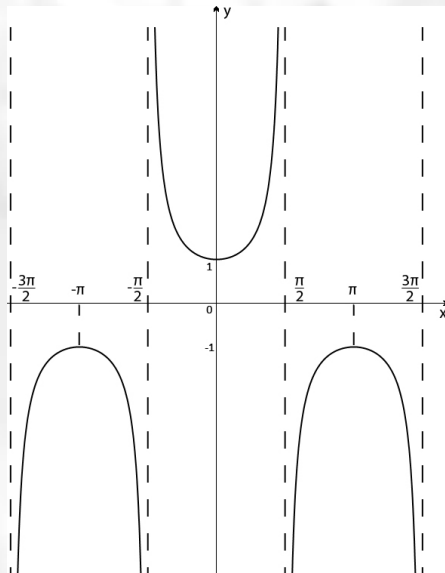
Заккрыть

Функции $y=\sec x$, $y=\operatorname{cosec} x$, $y=\operatorname{arcsec} x$, $y=\operatorname{arccosec} x$

Секанс

Секанс — тригонометрическая функция, задаваемая формулой $y = \sec x$, где $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.

Областью определения данной функции являются все действительные числа, за исключением $x = \frac{\pi}{2}(2n \pm 1)$, где $n \in \mathbb{Z}$. Она является неограниченной функцией ($1 \leq |\sec x| < \infty$), четной, периодической с периодом $T = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. График функции называется *секансоидой* и выглядит следующим образом:



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

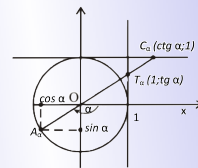
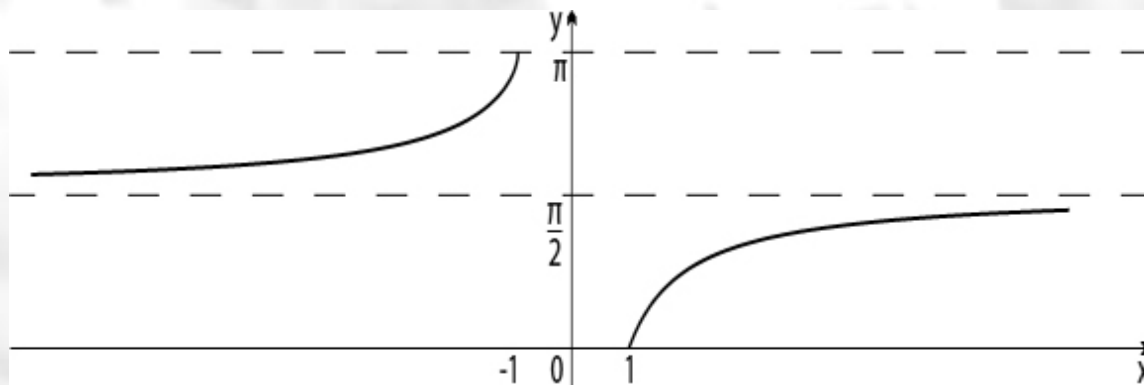


186

Закрыть

Арксеканс

Функция, обратная секансу, называется арксекансом и задается формулой $y = \operatorname{arcsec} x$. Областью ее определения являются промежутки $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$, а областью значений – $[0; \pi]$. Она не является ни четной, ни нечетной, ограниченной. График её состоит из двух ветвей:



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



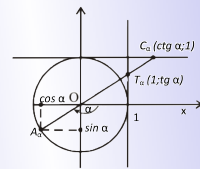
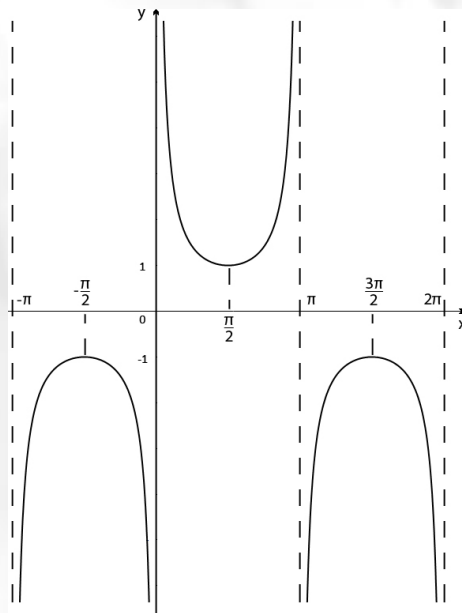
187

Заккрыть

Косеканс

Косеканс — тригонометрическая функция, задаваемая формулой $y = \operatorname{cosec} x$, где $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

Областью определения данной функции являются все действительные числа, за исключением $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Она является неограниченной функцией ($1 \leq |\operatorname{cosec} x| < \infty$), нечетной, периодической с периодом $T = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. График функции называется *косекансоидой* и выглядит следующим образом:



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

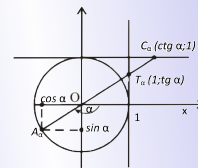
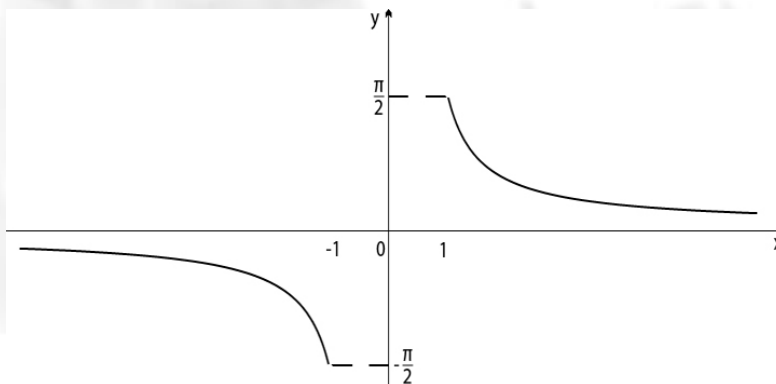


188

Заккрыть

Арккосеканс

Функция, обратная косекансу, называется арккосекансом и задается формулой $y = \operatorname{arccosec} x$. Областью ее определения являются промежутки $(-\infty; -1]$ и $[1; \infty)$, а областью значений – $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Она является нечетной, ограниченной. График её состоит из двух ветвей (дуг):



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



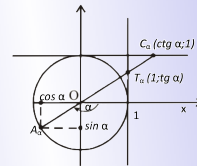
189

Заккрыть

Вопросы к зачёту

I. Теоретическая часть

1. Основные тригонометрические тождества.
2. Формулы приведения и правила их применения.
3. Формулы сложения, двойного и тройного угла.
4. Формулы половинного угла.
5. Формулы преобразования суммы(разности) в произведение.
6. Формулы преобразования произведения в сумму(разность).
7. Функции $y = \sin x$, $y = \arcsin x$ и их свойства.
8. Функции $y = \cos x$, $y = \arccos x$ и их свойства.
9. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и их свойства.
10. Функции $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ и их свойства.
11. Функции $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$ и их свойства.
12. Основные приемы преобразования тригонометрических выражений.
13. Тождества, способы и методы доказательства тождеств.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

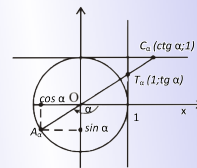
Назад



190

Закреть

14. Решение простейших уравнений.
15. Решение однородных уравнений и сводящихся к ним.
16. Решение уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$.
17. Способы решения систем тригонометрических уравнений.
18. Методы доказательства тригонометрических неравенств.
19. Алгоритм решения неравенства $\sin x < a, |a| \leq 1$.
20. Алгоритм решения неравенства $\cos x < a, |a| \leq 1$.
21. Алгоритм решения неравенства $\operatorname{tg} x > a$.
22. Алгоритм решения неравенства $\operatorname{ctg} x < a$.
23. Вычисление значений выражений, содержащих $\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$. Тождества для $\arcsin(-x), \arccos(-x), \operatorname{arctg}(-x), \operatorname{arcctg}(-x)$.
24. Решение уравнений и неравенств с параметрами.
25. Решение уравнений и неравенств, содержащих $\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



191

Заккрыть

II. Практическая часть

Решить по одному(предложенному преподавателем) заданию из следующих пунктов школьного учебника по алгебре (Алгебра: для 11-го класса с 12-летним сроком обучения / Е.П. Кузнецова (и др.); под ред. Л.Б. Шнепермана). – Минск: Народная асвета, 2007. – 383с.:

п. 2.10. Формулы приведения.

п. 3.10.Решение уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$.

п. 3.11. Решение уравнений вида $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

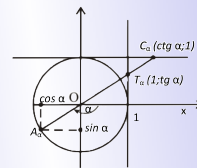
п. 3.15 Решение неравенств вида $\sin x < a$, $\sin x > a$, $\sin x \leq a$, $\sin x \geq a$.

п. 3.16 Решение неравенств вида $\cos x < a$, $\cos x > a$, $\cos x \leq a$, $\cos x \geq a$.

п. 3.17 Решение неравенств вида $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x \leq a$, $\operatorname{tg} x \geq a$, $\operatorname{ctg} x < a$, $\operatorname{ctg} x > a$, $\operatorname{ctg} x \leq a$, $\operatorname{ctg} x \geq a$.

III. Защита контрольной работы

Решить одно(по указанию преподавателя) задание из контрольной работы.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

◀

▶

◀◀

▶▶

192

Заккрыть

Тесты

1. Тождественные преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции 1.

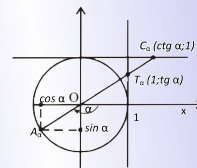
2. Тождественные преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции 2.

3. Решение тригонометрических уравнений 1.

4. Решение тригонометрических уравнений 2.

5. Способы решения тригонометрических неравенств и их систем 1.

6. Способы решения тригонометрических неравенств и их систем 2.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



193

Заккрыть

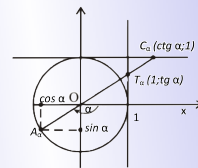
Ответы к самостоятельной работе по теме

Тригонометрические и обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.

1. Отрицательный.
2. Ни чётная, ни нечётная.
3. $T = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
4. $\sin \frac{73\pi}{2}, \cos \frac{33\pi}{2}, \cos 29\pi$.
5. $\operatorname{ctg} 3 < \operatorname{ctg}(-5, 5)$.

Решение.

Имеем $\operatorname{ctg}(-5, 5) = \operatorname{ctg}(-5, 5 + 2\pi) > 0$, так как $0 < -5, 5 + 2\pi < \frac{\pi}{2}$.
Поскольку $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, то $\operatorname{ctg} 3 < 0$. Значит, $\operatorname{ctg} 3 < \operatorname{ctg}(-5, 5)$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



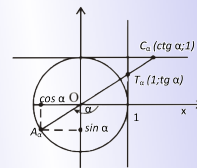
194

Заккрыть

Ответы к заданиям контрольной работы

6.1 Тожественные преобразования и вычисления тригонометрических выражений

1. $-3\sqrt{3}$.
2. 1.
3. $\operatorname{tg} 5^\circ$.
4. $-0,125$.
5. 2.
6. 4.
7. $-\frac{1}{7}$.
8. 2.
9. $-\frac{5}{6}$.
10. 2.
11. 18.
12. $-0,125$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



195

Заккрыть

$$13. \frac{5}{6}.$$

$$14. 4.$$

$$15. 0, 1.$$

$$16. \frac{5}{8}.$$

$$17. -2.$$

$$18. 0, 25.$$

$$19. -4\sqrt{2}.$$

$$20. \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

6.3 Тожественные преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции

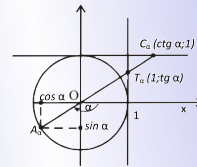
$$1. \frac{24}{25}.$$

$$2. \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$3. \frac{1}{3}.$$

$$4. -\frac{3}{5}.$$

$$5. \frac{4}{5}.$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



196

Заккрыть

6. $-\frac{3}{4}$.

7. -1 .

8. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. 1 .

10. 2 .

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. $\frac{1}{2}$.

13. $-\frac{\pi}{4}$.

14. $\frac{2\pi}{3}$.

15. $\frac{5}{13}$.

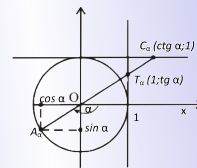
16. $\frac{\sqrt{17}}{7}$.

17. $-4\sqrt{5}$.

18. $\frac{3\pi}{2}$.

19. $\frac{3\pi}{4}$.

20. $-\frac{7\pi}{6}$.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

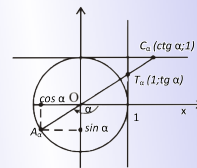


197

Заккрыть

6.4 Тригонометрические уравнения

1. $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z;$
2. $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z, \arctg 2 + 2\pi n, n \in Z;$
3. $\pm \arctg 2 + \pi k, k \in Z;$
4. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z, \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$
5. $1, 5\pi + 2\pi k, k \in Z;$
6. $0, 5\pi + 2\pi k, k \in Z;$
7. $0, 25\pi + 2\pi k, k \in Z;$
8. $\pm 0, 5\pi - \arctg 2, 4 + 2\pi k, k \in Z;$
9. $-\sqrt{58} \leq \alpha \leq \sqrt{58};$
10. $\alpha \in (-\infty; -\sqrt{11}] \cup [\sqrt{11}; +\infty);$
11. $\frac{2\pi k}{3}, k \in Z;$
12. $\pi k, k \in Z; \frac{\pi}{12}(-1)^n + \frac{\pi n}{2}, n \in Z;$
13. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z; \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}, m \in Z;$
14. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z;$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



198

Заккрыть

$$15. 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$16. \pm \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{19}\sqrt{19} + \frac{\pi k}{2}\right), k \in \mathbb{Z};$$

$$17. \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$18. 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$19. \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\arctg \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$20. \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

6.5 Тригонометрические неравенства

$$1. \left[\frac{57\pi}{144} + \frac{3\pi k}{2}; -\frac{\pi}{18} + \frac{3\pi k}{2}\right], k \in \mathbb{Z};$$

$$2. \left(-\frac{215\pi}{126} + \frac{5\pi k}{3}; -\frac{20\pi}{63} + \frac{5\pi k}{3}\right), k \in \mathbb{Z};$$

$$3. \left(-\frac{17\pi}{240} + \frac{\pi k}{4}; \frac{23\pi}{240} + \frac{\pi k}{4}\right), k \in \mathbb{Z};$$

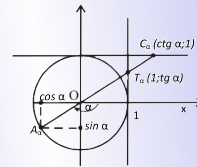
$$4. \left[-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}; \frac{2\pi k}{5}\right], k \in \mathbb{Z};$$

$$5. \left(-\frac{1}{32} \arcsin \frac{1}{16} + \frac{\pi n}{16}; \frac{1}{32} \arcsin \frac{1}{16} + \frac{\pi n}{32}\right), n \in \mathbb{Z};$$

$$6. \left[\frac{-3\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}\right], k \in \mathbb{Z};$$

$$7. \left[-\frac{\pi}{15} + \frac{\pi k}{5}; \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{2}\right], k \in \mathbb{Z};$$

$$8. \left(-\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbb{Z};$$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

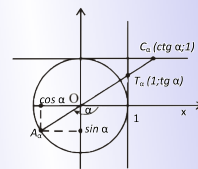
Назад



199

Закреть

9. $(-\frac{3\pi}{2} + \frac{12\pi n}{5}; \frac{6\pi}{20} + \frac{12\pi n}{5}), n \in Z;$
10. $(-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n), n \in Z;$
11. $(-\pi + \arcsin \frac{1}{5} + 2\pi k; -\arcsin \frac{1}{5} + 2\pi k) \cup (\arcsin \frac{3}{5} + 2\pi n; \pi - \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi n), k, n \in Z;$
12. $(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n), n \in Z;$
13. $(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}; \frac{13\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}), n \in Z;$
14. $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n], n \in Z;$
15. $[-\pi + \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n; \pi - \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n], n \in Z;$
16. $(-\frac{25\pi}{294} + \frac{\pi n}{7}; \frac{\pi}{98} + \frac{\pi n}{7}), n \in Z;$
17. $(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n) \cup (\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n), n \in Z;$
18. $[\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{8}; \frac{7\pi}{32} + \frac{\pi n}{8}), n \in Z;$
19. $(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n), n \in Z;$
20. $(\pi - \operatorname{arctg} 3 + \pi k; \pi + \pi k) \cup (\pi n; \operatorname{arctg} 2 + \pi n), k, n \in Z.$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

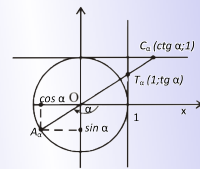


200

Заккрыть

6.6 Системы тригонометрических уравнений

1. $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} - 2\pi k\right), k \in Z;$
2. $\left(\frac{\pi}{6} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k\right), k \in Z;$
3. $\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} - \pi k\right), k \in Z;$
4. $\left(\frac{7\pi}{24} + (k+n)\pi; \frac{13\pi}{24} + (k-n)\pi\right), \left(\frac{13\pi}{24} + (k+n)\pi; \frac{7\pi}{24} + (k-n)\pi\right),$
 $\left(-\frac{\pi}{24} + (k+n)\pi; \frac{5\pi}{24} + (k-n)\pi\right), \left(\frac{5\pi}{24} + (k+n)\pi; -\frac{\pi}{24} + (k-n)\pi\right),$
 $k \in Z, n \in Z;$
5. $\left(\frac{2\pi}{3} + \pi(k+n); -\frac{\pi}{3} - \pi(k-n)\right), \left(\frac{\pi}{3} + \pi(k+n); -\frac{2\pi}{3} - \pi(k-n)\right),$
 $k \in Z, n \in Z;$
6. $\left(\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2}(2n+k); \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}(2n-k)\right), \left(\frac{11\pi}{24} + \frac{\pi}{2}(2n+k); \frac{5\pi}{24} - \frac{\pi}{2}(2n-k)\right),$
 $k \in Z, n \in Z;$
7. $\left(\frac{5\pi}{3} + \pi k; \frac{2\pi}{3} - \pi k\right), k \in Z;$
8. $\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; -\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi k}{2}\right), k \in Z;$
9. $\left(\pi k; -\frac{\pi}{3} + \pi k\right), \left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \pi n\right), k \in Z, n \in Z;$
10. $\left(\frac{2\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right), k \in Z;$
11. $\left(\frac{3\pi}{4} + \pi k; -\frac{\pi}{3} + \pi k\right), k \in Z;$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

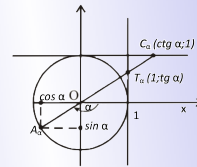
Назад



201

Закреть

12. $(-\frac{\pi}{3} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k), k \in Z;$
13. $(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pi n), k \in Z, n \in Z;$
14. $((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k; \pm\frac{\pi}{6} + \pi n), k \in Z, n \in Z;$
15. $(-\frac{\pi}{6} + (k+n)\pi; -\frac{\pi}{6} + (k-n)\pi), (\frac{\pi}{6} + (k+n)\pi; \frac{\pi}{6} + (k-n)\pi),$
 $k \in Z, n \in Z;$
16. $(-\frac{\pi}{3} + (k+n)\pi; -\frac{\pi}{3} + (k-n)\pi), (\frac{\pi}{3} + (k+n)\pi; \frac{\pi}{3} + (k-n)\pi),$
 $k \in Z, n \in Z;$
17. $(\frac{\pi}{3} + \pi k; -2\sqrt{2}), k \in Z;$
18. $(\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{1}{4}), k \in Z;$
19. $(\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n), k \in Z, n \in Z;$
20. $(\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k; (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n), k \in Z, n \in Z.$



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад

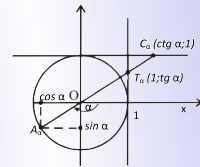


202

Заккрыть

Литература

1. Азаров, А. И. Тригонометрия / А. И. Азаров, В. С. Федосенко [и др.]. – Минск, ТетраСистемс, 2003. – 304 с.
2. Алгебра : учеб. пособие для 11-го кл. общеобразоват. учреждений с 12-летним сроком обучения / Е. П. Кузнецова [и др.] ; под ред. Л. Б. Шнепермана. – Минск : Нар. асвета, 2007. – 383 с.
3. Бородуля, И. Т. Тригонометрические уравнения и неравенства : Книга для учителя / И. Т. Бородуля. – М.: Просвещение, 1989. – 239 с.
4. Веремениук, В. В. Практикум по математике : подготовка к тестированию и экзамену / В. В. Веремениук, В. В. Конушко. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – 176 с.
5. Вересова, Е. Е. Практикум по решению математических задач : учеб. пособие для пед. ин-тов / Е. Е. Вересова, Н. С. Денисова, Т. Н. Полякова. – М.: Просвещение, 1979. – 240 с.
6. Водинчар, М. И. Метод концентрических окружностей для систем тригонометрических неравенств / М. И. Водинчар, Г. А. Лайкова, О. В. Гусева // Математика в школе. – 1999. – № 4. – С. 73-77.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

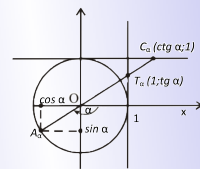
Назад



203

Закреть

7. Дороднов, А. М. Графики функций / А. М. Дороднов, И. Н. Острцов [и др.]. – М.: Высшая школа, 1972. – 103 с.
8. Дуванова, В. С. Задачник-практикум по тригонометрии : учеб. пособие / В. С. Дуванова, Н. П. Семенчук. – Брест : БОИПК, 1997. – 196 с.
9. Крамор, В. С. Тригонометрические функции : система уравнений для самостоятельного изучения : пособие для учащихся / В. С. Крамор, П. А. Михайлов. – М.: Просвещение, 1983, - 159 с.
10. Литвиненко, В. Н. Практикум по элементарной математике : Алгебра. Тригонометрия : учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – М. : Просвещение, 1991. – 352 с.
11. Панчишкин, А. А. Тригонометрические функции в задачах / А. А. Панчишкин, Е. Т. Шавгулидзе. – М.: Наука, 1986. – 160 с.
12. Пархимович, И. В. Математика для поступающих / И. В. Пархимович. – Минск : Вышэйшая школа, 1998. – 463 с.
13. Пивоварук, Т. В. Лекционно-семинарская форма обучения тригонометрии : учеб.-метод. пособие / Т. В. Пивоварук. – Брест : БрГУ, 2009. – 55 с.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

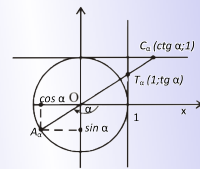
Назад



204

Заккрыть

14. Рогановский, Н. М. Элементарная математика : В 2-х книгах / Н. М. Рогановский. – Минск : Дизайн ПРО, 2000. – 580 с.
15. Рязановский, А. Р. Алгебра и начала анализа : 500 способов и методов решения задач по математике для школьников и поступающих в ВУЗы / А. Р. Рязановский. – М.: Дрофа, 2001. - 480 с.



кафедра

*методики
преподавания
математики
и информатики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



205

Заккрыть